NÚMEROS, POLINOMIOS Y CUESTIONES DE ÁLGEBRA LINEAL

José-Miguel Pacheco Castelao

0.- INTRODUCCIÓN

Las tres preguntas básicas de toda indagación didáctica son: ¿qué?, ¿cómo? y ¿cuándo?. A veces podemos encontrarlas formuladas con otras palabras, pero ello no afectará a los resultados que deseamos obtener.

¿Qué?. En lo que se refiere a números pretendemos: a) Reconocer la necesidad de la existencia de diversos tipos de entidades numéricas; b) adquirir soltura en los cálculos con ellas. Para el apartado de polinomios el problema se reduce a: Operar con habilidad, reconocer la íntima relación de estos objetos con los diversos campos numéricos y habituarse a las notaciones usuales. El Algebra Lineal debe presentarse como un cuerpo de doctrina coherente, pues viene a representar la primera oportunidad de hacerlo ante los alumnos. La selección del material para este caso es clásica.

¿Cómo?. Números: Insistir en los aspectos operativos y fundamentar las sucesivas extensiones en intuiciones geométricas y/o provistas por los mecanismos del cálculo.

Polinomios: Poner énfasis en las relaciones con los coeficientes y la resolución de ecuaciones. Algebra Lineal: Con el máximo rigor expositivo, sin prescindir de la intuición geométrica.

¿Cuándo?. Las extensiones de la idea de número deben de explicarse de modo cíclico. Así pues, una vez introducidos los números racionales debe volverse sobre ellos al estudiar los polinomios, las funciones continuas, etc. En cada extensión cíclica se añadirá algo de rigor conceptual. Por tanto, los números se extenderán a lo largo de 1° y 2°, excepción hecha de los complejos, que deben reservarse para 3°. Los polinomios serán materia de 1°, con un pequeño repaso obligado en 3° al utilizar la descomposición en fracciones simples. El Algebra

1.- LA EVOLUCIÓN DE LA IDEA DE NÚMERO EN LA ENSEÑANZA MEDIA

1.1. GENERALIDADES

En los cursos de B.U.P. deben de conocer los alumnos el manejo de los números enteros y racionales. Desgraciadamente la práctica es muy otra, y por ello han de destinarse algunas sesiones de clase al comenzar el 1° para repasar e incluso introducir estas nociones.

El origen del fracaso se halla básicamente en el exceso de formalización que padece la enseñanza primaria, donde se abandona el cálculo, perjudicándose así la habilidad de operar.

Por tanto, en la primera etapa se llevarán a cabo las siguientes actividades:

a) Repaso, calculando, de las operaciones artiméticas en Q .

b) Análisis somero de la ordenación en Q . Reconocer la densidad del orden.

c) Expresión decimal de los números racionales. Periodicidad. Transformación de unas expresiones en otras y orden lexicográfico.

d) Noción de número aproximado y de error.

1.2. EXISTEN "NÚMEROS" QUE NO SON ELEMENTOS DE Q

Las ideas de c) y d) del apartado 1.1 nos servirán para ampliar el campo numérico de los racionales.

i) El teorema sobre la periodicidad de la expresión decimal indica que las/ expresiones no periódicas representan otro tipo de objetos.

ii) Un repaso del Algoritmo de Euclides nos permite obtener lo que sigue:

1) $b = aq_1 + r_1$

2) $a = r_1 q_2 + r_2$

3) $r_1 = r_2 q_3 + r_3$

$\vdots$

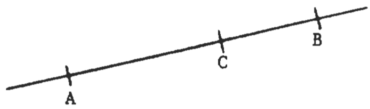
n+2) $r_n = r_{n-1} q_n$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\frac{aq_1 + r_1}{a}} \overset{1)}{=} \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{a}} = \overset{2)}{=} \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \dots = \overset{n+2)}{=} \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ddots \frac{1}{q_n}}}$$

Algoritmo de Euclides y Desarrollo de $\frac{a}{b}$ en fracción continua

construímos, o más bien pensamos una fracción continua ilimitada, tendr
visión de números no racionales. Parece además, razonable, que cortandc
ción por cada "piso" obtendremos aproximaciones del número dado. Ello e
y puede verse en cualquier texto clásico.

iii) Un ejemplo geométrico con consecuencias algebraicas: La secci



Si $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = g$, diremos que C divide a AB de modo áureo. Se
g es un "número" no racional, y lo calcularemos. Supongamos $\overline{AB} = g$ y
Entonces $CB = \frac{1}{g}$, luego $g = 1 + \frac{1}{g}$

Así pues

$$g = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{g}} = \dots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

que, según lo anterior, <u>no es racional</u>. Su valor es:

a) Calculando por "pisos": $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$ (= 1'618 ... para

b) De $g = 1 + \frac{1}{g}$ tendremos $g^2 - g - 1 = 0$ luego $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618$

Esta segunda versión nos dará una idea importante: Las fracciones
periódicas originan ecuaciones de 2° grado. Luego las soluciones de ecu
de 2° grado con coeficientes racionales pueden no ser racionales.

1.3. CÁLCULO PRÁCTICO CON NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Lo más necesario de las ideas que se exponen a continuación es lo
te: "Decidir que el manejo de los números racionales e irracionales pue
se bien con expresiones cerradas, simbólicas, v.g. $\frac{3}{8}$, $\sqrt{2}$, π, ... o
expresiones decimales, y estudiar cuándo será más conveniente usar unas
Veremos también la precisión de utilizar números aproximados y las cons
nes gráficas pertinentes.

Las nociones de aproximación por exceso y por defecto son inmediat rán aproximaciones por parejas. Aquí el algoritmo de las fracciones continuas es de suma utilidad por las especiales propiedades de las sucesivas reducidas.

Al calcular con números aproximados se hará notar siempre que los números no racionales se representan siempre por sus aproximaciones racionales.

La utilización de expresiones cerradas en los cálculos presenta ventajas esenciales de tipo algebraico (p.ej., simplificaciones en los cálculos) que desaparecen al sustituirlas por las aproximaciones racionales. La proliferación de las calculadoras de mano ha contribuído negativamente al desarrollo de la habilidad de cálculo abstracto. Esto nos sirve para justificar el clásico capítulo sobre el manejo de expresiones irracionales.

1.4. GEOMETRÍA DE LOS NÚMEROS

Los aspectos geométricos que pueden ser relacionados con lo dicho anteriorente son los siguientes:

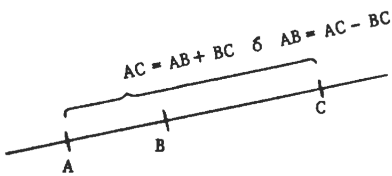
1.- Construcción geométrica de los resultados de las operaciones algebraias en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

2.- Construcción de números irracionales.

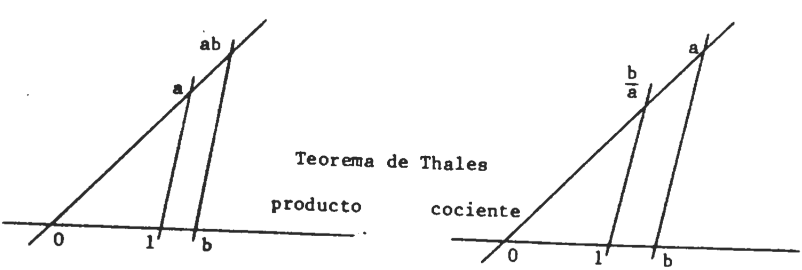
Para 1 nos bastará el teorema de Thales y el manejo de regla y compás.

Suma: traslación de segmentos.

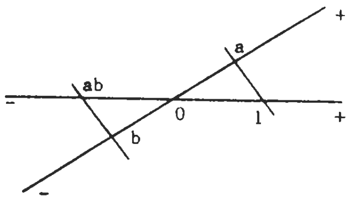
Resta: Idem.

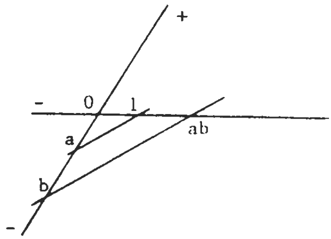


Producto y cociente

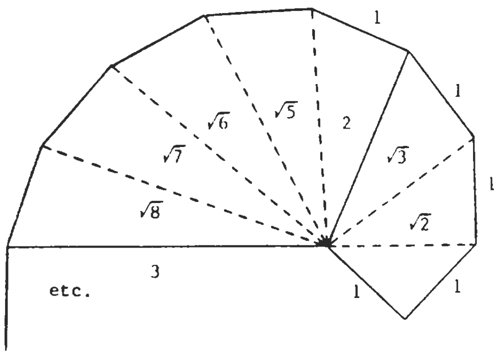


les. Un aspecto interesante es la regla de los signos.

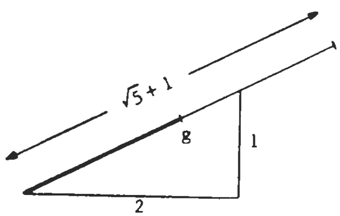




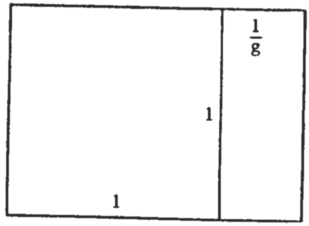
Para el apartado 2, precisamos algunas construcciones, únicamente lo
cionales $\sqrt{n}$ pueden construirse por el teorema de Pitágoras obteniendo u
lla figura en espiral. En trazo continuo van las $\sqrt{n}$ que son racionales:



La construcción del número áureo g se reduce, como sabemos a la de
pues $g = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$:

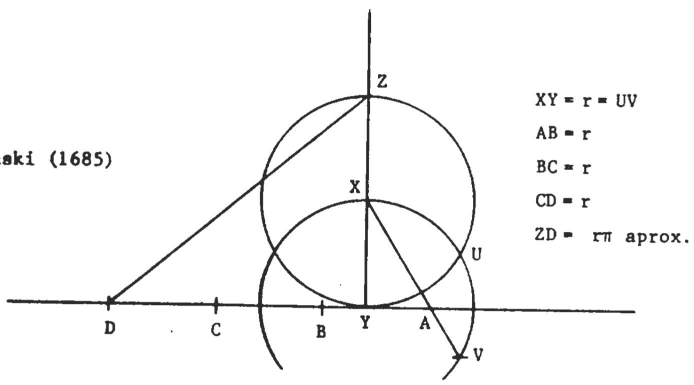


(En este dibujo las dimensiones lineales son dobladas).



También es instructivo efectuar alguna construcción aproximada del número π (es sabido que éste no puede ser construido con regla y compás):

Kochanski (1685)



y tratar de obtener, por ejemplo mediante el método de Gregory (polígonos inscritos y circunscritos) algunos valores aproximados, etc.

Ver p. ej. Wheeler "ℝ is for Real" (open Univ. Press, 1974).

2.- CÁLCULOS DE POLINOMIOS

El aspecto formal de "qué es un polinomio" debe darse por supuesto y operar/ siempre con la expresión $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Este es un buen punto para introducir la notación abreviada del sumatorio. - Se repasará todo lo necesario sobre coeficientes, grado, reglas de la aritmética, etc. No está de más insistir sobre el principio de igualdad de polinomios y aclarar que la naturaleza de los coeficientes es lo que da carácter a los polinomios.

Superada esta fase inicial, introduciremos la [illegible] linomio en un punto, $f(a)$, y la utilizaremos para los clásicos teoremas d resto, del factor y regla de Ruffini. Habremos de ofrecer una demostración ta última con el máximo rigor. Aplicación al cálculo de irracionales: Con l terior se habrá introducido ya el concepto de raíz, así que éste es el mome de hacer el estudio comparativo entre la divisibilidad en $\mathbb{Z}$ y en el anill los polinomios. En este punto se volverá sobre el estudio de los coeficient del polinomio y su influencia en la naturaleza de las raíces.

2.1. (= 1.5). INVESTIGACIÓN DE LAS RAÍCES DE LOS POLINOMIOS

Este capítulo debe tratarse de la siguiente forma:

- Definición de raíz.
- Polinomios con coeficientes enteros. Raíces enteras y racionales de polinomios.
- Las raíces de un polinomio pueden no pertenecer al mismo tipo numéri que los coeficientes.

Naturalmente, el tercer punto es el más interesante. Lo comentaremos a más extensamente.

Aplicando la regla de Ruffini sabemos que las raíces enteras de un pol mio con coeficientes enteros dividen al término independiente. Supongamos u tales polinomios

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

y sea $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible. Sustituyendo x por $\frac{a}{b}$ tendremos:

$$a_0 + \frac{a}{b} a_1 + \ldots + \frac{a}{b} a_n = 0 \quad \text{si es raíz}$$

Por tanto:

$$0 = a_0 b_n + ab^{n-1} a_1 + \ldots + a^n a_n \Rightarrow a_n a^n = -b(a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} b + \ldots + a_0 b^n$$

de donde: el entero b es divisor de ambos miembros.

Dado que $\frac{a}{b}$ es irreducible y $b | a_n a^n$, deducimos que $b | a_n$.

Si se reordena la ecuación en a, obtendremos que $a | a_0$. Así que: "L fracción irreducible $\frac{a}{b}$ es raíz del polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ si $a | a$ $b | a_n$".

Así pues, si $a_n = 1$, toda [illegible] forma que llegamos al siguiente resultado que nos conecta la teoría de los números reales con los polinomios:

"Si el polinomio con coeficientes enteros $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ no tiene raíces enteras, sus raíces no son racionales".

Así las cosas, obtenemos un gran conjunto de expresiones irracionales: $\sqrt{2}$ es raíz de $x^2 - 2$. Las raíces de este polinomio no pueden ser más que enteras o no racionales, así que, probando ± 1 y ± 2 vemos que no son raíces, luego $\sqrt{2}$ es una expresión no racional. La generalización para otros n es inmediata.

Podemos probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ desarrollándola en fracción continua:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{, luego} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

De esta manera queda puesto de relieve el hecho de que los coeficientes de un polinomio no determinan la naturaleza de las raíces. Dado que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, podremos concluir este apartado estableciendo que $\mathbb{Q}$ no es un cuerpo algebraicamente cerrado. (A la hora de explicar esto se dirá de otro modo, claro está). Este es el momento de insistir en la clasificación de los polinomios irreducibles.

2.2. (= 1.6). NÚMEROS COMPLEJOS

Así como los números reales surgen de entre los racionales a partir de problemas de aproximación, esto es, problemas analíticos, y no vemos los aspectos algebraicos de su introducción hasta hacer el estudio de los polinomios; los números complejos pueden hacerse aparecer por esta vía sin más. Desde luego surgen de modo natural en las ecuaciones de 2° grado, y ésta será la modalidad más simple para explicarlos. Lo importante en esto: (Esbozo del teorema fundamental del álgebra). Para polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, los hay irreducibles de muchos grados (ver el teorema de 2.1). Si los coeficientes son reales, los polinomios irreducibles son de primer grado, o de segundo grado reducibles al tipo $x^2 - a$ $(a < 0)$. Pues bien, si tomamos coeficientes en $\mathbb{C}$, los polinomios de este último tipo se resuelven en producto de otros de primer grado. Luego $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

Los aspectos geométricos de los complejos pueden reservarse para un curso de geometría y trigonometría planas.

El álgebra lineal de C.O.U. es la primera oportunidad ... de ...
en la Enseñanza Media de ofrecer un desarrollo coherente de esta teoría, d
los primeros axiomas hasta su aplicación a problemas concretos. Por todo e
el álgebra lineal que debemos explicar habrá de contener la teoría de los
cios vectoriales (reales) de dimensión finita, con el rigor necesario, has
poner el teorema de Rouché-Fröbenius. Esto es clásico y no voy a insitir e
ello. En la teoría del álgebra lineal siempre hay un escollo difícil, y es
car la teoría de los determinantes. Dado que exponer el álgebra tensorial
fuera de lugar, encuentro recomendable definir el determinante por su desa
siguiendo una línea, para luego, aduciendo cuando sean pertinentes los con
necesarios, deducir de ahí las propiedades. En este sentido el libro de Ku
(Algebra general) es excelente.

Los resultados que han de tratarse por métodos de álgebra lineal son
conocidos:

- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones.
- Establecimiento de ecuaciones de figuras rectilíneas y planas en el
cio.
- Reconocimiento de operaciones lineales, aún cuando no sea en espaci
dimensión finita (v.g. derivadas, integrales).
- Introducción del manejo de métodos matriciales.
- Otros que puedan surgir.

3.1. ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Este punto ha llegado a ser considerado como primordial debido al au
las calculadoras de mano. Vamos a analizar sólo un par de métodos: El mét
construcción de la matriz inversa o regla de Cramer, y el método de Gauss

El método de Cramer tiene la ventaja de su carácter teórico que perm
troducir el concepto de matriz inversa, justificando sobradamente todos l
sos. Por conocido no insistimos más en ello. El método de Gauss tiene la
de ser rápido de cálculos cuando los coeficientes son enteros o racionale
más puede utilizarse como método alternativo en el cálculo de característ
matrices. Si los coeficientes son números arbitrarios, tanto uno como otr
do resultan complicados y acumulan errores. El principal aspecto práctico
todo de Gauss es su facilidad para programarlo en ordenadores. Ponemos un
plo:

$$a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z = b_1$$

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = b_2$$

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3$$

1. Si $a_{11} \neq 0$: Dividir la primera ecuación por a_{11} . Así quedará el coeficiente de x igualado a 1 .

2. Multiplicar la primera ecuación por $-a_{12}$ y sumar a la segunda.

3. Multiplicar la primera ecuación por $-a_{13}$ y sumar a la tercera.

En este punto la situación es:

$$x + a'_{21}y + a'_{31}z = b'_1$$

$$a'_{22}y + a'_{32}z = b'_2$$

$$a'_{23}y + a'_{33}z = b'_3$$

4. Si $a'_{22} \neq 0$: Dividir la segunda ecuación por a'_{22} . Así quedará el coeficiente de y igualado a 1 .

5. Multiplicar la segunda ecuación por $-a'_{23}$ y sumar a la tercera.

Obtendremos así el siguiente sistema

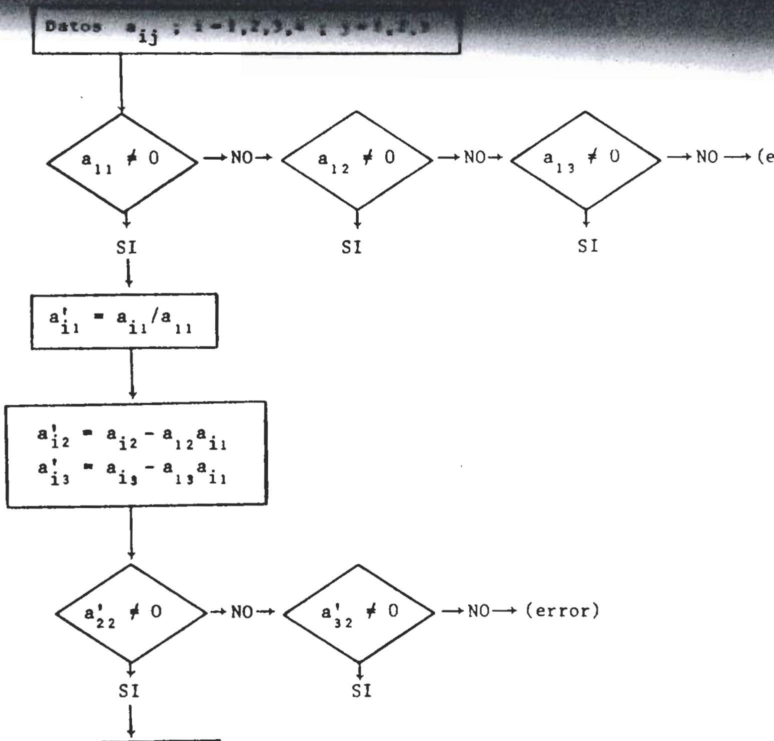
$$x + a'_{21}y + a'_{31}z = b'_1$$

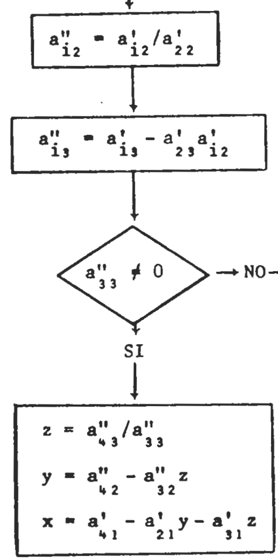
$$y + a''_{32}z = b''_2$$

$$a''_{33}z = b''_3$$

Cuya resolución es inmediata "hacia atrás".

Escribiendo $b_1 = a_{41}$, $b_2 = a_{42}$, $b_3 = a_{43}$ podemos hacer:





Que es un "programa facilito" para

Las posibilidades de generalizació