Tesis presentada por Ángel José Almeida Rodríguez para aspirar al grado de Doctor por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, con la aprobación y el visto bueno del Dr. Kishin Sadarangani y del Dr. Jackie Harjani Sauco.

En Las Palmas de Gran Canaria a diecisiete de julio de 2015.

A la memoria de José Luís Rodríguez Rivero.

Agradecimientos

Esta tesis no habría sido posible sin la dirección académica del profesor Dr. Kishin Sadarangani ni sin su aliento en momentos difíciles de lo que ha sido un largo camino. También agradezco al profesor Dr. Jackie Harjani su dedicación como codirector, incluso en momentos en los que le tocaba ejercer de padre. Hay muchas razones, académicas y personales, para nombrar aquí a la profesora Dra. Belén López Brito con cuya amistad me honra. El profesor Dr. Juan Luís García Cortí me abrió las puertas de su casa hace muchos años y ha sido un gran apoyo.

Para hacer una obra hay que molestar a mucha gente. Esta página no es suficiente para nombrar a todas estas personas y agradecerles su paciencia. Familia, amigos y allegados han colaborado de un modo u otro: Ignacio, Joaquín, Francisco, Luisa, Antonio, Merce, Iván, ...

A todos, gracias por estar, y por insistir.

Índice general

Resumen

El principal interés de este trabajo es el estudio de teoremas de puntos de mejor aproximación en espacios métricos. Esta tesis se divide en cuatro capítulos.

En el primero presentamos una breve descripción de la teoría de puntos de mejor aproximación así como los conceptos que constituyen la parte primordial de la misma.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de teoremas de puntos de mejor aproximación para aplicaciones débilmente contractivas generalizadas. Como corolarios de nuestros resultados obtenemos teoremas de puntos de mejor aproximación de aplicaciones que satisfacen condiciones contractivas de tipo Kannan y de tipo integral.

En el tercer capítulo estudiaremos teoremas de puntos de mejor aproximación para contracciones de tipo Geraghty. Los resultados obtenidos generalizan algunos otros que aparecen en la literatura. Se finaliza el capítulo presentando algunos ejemplos relacionados con las hipótesis que se exigen en los resultados obtenidos.

En el último capítulo, usando la condición de propiedad P débil generalizamos algunos resultados existentes en la literatura sobre teoremas de puntos de mejor aproximación. Asimismo, presentamos un nuevo resultado de tipo Suzuki (condiciones contractivas con un antecedente) acerca de teoremas de

puntos de mejor aproximación.

Fruto de este trabajo son los siguientes artículos.

- A. Almeida, J. Harjani y K. Sadarangani, Existence and uniqueness of best proximity point for contractions of Geraghty type, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, vol. 108, n.º 2, págs. 957-971, 2014, ISSN: 1578-7303.

- A. Almeida, J. Harjani y K. Sadarangani, A best proximity point theorem for generalized weakly contractive non self mappings. English, *J. Convex Anal.*, vol. 21, n.º 4, págs. 989-1006, 2014, ISSN: 0944-6532.

- A. Almeida, E. Karapınar y K. Sadarangani, A note on best proximity point theorems under weak P-property, *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 716825, 4, 2014, ISSN: 1085-3375.

- A. Almeida, A. F. Roldán de Hierro y K. Sadarangani, On existence and uniqueness of best proximity points under a popescu's type contractivity condition. English, *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. 16, n.º 3, págs. 529-538, 2015, ISSN: 1345-4773; 1880-5221/e.

Capítulo 1

La teoría de puntos de mejor aproximación

1.1. Introducción

Muchos problemas que aparecen en el mundo real pueden ser modelizados en forma de ecuaciones. Aquellas que son de la forma $Tx = x$ siendo T una aplicación de un conjunto en si mismo, las llamadas ecuaciones de punto fijo, han sido objeto de especial interés. La teoría del punto fijo es una herramienta fundamental al tratar este tipo de problemas. Uno de los resultados pilares en esta teoría es el principio de la contracción de Banach que afirma que cada contracción de un espacio métrico completo tiene un único punto fijo, es decir, si (X, d) es un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ es una aplicación tal que existe $k \in [0, 1)$ de modo que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y),$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Ahora supongamos que A y B son dos subconjuntos de un espacio métrico

(X,d) y T es una aplicación $T\colon A \to B$. Puede ocurrir que $T(A) \cap B = \emptyset$ y que, por tanto, no exista un punto fijo. Pero, dado que para cualquier $x \in A$,

$$d(x,Tx) \geq d(A,B) = \text{ínf}\,\{d(x,y)\colon x \in A, y \in B\}\,,$$

podemos preguntarnos si existe $x_0 \in A$ tal que $d(x_0,Tx_0) = d(A,B)$. Esta es precisamente la cuestión fundamental de la teoría de puntos de mejor aproximación.

Nótese que un aspecto muy importante en la teoría de puntos de mejor aproximación es que se trata de una generalización natural de la teoría del punto fijo, dado que un punto de mejor aproximación se convierte en un punto fijo en el caso de que la aplicación transforme un conjunto en si mismo.

1.2. Conceptos básicos

A continuación, introducimos los conceptos y notaciones básicas de la teoría que se desarrollará a continuación.

Definición 1. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico (X,d) y sea $T\colon A \to B$ una aplicación. Diremos que x_0 es un punto de mejor aproximación de T si $d(x_0,Tx_0) = d(A,B)$.

Dados, A y B subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X,d), denotaremos por A_0 y B_0 los conjuntos

$$A_0 = \{x \in A\colon d(x,y) = d(A,B) \text{ para algún } y \in B\}$$

y

$$B_0 = \{y \in B\colon d(x,y) = d(A,B) \text{ para algún } x \in A\}$$

Algunas condiciones que aseguran que A_0 y B_0 son no vacíos aparecen en [23] en el contexto de espacios de Banach reflexivos. En particular, si A

es no vacío, cerrado, acotado y convexo y B es no vacío, cerrado y convexo, entonces $A_0 \neq \emptyset$ y $B_0 \neq \emptyset$ ([16]).

Un concepto importante y que juega un papel primordial en esta teoría es el de la propiedad P.

Definición 2. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) con $A_0 \neq \emptyset$. Diremos que el par (A, B) tiene la propiedad P si para cualesquiera $x, x_1 \in A$, $y, y_1 \in B$,

$$\left.\begin{aligned} d(x,y) &= d(A,B) \\ d(x_1,y_1) &= d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(x,x_1) = d(y,y_1).$$

Nótese que si $d(A, B) = 0$, entonces el par (A, B) tiene la propiedad P.

Esta propiedad fue introducida por S. Raj en [29].

Capítulo 2

Teoremas de puntos de mejor aproximación para aplicaciones débilmente contractivas generalizadas

2.1. Introducción

La noción de aplicación débilmente contractiva fue usada por primera vez por Alber y Guerre-Delabriere en el contexto de espacios de Hilbert [3] y su motivación es la siguiente.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $T\colon E \to E$ una contracción, es decir, existe una constante $k \in [0,1)$ tal que, para cualesquiera $x, y \in E$,

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\| .$$

Esta desigualdad puede ser escrita

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| - q \|x - y\| ,$$

donde $k = 1 - q$ y $q \in (0, 1]$.

Una generalización natural de una aplicación que satisface la última desigualdad nos da el concepto de aplicación débilmente contractiva. Se dice que una aplicación $T\colon E \to E$ es débilmente contractiva si, para cualesquiera $x, y \in E$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| - \psi\left(\|x - y\|\right),$$

donde $\psi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función continua, creciente tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Ejemplos de esta clase de funciones son $\psi(t) = \log(1 + t)$, $\psi(t) = \arctan t$ y $\psi(t) = \dfrac{t}{1 + t}$.

Rhoades en [32] trasladó esta definición al contexto de espacios métricos y presentó la siguiente definición.

Definición 3. Sea (X, d) un espacio métrico y $T\colon X \to X$ una aplicación. Diremos que T es débilmente contractiva si, para cualesquiera $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi\left(d(x, y)\right)$$

donde $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función continua y creciente y tal que $\varphi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.

Nota 1. Nótese que, dado que

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi\left(d(x, y)\right) \leq d(x, y),$$

cualquier aplicación débilmente contractiva es no expansiva y, por tanto, continua.

El principal resultado de [32] , que es una generalización del teorema de la contracción de Banach, es el siguiente.

Teorema 1 ([32]). *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación débilmente contractiva. Entonces T tiene un único punto fijo.*

En [14], los autores presentan la siguiente generalización del teorema 1

Teorema 2 ([14]). *Sea (X,d) un espacio metrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación tal que, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$\varphi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \varphi\left(d(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right)$$

donde $\varphi, \phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ son funciones continuas, crecientes que verifican que $\varphi(t) = \phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Entonces T tiene un único punto fijo.

Nota 2. Las funciones $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ que son continuas, crecientes y tales que $\varphi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$ se conocen en la literatura con el nombre de funciones que alteran la distancia (altering distance function).

En [13], los autores presentan el siguiente resultado.

Teorema 3 ([13]). *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación tal que, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(M(x,y)\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x,y), d(y,Ty)\right\}\right),$$

donde ψ es una función que altera la distancia y $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua tal que $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$ y

$$M(x,y) = \text{máx}\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\left(d(x,Ty) + d(y,Tx)\right)\right\}.$$

Entonces T tiene un único punto fijo.

2.2. Resultados principales

El objetivo de este capítulo es presentar un teorema de punto de mejor aproximación para contracciones que satisfacen una condición contractiva parecida a la que aparece en el teorema 3.

Previamente, presentamos la siguiente definición.

Definición 4. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X,d) y $T\colon A \to B$ una aplicación. Diremos que T es una aplicación débilmente contractiva generalizada si

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(M(x,y) - d(A,B)\right) - \phi\left(d(x,y)\right)$$

para cualesquiera $x, y \in A$, donde ψ es una función que altera la distancia, $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función creciente tal que $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$ y $M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\left(d(x,Ty) + d(y,Tx)\right)\right\}$.

Nótese que $M(x,y) - d(A,B) \geq d(x,Tx) - d(A,B) \geq 0$ y, por tanto, la definición 4 es consistente.

El principal resultado de este capítulo es el siguiente.

Teorema 4. *Sean A y B subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) tales que $A_0 \neq \emptyset$ y el par (A,B) tiene la propiedad P. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua y débilmente contractiva generalizada tal que $T(A_0) \subset B_0$. Entonces existe un único punto de mejor aproximación de la aplicación T.*

Demostración.

Como $A_0 \neq \emptyset$, tomamos $x_0 \in A_0$. Dado que $Tx_0 \in T(A_0) \subset B_0$, por definición de B_0, existirá $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1, Tx_0) = d(A,B)$. Análogamente, dado que $Tx_1 \in T(A_0) \subset B_0$, existirá $x_2 \in A_0$ tal que $d(x_2, Tx_1) = d(A,B)$.

Repitiendo este proceso, encontramos una sucesión $(x_n) \subset A_0$ tal que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \geq 0. \tag{2.1}$$

Teniendo en cuenta que (A, B) tiene la propiedad P, de

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$$

y

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = d(A, B),$$

inferimos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \text{ para cualquier } n \geq 1. \tag{2.2}$$

Se nos pueden presentar dos casos:

Caso 1) Existe $n_0 \geq 1$ tal que $d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = 0$.

Caso 2) Para cualquier $n \geq 1$, $d(x_{n+1}, x_n) > 0$.

En el **Caso 1)**, tenemos que

$$0 = d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = d(Tx_{n_0}, Tx_{n_0-1})$$

y, por tanto, $Tx_{n_0} = Tx_{n_0-1}$.

Por (2.1), deducimos

$$d(A, B) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0-1}) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0}),$$

y esto prueba que x_{n_0} es un punto de mejor aproximación de la aplicación T.

Esto probaría la existencia de un punto de mejor aproximación en este caso.

Caso 2). Supongamos que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta que T es una aplicación débilmente contractiva generalizada y (2.2), se tiene

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1},x_n)\right) &= \psi\left(d(Tx_n,Tx_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(M(x_n,x_{n-1})-d(A,B)\right)-\phi\left(d(x_n,x_{n-1})\right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

A continuación podemos distinguir cuatro casos.

Caso 2a) Supongamos que $M(x_n,x_{n-1}) = d(x_n,x_{n-1})$.

En este caso, teniendo en cuenta (2.3) y el hecho de que ψ es creciente, se tiene que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1},x_n)\right) &= \psi\left(d(Tx_n,Tx_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_n,x_{n-1})-d(A,B)\right)-\phi\left(d(x_n,x_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_n,x_{n-1})\right)-\phi\left(d(x_n,x_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_n,x_{n-1})\right),\end{aligned}$$

y, por ser ψ creciente, tenemos que $d(x_{n+1},x_n) \leq d(x_n,x_{n-1})$.

Caso 2b) Supongamos que $M(x_n,x_{n-1}) = d(x_n,Tx_n)$.

Usando (2.1), deducimos que

$$\begin{aligned}M(x_n,x_{n-1})-d(A,B) &= d(x_n,Tx_n)-d(A,B)\\ &\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx_n)-d(A,B)\\ &= d(x_n,x_{n+1}).\end{aligned}$$

Por tanto, por (2.3), se sigue que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1},x_n)\right) &= \psi\left(d(Tx_n,Tx_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_n,Tx_n)-d(A,B)\right)-\phi\left(d(x_n,x_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_n,x_{n+1})\right)-\phi\left(d(x_n,x_{n-1})\right).\end{aligned}$$

Como $d(x_n, x_{n-1}) > 0$ y $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$, de la última desigualdad, se tiene

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1}, x_n)\right) &\leq \psi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\\ &< \psi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)\end{aligned}$$

y esto es una contradicción.

Caso 2c) Supongamos que $M(x_n, x_{n-1}) = d(x_{n-1}, Tx_{n-1})$.

Siguiendo un argumento similar al usado en el caso 2) tenemos

$$\begin{aligned}M(x_n, x_{n-1}) - d(A, B) &= d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B)\\ &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) - d(A, B)\\ &= d(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1}, x_n)\right) &= \psi\left(d(Tx_n, Tx_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B)\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\\ &\leq \psi\left(d(x_{n-1}, x_n)\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\\ &< \psi\left(d(x_{n-1}, x_n)\right)\end{aligned}$$

Finalmente, usando el carácter creciente de la función ψ se sigue que

$$d(x_{n+1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n).$$

Caso 2d) Supongamos que $M(x_n, x_{n-1}) = \dfrac{d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)}{2}$.

En este caso, resulta que

$$
\begin{aligned}
&M(x_n, x_{n-1}) - d(A,B)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)\right) - d(A,B)\\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(d(A,B) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)\right) - d(A,B)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(d(A,B) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(A,B)\right) - d(A,B)\\
&\qquad = \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right),
\end{aligned}
$$

y, por (2.3), inferimos que

$$
\begin{aligned}
\psi\left(d(x_{n+1}, x_n)\right) &= \psi\left(d(Tx_n, Tx_{n-1})\right)\\
&\leq \psi\left(M(x_n, x_{n-1}) - d(A,B)\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\\
&\leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right)\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)\\
&< \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right)\right).
\end{aligned}
$$

Como ψ es creciente, se deduce que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{2}\left(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right),$$

y, por tanto,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}).$$

En resumen, en cualquier caso, tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}).$$

Esto es, la sucesión $(d(x_{n+1}, x_n))$ es una sucesión decreciente de números no negativos y, por tanto, existirá $r \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(d(x_{n+1}, x_n)\right) = r.$$

A continuación, probamos que $r = 0$.

Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que $r > 0$.

En la discusión previa hemos considerado cuatro casos, uno de los cuales llevaba a contradicción. En los otros tres casos llegamos a que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_{n+1}, x_n)\right) &\leq \psi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) - \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \\ &\leq \psi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito en esta desigualdad y, teniendo en cuenta que ψ es continua, se tiene que

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \lim_{n\to\infty} \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \leq \psi(r)$$

y esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) = 0 \tag{2.4}$$

Dado que $d(x_{n+1}, x_n)$ es una sucesión decreciente y $r = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n)$ se tiene que $0 < r \leq d(x_{n+1}, x_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, como ϕ es creciente y $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$, de la última desigualdad, se sigue que

$$0 < \phi(r) \leq \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

y, por tanto,

$$0 < \phi(r) \leq \lim_{n\to\infty} \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right)$$

y esto contradice a (2.4).

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Seguidamente probaremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Para ello, supongamos que (x_n) no es de Cauchy.

Entonces, por un argumento estándar, existirá $\epsilon > 0$ y subsucesiones $(x_{n(k)})$ y $(x_{m(k)})$ de (x_n) tales que

I. $n(k) > m(k) \geq k$ para cualquier $k \geq 0$

II. $\epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})$ y $d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon$ para cualquier $k \geq 0$

III. $$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})$$
$$= \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \epsilon.$$

Teniendo en cuenta que, para cualquier $k \geq 0$,

$$d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) = d(A, B)$$

y

$$d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) = d(A, B),$$

y el hecho de que el par (A, B) tiene la propiedad P, deducimos que

$$d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)}) \text{ para cualquier } k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando la hipótesis contractiva, se tiene que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) &= \psi\left(d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)})\right) \\ &\leq \psi\left(M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A, B)\right) - \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

De nuevo, podemos distinguir cuatro casos.

Caso 1) Supongamos que $M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = d(x_{n(k)}, x_{m(k)})$.

Teniendo en cuenta la última desigualdad y usando las propiedades de las funciones ψ y ϕ, se deduce que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) &\leq \psi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A, B)\right) \\ &\quad - \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \\ &\leq \psi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) - \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \\ &\leq \psi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Caso 2) Supongamos que $M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)})$

En este caso,

$$\begin{aligned} M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A,B) &= d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\ &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\ &= d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}). \end{aligned}$$

La última desigualdad y (2.5) nos dan

$$\begin{aligned} \psi(\big(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\big) &\leq \psi(\big(d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})\big) - \phi(\big(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\big) \\ &\leq \psi(\big(d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})\big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Caso 3) Supongamos que $M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)})$.

Usando un argumento similar al caso 2), se tiene que

$$M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A,B) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) &\leq \psi\left(d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right) - \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \\ &\leq \psi\left(d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Caso 4) Supongamos que

$$M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \frac{1}{2}\left(d(x_{n(k)}, Tx_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, Tx_{n(k)})\right).$$

En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} &M(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A,B) = \frac{1}{2}\left(d(x_{n(k)}, Tx_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, Tx_{n(k)})\right) - d(A,B) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) \\ &\qquad + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)})\Big) - d(A,B) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) + d(A,B) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(A,B)\Big) - d(A,B) \\ &= \frac{1}{2}\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})\right). \end{aligned}$$

Esta desigualdad y (2.5) nos dan

$$\psi\left(d(x_{n(k)+1},x_{m(k)+1})\right) \leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x_{n(k)},x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})\right)\right)$$
$$- \phi\left(d(x_{n(k)},x_{m(k)})\right). \tag{2.9}$$

Sean ahora los conjuntos

$$C = \{k \geq 0\colon k \text{ satisface el caso } 2\},$$
$$D = \{k \geq 0\colon k \text{ satisface el caso } 3\},$$
$$E = \{k \geq 0\colon k \text{ satisface el caso } 4\}.$$

Supongamos que $\operatorname{card} C = \infty$ o que $\operatorname{card} D = \infty$.

Entonces, tomando límite cuando k tiende a infinito en (2.7) o en (2.8) y, teniendo en cuenta las propiedades de las subsucesiones $(x_{n(k)})$ y $(x_{m(k)})$, el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n) = 0$ y la continuidad de ψ, obtenemos, respectivamente

$$0 < \psi(\epsilon) \leq \psi\left(\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})\right) = \psi(0) = 0$$

ó

$$0 < \psi(\epsilon) \leq \psi\left(\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)},x_{m(k)+1})\right) = \psi(0) = 0$$

y esto es una contradicción.

Por tanto, $\operatorname{card} C < \infty$ y $\operatorname{card} D < \infty$.

Si $\operatorname{card} E = \infty$ entonces llevando k al infinito en (2.9), se tiene que

$$0 < \psi(\epsilon) \leq \psi\left(\frac{1}{2}(\epsilon+\epsilon)\right) - \lim_{k\to\infty}\phi\left(d(x_{n(k)},x_{m(k)})\right) \leq \psi(\epsilon),$$

y esto implica que

$$\lim_{k\to\infty}\phi\left(d(x_{n(k)},x_{m(k)})\right) = 0. \tag{2.10}$$

Por otra parte, dado que $0 < \epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})$ para cualquier $k \geq 0$, ϕ es creciente y $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$, se tiene que

$$0 < \phi(\epsilon) \leq \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right), \text{ para cualquier } k \geq 0,$$

y, por tanto,

$$0 < \phi(\epsilon) \leq \lim_{k \to \infty} \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right),$$

y esto contradice a (2.10).

Por tanto, $\operatorname{card} E < \infty$.

Por lo visto, se deduce que, para cualquier $k \geq 0$ salvo un número finito a lo sumo, k satisface el caso 1).

Llevando k al infinito en (2.6), obtenemos

$$0 < \psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \lim_{k \to \infty} \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \leq \psi(\epsilon)$$

y, por tanto,

$$\lim_{k \to \infty} \phi\left(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) = 0.$$

Haciendo un razonamiento análogo al expuesto anteriormente obtenemos una contradicción. Esta contradicción nos da que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Como $(x_n) \subset A$ y A es cerrado en el espacio métrico completo (X, d), existirá $x^* \in A$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Teniendo en cuenta la continuidad de T, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} Tx_n = Tx^*.$$

Por tanto, la continuidad de la distancia en un espacio métrico, nos da que

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{n+1}, Tx_n) = d(x^*, Tx^*)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$, de la igualdad anterior se tiene que

$$d(x^*, Tx^*) = d(A, B).$$

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación.

Para probar la unicidad, supongamos que x_1 y x_2 son dos puntos de mejor aproximación de la aplicación T, con $x_1 \neq x_2$.

Esto quiere decir que

$$d(x_1, Tx_1) = d(x_2, Tx_2) = d(A, B).$$

Usando la propiedad P del par (A, B), se tiene que

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2),$$

y, teniendo en cuenta la hipótesis contractiva, se deduce que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_1, x_2)\right) &= \psi\left(d(Tx_1, Tx_2)\right) \\ &\leq \psi\left(M(x_1, x_2) - d(A, B)\right) - \phi\left(d(x_1, x_2)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Se pueden presentar cuatro casos.

Caso 1) Que $M(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$.

En este caso, teniendo en cuenta (2.11), se sigue que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_1, x_2)\right) &\leq \psi\left(d(x_1, x_2) - d(A, B)\right) - \phi\left(d(x_1, x_2)\right) \\ &< \psi\left(d(x_1, x_2) - d(A, B)\right) \\ &\leq \psi\left(d(x_1, x_2)\right), \end{aligned}$$

puesto que $\phi\left(d(x_1, x_2)\right) > 0$ al ser $x_1 \neq x_2$ y $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Esto nos da una contradicción.

Caso 2) Que $M(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$.

En este caso, dado que $d(x_1, Tx_1) = d(A, B)$, por (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_1, x_2)\right) &\leq \psi\left(d(x_1, Tx_1) - d(A, B)\right) - \phi\left(d(x_1, x_2)\right)\\ &= \psi(0) - \phi\left(d(x_1, x_2)\right)\\ &= -\phi\left(d(x_1, x_2)\right) < 0\end{aligned}$$

y esto es una contradicción.

Caso 3) Que $M(x_1, x_2) = d(x_2, Tx_2)$.

En este caso se llega a una contradicción usando un argumento similar al del caso 2.

Caso 4) Que $M(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Tx_1)\right)$.

En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned}&M(x_1, x_2) - d(A, B) = \frac{1}{2}\left(d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Tx_1)\right) - d(A, B)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(d(x_1, Tx_1) + d(Tx_1, Tx_2) + d(x_2, Tx_2) + d(Tx_2, Tx_1)\right) - d(A, B)\\ &= \frac{1}{2}\left(d(A, B) + 2d(Tx_1, Tx_2) + d(A, B)\right) - d(A, B) = d(Tx_1, Tx_2)\end{aligned}$$

y, por (2.11), se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(x_1, x_2)\right) &= \psi\left(d(Tx_1, Tx_2)\right)\\ &\leq \psi\left(d(Tx_1, Tx_2)\right) - \phi\left(d(x_1, x_2)\right)\\ &< \psi\left(d(Tx_1, Tx_2)\right),\end{aligned}$$

porque $\phi\left(d(x_1, x_2)\right) > 0$ y esto es nos da una contradicción.

Por tanto, en cualquier caso llegamos a una contradicción y, consecuentemente, $x_1 = x_2$.

Esto prueba la unicidad del punto de mejor aproximación. □

2.3. Ejemplos y corolarios

Seguidamente, presentamos un ejemplo de aplicación débilmente contractiva generalizada que no es continua. Por tanto, la condición de continuidad en el teorema 4 es esencial.

Sean $A = B = \mathbb{R}$ con la métrica usual y sea $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, 2], \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Es claro que T no es continua.

Veamos, a continuación, que T es una aplicación débilmente contractiva generalizada.

En efecto, tanto si $x, y \in (-\infty, 2]$ como si $x, y \in (2, \infty)$, $d(Tx, Ty) = 0$.

Supongamos, ahora, que $x \in (-\infty, 2]$ e $y \in (2, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned} &d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}, \\ &d(x, Tx) = |x - Tx| = |x - 0| = |x|, \end{aligned}$$

y

$$d(y, Ty) = |y - Ty| = \left|y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|y + \frac{1}{2}\right| = y + \frac{1}{2}, \text{ dado que } y > 2.$$

Por tanto, se tiene que,

$$\begin{aligned} &d(Tx, Ty) = \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(2 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{5}\left(y + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{5}\left(y + \frac{1}{2} + |x|\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(d(y, Ty) + d(x, Tx)\right) \le \frac{2}{5} \operatorname{máx}\{d(y, Ty), d(x, Tx)\} \\ &= \operatorname{máx}\{d(y, Ty), d(x, Tx)\} - \frac{3}{5} \operatorname{máx}\{d(y, Ty), d(x, Tx)\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}\,\text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\} &= \frac{1}{5}\cdot 3\,\text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\}\\
&\geq \frac{1}{5}\cdot 2\,\text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\}\\
&\geq \frac{1}{5}\left(d(y,Ty)+d(x,Tx)\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(y+\frac{1}{2}+|x|\right)\\
&> \frac{1}{5}\left(y+|x|\right)\\
&\geq \frac{1}{5}\,|y-x| = \frac{1}{5}\,d(x,y),
\end{aligned}$$

de la última estimación, se sigue que

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &\leq \text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\} - \frac{3}{5}\,\text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\}\\
&< \text{máx}\left\{d(y,Ty),d(x,Tx)\right\} - \frac{1}{5}d(x,y)\\
&\leq M(x,y) - \frac{1}{5}d(x,y).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(Tx,Ty) \leq M(x,y) - \frac{1}{5}d(x,y)$$

y, por tanto, T es una aplicación débilmente contractiva generalizada con ψ la aplicación identidad en $[0,\infty)$ y $\phi(t) = \frac{1}{5}t$.

A continuación, presentamos algunos corolarios interesantes del teorema 4.

Si la aplicación ψ en el teorema 4 es la identidad en $[0,\infty)$, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea (A,B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua y, tal que, para cualesquiera $x,y \in A$,*

$$d(Tx,Ty) \leq M(x,y) - d(A,B) - \phi\left(d(x,y)\right),$$

donde $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función creciente que satisface que* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$. *Supongamos que* $T(A_0) \subset B_0$ *y que el par* (A, B) *tiene la propiedad* P. *Entonces* T *tiene un único punto de mejor aproximación.*

Teniendo en cuenta que si $d(A, B) = 0$, entonces el par (A, B) tiene la propiedad P, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2. *Sea* (A, B) *un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo* (X, d) *tal que* $A_0 \neq \emptyset$ *y* $d(A, B) = 0$. *Sea* $T\colon A \to B$ *una aplicación continua y débilmente contractiva generalizada tal que* $T(A_0) \subset B_0$. *Entonces* T *tiene un único punto de mejor aproximación.*

Los siguientes dos resultados son consecuencias del corolario 2.

Corolario 3. *Sea* (A, B) *un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo* (X, d) *tal que* $A_0 \neq \emptyset$ *y* $d(A, B) = 0$. *Sea* $T\colon A \to B$ *una aplicación continua con* $T(A_0) \subset B_0$ *y que verifica que, para cualesquiera* $x, y \in A$,

$$d(Tx, Ty) \leq M(x, y) - \phi\left(d(x, y)\right),$$

donde $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función creciente que satisface* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$. *Entonces* T *tiene un único punto de mejor aproximación.*

Demostración. Tómese como ψ en el corolario 2 la aplicación identidad en $[0,\infty)$. □

Corolario 4. *Sea* (A, B) *un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo* (X, d) *con* $A_0 \neq \emptyset$ *y* $d(A, B) = 0$. *Sea* $T\colon A \to B$ *una aplicación tal que* $T(A_0) \subset B_0$ *y que verifica que, para cualesquiera* $x, y \in A$,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi\left(d(x, y)\right),$$

donde $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función creciente tal que* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$. *Entonces* T *tiene un único punto de mejor aproximación.*

Demostración. Nótese que la condición

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi\left(d(x,y)\right) \leq d(x,y)$$

implica la continuidad de T y que

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi\left(d(x,y)\right) \leq M(x,y) - \phi\left(d(x,y)\right).$$

□

El corolario 4 es el resultado principal del artículo [30] para el caso en que sea $d(A,B) = 0$.

La siguiente consecuencia del teorema 4 nos presenta un resultado sobre puntos de mejor aproximación usando una condición contractiva de tipo Kannan.

Corolario 5. *Sea* (A,B) *un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo que tiene la propiedad* P *y tal que* $A_0 \neq \emptyset$. *Sea* $T\colon A \to B$ *una aplicación continua tal que* $T(A_0) \subset B_0$ *y que satisface, para cualesquiera* $x, y \in A$,

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) - d(A,B)\right) - \phi\left(d(x,y)\right),$$

siendo $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *una función que altera la distancia y siendo* $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *una función creciente tal que* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$. *Entonces* T *tiene un único punto de mejor aproximación.*

Demostración. Nótese que, como

$$\frac{1}{2}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) \geq \frac{1}{2}\left(d(A,B) + d(A,B)\right) = d(A,B),$$

la condición contractiva está bien definida.

Por otra parte,

$$\frac{1}{2}\left(d(x,Tx)+d(y,Ty)\right)\leq\frac{1}{2}\left(M(x,y)+M(x,y)\right)=M(x,y)$$

y, por tanto, la condición contractiva del corolario 5 implica la que aparece en el teorema 4. Por este teorema, se obtiene el resultado deseado. $\square$

A continuación, presentamos, como una consecuencia del teorema 4, un resultado sobre puntos de mejor aproximación para aplicaciones que verifican una condición de tipo integral

Corolario 6. *Sea (A,B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) con $A_0\neq\emptyset$ y tal que el par (A,B) tiene la propiedad P. Sea $T\colon A\to B$ una aplicación continua tal que $T(A_0)\subset B_0$ y que satisface, para cualesquiera $x,y\in A$, la desigualdad*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)\,dt\leq\int_0^{M(x,y)-d(A,B)}\varphi(t)\,dt-\int_0^{d(x,y)}\rho(t)\,dt,$$

en la que $\varphi,\rho\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ son funciones integrables Lebesgue tales que $\int_0^{\epsilon}\varphi(t)\,dt>0$ y $\int_0^{\epsilon}\rho(t)\,dt>0$ para cualquier $\epsilon>0$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Nótese que las aplicaciones $\psi,\phi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ definidas por $\psi(t)=\int_0^t\varphi(s)\,ds$ y $\phi(t)=\int_0^t\rho(s)\,ds$ son continuas y crecientes y verifican que $\psi(t)=\phi(t)=0$ si y sólo si $t=0$. Por tanto, el resultado se obtiene como consecuencia del teorema 4. $\square$

Cuando $A=B$ tenemos los siguientes resultados sobre puntos fijos en espacios métricos completos.

Corolario 7. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $T\colon X \to X$ *una aplicación continua tal que, para cualesquiera* $x,y \in X$*,*

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(M(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right),$$

donde ψ *es una función que altera la distancia y* $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función creciente que verifica que* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$*. Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Téngase en cuenta que la condición contractiva que aparece en el teorema 3, es decir,

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(M(x,y)\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x,y), d(y,Ty)\right\}\right)$$

implica la que aparece en el corolario 7, dado que ϕ es una función creciente.

Esto nos viene a decir que el corolario 7 mejora el teorema 3 en el caso en que $T\colon X \to X$ sea una aplicación continua.

Por otra parte, dado que la condición contractiva

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(d(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right)$$

que aparece en el teorema 2 implica, por el carácter creciente de la función ψ, que

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(M(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right)$$

tenemos el siguiente corolario.

Corolario 8. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $T\colon X \to X$ *una aplicación que satisface, para cualesquiera* $x,y \in X$*, que*

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(d(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right),$$

donde ψ *es una función que altera la distancia y* $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función creciente satisface que* $\phi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$*. Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Nótese que en el corolario 8 no exigimos la continuidad de T dado que esta se deriva de la condición contractiva. En efecto,

$$\psi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \psi\left(d(x,y)\right) - \phi\left(d(x,y)\right) \leq \psi\left(d(x,y)\right)$$

y, dado el carácter creciente de ψ, se infiere que

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y),$$

y por tanto T es continua.

El corolario 8 mejora el teorema 2 ya que no asumimos la continudad de ϕ.

Corolario 9. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación tal que, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi\left(d(x,y)\right)$$

donde $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función creciente tal que $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración. Tómese en el corolario 8 como ψ la aplicación identidad en $[0,\infty)$. □

El corolario 9 mejora el teorema 1 dado que no se asume la continuidad de la función ϕ.

A continuación presentamos algunos ejemplos relacionados con los resultados obtenidos.

El primer ejemplo prueba que la condición de que el par (A,B) tenga la propiedad P es esencial en el teorema 4.

Ejemplo 1. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual y los subconjuntos $A = \{8, -8\}$ y $B = \{1, -1\}$.

Es obvio que los subconjuntos A y B son cerrados, que $d(A, B) = 7$ y que $A_0 = A \neq \emptyset$ y $B_0 = B$. Además el par (A, B) no tiene la propiedad P, ya que

$$d(8, 1) = d(A, B) = 7$$
$$d(-8, -1) = d(A, B) = 7$$

y $d(8, -8) = 16 > 2 = d(1, -1)$.

Sea ahora la aplicación $T\colon A \to B$ tal que $T(8) = -1$ y $T(-8) = 1$.

Es claro que T es una aplicación continua porque la métrica inducida en A y en B es la métrica discreta. Además

$$\begin{aligned} 2 = d\left(T8, T(-8)\right) &\leq 9 - \frac{1}{3} \cdot 16 = d(8, -8) - d(A, B) - \frac{1}{3} d(8, -8) \\ &\leq M(8, -8) - d(A, B) - \frac{1}{3} d(8, -8), \end{aligned}$$

y, por tanto, T es una aplicación débilmente contractiva generalizada con ψ la identidad en $[0, \infty)$ y $\phi(t) = \frac{1}{3} t$.

Además, $d(8, T8) = d\left(-8, T(-8)\right) = 9 > 7 = d(A, B)$ y, por tanto, T no tiene punto de mejor aproximación.

En el siguiente ejemplo se muestra que la condición de que los conjuntos A y B sean cerrados no es una condición necesaria para la existencia de un único punto de mejor aproximación.

Ejemplo 2. Consideremos el espacio métrico completo $(\mathbb{R}^2, d)$ con la distancia euclídea d. Sean los subconjuntos

$$A = [0, \infty) \times \{0\} \text{ y } B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \times \{0\}.$$

Nótese que B no es un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^2, d)$. Además, es inmediato que $d(A, B) = 0$, $A_0 = \{(0, 0)\}$ y $B_0 = \{(0, 0)\}$

Consideremos, a continuación, la aplicación $T\colon A \to B$ definida por

$$T(x,0) = (-\arctan x, 0).$$

Es claro que $T(A_0) = B_0$. Obviamente, T es continua. Veamos, a continuación, que T es también una aplicación débilmente contractiva generalizada.

En efecto, para $(x,0),(y,0) \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&d\left(T(x,0),T(y,0)\right) = |\arctan x - \arctan y| \leq \arctan|x-y| \\
&= \arctan\left(d((x,0),(y,0))\right) \\
&= d((x,0),(y,0)) - \left(d((x,0),(y,0)) - \arctan\left(d((x,0),(y,0))\right)\right) \\
&\leq M((x,0),(y,0)) - \left(d((x,0),(y,0)) - \arctan\left(d((x,0),(y,0))\right)\right)
\end{aligned}$$

Por tanto T es una aplicación débilmente contractiva generalizada con ψ la identidad en $[0,\infty)$ y $\phi(t) = t - \arctan t$.

En la estimación anterior, hemos usado el hecho de que

$$|\arctan x - \arctan y| \leq \arctan|x-y|,$$

y la prueba de esto se hará en el lema siguiente

Por otra parte, el punto $(0,0)$ es el único punto de mejor aproximación de T, puesto que

$$d\left((0,0),T(0,0)\right) = 0 = d(A,B)$$

Lema 1. *Supongamos que* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es cóncava y creciente y que* $\varphi(0) = 0$. *Entonces*

(a) φ *es subaditiva, es decir,* $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ *cualesquiera que sean* $x,y \in [0,\infty)$.

(b) $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi\left(|x-y|\right)$ *cualesquiera que sean* $x,y \in [0,\infty)$.

Demostración.

a Teniendo en cuenta la concavidad de φ y el hecho de que $\varphi(0) = 0$, tenemos, para $x, y \in [0, \infty)$, que

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}\cdot 0\right)\\ \geq \frac{x}{x+y}\varphi(x+y) + \frac{y}{x+y}\varphi(0) = \frac{x}{x+y}\varphi(x+y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(y) = \varphi\left(\frac{y}{x+y}(x+y) + \frac{x}{x+y}\cdot 0\right)\\ \geq \frac{y}{x+y}\varphi(x+y) + \frac{x}{x+y}\varphi(0) = \frac{y}{x+y}\varphi(x+y)\end{aligned}$$

Sumando las dos desigualdades queda

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geq \varphi(x+y),$$

y, por tanto, φ es subaditiva.

b Sean $x, y \in [0, \infty)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x > y$. Entonces, por la subaditividad de φ, se tiene que

$$\varphi(x) = \varphi(x - y + y) \leq \varphi(x-y) + \varphi(y).$$

Esto nos da que

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \varphi(x-y)$$

Esto quiere decir que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(x) - \varphi(y) \leq \varphi(x-y) = \varphi\left(|x-y|\right).$$

Esto completa la prueba. $\square$

Nota 3. Dado que la función $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \pi/2)$ definida por

$$\varphi(x) = \arctan x$$

satisface que $\varphi(0) = 0$, es creciente y además es cóncava, ya que

$$\varphi''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0 \text{ para } x \in [0, \infty),$$

se tiene por el lema 1, que $|\arctan x - \arctan y| \leq \arctan(|x - y|)$ para cualesquiera $x, y \in [0, \infty)$.

2.4. Un resultado adicional

Como observamos en el teorema 4 es esencial la continuidad del operador $T \colon A \to B$.

Nuestro próximo resultado es un teorema de punto de mejor aproximación en el que se utiliza una condición contractiva similar a la que aparece en el teorema 3 y sin la condición de continuidad del operador T.

Teorema 5. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P y tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T \colon A \to B$ una apilcación tal que $T(A_0) \subset B_0$ y tal que, para cualesquiera $x, y \in A$,*

$$\psi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \psi\left(M(x, y) - d(A, B)\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x, y), d(y, Ty)\right\}\right)$$

siendo ψ una función que altera la distancia y $\phi \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ creciente y tal que $\phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación

Demostración. Dado que nuestra condición contractiva implica la que aparece en el teorema 4, puesto que

$$\phi\left(d(x, y)\right) \leq \phi\left(\text{máx}\left\{d(x, y), d(y, Ty)\right\}\right),$$

siguiendo los mismos pasos que en este teorema, podemos construir una sucesión $(x_n) \subset A_0$ que verifica que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Además $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ y (x_n) es de Cauchy.

Como (X, d) es un espacio métrico completo y (x_n) es de Cauchy, existe $x^* \in A$ (A es cerrado) tal que $x_n \to x*$.

En el teorema 4, llegados a este punto, se utiliza la continuidad de T. Ahora debemos seguir la prueba sin asumir esta hipótesis.

Dado que $d(x_n, Tx_{n-1}) = d(A, B)$ y $d(x_m, Tx_{m-1}) = d(A, B)$ para cualesquiera $n, m \geq 1$, por la propiedad P del par (A, B), se tiene que

$$d(x_n, x_m) = d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \text{ para cualesquiera } n, m \geq 1.$$

Por tanto, dado que (x_n) es de Cauchy, la última igualdad nos dice que (Tx_n) también lo es, y, en virtud de la completitud de (X, d), $Tx_n \to p$ para cierto $p \in X$.

Veamos a continuación que $p = Tx^*$.

En primer lugar, nótese que, como

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N},$$

tomando límite cuando $n \to \infty$, se deduce que

$$d(x^*, p) = d(A, B),$$

y, por tanto, $p \in B_0$.

Por otra parte, como $x_n, x^* \in A_0 \subset A$, aplicando nuestra condición contractiva, resulta que

$$\psi\left(d(Tx_n, Tx^*)\right) \leq \psi\left(M(x_n, x^*) - d(A, B)\right) - \phi\left(\max\left\{d(x_n, x^*), d(x^*, Tx^*)\right\}\right). \tag{2.12}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

– **caso 1)** $M(x_n, x^*) = d(x_n, x^*)$;

– **caso 2)** $M(x_n, x^*) = d(x_n, Tx_n)$;

– **caso 3)** $M(x_n, x^*) = d(x^*, Tx^*)$;

– **caso 4)** $M(x_n, x^*) = \dfrac{1}{2}\left(d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)\right)$.

Caso 1) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \colon M(x_n, x^*) = d(x_n, x^*)\}$.

Si $\operatorname{card} A = \infty$, entonces, dado que $M(x_n, x^*) = d(x_n, x^*) \geq d(x^*, Tx^*)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, se infiere que $d(x^*, Tx^*) = 0$ y, por tanto $d(A, B) = 0$.

Si en (2.12) hacemos tender n a infinito, se deduce, haciendo uso de la continuidad de ψ, que

$$\psi\left(d(p, Tx^*)\right) \leq \psi(0) - \lim_{n\to\infty}\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x), d(x^*, Tx^*)\right\}\right) \leq \psi(0).$$

Como ψ es creciente, la última desigualdad nos da que $d(p, Tx^*) = 0$ y, por tanto, $p = Tx^*$.

Caso 2) Sea $B = \{n \in \mathbb{N} \colon M(x_n, x^*) = d(x_n, Tx_n)\}$. Si $\operatorname{card} B = \infty$, dado que $d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B)$ y ψ es creciente, de (2.12) se sigue que

$$\begin{aligned}
\psi\left(d(Tx_n, Tx^*)\right) &\leq \psi\left(d(x_n, Tx_n) - d(A, B)\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x^*), d(x^*, Tx^*)\right\}\right) \\
&\leq \psi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x^*), d(x^*, Tx^*)\right\}\right) \\
&\leq \psi\left(d(x_n, x_{n+1})\right).
\end{aligned}$$

Haciendo tender n a infinito en la última desigualdad, y dado que ψ es creciente, y que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. obtenemos que $\psi\left(d(p, Tx^*)\right) \leq \psi(0)$ y de aquí, como antes, que $p = Tx^*$.

Caso 3) Sea $C = \{n \in \mathbb{N} \colon M(x_n, x^*) = d(x^*, Tx^*)\}$. Si $\operatorname{card} C = \infty$, entonces, teniendo en cuenta que $M(x_n, x^*) = d(x^*, Tx^*) \geq d(x_n, x^*)$, de

(2.12) se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(Tx_n, Tx^*)\right) &\leq \psi\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right) - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x^*), d(x^*, Tx^*)\right\}\right)\\ &\leq \psi\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right) - \phi\left(d(x^*, Tx^*)\right).\end{aligned}$$

Ahora podemos distinguir los siguientes subcasos:

- **subcaso 3a.** Que $d(x^*, Tx^*) = 0$;

- **subcaso 3b.** Que $d(x^*, Tx^*) > 0$.

Subcaso 3a Que $d(x^*, Tx^*) = 0$.

En tal caso, como $d(A,B) \leq d(x^*, Tx^*) = 0$, haciendo tender n a infinito en (2.12), obtenemos

$$\psi\left(d(p, Tx^*)\right) \leq \psi(0) - \phi(0) = \psi(0)$$

y de nuevo $p = Tx^*$.

Subcaso 3b Que $d(x^*, Tx^*) > 0$.

Haciendo tender n a infinito en (2.12), se infiere que

$$\begin{aligned}\psi\left(d(p, Tx^*)\right) &\leq \psi\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right) - \phi\left(d(x^*, Tx^*)\right)\\ &< \psi\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right),\end{aligned} \tag{2.13}$$

ya que $d(x^*, Tx^*) > 0$.

El carácter creciente de ψ implica que $d(p, Tx^*) < d(x^*, Tx^*) - d(A,B)$.

Así pues, teniendo en cuenta que $d(x^*, p) = d(A,B)$, se tiene que

$$\begin{aligned}d(p, Tx^*) &< d(x^*, Tx^*) - d(A,B) \leq d(x^*, p) + d(p, Tx^*) - d(A,B)\\ &= d(A,B) + d(p, Tx^*) - d(A,B) = d(p, Tx^*).\end{aligned}$$

Esto nos da una contradicción. Por tanto, si $d(x^*, Tx^*) > 0$, $\operatorname{card} C < \infty$.

Caso 4) Sea $D = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon M(x_n, x^*) = \frac{1}{2} \left(d(x_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \right) \right\}$.
Si $\operatorname{card} D = \infty$, entonces, de (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(Tx_n, Tx^*)\right) &\leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)\right) - d(A,B)\right) \\ &\quad - \phi\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x^*), d(x^*, Tx^*)\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)\right) - d(A,B)\right), \end{aligned}$$

y, haciendo tender n a infinito y, teniendo en cuenta la continuidad de ψ, se tiene que

$$\begin{aligned} \psi\left(d(p, Tx^*)\right) &\leq \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x^*, Tx^*) + d(x^*, p)\right) - d(A,B)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x^*, Tx^*) + d(A,B)\right) - d(A,B)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right)\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Caben dos posibilidades:

- **subcaso 4a.** Que $d(x^*, Tx^*) = 0$;

- **subcaso 4b.** Que $d(x^*, Tx^*) > 0$.

subcaso 4a) Que $d(x^*, Tx^*) = 0$.

Entonces $d(A,B) = 0$ y de (2.14) se tiene que $\psi\left(d(p, Tx^*)\right) \leq \psi(0)$ y de aquí que $p = Tx^*$.

subcaso 4b) Que $d(x^*, Tx^*) > 0$.

Entonces, de (2.14) y, por ser ψ creciente, se deduce que

$$\begin{aligned} d(p, Tx^*) &\leq \frac{1}{2}\left(d(x^*, Tx^*) - d(A,B)\right) < d(x^*, Tx^*) - d(A,B) \\ &\leq d(x^*, p) + d(p, Tx^*) - d(A,B) = d(p, Tx^*), \end{aligned} \tag{2.15}$$

que es una contradicción. Por tanto, $d(x^*, Tx^*) > 0$ implica que $\operatorname{card} D < \infty$.

En resumen, en todos los casos $p = Tx^*$.

El resto de la prueba seguiría un razonamiento análogo al del teorema 4

$\square$

Nota 4. La diferencia entre el teorema 4 y el teorema 5 es que la condición contractiva del segundo es un «poco» más fuerte que la del primero, aunque a cambio en el teorema 5 no se exige la continuidad del operador T.

Capítulo 3

Teoremas de puntos de mejor aproximación para contracciones de tipo Geraghty

3.1. Introducción

Es un hecho bien conocido que el principio de la contracción de Banach deja de ser cierto para contracciones con $k = 1$, es decir, para aplicaciones no expansivas, o lo que es lo mismo, aplicaciones $T\colon X \to X$ que satisfacen que

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \text{ para cualesquiera } x, y \in X.$$

El ejemplo típico es la traslación no trivial en $\mathbb{R}$, es decir, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = x + a$ con $a > 0$ que, evidentemente, no tiene punto fijo.

Si la condición contractiva anterior la sustituimos por

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \text{ para cualesquiera } x, y \in X, \text{ con } x \neq y \tag{3.1}$$

entonces la conclusión del principio de contraccion de Banach se satisface en el caso en que (X, d) sea un espacio métrico compacto. Este hecho, por lo que sabemos, fue probado por Edelstein en [15].

Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6 ([15]). *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $T\colon X \to X$ una aplicación que satisface, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$,*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Entonces T tiene un único punto fijo.

El resultado anterior deja de ser cierto en caso de que (X, d) no sea compacto. Un ejemplo lo proporciona el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, con la métrica usual, y la aplicación $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x.$$

En efecto, $\varphi_1(x) = x - \arctan x$ y $\varphi_2(x) = \arctan x$ son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$, ya que $\varphi_1'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \geq 0$, $\varphi_2'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ y $\varphi_1(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por ello, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $x > y$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= Tx - Ty \\
&= x - \arctan x - y + \arctan y \\
&= x - y + (\arctan y - \arctan x) \\
&< x - y = |x - y|,
\end{aligned}$$

dado que $\arctan y - \arctan x < 0$.

La aplicación T satisface la condición (3.1) y no tiene punto fijo, ya que si $x = \dfrac{\pi}{2} + x - \arctan x$, entonces $\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, que no tiene solución en $\mathbb{R}$.

En el artículo [17], Geraghty estudia qué función de control, distinta de una constante no negativa y menor que 1, hay que colocar en el segundo miembro de la condición (3.1) para que la conclusión del teorema de la contraccion de Banach sea cierta.

Geraghty usa la clase $\mathcal{F}$ de las funciones $\alpha\colon (0,\infty) \to [0,1)$ que satisfacen que, para cualquier sucesión $(t_n) \subset (0,\infty)$,

$$\alpha(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0.$$

Ejemplos de funciones de la clase $\mathcal{F}$ son $\varphi(t) = \dfrac{\log(1+t)}{t}$, $\varphi(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$ y $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$.

Un ejemplo de función no continua de $\mathcal{F}$ es la siguiente:

$$\alpha\colon (0,\infty) \to [0,1)$$
$$\alpha(t) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

El principal resultado de [17] es el siguiente.

Teorema 7 ([17])**.** *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación tal que existe $\alpha \in \mathcal{F}$ y que satisface*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\left(d(x,y)\right) \cdot d(x,y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$. Entonces T tiene un unico punto fijo.

Si en el teorema 7, tomamos α monótona decreciente el resultado de Geraghty nos da el de Rakotch en [31], una de las muchas generalizaciones del teorema de la contracción de Banach que aparecen en la literatura.

3.2. Resultados recientes

Algunos resultados sobre teoremas de puntos de mejor aproximación en los que se usan contracciones de tipo Gerahgty han aparecido recientemente en la literatura. A continuación, presentamos algunos de estos resultados.

En [12], los autores presentan el siguiente resultado acerca de puntos de mejor aproximación.

Teorema 8 ([12]). *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación tal que existe $\alpha \in \mathcal{F}$ de modo que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot d(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$. Supongamos que $T(A_0) \subset B_0$ y que el par (A, B) tiene la propiedad P. Entonces existe un único $x^* \in A$ que es punto de mejor aproximación de T.

Karapinar en [22], prueba un teorema acerca de puntos de mejor aproximación usando la clase $\mathcal{M}$ de las funciones $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

I) φ es creciente;

II) φ es subaditiva (es decir, $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ para cualesquiera $s, t \in [0, \infty)$);

III) φ es continua;

IV) $\varphi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.

Ejemplos de funciones de $\mathcal{M}$ son $\varphi(t) = \arctan t$ y $\varphi(t) = \log(1 + t)$.

El principal resultado de [22] es el siguiente.

Teorema 9 ([22])**.** *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación tal que existen $\varphi \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathcal{F}$ y satisface*

$$\varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \alpha\left(\varphi(d(x, y))\right) \cdot \varphi(d(x, y)),$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$. Supongamos que $T(A_0) \subset B_0$ y que el par (A, B) tiene la propiedad P. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

En [22] se presenta el teorema 9 como una generalización del teorema 8, que se obtendría tomando como φ la identidad sobre $[0, \infty)$ en el teorema 9. Pero en [20] los autores prueban que el teorema 9 no es en realidad una generalización del teorema 8 sino una consecuencia. Para ello se hace notar que, si $\varphi \in \mathcal{M}$ entonces $\varphi \circ d$ es también una distancia en X tal que si (X, d) es un espacio métrico completo entonces $(X, \varphi \circ d)$ también lo es. Además, se ve fácilmente que si el par (A, B) tiene la propiedad P en (X, d) también la tiene en $(X, \varphi \circ d)$ y, por tanto, el teorema 9 es una consecuencia del teorema 8.

En este mismo artículo, los autores prueban una verdadera generalización del teorema 8. Es la siguiente.

Teorema 10 ([20])**.** *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con $A_0 \neq \emptyset$ y tal que (A, B) tiene la propiedad P. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación con $T(A_0) \subset B_0$ y tal que existen $\alpha \in \mathcal{F}$ y $\psi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ que satisface las condiciones I), III) y IV) que definen la clase $\mathcal{M}$ y tales que*

$$\psi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \psi\left(d(x, y)\right),$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación $x^* \in A$. Además, cualquier sucesión $(x_n) \subset A_0$ que *verifique que*

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N},$$

converge a x^*.

Observamos que en los tres recientes resultados sobre teoremas de puntos de mejor aproximación para contracciones de tipo Geraghty, el operador $T\colon A \to B$ satisface lo siguiente:

- en el teorema 8:

  $d(Tx, Ty) \leq \alpha\,(d(x, y))\, d(x, y)$ para $x, y \in A$, $x \neq y$;

- en el teorema 9:

  $\varphi\,(d(Tx, Ty)) \leq \alpha\,(\varphi\,(d(x, y)))\, \varphi\,(d(x, y))$ para $x, y \in A$, $x \neq y$;

- en el teorema 10:

  $\psi\,(d(Tx, Ty)) \leq \alpha\,(d(x, y))\, \psi\,(d(x, y))$ para $x, y \in A$, $x \neq y$;

siendo $\alpha \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{M}$ y $\psi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ continua, creciente y tal que $\psi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Consecuentemente, en los tres casos T es no expansiva y, por lo tanto, continua.

3.3. El resultado obtenido

El objetivo de este capítulo es presentar un teorema de punto de mejor aproximación para contracciones de tipo Geraghty.

Antes de presentar nuestro resultado, necesitamos la siguiente definición.

Definición 5. Sean (A, B) un par de subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) y $T\colon A \to B$ una aplicación. Diremos que T es una contracción de tipo Geraghty si existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \text{máx}\left\{d(x, y), N(x, y) - d(A, B)\right\},$$

siendo $N(x, y) = \text{máx}\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$.

Nótese que, dado que para cualquier $x \in A$, $d(x, Tx) \geq d(A, B)$, entonces $N(x, y) \geq d(A, B)$ y la definición anterior es consistente.

A continuación, presentamos un ejemplo de una contracción de tipo Geraghty que no es continua.

Ejemplo 3. Consideremos $A = B = \mathbb{R}$ y la métrica usual en $\mathbb{R}$ y sea $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x, & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{1}{3}x, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Claramente, T no es continua en $x_0 = -1$. Además, como $A = B = \mathbb{R}$, se tiene que $d(A, B) = 0$.

Veamos que T es una contracción de tipo Geraghty.

Si $x, y \in (-\infty, -1]$,

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right| = \frac{1}{5}|x - y| = \frac{1}{5}d(x, y).$$

Si $x, y \in (-1, -\infty)$,

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y).$$

Finalmente, si $x \in (-\infty, -1]$ e $y \in (-1, \infty)$,

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| &= \left| \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y \right| = \left| \frac{3x - 5y}{15} \right| \\
&\leq \left| \frac{3x - 3y}{15} \right| + \left| \frac{2y}{15} \right| = \frac{1}{5}|x - y| + \frac{2}{15}|y| \\
&= \frac{1}{5}\left(|x - y| + \frac{2}{3}|y| \right) = \frac{1}{5}\left(d(x, y) + d(y, Ty) \right) \\
&\leq \frac{2}{5} \max \{ d(x, y), d(y, Ty) \} \\
&\leq \frac{2}{5} \max \{ d(x, y), N(x, y) \}
\end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier caso, se tiene que

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{2}{5} \max \{ d(x, y), N(x, y) \},$$

y esto prueba que T es una contracción de tipo Geraghty con $\alpha(t) = \frac{2}{5}$, que obviamente, es una función de la clase $\mathcal{F}$.

Seguidamente, presentamos el principal resultado del capítulo.

Teorema 11. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T \colon A \to B$ una contracción de tipo Geraghty continua tal que $T(A_0) \subset B_0$. Supongamos que el par (A, B) tiene la propiedad P. Entonces existe un único punto de mejor aproximación de la aplicación T.*

Demostración. Por hipótesis A_0 es no vacío. Sea pues $x_0 \in A_0$.

Se sigue que $Tx_0 \in T(A_0) \subset B_0$ y, consecuentemente, existirá $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$. De la misma manera, dado que $Tx_1 \in T(A_0) \subset B_0$, existirá $x_2 \in A_0$ tal que $d(x_2, Tx_1) = d(A, B)$.

Repitiendo este proceso, se obtiene una sucesión $(x_n) \subset A_0$ que verifica que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \geq 0. \tag{3.2}$$

Teniendo en cuenta que el par (A, B) tiene la propiedad P y, dado que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$$

y

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = d(A, B),$$

se deduce que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \text{ para cualquier } n \geq 1. \tag{3.3}$$

Si existiera n_0 tal que $d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = 0$, entonces, por la relación anterior, se tiene que

$$0 = d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = d(Tx_{n_0}, Tx_{n_0-1})$$

y, por tanto $Tx_{n_0} = Tx_{n_0-1}$. Por (3.2) se infiere que

$$d(A, B) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0-1}) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0}),$$

y esto nos da que x_{n_0} es un punto de mejor aproximación de la aplicación T. Esto es, si $d(x_{n+1}, x_n)$ se anula, para algún $n_0 \geq 1$, entonces T tiene un punto de mejor aproximación.

Supongamos, ahora, que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para cualquier $n \geq 1$.

Teniendo en cuenta que T es una contracción de tipo Geraghty y (3.3) , se deduce entonces que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \alpha\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \max\{d(x_n, x_{n-1}), \\ &\qquad N(x_n, x_{n-1}) - d(A, B)\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se pueden distinguir dos casos.

Caso 1) Supongamos que

$$\max\{d(x_n, x_{n-1}), N(x_n, x_{n-1}) - d(A, B)\} = d(x_n, x_{n-1}).$$

Entonces, por (3.4) y, teniendo en cuenta que $\alpha\colon (0,\infty) \to [0,1)$, se sigue que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \cdot d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}). \tag{3.5}$$

Caso 2) Supongamos que

$$\text{máx}\left\{d(x_n, x_{n-1}), N(x_n, x_{n-1}) - d(A,B)\right\} = N(x_n, x_{n-1}) - d(A,B).$$

Entonces se pueden dar los siguientes subcasos.

Subcaso 2a) Que $N(x_n, x_{n-1}) = d(x_n, Tx_n)$.

Teniendo en cuenta que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B)$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} N(x_n, x_{n-1}) - d(A,B) &= d(x_n, Tx_n) - d(A,B) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - d(A,B) \\ &= d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

Por tanto, por (3.4), y teniendo en cuenta que $\alpha(t) < 1$ para $t \in (0,\infty)$, se deduce que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \cdot d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}),$$

y esto es una contradicción.

Subcaso 2b) Que $N(x_n, x_{n-1}) = d(x_{n-1}, Tx_{n-1})$.

En este subcaso, se tiene que

$$\begin{aligned} N(x_n, x_{n-1}) - d(A,B) &= d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A,B) \\ &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) - d(A,B) \\ &= d(x_{n-1}, x_n) + d(A,B) - d(A,B) = d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

y, usando (3.4),

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \alpha\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \cdot d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por tanto, en cualquier caso posible se tiene que

$$d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1}) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Esto significa que $d(x_n, x_{n+1})$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos y, por tanto, existirá $r \geq 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = r$.

A continuación, probaremos que $r = 0$.

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $r > 0$. Teniendo en cuenta los posibles casos que pueden darse, es decir, (3.5) y (3.6), se sigue que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha\,(d(x_n, x_{n-1}))\cdot d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que

$$0 < \frac{d(x_{n+1}, x_n)}{d(x_n, x_{n-1})} \leq \alpha\,(d(x_n, x_{n-1})) < 1 \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

y, tomando límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$0 \leq \frac{r}{r} = 1 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha\,(d(x_n, x_{n-1})) \leq 1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\,(d(x_n, x_{n-1})) = 1$, y $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0$, ya que $\alpha \in \mathcal{F}$. Esto contradice nuestra hipótesis de que $\lim\limits_{n\to\infty} (d(x_n, x_{n-1}) = r > 0$. Por tanto se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} (d(x_n, x_{n-1}) = 0. \tag{3.7}$$

Seguidamente, probaremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Nótese, previamente que, como

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \geq 0,$$

y (A, B) tiene la propiedad P,

$$d(x_p, x_q) = d(Tx_{p-1}, Tx_{q-1}) \text{ para cualesquiera } p, q \in \mathbb{N}.$$

Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que (x_n) no es una sucesión de Cauchy. Esto significará que $\limsup_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) > 0$.

Usando, (3.2) y que T es una contracción de tipo Geraghty, se deduce que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &= d(x_n, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx_m) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \alpha\left(d(x_n, x_m)\right) \cdot \max\left\{d(x_n, x_m), N(x_n, x_m) - d(A, B)\right\} \\ &\quad + d(x_{m+1}, x_m). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se pueden presentar los dos casos siguientes.

Caso 1) Que $\max\{d(x_n, x_m), N(x_n, x_m) - d(A, B)\} = d(x_n, x_m)$.

En esta situación, por (3.8), se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m) + \alpha\left(d(x_n, x_m)\right) \cdot d(x_n, x_m),$$

y, por tanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \left(1 - \alpha\left(d(x_n, x_m)\right)\right)^{-1} \left(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)\right). \tag{3.9}$$

Caso 2) Que

$$\max\left\{d(x_n, x_m), N(x_n, x_m) - d(A, B)\right\} = N(x_n, x_m) - d(A, B).$$

En este caso se pueden distinguir dos subcasos.

Subcaso 2a) Que $N(x_n, x_m) = d(x_n, Tx_n)$.

Usando (3.8) se sigue que

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m)\\
&\quad+\alpha\left(d(x_n,x_m)\right)\cdot\left(d(x_n,Tx_n)-d(A,B)\right)\\
&\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m)\\
&\quad+\alpha\left(d(x_n,x_m)\right)\cdot\left(d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tx_n)-d(A,B)\right)\\
&= d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m) \qquad (3.10)\\
&\quad+\alpha\left(d(x_n,x_m)\right)\cdot\left(d(x_n,x_{n+1})+d(A,B)-d(A,B)\right)\\
&= d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m)+\alpha\left(d(x_n,x_m)\right)\cdot d(x_n,x_{n+1})\\
&< d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m)+d(x_n,x_{n+1})\\
&= 2d(x_n,x_{n+1})+d(x_{m+1},x_m).
\end{aligned}$$

Subcaso 2b) Que $N(x_n,x_m)=d(x_m,Tx_m)$.

Usando el mismo argumento que en el subcaso 2a), se llega a que

$$d(x_n,x_m)<2d(x_m,x_{m+1})+d(x_{n+1},x_n). \qquad (3.11)$$

Sean, ahora,

$$A=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon \text{se verifica el subcaso 2a)}\}$$

y

$$B=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon \text{se verifica el subcaso 2b)}\}.$$

Veamos que si $\operatorname{card}A=\infty$ o $\operatorname{card}B=\infty$ llegamos a una contradicción.

Supongamos que $\operatorname{card}A=\infty$ (el mismo razonamiento es válido para el caso en que $\operatorname{card}B=\infty$).

Entonces, por (3.10), se tiene que

$$d(x_n,x_m)<2d(x_n,x_{n+1})+d(x_m,x_{m+1})$$

para infinitos $n,m\in\mathbb{N}$.

Tomando límite cuando $n, m \to \infty$ en la última desigualdad y, teniendo en cuenta (3.7), se deduce que

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

y esto contradice el hecho de que $\limsup\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) > 0$.

Por tanto, salvo a lo sumo para un número finito de pares $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se satisface el caso 1), es decir, por (3.9) se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq (1 - \alpha\,(d(x_n, x_m)))^{-1}\,(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m))$$

para cualquier $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ salvo a lo sumo un número finito.

Tomando límite cuando $n, m \to \infty$ en la última desigualdad, y teniendo en cuenta (3.7) y nuestra hipótesis de que $\limsup\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) > 0$, se deduce que

$$\limsup_{n,m\to\infty} (1 - \alpha\,(d(x_n, x_m)))^{-1} = \infty$$

o, lo que es lo mismo,

$$\limsup_{n,m\to\infty} \alpha\,(d(x_n, x_m)) = 1.$$

Como $\alpha \in \mathcal{F}$, esto implica que $\limsup\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis de partida.

Esto prueba que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Por tanto, como $(x_n) \subset A$ y A es cerrado en el espacio métrico completo (X, d), existirá $x^* \in A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Veamos que x^* es punto de mejor aproximación de T.

Por la continuidad de T, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx^*$.

Además, dado que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ para cualquier $n \geq 0$ y d es continua, se tiene que

$$d(A, B) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tx_n) = d(x^*, Tx^*).$$

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación de T.

Supongamos que x_1 y x_2 son puntos de mejor aproximación de T y que $x_1 \neq x_2$. Esto significa que

$$d(x_1, Tx_1) = d(x_2, Tx_2) = d(A, B).$$

Usando la propiedad P de (A, B) se deduce que

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2).$$

Usando el hecho de que T es una contracción de tipo Geraghty, se sigue que

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha\left(d(x_1, x_2)\right) \text{máx}\Big\{d(x_1, x_2), N(x_1, x_2) - d(A, B)\Big\}. \tag{3.12}$$

Como hemos visto a lo largo de la demostración, se nos pueden presentar los siguientes casos

Caso 1) Que $\text{máx}\{d(x_1, x_2), N(x_1, x_2) - d(A, B)\} = d(x_1, x_2)$.

Entonces, de (3.12) se sigue que

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha\left(d(x_1, x_2)\right) d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2), \tag{3.13}$$

lo cual es una contradicción.

Caso 2) Que $\text{máx}\{d(x_1, x_2), N(x_1, x_2) - d(A, B)\} = N(x_1, x_2) - d(A, B)$.

Se pueden presentar los siguientes subcasos.

Subcaso 2a) Que $N(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$.

Como $d(x_1, Tx_1) = d(A, B)$, por (3.12) tenemos que

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha\left(d(x_1, x_2)\right)\left(d(x_1, Tx_1) - d(A, B)\right) = 0$$

y, consecuentemente, $x_1 = x_2$. Esto contradice la hipótesis de que $x_1 \neq x_2$.

Subcaso 2b) Que $N(x_1, x_2) = d(x_2, Tx_2)$.

El mismo argumento usado en el subcaso 2a) nos da una contradicción.

En todo caso, se llega a una contradicción y, por tanto, $x_1 = x_2$.

Esto prueba la unicidad del punto de mejor aproximación de T.

Con esto se finaliza la prueba. □

Nota 5. Téngase en cuenta que en las hipótesis del teorema 11 hemos exigido la continuidad del operador T porque en un principio las contracciones de tipo Geraghty no tienen por qué ser continuas. Nótese que no hemos podido probar el teorema 11 sin la condición de continuidad de T.

3.4. Corolarios y ejemplos

Seguidamente presentaremos algunas consecuencias del teorema 11.

Corolario 10. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) tal que $A_0 \neq \emptyset$ y tal que el par (A, B) tiene la propiedad P. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación que verifica que $T(A_0) \subset B_0$ y tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\,(d(x, y)) \cdot d(x, y) \text{ para cualesquiera } x, y \in A \text{ con } x \neq y.$$

siendo $\alpha \in \mathcal{F}$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Nótese que la condición contractiva del corolario 10 implica la que aparece en el teorema 11. Además, dado que $\alpha \in \mathcal{F}$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\,(d(x, y)) \cdot d(x, y) < d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$, T es no expansiva y, consecuentemente, continua. Se verifican pues las hipótesis del teorema 11 y el corolario se sigue de este teorema. □

El corolario 10 es precisamente el resultado principal del artículo [12].

El siguiente corolario nos da un teorema de punto de mejor aproximación para una aplicación continua que satisfaga una condición contractiva de tipo Geraghty-Kannan.

Corolario 11. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) tal que $A_0 \neq \emptyset$ y el par (A, B) tiene la propiedad P. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua que verifica que $T(A_0) \subset B_0$ y que, para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \left(\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} - d(A, B)\right),$$

siendo $\alpha \in \mathcal{F}$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Téngase en cuenta que, para $x, y \in A$, se tiene que

$$\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} \geq \frac{2d(AB)}{2} = d(A, B)$$

y, por tanto, la condición contractiva está bien definida.

Por otra parte, se tiene que, para cualesquiera $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \left(\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} - d(A, B)\right) \\ &\leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \left(\frac{2N(x, y)}{2} - d(A, B)\right) \\ &= \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \left(N(x, y) - d(A, B)\right) \\ &\leq \alpha\left(d(x, y)\right) \cdot \max\left\{d(x, y), N(x, y) - d(A, B)\right\} \end{aligned}$$

y, por tanto, T es una contracción de tipo Geraghty.

Finalmente, por el teorema 11 se obtiene el resultado. □

Veamos a continuación algunas consecuencias del teorema 11 encuadradas dentro del marco de los teoremas de punto fijo.

Téngase en cuenta que si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico, entonces (A, A) tiene la propiedad P.

Corolario 12. *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T\colon X \to X$ *una contracción de tipo Geraghty continua. Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

El corolario 12 generaliza el teorema 1.3 que es el principal resultado de [17].

Si en el corolario 11 ponemos $A = B$ tenemos el siguiente resultado de punto fijo para contracciones de tipo Geraghty-Kannan.

Corolario 13. *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T\colon X \to X$ *una aplicación continua para la que existe* $\alpha \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\left(d(x, y)\right) \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}$$

para cualesquiera $x, y \in X$ *con* $x \neq y$*.*

Entonces T *tiene un único punto fijo.*

Corolario 14. *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T\colon X \to X$ *una aplicación continua que verifica que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right) \text{ para cualesquiera } x, y \in X,$$

con $\alpha, \beta \geq 0$ *y* $\alpha + 2\beta < 1$*. Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Demostración. Nótese que la condición contractiva del corolario 14 implica que

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \alpha d(x, y) + \beta\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right) \\ &= \alpha d(x, y) + 2\beta \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} \\ &\leq (\alpha + 2\beta) \max\left\{d(x, y), \frac{2N(x, y)}{2}\right\} \\ &= (\alpha + 2\beta) \max\left\{d(x, y), N(x, y)\right\} \end{aligned}$$

y, por tanto, tomando $\gamma(t) = \alpha + 2\beta$ para $t \in (0, \infty)$, $\gamma \in \mathcal{F}$ y T satisface la condición contractiva del teorema 11.

□

En los corolarios 13 y 14 hemos exigido la continuidad porque existen ejemplos de aplicaciones que satisfacen las condiciones contractivas de estos corolarios y que no son continuas.

Ejemplo 4. Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{7}x, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Es claro que T no es continua en $x_0 = -1$. Veamos que T satisface la condición contractiva del corolario 13.

Si $x, y \in (-\infty, -1]$, entonces

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right| \leq \frac{1}{5}|x| + \frac{1}{5}|y| &= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}|x| + \frac{4}{5}|y|\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}. \end{aligned}$$

Si $x, y \in (-1, \infty)$,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}y\right| \leq \frac{1}{7}|x| + \frac{1}{7}|y| &= \frac{1}{6}\left(\frac{6}{7}|x| + \frac{6}{7}|y|\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \in (-\infty, -1]$ e $y \in (-1, \infty)$,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{7}y\right| \leq \frac{1}{5}|x| + \frac{1}{7}|y| &= \frac{1}{4}\frac{4}{5}|x| + \frac{1}{6}\frac{6}{7}|y| \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}|x| + \frac{6}{7}|y|\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier caso se tiene que

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

Esto prueba que T satisface la condición contractiva del corolario 13 con $\alpha(t) = \dfrac{1}{2}$ y no es continua.

Ejemplo 5. Consideremos $([0,1], d)$ con d la distancia usual y la aplicación

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{7x}{20}, & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ \dfrac{3x}{10}, & \text{si } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Es claro que T no es continua en $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Veamos que T satisface la condición contractiva del corolario 14 tomando $\alpha = \dfrac{1}{10}$ y $\beta = \dfrac{4}{9}$.

En efecto, si $x, y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| = \left|\frac{7}{20}x - \frac{7}{20}y\right| = \frac{7}{20}|x-y| \\ &= \frac{1}{10}|x-y| + \frac{5}{20}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y| + \frac{5}{20}|x| + \frac{5}{20}|y| < \frac{1}{10}|x-y| + \frac{4}{9}\left(\frac{13}{20}|x| + \frac{13}{20}|y|\right) \\ &= \frac{1}{10}d(x,y) + \frac{4}{9}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right), \end{aligned}$$

haciendo uso de que, para $x, y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$d(x,Tx) = |x - Tx| = \left|x - \frac{7x}{20}\right| = \frac{13}{20}|x|$$

y

$$d(y,Ty) = |y - Ty| = \left|y - \frac{7y}{20}\right| = \frac{13}{20}|y|.$$

Si $x, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{3}{10}x - \frac{3}{10}y\right| &= \frac{3}{10}|x-y| \\
&= \frac{1}{10}|x-y| + \frac{2}{10}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y| + \frac{2}{10}|x| + \frac{2}{10}|y| < \frac{1}{10}|x-y| + \frac{4}{9}\left(\frac{7}{10}|x| + \frac{7}{10}|y|\right) \\
&= \frac{1}{10}d(x,y) + \frac{4}{9}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right),
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que, para cualquier $z \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$d(z,Tz) = |z - Tz| = \left|z - \frac{3z}{10}\right| = \frac{7}{10}|z|.$$

Por último, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{7x}{20} - \frac{3y}{10}\right| &= \left|\frac{1}{10}x + \frac{5}{20}x - \frac{1}{10}y - \frac{2}{10}y\right| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y| + \left|\frac{5}{20}x - \frac{2}{10}y\right| \leq \frac{1}{10}|x-y| + \frac{5}{20}|x| + \frac{2}{10}|y| \\
&< \frac{1}{10}|x-y| + \frac{4}{9}\left(\frac{13}{20}|x| + \frac{7}{10}|y|\right) \\
&= \frac{1}{10}d(x,y) + \frac{4}{9}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in [0,1]$, se tiene que

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{10}d(x,y) + \frac{4}{9}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right)$$

y, por tanto, T satisface la condición contractiva del corolario 14 con $\alpha = \frac{1}{10}$ y $\beta = \frac{4}{9}$ y, además $\alpha + 2\beta = \frac{1}{10} + \frac{8}{9} = \frac{89}{90} < 1$

El ejemplo 5 aparece en [34].

Seguidamente, presentamos algunos ejemplos relacionados con los resultados obtenidos en el capítulo.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de la propiedad P de (A, B) no puede ser omitida en el teorema 11.

Ejemplo 6. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, donde d es la distancia usual, y sean $A = \{8, -8\}$ y $B = \{1, -1\}$. Es claro que A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ y, además, $d(A, B) = 7$, $A_0 = A$ y $B_0 = B$.

Si consideramos la aplicación $T\colon A \to B$ dada por $T8 = -1$ y $T(-8) = 1$, entonces, es obvio que T es continua y, además, para $x \neq y$

$$d(Tx, Ty) = d(T8, T(-8)) = d(-1, 1) = 2,$$

$$d(x, y) = d(8, -8) = 16,$$

$$d(x, Tx) = d(8, -1) = 9,$$

y

$$d(y, Ty) = d(-8, 1) = 9$$

$$d(Tx, Ty) = 2 \leq 8 = \frac{1}{2} \text{máx}\{16, 2\} = \frac{1}{2} \text{máx}\{d(x, y), N(x, y) - d(A, B)\}.$$

Por tanto, T es una contracción de tipo Geraghty.

Por otra parte, (A, B) no tiene la propiedad P, dado que

$$d(8, 1) = d(-8, -1) = 7 = d(A, B) \text{ y } d(8, -8) = 16 > 2 = d(1, -1).$$

Además, se observa que T no tiene punto de mejor aproximación ya que, para cualquier $x \in A$,

$$d(x, Tx) = 9 \neq 7 = d(A, B).$$

El siguiente ejemplo prueba que la propiedad P no es una condición necesaria para la existencia de un punto de mejor aproximación.

Ejemplo 7. Consideremos $\mathcal{C}[0,\pi] = \{f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$, que es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma del supremo, esto es,

$$d(f,g) = \sup\left\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,\pi]\right\}.$$

Sean $A = \{f_\alpha \in \mathcal{C}[0,\pi]\colon f_\alpha(x) = 1 - \alpha \operatorname{sen} x \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1\}$ y $B = -A$.

Es claro que A y B son cerrados en $\mathcal{C}[0,\pi]$. Además, para cualesquiera α, β tales que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f_\alpha, -f_\beta) &= \sup\left\{|f_\alpha(x) + f_\beta(x)| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{|1 - \alpha \operatorname{sen} x + 1 - \beta \operatorname{sen} x| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{|2 - (\alpha+\beta) \operatorname{sen} x| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{2 - (\alpha+\beta) \operatorname{sen} x\colon x \in [0,\pi]\right\} = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, $d(A,B) = 2$.

Además, dado que $d(f_\alpha, -f_\beta) = 2 = d(A,B)$ para cualesquiera α, β con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $A_0 = A$ y $B_0 = B$.

Por otra parte, el par (A,B) no tiene la propiedad P, ya que

$$d\left(f_{\frac{1}{2}}, -f_{\frac{1}{2}}\right) = d\left(f_{\frac{1}{3}}, -f_{\frac{1}{2}}\right) = 2 = d(A,B),$$

mientras que

$$\begin{aligned} d\left(f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{1}{3}}\right) &= \sup\left\{\left|1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x\right| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{\left|-\frac{1}{6}\operatorname{sen} x\right| : x \in [0,\pi]\right\} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

y $d\left(-f_{\frac{1}{2}}, -f_{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Sea $T\colon A \to B$ la aplicación definida por

$$Tf_\alpha = -f_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Veamos que T es una contracción de tipo Geraghty.

En efecto, si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $\alpha \neq \beta$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(Tf_\alpha, Tf_\beta\right) &= d\left(-f_{\frac{\alpha}{2}}, -f_{\frac{\beta}{2}}\right) = d\left(f_{\frac{\alpha}{2}}, f_{\frac{\beta}{2}}\right) \\ &= \sup\left\{\left|1 - \frac{\alpha}{2}\operatorname{sen} x - \left(1 - \frac{\beta}{2}\operatorname{sen} x\right)\right| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\operatorname{sen} x\right| : x \in [0,\pi]\right\} = \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right| \end{aligned}$$

De la misma manera, se tiene que $d\left(f_\alpha, f_\beta\right) = |\alpha - \beta|$. Luego, para cualesquiera α, β con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} d\left(Tf_\alpha, Tf_\beta\right) &= \frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right| = \frac{1}{2} d\left(f_\alpha, f_\beta\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\operatorname{máx}\left\{d\left(f_\alpha, f_\beta\right), N\left(f_\alpha, f_\beta\right) - d(A,B)\right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, T es una contracción de tipo Geraghty con $\alpha(t) = \dfrac{1}{2}$ para $t > 0$.

Por otra parte, para cualquier α con $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} d\left(f_\alpha, Tf_\alpha\right) &= d\left(f_\alpha, -f_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \sup\left\{\left|1 - \alpha\operatorname{sen} x + 1 - \frac{\alpha}{2}\operatorname{sen} x\right| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{\left|2 - \frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen} x\right| : x \in [0,\pi]\right\} \\ &= \sup\left\{2 - \frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen} x \colon x \in [0,\pi]\right\} = 2 = d(A,B). \end{aligned}$$

En este caso, cualquier punto es un punto de mejor aproximación de T.

Nótese que en este ejemplo no tenemos la unicidad del punto de mejor aproximación.

En el siguiente ejemplo se prueba que la condición de que A y B sean cerrados no es una condición necesaria para la existencia de un punto de mejor aproximación.

En el ejemplo, se utilizará la función $f\colon [0,\infty) \to [0,1)$ dada por

$$f(x) = \tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Nótese que f es creciente y que

$$f''(x) = \frac{8\,e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3} < 0 \text{ para } x > 0,$$

por lo que f es también cóncava. Como, además, $f(0) = 0$, f es una función subaditiva que satisface que

$$|f(x) - f(y)| \leq f\left(|x-y|\right) \text{ para } x, y \in [0, \infty).$$

(ver lema 1).

Además, dado que la función

$$g(x) = x - f(x) = x - \tanh x = x - \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

para $x \in [0, \infty)$, tiene como derivada

$$g'(x) = \frac{e^{2x}-1}{(e^{2x}+1)^2} > 0 \text{ para } x > 0,$$

y, por tanto, es estrictamente creciente, se tiene que

$$\tanh x < x \text{ para } x > 0.$$

Consideremos ahora la función $\alpha\colon (0, \infty) \to [0, 1)$ dada por $\alpha(t) = \dfrac{\tanh t}{t}$. Veamos que $\alpha \in \mathcal{F}$, es decir, que

$$\alpha(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0.$$

En efecto, primeramente observamos que si $\alpha(t_n) \to 1$, entonces (t_n) es una sucesión acotada, ya que en caso contrario, como la función $f(t) = \tanh t$ es acotada, existiría una subsucesión (t_{n_k}) de (t_n) tal que $\alpha(t_{n_k}) \to 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $t_n \not\to 0$. Esto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $p_n \in \mathbb{N}$ tal que $t_{p_n} \geq \epsilon$. Como t_{p_n} es una sucesión acotada, podemos suponer que $t_{p_n} \to a > 0$.

Entonces

$$\alpha\left(t_{p_n}\right)=\frac{\tanh t_{p_n}}{t_{p_n}}\to\frac{\tanh a}{a}=1$$

y, dado que la única solución de la ecuación $\tanh x = x$ en $[0,\infty)$ es $x=0$, se tiene que $a=0$, que es una contradicción, ya que $t_{p_n}\geq\epsilon$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por tanto, $t_n\to 0$, lo que prueba que $\alpha\in\mathcal{F}$.

Con esto, ya estamos en condiciones de presentar nuestro ejemplo.

Ejemplo 8. Consideremos el espacio métrico completo $(\mathbb{R}^2,d)$, donde d es la distancia euclidea, y sean los subconjuntos

$$A=[0,\infty)\times\{0\}\text{ y }B=[0,1)\times\{1\}.$$

Es claro que $d(A,B)=1$, B no es cerrado y $A_0=[0,1)\times\{0\}$ y $B_0=B$.

Consideremos la aplicación $T\colon A\to B$ definida por $T(x,0)=(\tanh x,1)$. Obviamente, $T(A_0)\subset B_0$. Seguidamente, probamos que T es una contracción de tipo Geraghty.

Sean $(x,0),(y,0)\in A$ con $x\neq y$, y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x>y$. Entonces,

$$\begin{aligned}
d\left(T(x,0),T(y,0)\right)&=d\left((\tanh x,1),(\tanh y,1)\right)=|\tanh x-\tanh y|\\
&\leq\tanh\left(|x-y|\right)=\tanh\left(x-y\right)=\frac{\tanh\left(x-y\right)}{x-y}(x-y)\\
&=\frac{\tanh\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right)}{d\left((x,0),(y,0)\right)}d\left((x,0),(y,0)\right)\\
&=\alpha\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right)\cdot d\left((x,0),(y,0)\right)\\
&\leq\alpha\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right)\cdot\max\left\{d\left((x,0),(y,0)\right),\right.\\
&\qquad\qquad\left.N\left((x,0),(y,0)\right)-d(A,B)\right\}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que T es una contracción de Geraghty con $\alpha(t)=\dfrac{\tanh t}{t}\in\mathcal{F}$ (como vimos anteriormente).

Claramente, T es continua.

Veamos que el par (A, B) tiene la propiedad P.

En efecto, supongamos que

$$1 = d\left((x, 0), (y, 1)\right) = \sqrt{(x - y)^2 + 1}$$

y que

$$1 = d\left((x', 0), (y', 1)\right) = \sqrt{(x' - y')^2 + 1}.$$

De aquí se deduce que $x = y$ y $x' = y'$ y, consecuentemente,

$$d\left((x, 0), (x', 0)\right) = |x - x'| = |y - y'| = d\left((y, 1), (y', 1)\right).$$

Por otra parte, $(0, 0)$ es un punto de mejor aproximación de T, puesto que

$$d\left((0, 0), T(0, 0)\right) = d\left((0, 0), (\tanh 0, 1)\right) = d\left((0, 0), (0, 1)\right) = 1 = d(A, B).$$

Veamos, además, que $(0, 0)$ es el único punto de mejor aproximación de T.

En efecto, sea $(x, 0)$ un punto de mejor aproximación de T. Esto significa que

$$\begin{aligned} d(A, B) = 1 &= d\left((x, 0), T(x, 0)\right) \\ &= d\left((x, 0), (\tanh x, 1)\right) = \sqrt{1 + (x - \tanh x)^2} \end{aligned}$$

por lo que $x = \tanh x$, lo que implica que $x = 0$. Por tanto $(x, 0) = (0, 0)$.

Capítulo 4

Teoremas de puntos de mejor aproximación bajo la propiedad P débil

4.1. Introducción

Por lo que sabemos, la propiedad P débil de un par de subconjuntos (A, B) no vacíos de un espacio métrico (X, d) aparece por primera vez en el artículo [42]. El objetivo principal del artículo mencionado es presentar una prueba más fácil y bajo condiciones más débiles (sustituir la conocida propiedad P de un par de subconjuntos (A, B) por la propiedad P débil) del principal resultado presentado en el trabajo [12]. A nuestro entender, lo más novedoso y relevante del trabajo [42] es que el argumento presentado en la prueba de un teorema de punto de mejor aproximación la reduce a un problema de punto fijo. Hasta ahora, los teoremas sobre puntos de mejor aproximación tenían como consecuencias resultados sobre puntos fijos (basta hacer $A = B$) y, con este nuevo tipo de prueba, vemos como algunos resultados sobre puntos fijos pueden ser la herramienta principal para la prueba de algunos resultados sobre puntos de mejor aproximación.

Este modo de proceder ha generado la aparición en los dos últimos años de algunos trabajos sobre puntos de mejor aproximación cuya prueba se fundamenta en este tipo de argumento

Antes de presentar la definición de la propiedad P débil para un par de subconjuntos (A, B) de un espacio métrico (X, d), recordaremos la definición de la propiedad P.

Definición 6. Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) con $A_0 \neq \emptyset$. Se dice que el par (A, B) tiene la propiedad P si, para cualesquiera $x, y \in A$ y $u, v \in B$, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} d(x,u) = d(A,B) \\ d(y,v) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = d(u,v).$$

Si en la parte derecha de la definición anterior reemplazamos la igualdad por un menor o igual se obtiene la definición de la propiedad P débil. Más concretamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 7. Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) con $A_0 \neq \emptyset$. Diremos que el par (A, B) tiene la propiedad P débil si, para cualesquiera $x, y \in A$ y $u, v \in B$, se tiene que

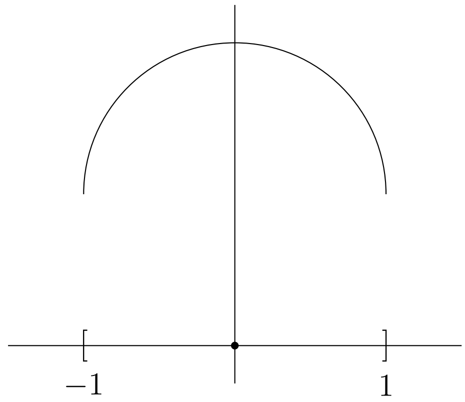
$$\left.\begin{array}{l} d(x,u) = d(A,B) \\ d(y,v) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) \leq d(u,v).$$

Es claro que la propiedad P implica la propiedad P débil. El siguiente ejemplo, que aparece en [42], prueba que la implicación contraria es falsa.

Ejemplo 9. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d)$ donde d es la distancia euclidea. Sean los conjuntos $A = \{(0,0)\}$ y $B = \left\{(x,y) \colon y = 1 + \sqrt{1-x^2}\right\}$.

Evidentemente, estos conjuntos son cerrados en $(\mathbb{R}^2, d)$.

El gráfico siguiente muestra que $A_0 = (0,0)$ y $B_0 = \{(1,1), (-1,1)\}$.



Por otra parte, dado que

$$d\left((0,0),(1,1)\right) = \sqrt{2} = d(A,B)$$

y

$$d\left((0,0),(-1,1)\right) = \sqrt{2} = d(A,B)$$

y, además, $d\left((0,0),(0,0)\right) = 0 < 2 = d\left((1,1),(-1,1)\right)$, se tiene que el par (A,B) no tiene la propiedad P, mientras que si tiene la propiedad P débil.

Seguidamente, presentaremos algunos resultados relacionados con la propiedad P débil y que aparecen implícitamente contenidos en [42]. Incluiremos las pruebas para una mejor lectura del contenido del presente capítulo.

Lema 2. *Sea (A,B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) con $A_0 \neq \emptyset$. Supongamos que el par (A,B) tiene la propiedad P débil. Entonces se tiene que*

I) B_0 es cerrado;

II) si $T\colon A \to B$ es una aplicación continua con $T(A_0) \subset B_0$, entonces $T\left(\overline{A_0}\right) \subset B_0$.

Demostración. I) Supongamos que $(y_n) \subset B_0$ y que $y_n \to y$.

Por definición de B_0, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $x_n \in B_0$ tal que

$$d(x_n, y_n) = d(A, B). \tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta la propiedad P débil del par (A, B), se tiene que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(y_n, y_m).$$

Dado que (y_n) es una sucesión convergente, es de Cauchy y, por tanto, de la última desigualdad se sigue que (x_n) es también de Cauchy. Dado que A es cerrado en un espacio métrico completo, es también completo y, por tanto, existirá $x \in A$ tal que $x_n \to x$.

Teniendo en cuenta que la distancia es una aplicación continua, y tomando límite cuando n tiende a infinito en 4.1, se deduce que

$$d(x, y) = d(A, B)$$

y, consecuentemente, $y \in B_0$.

II) Dado que $T(A_0) \subset B_0$, para probar que $T\left(\overline{A_0}\right) \subset B_0$, es suficiente probar que $T(\overline{A_0} - A_0) \subset B_0$.

Supongamos que $x \in \overline{A_0} - A_0$. Entonces existirá $(x_n) \subset A_0$ tal que $x_n \to x$. La continuidad de T nos da que $Tx_n \to Tx$ y, puesto que $T(A_0) \subset B_0$, resultará que $(Tx_n) \subset T(A_0) \subset B_0$. Teniendo en cuenta que B_0 es cerrado, por I) se deduce que $Tx \in B_0$. □

Si (A, B) es un par de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico completo con la propiedad P débil tal que $A_0 \neq \emptyset$ y además $T\colon A \to B$ es continua y $T(A_0) \subset B_0$, entonces podemos definir una aplicación $P\colon T(\overline{A_0}) \to A_0$ de la siguiente manera. Dado $y \in T(\overline{A_0})$, el apartado

II) del lema 2 asegura que $y \in B_0$ y, por tanto, la existencia de $x \in A_0$ tal que $d(x,y) = d(A,B)$. Definimos $Py = x$.

Veamos que la aplicación P está bien definida. Para ello sea $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1,y) = d(A,B)$. Dado que (A,B) tiene la propiedad P débil, de

$$d(x,y) = d(A,B)$$

y

$$d(x_1,y) = d(A,B)$$

se sigue que $d(x,x_1) \leq d(y,y) = 0$ y, consecuentemente, $x = x_1$, lo que prueba que P está bien definida.

Además, dado que, para cualesquiera $y_1, y_2 \in T(\overline{A_0})$, se tiene que

$$d(Py_1,y_1) = d(A,B)$$

y

$$d(Py_2,y_2) = d(A,B),$$

por la propiedad P débil de (A,B) se sigue que

$$d(Py_1,Py_2) \leq d(y_1,y_2)$$

y por tanto P es una aplicación no expansiva.

En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3. *Sean A y B subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) tales que $A_0 \neq \emptyset$ y el par (A,B) tiene la propiedad P débil. Supongamos que $T\colon A \to B$ es una aplicación continua con $T(A_0) \subset B_0$. Entonces existe una aplicación no expansiva $P\colon T(\overline{A_0}) \to A_0$ tal que $d(Py,y) = d(A,B)$ para cualquier $y \in T(\overline{A_0})$.*

El argumento que permite traducir un resultado sobre puntos de mejor aproximación a uno sobre puntos fijos es el siguiente. Sea (A,B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico (X, d) con $A_0 \neq \emptyset$. Supongamos que (A, B) tiene la propiedad P débil y sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua con $T(A_0) \subset B_0$. Considérese $P \circ T\colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$ siendo P la aplicación introducida en el lema 3,

Dado que, para cualesquiera $x_1, x_2 \in A_0$,

$$d\left((P \circ T)(x_1), (P \circ T)(x_2)\right) = d\left(P(T(x_1)), P(T(x_2))\right) \leq d\left(T(x_1), T(x_2)\right)$$

por ser P no expansiva, el operador $P \circ T$ hereda la condición contractiva de T y, aplicando el teorema de punto fijo adecuado se obtiene el resultado correspondiente para puntos de mejor aproximación.

Finalizamos esta introducción señalando que en [39] se trata de una forma cerrada todas las cuestiones sobre la propiedad P débil tratadas anteriormente.

4.2. La propiedad P débil y el lema 3

En esta sección analizaremos cómo se obtienen algunos resultados sobre puntos de mejor aproximación existentes en la literatura usando la propiedad P débil y el argumento detallado en la sección anterior.

La motivación del primer resultado que presentaremos en esta sección es el siguiente teorema que aparece como resultado principal en [30].

Teorema 12 ([30]). *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P y tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación tal que $T(A_0) \subset B_0$ y para la que se cumple que, cualesquiera que sean $x, y \in A$,*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi\left(d(x, y)\right),$$

siendo ϕ una función que altera la distancia (ver capítulo 2). Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Nótese que la aplicación $T\colon A \to B$ que aparece en el teorema 12 verifica que

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi\left(d(x, y)\right) \leq d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$ y, por tanto, T no es expansiva y, por ende, continua.

El siguiente resultado es una mejora del teorema 12 usando la propiedad P débil.

Teorema 13. *Si en el teorema 12 reemplazomos la hipótesis de la propiedad P del par (A, B) por la de propiedad P débil, se obtiene la misma conclusión.*

Demostración. El lema 3 asegura la existencia de la aplicación

$$P \circ T\colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$$

tal que, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$,

$$d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \leq d(Tx, Ty).$$

Veamos a continuación que $P \circ T$ satisfce las condiciones del teorema 1 (teorema del punto fijo dado por Rhoades en [32]).

En efecto, para cualesquiera $x, y \in A_0$ se tiene que

$$d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \leq d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi\left(d(x, y)\right)$$

y, como $(\overline{A_0}, d)$ es un espacio métrico completo, por el teorema del punto fijo arriba reseñado, $P \circ T$ tiene un único punto fijo $x_0 \in \overline{A_0}$.

Vemos a continuación que x_0 es un punto de mejor aproximación de T.

Sea x_0 es un punto fijo de $P \circ T$, esto es,

$$(P \circ T)(x_0) = x_0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$P(Tx_0) = x_0$$

y, consecuentemente, por definición de P,

$$d(x_0, Tx_0) = d(A, B).$$

Esto prueba que x_0 es un punto de mejor aproximación de T.

Para la unicidad, sea $x_1 \in A$ tal que

$$d(x_1, Tx_1) = d(A, B).$$

Entonces, por definición de P, tenemos que $P(Tx_1) = x_1$ y consecuentemente x_1 es un punto fijo de $P \circ T$ y, por la unicidad del punto fijo, se sigue que $x_1 = x_0$.

Esto prueba la unicidad del punto de mejor aproximación. □

La motivación para el siguiente resultado aparece en [33], donde los autores demuestran el siguiente teorema.

Teorema 14. *[33] Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación que verifica que, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \phi\left(M_T(x, y)\right),$$

siendo $M_T(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\right\}$ y ϕ una función de comparación (recuérdese que $\phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función de comparación si es creciente y $\phi^{(n)}(t) \to 0$ para todo $t > 0$) . Entonces T tiene un único punto fijo.

Nótese que en el teorema 14 no se exige la continuidad del operador T.

A continuación presentamos un ejemplo de una aplicación $T\colon X \to X$ que satisface la condición contractiva del teorema 14 y no es continua.

Ejemplo 10. Consideremos el espacio métrico completo $([0,1], d)$ donde d es la métrica usual en $\mathbb{R}$ y sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la aplicación definida por

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{7x}{20}, & \text{si } x \in [0,1/2], \\ \dfrac{3x}{10}, & \text{si } x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Es claro que esta aplicación no es continua en $x_0 = 1/2$. Como ya vimos en el ejemplo 5 del capítulo 3, se tiene que, para cualesquiera $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le \frac{1}{10} d(x,y) + \frac{4}{9}\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) \\ &\le \frac{1}{10} \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} \\ &\quad + \frac{4}{9} \cdot 2 \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} \\ &= \left(\frac{1}{10} + \frac{8}{9}\right) M_T(x,y) = \frac{89}{90} M_T(x,y). \end{aligned}$$

Por tanto T satisface la condición contractiva del teorema 14 haciendo $\phi(t) = \dfrac{89}{90} t$ que, evidentemente, es una función de comparación.

Nuestro siguiente resultado es la versión del teorema 14 en el contexto de puntos de mejor aproximación.

Teorema 15. *Sea (A,B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) con la propiedad P débil y con $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua tal que $T(A_0) \subset B_0$ y tal que, para cualesquiera $x, y \in A$,*

$$d(Tx,Ty) \le \phi\left(M_T(x,y)\right),$$

siendo ϕ una función de comparación. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Sea

$$P \circ T \colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$$

la aplicación descrita por el lema 3.

Veamos a continuación que $P \circ T$ satisface las condiciones del teorema 14.

En efecto, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$,

$$d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \le d(Tx, Ty) \le \phi\left(M_T(x, y)\right)$$

y, puesto que (A, d) es un espacio métrico completo por ser A cerrado, el teorema 14 nos da la existencia de un único punto fijo $x^* \in A_0$ del operador $P \circ T$, es decir

$$(P \circ T)(x^*) = x^*.$$

Esto significa, por definición de P, que

$$d\left(P(Tx^*), Tx^*\right) = d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$$

y, por tanto, x^* es un punto de mejor aproximación de T.

Sea ahora $x_1 \in A_0$ un punto de mejor aproximación de T, esto es, $d(x_1, Tx_1) = d(A, B)$. Dado que $Tx_1 \in T(A_0) \subset T(\overline{A_0})$, por definición de la aplicación P, se tiene que

$$P(Tx_1) = x_1$$

y consecuentemente x_1 es un punto fijo de $P \circ T$. Dada la unicidad del punto fijo de $P \circ T$, se deduce que $x_1^* = x^*$, lo que completa la demostración. □

Una consecuencia del teorema 15 es el siguiente resultado.

Corolario 15. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P débil y con $A_0 \neq \emptyset$.*

Sea $T\colon A \to B$ continua tal que $T(A_0) \subset B_0$ y tal que, para cualesquiera $x, y \in A$,

$$d(Tx, Ty) \leq \phi\left(M_T(x, y, A, B)\right),$$

siendo ϕ una función de comparación y

$$M_T(x, y, A, B) = \text{máx}\left\{d(x, y), d(x, Tx) - d(A, B), d(y, Ty) - d(A, B)\right\}.$$

Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Nótese que, al ser $M_T(x, y, A, B) \leq M_T(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ y ϕ una función creciente, la condición contractiva que aparece en el corolario 15 implica la que aparece en el teorema 15 y este teorema nos da el resultado buscado. □

El corolario 15 puede ser considerado como una versión en el contexto de espacios métricos del teorema 20 que aparece en [19].

Seguidamente probaremos que el corolario 15 sigue siendo cierto sin la hipótesis de continuidad de T. Esto supone que la conclusión del apartado II del lema 2 no tiene por qué ser cierta. Es decir, puede ser que $T(\overline{A_0}) \not\subset B_0$ y por tanto que el operador $P\colon T(\overline{A_0}) \to A_0$ no se pueda definir. En ese caso el argumento usado en las pruebas anteriores no sería válido aquí. Por ello, la prueba que presentamos será constructiva.

Teorema 16. *Bajo las condiciones del corolario 15, salvo la hipóteis de continuidad del operador $T\colon A \to B$, se obtiene la misma conclusión.*

Demostración. La hipótesis de ser $A_0 \neq \emptyset$ asegura la existencia de $x_0 \in A_0$. Dado que $T(A_0) \subset B_0$, $Tx_0 \in B_0$ y, por definición de B_0, existe $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$. Repitiendo el proceso con $x_1 \in A_0$ obtenemos $x_2 \in A_0$ tal que $d(x_2, Tx_1) = d(A, B)$. Queda determinada así una sucesión

$(x_n) \subset A_0$ tal que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \geq 0.$$

Supongamos que existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = 0$ o, lo que es lo mismo, $x_{n_0+1} = x_{n_0}$. Dado que $d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}) = d(A, B)$ se deduce que $d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) = d(A, B)$ y, por tanto, x_{n_0} es un punto de mejor aproximación de T. En resumen, si la sucesión $d(x_{n+1}, x_n)$ tiene un término nulo, entonces T tiene un punto de mejor aproximación, quedando probada la parte de existencia.

Suponemos ahora que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para cada $n \geq 0$.

Dado que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ y $d(x_n, Tx_{n-1}) = d(A, B)$, la propiedad P débil del par (A, B) nos da que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Usando la hipótesis de contractividad, se tiene que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq \phi\left(M_T(x_n, x_{n-1}, A, B)\right) \\ &= \phi\left(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B),\right. \\ &\qquad \left. d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B)\}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) - d(A, B) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - d(A, B) \\ &= d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B) - d(A, B) = d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

de ser

$$\begin{aligned} &\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B)\} \\ &\qquad = d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \end{aligned}$$

tendríamos, por ser ϕ una función de comparación, que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq \phi\left(d(x_n, Tx_n) - d(A,B)\right) \\ &\leq \phi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) < d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

que es una contradicción (nótese que en la última desigualdad hemos usado el hecho de que si ϕ es una función de comparación, entonces $\phi(t) < t$ para todo $t > 0$).

Por tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} &d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\qquad \leq \phi\left(\max\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A,B)\right\}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A,B) &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) - d(A,B) \\ &= d(x_{n-1}, x_n) + d(A,B) - d(A,B) = d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

se sigue que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq \phi\left(\max\left\{d(x_n, x_{n-1}),\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A,B)\right\}\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n-1})\right\}\right) \\ &= \phi\left(d(x_n, x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^{(n)}\left(d(x_1, x_0)\right)$$

y, como $d(x_1, x_0) > 0$ y ϕ es una función de comparación, tomando límite cuando n tiende a infinito en la última expresión, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Veamos que la sucesión (x_n) es de Cauchy.

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como ϕ es una función de comparación, $\epsilon - \phi(\epsilon) > 0$, y, dado que la sucesión $d(x_{n+1}, x_n)$ converge a 0, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon - \phi(\epsilon).$$

Así, si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+2}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&< \epsilon - \phi(\epsilon) + d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\big(M_T(x_n, x_{n+1}, A, B)\big) \\
&= \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\Big(\text{máx}\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \\
&\qquad\qquad d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) - d(A, B)\}\Big) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\left(\text{máx}\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})\}\right),
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $d(x_n, Tx_n) - d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+1})$ y que $\text{máx}\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) - d(A, B)\}$ no es igual a $d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) - d(A, B)$, como vimos anteriormente.

Por tanto, teniendo en cuenta que $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon - \phi(\epsilon) \leq \epsilon$, la última cadena de desigualdades nos da que

$$d(x_n, x_{n+2}) \leq \epsilon - \phi(\epsilon) + d(x_n, x_{n+1}) \leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi(\epsilon) = \epsilon.$$

Por otra parte, dado que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$$

y

$$d(x_{m+1}, Tx_m) = d(A, B),$$

la propiedad P débil de (A, B) nos da que

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(Tx_n, Tx_m) \text{ para cualesquiera } n, m \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta este hecho, para $n \geq n_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+3}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+3}) \leq \epsilon - \phi(\epsilon) + d(x_{n+1}, x_{n+3}) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + d(Tx_n, Tx_{n+2}) \leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\left(M_T(x_n, x_{n+2}, A, B)\right) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\Big(\text{máx}\{d(x_n, x_{n+2}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \\
&\qquad\qquad d(x_{n+2}, Tx_{n+2}) - d(A, B)\}\Big) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\Big(\text{máx}\{d(x_n, x_{n+2}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+2}, x_{n+3})\}\Big) \\
&\leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi\Big(\text{máx}\{\epsilon, \epsilon - \phi(\epsilon), \epsilon - \phi(\epsilon)\}\Big) \leq \epsilon - \phi(\epsilon) + \phi(\epsilon) = \epsilon,
\end{aligned}$$

haciendo uso del hecho de que $d(x_n, Tx_n) - d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+1})$ y que $d(x_{n+2}, Tx_{n+2}) - d(A, B) \leq d(x_{n+2}, x_{n+3})$.

Siguiendo este proceso obtenemos que para $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x_{n+k}) < \epsilon \text{ para cualquier } k \in \mathbb{N}.$$

Esto es, (x_n) es una sucesión de Cauchy y, por tanto, existe $x \in A$ tal que $x_n \to x$ (nótese que A es cerrado y es, por tanto, un espacio métrico completo).

Vemos a continuación que (Tx_n) es una sucesión de Cauchy.

Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene, por la condición de contractividad, que

$$\begin{aligned}
d(Tx_n, Tx_m) &\leq \phi\big(M_T(x_n, x_m, A, B)\big) \\
&\leq \phi\Big(\text{máx}\{d(x_n, x_m), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \\
&\qquad d(x_m, Tx_m) - d(A, B)\}\Big) \\
&\leq \phi\Big(\text{máx}\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\}\Big) \\
&< \text{máx}\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\},
\end{aligned}$$

puesto que $0 < d(x_n, x_{n+1}) \leq \text{máx}\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\}$ y $\phi(t) < t$ si $t > 0$ por ser ϕ una función de comparación.

Dado que (x_n) es de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, tomando límite cuando n y m tiende a infinito en la última cadena de desigualdades, se obtiene que $\lim_{n,m\to\infty} d(Tx_n, Tx_m) = 0$.

Esto prueba que (Tx_n) es de Cauchy y como $(Tx_n) \subset B_0$ y (B_0, d) es un espacio métrico completo por ser B_0 cerrado (apartado I) del lema 2) resulta que $Tx_n \to p$ con $p \in B_0$.

Veamos que $p = Tx$. Para ello supongamos que

$$p \neq Tx$$

y veamos que se llega a una contradicción.

Puesto que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tomando límite cuando n tiende a infinito se obtiene que

$$d(x, p) = d(A, B).$$

De la condición de contractividad, se infiere que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d(Tx_n, Tx) &\le \phi\big(M_T(x_n, x, A, B)\big)\\
&\le \phi\big(\max\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), d(x, Tx) - d(A, B)\}\big)\\
&\le \phi\big(\max\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(x, p) + d(p, Tx) - d(A, B)\}\big)\\
&\le \phi\big(\max\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(A, B) + d(p, Tx) - d(A, B)\}\big)\\
&\le \phi\big(\max\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(p, Tx)\}\big).
\end{aligned}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ y $d(p, Tx) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $n \ge n_0$,

$$d(x_n, x) < d(p, Tx) \text{ y } d(x_n, x_{n+1}) < d(p, Tx).$$

Por tanto, para cualquier $n \ge n_0$,

$$\max\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(p, Tx)\} = d(p, Tx)$$

y, por tanto, por la última cadena de desigualdades, para $n \geq n_0$, se tiene que

$$d(Tx_n, Tx) \leq \phi\left(\text{máx}\left\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(p, Tx)\right\}\right) = \phi\left(d(p, Tx)\right)$$

y, llevando n a infinito en la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = p$, obtenemos

$$d(p, Tx) \leq \phi\left(d(p, Tx)\right) < d(p, Tx)$$

que es una contradicción. Por tanto. $p = Tx$.

Por otra parte, dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, y que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

tomando límite cuando n tiende a infinito, se deduce que

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación de T.

Supongamos que x_1 es un punto de mejor aproximación de T, es decir, que $d(x_1, Tx_1) = d(A, B)$. Por la propiedad P débil del par (A, B) se sigue que $d(x, x_1) \leq d(Tx, Tx_1)$

Entonces, de la hipótesis contractiva, se sigue que

$$\begin{aligned} d(x, x_1) &\leq d(Tx, Tx_1) \\ &\leq \phi\left(\text{máx}\left\{d(x, x_1), d(x, Tx) - d(A, B), d(x_1, Tx_1) - d(A, B)\right\}\right) \\ &\leq \phi\left(\text{máx}\left\{d(x, x_1), 0, 0)\right\}\right) = \phi\left(d(x, x_1)\right) \end{aligned}$$

y puesto que ϕ es una función de comparación y $\phi(t) < t$ si $t > 0$, la última desigualdad implica que ha de ser $d(x, x_1) = 0$, es decir, $x = x_1$.

Esto finaliza la prueba. $\square$

4.3. Sobre contracciones de Geraghty generalizadas

La motivación del siguiente resultado aparece en [9]. En este trabajo los autores presentan un resultado sobre puntos de mejor aproximación para una contracción de tipo Geraghty.

Antes de presentar este resultado, necesitamos la siguiente definición.

Definición 8. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) y $T\colon A \to B$ una aplicación. Diremos que T es una contracción Geraghty generalizada si, para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\left(M_T(x, y)\right)\left(M_T(x, y) - d(A, B)\right)$$

siendo $M_T(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\}$ y $\beta \in \mathcal{F}$.

La clase $\mathcal{F}$, introducida en el capítulo 3, está formada por las aplicaciones $\beta\colon (0, \infty) \to [0, 1)$ tales que $\beta(t_n) \to 1$ implica que $t_n \to 0$.

Nótese que el ejemplo 10 muestra que una contracción Geraghty generalizada no tiene por qué ser continua.

El principal resultado del trabajo [9] arriba mencionado es el siguiente.

Teorema 17 ([9]). *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P y tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una contracción Geraghty generalizada tal que $T(A_0) \subset B_0$. Entonces existe un único punto de mejor aproximación de T.*

Nuestra intención es probar el teorema 17 con la condición más débil de que el par (A, B) tenga la propiedad P débil. Además, la prueba se hará con el argumento expuesto al comienzo del capítulo, es decir, trasladando nuestro problema de punto de mejor aproximación a uno de punto fijo. Para ello necesitamos un teorema de punto fijo en el que apoyarnos en la prueba del resultado principal. No sabemos si este teorema aparece en la literatura.

Teorema 18. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$,*

$$d(Tx,Ty) \leq \beta\left(M_T(x,y)\right) M_T(x,y)$$

siendo $\beta \in \mathcal{F}$. Entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración. Dado, $x_0 \in X$, sea $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Si existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = 0$, entonces $x_{n_0} = x_{n_0+1} = Tx_{n_0}$, y x_{n_0} es un punto fijo de T.

Supondremos en lo que sigue que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot M_T(x_n, x_{n-1}) \\ &= \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \text{máx}\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\right\} \\ &= \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \text{máx}\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\right\} \end{aligned}$$

Vemos a continuación que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{máx}\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\right\} = d(x_n, x_{n+1}).$$

En caso contrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{máx}\left\{d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\right\} = d(x_{n_0}, x_{n_0+1})$$

y, por la última estimación, se tiene que

$$d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \leq \beta\left(M_T(x_{n_0}, x_{n_0-1})\right) \cdot d(x_{n_0}, x_{n_0+1}) < d(x_{n_0}, x_{n_0+1})$$

puesto que $\beta(t) < 1$ para $t \in (0, \infty)$. Llegamos pues a una contradicción.

Por tanto, para cualquier $n = 1, 2, \ldots,$ $M_T(x_n, x_{n-1}) = d(x_n, x_{n-1})$ y, usando de nuevo la estimación obtenida anteriormente, se tiene que, para cualquier $n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot M_T(x_n, x_{n-1}) \\ &= \beta\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \cdot d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Esto prueba que $(d(x_{n+1}, x_n))$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos y por tanto existe $r \geq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = r$.

Supongamos que $r > 0$.

Dado que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para cada n entero no negativo, de la última desigualdad se deduce que

$$0 < \frac{d(x_{n+1}, x_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} \leq \beta\left(d(x_n, x_{n-1})\right) < 1$$

y, tomando límite cuando n tiende a infinito, queda

$$0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_{n+1}, x_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} = \frac{r}{r} \leq \lim_{n\to\infty} \beta\left(d(x_n, x_{n-1})\right) \leq 1.$$

De esto, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \beta\left(d(x_n, x_{n-1})\right) = 1$.

Dado que $\beta \in \mathcal{F}$, $r = \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_n) = 0$, lo que contradice nuestra suposición de que $r > 0$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Seguidamente probaremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

En caso contrario, y aplicando un procedimiento estándar, aseguramos la existencia de $\epsilon > 0$ y dos subsucesiones $(x_{m(k)})$ y $(x_{n(k)})$ de (x_n) tales que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon \text{ y } d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \epsilon$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Aplicando la condición contractiva, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)}) \leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \\
&= \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot \text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)})\right\} \\
&= \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot \text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\} \\
&< \text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\}
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \epsilon$ se sigue que

$$
\epsilon \leq \text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\}
$$

y, por tanto, de la última desigualdad se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})}{\text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\}} \\
&\leq \beta\left(M_T(d(x_{n(k)}, x_{m(k)}))\right) < 1.
\end{aligned}
$$

Llevando k a infinito en la desigualdad anterior y, teniendo en cuenta que, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon$ y, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, resultará que

$$
\begin{aligned}
0 &< \frac{\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})}{\lim\limits_{k\to\infty} \text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\}} \\
&= \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \leq \lim_{k\to\infty} \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) = 1.
\end{aligned}
$$

Dado que $\beta \in \mathcal{F}$, se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = 0$, y, teniendo en cuenta que $0 \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \leq M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se obtiene que $0 = \lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon$, lo que es una contradicción.

Por tanto, (x_n) es una sucesión de Cauchy.

La completitud del espacio (X, d) asegura la existencia de $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vemos a continuación que x es un punto fijo.

Supongamos que no, es decir, que $d(x, Tx) > 0$.

Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, resulta que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\max\{d(x_n, x), d(x_{n+1}, x_n)\} < d(x, Tx)$ para cualquier $n \geq n_0$. Por tanto, $M_T(x_n, x) = d(x, Tx)$ para $n \geq n_0$.

Ahora, si $n \geq n_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tx) = d(Tx_n, Tx) &\leq \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot M_T(x_n, x) \\ &\leq \beta\left(d(x, Tx)\right) \cdot d(x, Tx) \\ &< d(x, Tx) \end{aligned}$$

y tomando límite cuando n tiende a infinito, se infiere que

$$d(x, Tx) \leq \beta\left(d(x, Tx)\right) \cdot d(x, Tx) < d(x, Tx),$$

que es una contradicción.

Por tanto $Tx = x$ y queda probada la existencia de un punto fijo de T.

Supongamos ahora que x_1 es un punto fijo de T y que $x_1 \neq x$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \beta\left(M_T(x_1, x_2)\right) \cdot M_T(x_1, x_2) \\ &= \beta\left(d(x_1, x_2)\right) \cdot d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

y esto es una contradicción.

Por tanto $x_1 = x_2$.

Esto completa la prueba. $\square$

Seguidamente presentamos una versión mejorada del teorema 17, donde la condición de propiedad P es reemplazada por la condición de propiedad P débil.

Teorema 19. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P débil y tal que $A_0 \neq \emptyset$.*

Sea $T\colon A \to B$ una contracción Geraghty generalizada continua y tal que $T(A_0) \subset B_0$. Entonces existe un único punto de mejor aproximación de T.

Demostración. La continuidad de T, junto con las propiedades de la aplicación

$$P \circ T \colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$$

descrita en el lema 3, implica que $d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \leq d(Tx, Ty)$ para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$.

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$, se tiene que

$$\begin{aligned} d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) &\leq d(Tx, Ty) \\ &\leq \beta\left(M_T(x,y)\right)\left(M_T(x,y) - d(A,B)\right) \\ &\leq \beta\left(M_T(x,y)\right) \cdot M_T(x,y). \end{aligned}$$

Dado que $\left(\overline{A_0}, d\right)$ es un espacio métrico completo, por el teorema 18 existe un punto fijo $x_0 \in \overline{A_0}$.

Ahora, usando el mismo argumento que en los teoremas 13 y 15, se prueba que x_0 es el único punto de mejor aproximación de T.

□

Seguidamente probaremos que el teorema 19 sigue siendo cierto sin la hipótesis de continuidad del operador T. No obstante, al no exigir ahora la continuidad de T, la prueba no puede seguir el esquema de la demostración del mencionado teorema, sino que tiene que ser constructiva.

Teorema 20. *Sea (A, B) un par de subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P débil y tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una contracción de Geraghty generalizada tal que $T(A_0) \subset B_0$. Entonces existe un único punto de mejor aproximación de T.*

Demostración. Como A_0 es no vacío, existe $x_0 \in A_0$. Ahora, teniendo en cuenta que $Tx_0 \in T(A_0) \subset B_0$, existe $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$. Repitiendo este proceso, encontramos una sucesión $(x_n) \subset A_0$ tal que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$$

para cualesquiera $n \geq 0$.

Así pues, si n y m son enteros no negativos cualesquiera,

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \quad \text{y} \quad d(x_{m+1}, Tx_m) = d(A, B),$$

de donde, por la la propiedad P débil de (A, B) se obtiene que

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(Tx_n, Tx_m) \tag{4.2}$$

cualesquiera que sean n y m enteros no negativos.

Supongamos que existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$. Entonces

$$d(A, B) = d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0})$$

y x_{n_0} es un punto de mejor aproximación de T, y la parte de existencia de punto de mejor aproximación estaría probada.

Supongamos ahora que $d(x_n, x_{n+1}) > 0$ para cada $n \geq 0$. Ahora, teniendo en cuenta (4.2), se sigue que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&d(x_{n+1}, x_n) \leq d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \left(M_T(x_n, x_{n-1}) - d(A, B)\right) \\
&= \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \left(\text{máx}\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\right\} - d(A, B)\right)
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
d(x_n, Tx_n) - d(A, B) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - d(A, B) \\
&= d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B) - d(A, B) = d(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A,B) &\le d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) - d(A,B) \\ &= d(x_{n-1}, x_n) + d(A,B) - d(A,B) = d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

se tiene que, para cualquier $n \ge 0$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\le \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \max\Big\{d(x_n, x_{n-1}) - d(A,B), \\ &\qquad\qquad d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\Big\} \\ &= \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot \max\Big\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\Big\} \end{aligned}$$

Supongamos que existe $n_0 \ge 0$ tal que

$$\max\Big\{d(x_{n_0}, x_{n_0+1}), d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\Big\} = d(x_{n_0}, x_{n_0+1}).$$

Entonces, de la última desigualdad, y teniendo en cuenta que $\beta(t) < 1$ para todo t, se infiere que

$$d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \le \beta\left(M_T(x_{n_0}, x_{n_0-1})\right) \cdot d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) < d(x_{n_0+1}, x_{n_0})$$

que es una contradicción.

Por tanto, $\max\Big\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\Big\} = d(x_{n-1}, x_n)$ para cualquier $n \ge 0$ y, consecuentemente, $d(x_n, x_{n+1}) \le d(x_{n-1}, x_n)$ para cualquier $n \ge 0$.

Se tiene así que $(d(x_{n+1}, x_n))$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos y, por tanto, existe $r \ge 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = r.$$

Veamos que $r = 0$.

Si fuese $r > 0$, dado que para todo $n > 0$, $d(x_{n-1}, x_n) > 0$ y

$$0 < d(x_{n+1}, x_n) \le \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \cdot d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n),$$

se deduce que

$$0 < \frac{d(x_{n+1}, x_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} \le \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) < 1,$$

y haciendo tender n a infinito en esta última desigualdad, obtenemos que

$$0 < \frac{r}{r} = 1 \leq \lim_{n\to\infty} \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) \leq 1.$$

Esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta\left(M_T(x_n, x_{n-1})\right) = 1$ y, dado que $\beta \in \mathcal{F}$, se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} M_T(x_n, x_{n-1}) = 0$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\right\} = 0,$$

y, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0$, lo que contradice la hipótesis de que $r > 0$. Se concluye así que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Seguidamente, probaremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

En caso contrario, existirán $\epsilon > 0$ y subsucesiones $(x_{n(k)})$ y $(x_{m(k)})$ de (x_n) tales que $d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \epsilon$, $d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon$ y

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \epsilon.$$

Por tanto, por (4.2), se tiene que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) & \\ &\leq d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)}) \\ &\leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right)\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A,B)\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dado que

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\ &= d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(A,B) - d(A,B) \\ &= d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) \end{aligned}$$

y, de la misma manera,

$$d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) - d(A,B) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}),$$

de (4.3) se tiene que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) \\
&\qquad \leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot \max\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) - d(A, B),\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\} \\
&\qquad \leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot \max\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}),\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\}
\end{aligned}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $k \geq k_0$,

$$d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) < \epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})$$

y

$$d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) < \epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}),$$

y, por tanto,

$$\max\left\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})\right\} = d(x_{n(k)}, x_{m(k)}).$$

De este modo, para $k \geq k_0$, se tiene que

$$d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) \leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \cdot d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) < d(x_{n(k)}, x_{m(k)}),$$

o, lo que es lo mismo,

$$0 < \frac{d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})}{d(x_{n(k)}, x_{m(k)})} \leq \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) < 1.$$

Si en esta última desigualdad tomamos límite cuando k tiende a infinito, teniendo en cuenta que $\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon$, obtenemos que

$$0 < \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \leq \lim_{k\to\infty} \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) \leq 1.$$

Esto implica que $\lim_{k\to\infty} \beta\left(M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)})\right) = 1$ y, dado que $\beta \in \mathcal{F}$, ha de ser $\lim_{k\to\infty} M_T(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = 0$ y, consecuentemente, $\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = 0$. Esto contradice que $\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon > 0$ y, por tanto, (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Existe así $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Vemos a continuación que Tx_n es de Cauchy. En efecto, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene, haciendo uso de que $d(x_n, Tx_n) - d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+1})$ y $d(x_m, Tx_m) - d(A, B) \leq d(x_m, x_{m+1})$, que

$$
\begin{aligned}
d(Tx_n,&Tx_m) \\
&\leq \beta\left(M_T(x_n, x_m)\right) \cdot \left(M_T(x_n, x_m) - d(A, B)\right) \\
&= \beta\left(M_T(x_n, x_m)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x_m) - d(A, B), \\
&\qquad\qquad d(x_n, Tx_n) - d(A, B), d(x_m, Tx_m) - d(A, B)\big\} \\
&\leq \beta\left(M_T(x_n, x_m)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x_m) - d(A, B), \\
&\qquad\qquad d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\big\} \\
&\leq \beta\left(M_T(x_n, x_m)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\big\} \\
&< \text{máx}\big\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1})\big\}
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que (x_n) es de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, tomando límites, se obtiene que $\lim_{m,n\to\infty} d(Tx_n, Tx_m) = 0$, y, por tanto, (Tx_n) es una sucesión de Cauchy.

Dado que (X, d) es un espacio métrico completo, existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = p$. Veamos que $p = Tx$.

Por una parte, dado que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(x, p) = d(A, B)$.

Supongamos que $p \neq Tx$, es decir, que $d(p, Tx) > 0$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
d(Tx_n, Tx) &\leq \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot \left(M_T(x_n, x) - d(A, B)\right) \\
&= \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x) - d(A, B), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \\
&\qquad\qquad d(x, Tx) - d(A, B)\big\} \\
&\leq \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), \\
&\qquad\qquad d(x, p) + d(p, Tx) - d(A, B)\big\} \\
&= \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), \\
&\qquad\qquad d(p, Tx) + d(A, B) - d(A, B)\big\} \\
&= \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot \text{máx}\big\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(p, Tx)\big\},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $n \geq n_0$, $\text{máx}\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1})\} < d(p, Tx)$.

Por tanto, de (4.4) se tiene que, para $n \geq n_0$,

$$d(Tx_n, Tx) \leq \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \cdot d(p, Tx) < d(p, Tx).$$

Esto implica que

$$0 \leq \frac{d(Tx_n, Tx)}{d(p, Tx)} \leq \beta\left(M_T(x_n, x)\right) < 1,$$

y haciendo tender n a infinito, se obtiene

$$0 < 1 = \frac{d(p, Tx)}{d(p, Tx)} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(Tx_n, Tx)}{d(p, Tx)} \leq \lim_{n\to\infty} \beta\left(M_T(x_n, x)\right) \leq 1.$$

Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta\left(M_T(x_n, x)\right) = 1$ y, dado que $\beta \in \mathcal{F}$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_T(x_n, x) = 0$.

Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \text{máx}\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n), d(x, Tx)\} = 0$. Esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = d(x, p) = 0 = d(x, Tx)$. Consecuentemente, $x = p = Tx$, lo que contradice nuestra hipótesis de que $d(p, Tx) > 0$. Por tanto, $p = Tx$.

Dado que $d(x, p) = d(A, B)$, se tiene que $d(x, Tx) = d(A, B)$ y, por tanto, x es un punto de mejor aproximación de T.

Queda así probada la existencia de un punto de mejor aproximación de T.

Vemos a continuación que este punto de mejor aproximación es único.

Supongamos que x^* es otro punto de mejor aproximación de T, es decir, que $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$. Por la propiedad P débil del par (A, B) se tiene que

$$\begin{aligned} d(x, x^*) \leq d(Tx, Tx^*) &\leq \beta\left(M_T(x, x^*)\right)\left(M_T(x, x^*) - d(A, B)\right) \\ &= \beta\left(M_T(x, x^*)\right) \max\big\{d(x, x^*) - d(A, B), d(x, Tx) - d(A, B), \\ &\qquad d(x^*, Tx^*) - d(A, B)\big\} \\ &= \beta\left(M_T(x, x^*)\right) \max\big\{d(x, x^*) - d(A, B), 0, 0\big\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si $d(A, B) = 0$, entonces (4.5) implicaría que

$$d(x, x^*) \leq \beta\left(M_T(x, x^*)\right) d(x, x^*) < d(x, x^*),$$

lo que es imposible si $x \neq x^*$. De esta contradicción se concluye que, si $d(A, B) = 0$, entonces existe un único punto de mejor aproximación.

Supongamos ahora que $d(A, B) > 0$.

De ser $\max\big\{d(x, x^*) - d(A, B), 0\big\} = d(x, x^*) - d(A, B)$, de (4.5) se infiere que

$$d(x, x^*) \leq \beta\left(M_T(x, x^*)\right)\left(d(x, x^*) - d(A, B)\right) < d(x, x^*) - d(A, B) < d(x, x^*),$$

que es imposible. Por tanto, $\max\big\{d(x, x^*) - d(A, B), 0\big\} = 0$, por lo que(4.5) implica que

$$d(x, x^*) \leq \beta\left(M_T(x, x^*)\right) \cdot 0 = 0,$$

esto es $x = x^*$.

Esto demuestra la unicidad del punto de mejor aproximación de T. $\square$

El teorema 20 es una generalización del teorema 17 ya que se ha utilizado la condición menos fuerte de propiedad P débil.

4.4. Sobre las F-contracciones de Wardowski

La motivación del siguiente resultado aparece en [27]. En este artículo los autores presentan un resultado sobre puntos de mejor aproximación para F- contracciones. Las F-contracciones son un tipo de contracciones introducidas, recientemente, por Wardowski en [41].

Antes de presentar el resultado mencionado, necesitamos introducir la clase $\mathfrak{F}$ de funciones dada por Wardowski.

$\mathfrak{F}$ está constituida por las funciones $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) φ es estrictamente creciente;

b) para cualquier $(t_n) \subset (0,\infty)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = -\infty;$$

c) existe $k \in (0,1)$ tal que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^k\varphi(t) = 0$.

Ejemplos de funciones que pertenecen a la clase $\mathfrak{F}$ son:

$$\varphi(t) = \log t; \varphi(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}; \varphi(t) = \log(t^2 + t) \text{ y } \varphi(t) = \log t + t.$$

Estos ejemplos aparecen en el artículo de Wardowski previamente mencionado.

El principal resultado del artículo [27] citado es el siguiente.

Teorema 21 ([27])**.** *Sea (A, B) un par de subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P y tal que $A_0 \neq \emptyset$. Sea $T\colon A \to B$ una aplicación para la que existen $\tau > 0$ y $\varphi \in \mathfrak{F}$ tales que*

$$\tau + \varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \varphi\left(d(x, y)\right)$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $d(Tx, Ty) > 0$. Supongamos que $T(A_0) \subset B_0$. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Nota 6. Una aplicación $T\colon A \to B$ que satisface la condición del teorema 21 se dice que es una F- contracción.

Nótese que si $Tx \neq Ty$, entonces, de

$$\varphi\left(d(Tx, Ty)\right) < \tau + \varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \varphi\left(d(x, y)\right)$$

se tiene que $\varphi\left(d(Tx, Ty)\right) < \varphi\left(d(x, y)\right)$, lo que, por el carácter estrictamente creciente de φ, implica que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ y, por tanto, cualquier F- contracción es continua.

El objetivo de esta sección es probar el teorema 21 con la condición menos fuerte de propiedad P débil. Para ello, es necesario el siguiente teorema del punto fijo que aparece en el artículo [41] anteriormente citado.

Teorema 22 ([41])**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación. Supongamos que existen $\tau > 0$ y $\varphi \in \mathfrak{F}$ tales que, para cualesquiera $x, y \in X$ con $d(Tx, Ty) > 0$,*

$$\tau + \varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \varphi\left(d(x, y)\right).$$

Entonces T tiene un único punto fijo

Ya estamos en condiciones de probar nuestro resultado.

Teorema 23. *Si en el teorema 21 sustituimos la propiedad P del par (A, B) por la propiedad P débil, se obtiene la misma conclusión.*

Demostración. Dado que toda F- contracción es continua (véase la nota 6), existe la aplicación

$$P \circ T\colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$$

descrita en el lema 3 tal que, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$, se verifica que

$$d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \leq d(Tx, Ty).$$

Por tanto, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$ con $d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) > 0$, se tiene que

$$0 \leq d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) \leq d(Tx, Ty)$$

y, teniendo en cuenta que T es una F- contracción, se tiene que

$$\tau + \varphi\left(d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right)\right) \leq \tau + \varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \varphi\left(d(x, y)\right).$$

Esto prueba que $P \circ T \colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$ satisface las condiciones del teorema 22 (nótese que al ser $\overline{A_0}$ cerrado $(\overline{A_0}, d)$ es un espacio métrico completo) y, por este teorema, $P \circ T$ tiene un único punto fijo $x^* \in \overline{A_0}$, es decir, $P \circ T(x^*) = x^*$.

Esto significa, en virtud de la definición de P, que

$$d\left((P \circ T)(x^*), Tx^*\right) = d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$$

y, por tanto x^* es un punto de mejor aproximación de T.

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación.

Si $x_1^* \in A_0 \subset \overline{A_0}$ es otro punto de mejor aproximación de T, esto es, $d(x_1^*, Tx_1^*) = d(A, B)$, por la definición de la aplicación P,

$$P(Tx_1^*) = x_1^*$$

y, en consecuencia, x_1^* es otro punto fijo de $P \circ T$. La unicidad del punto fijo de $P \circ T$ nos da que $x_1^* = x^*$, y esto completa la prueba. $\square$

A continuación, daremos un teorema de punto de mejor aproximación para aplicaciones similares a las F-contracciones, pero que no tienen por qué ser continuas. Para nuestro estudio, necesitaremos el siguiente teorema de punto fijo que aparece en [40].

Teorema 24 ([40]). *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación para la que existen $\tau > 0$ y $\varphi \in \mathfrak{F}$ tales que,*

$$\tau + \varphi\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \varphi\left(\text{máx}\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d_(y,Tx)}{2}\right\}\right)$$

cualesquiera que sean $x,y \in X$ con $d(Tx,Ty) > 0$. Si T o φ son continuas, entonces T tiene un único punto fijo.

Nótese que las aplicaciones que satisfacen la condición contractiva que aparece en el teorema 24 no tienen por qué ser continuas, como prueba el siguiente ejemplo que aparece en [40].

Ejemplo 11. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la aplicación definida por

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{4}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Es claro que T no es continua en 1.

Por otra parte, para $x \in [0,1)$ e $y = 1$, se tiene que

$$d(Tx,T1) = d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} > 0$$

y

$$\text{máx}\left\{d(x,1), d(x,Tx), d(1,T1), \frac{d(x,T1)+d(1,Tx)}{2}\right\} \geq d(1,T1) = \frac{3}{4}.$$

Por tanto, si tomamos $\varphi = \log t$ y $\tau = \log 3 > 0$, es claro que $\varphi \in \mathfrak{F}$, y se tiene que

$$\begin{aligned} \tau + \varphi\left(d(Tx,T1)\right) &= \log 3 + \log\left(\frac{1}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right) \\ &\leq \log\left(\text{máx}\left\{d(x,1), d(x,Tx), d(1,T1), \frac{d(x,T1)+d(1,Tx)}{2}\right\}\right) \\ &= \varphi\left(\text{máx}\left\{d(x,1), d(x,Tx), d(1,T1), \frac{d(x,T1)+d(1,Tx)}{2}\right\}\right). \end{aligned}$$

Esto prueba que T satisface la condición contractiva del teorema 24 y no es continua.

Como señalamos previamente, el teorema 24 nos permite demostrar un teorema de punto de meejor aprximación para un tipo de contracción similar a las F-contracciones.

Teorema 25. *Sea (A, B) un par de subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X, d) con la propiedad P débil y tal que $A_0 \neq \emptyset$ y sea $T\colon A \to B$ una aplicación continua para la que existen $\tau > 0$ y $\varphi \in \mathfrak{F}$ tales que*

$$\tau + \varphi\left(d(Tx, Ty)\right) \leq \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, Tx) - d(A, B), d(y, Ty) - d(A, B), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} - d(A, B)\right\}\right),$$

para cualesquiera $x, y \in A$ con $d(Tx, Ty) > 0$. Si $T(A_0) \subset B_0$, entonces T tiene un único punto de mejor aproximación

Demostración. Dado que T es continua, el lema 3 asegura que tenemos una aplicación

$$P \circ T\colon \overline{A_0} \to A_0 \subset \overline{A_0}$$

que satisface, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$, que

$$d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y) \leq d(Tx, Ty)\right) \text{ y } d\left(P(Tx), Tx\right) = d(A, B).$$

Nótese que, dado que T es continua, la última desigualdad nos dice que $P \circ T$ también lo es.

Además, para cualesquiera $x, y \in \overline{A_0}$ con $d\left((P \circ T)(x), (P \circ T)(y)\right) > 0$, se tiene que $d(Tx,Ty)>0$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\tau+\varphi\left(d\left((P\circ T)(x),(P\circ T)(y)\right)\right)&\leq \tau+\varphi\left(d(Tx,Ty)\right)\\&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x,y),d(x,Tx)-d(A,B),\\&\qquad d(y,Ty)-d(A,B),\\&\qquad \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}-d(A,B)\Bigg\}\Bigg).\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}d(x,Tx)-d(A,B)&\leq d(x,(P\circ T)(x))+d((P\circ T)(x),Tx)-d(A,B)\\&=d(x,(P\circ T)(x))+d(A,B)-d(A,B)=d(x,(P\circ T)(x)),\end{aligned}$$

y, análogamente, se tiene que

$$d(y,Ty)-d(A,B)\leq d(y,(P\circ T)(y))$$

y, además,

$$\begin{aligned}\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}&-d(A,B)\\&\leq \frac{d\left(x,(P\circ T)(y)\right)+d\left((P\circ T)(y),Ty\right)}{2}\\&+\frac{d\left(y,(P\circ T)(x)\right)+d\left((P\circ T)(x),Tx\right)}{2}-d(A,B)\\&=\frac{d\left(x,(P\circ T)(y)\right)+d(A,B)}{2}\\&+\frac{d\left(y,(P\circ T)(x)\right)+d(A,B)}{2}-d(A,B)\\&=\frac{d\left(x,(P\circ T)(y)\right)+d\left(y,(P\circ T)(x)\right)}{2},\end{aligned}$$

y, usando el hecho de que φ es estrictamente creciente, se tiene que

$$\begin{aligned}\tau + \varphi\left(d\left((P\circ T)(x),(P\circ T)(y)\right)\right) \\ \leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{ & d(x,y), d\left(x,(P\circ T)(x)\right), \\ & d\left(y,(P\circ T(y))\right), \\ & \frac{d\left(x,(P\circ T(y))\right) d\left(y,(P\circ T(x))\right)}{2}\Bigg\}\Bigg).\end{aligned}$$

Por tanto, $P\circ T$ satisface las condiciones del teorema 24, (ya que $P\circ T$ es continua) y, por este teorema, $P\circ T$ tiene un unico punto fijo $x^* \in \overline{A_0}$. Es decir,

$$(P\circ T)(x^*) = x^*.$$

Esto significa, por definición de P, que

$$d(A,B) = d\left((P\circ T)(x^*), Tx^*\right) = d(x^*, Tx^*).$$

Por tanto, x^* es un punto de mejor aproximación de T.

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación de T.

Veamos que es único. Para ello supongamos que $x_1^* \in A_0 \subset \overline{A_0}$ es un punto de mejor aproximación de T, es decir, que $d(x_1^*, Tx_1^*) = d(A,B)$. Por definición de P, esto significa que

$$(P\circ T)(x_1^*) = x_1^*$$

y, por tanto, x_1^* es un punto fijo de $P\circ T$. Dada la unicidad del punto fijo de $P\circ T$, se tiene que $x_1^* = x^*$.

Esto finaliza la prueba. □

A continuación probaremos que el teorema 25 sigue siendo cierto sin la hipótesis de continuidad de T. Por tanto, la prueba no se puede hacer aplicando el lema 3 y tendrá que ser constructiva.

Teorema 26. *Bajo las hipótesis del teorema 25 salvo la continuidad de T, y asumiendo la continuidad de φ la conclusión del teorema sigue siendo cierta.*

Demostración. Usando un argumento similar al usado antes, encontramos una sucesión $(x_n) \subset A_0$ tal que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ para cualquier $n \geq 0$.

Si existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) = 0$, entonces

$$d(A, B) = d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0})$$

y x_{n_0} sería un punto de mejor aproximación de T.

A partir de ahora, supongamos que $d(x_{n+1}, x_n) > 0$ para cualquier $n \geq 0$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = d(A, B)$$

y

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$$

y, por tener (A, B) la propiedad P débil,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(Tx_{n-1}, Tx_n).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) &\leq \tau + \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) \leq \tau + \varphi\left(d(Tx_n, Tx_{n-1})\right) \\
&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), \\
&\qquad d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B), \\
&\qquad \frac{d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)}{2} - d(A, B)\Bigg\}\Bigg)
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
d(x_n, Tx_n) - d(A, B) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - d(A, B) \\
&= d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B) - d(A, B) \\
&= d(x_n, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

y, análogamente, se tiene que

$$d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - d(A, B) \leq d(x_{n-1}, x_n)$$

y, además,

$$\begin{aligned}
&\frac{d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)}{2} - d(A, B) \\
&\quad \leq \frac{d(A, B) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2} - d(A, B) \\
&\quad \leq \frac{d(A, B) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(A, B)}{2} - d(A, B) \\
&\quad = \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2} \leq \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2} \\
&\quad \leq \frac{2 \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}}{2} = \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\},
\end{aligned}$$

se tiene, de la última desigualdad, que

$$\begin{aligned}
\varphi (d(x_n, x_{n+1})) < \tau + \varphi (d(x_n, x_{n+1})) &\leq \tau + \varphi (d(Tx_{n-1}, x_n)) \\
&\leq \varphi (\max \{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\}).
\end{aligned}$$

Si $\max \{d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\} = d(x_{n_0}, x_{n_0+1})$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\varphi (d(x_{n_0}, x_{n_0+1})) < \tau + \varphi (d(x_{n_0}, x_{n_0+1})) \leq \varphi (d(x_{n_0}, x_{n_0+1})),$$

lo que es una contradicción. Por tanto, $d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y se sigue que

$$\varphi (d(x_n, x_{n+1})) < \tau + \varphi (d(x_n, x_{n+1})) \leq \varphi (d(x_n, x_{n-1})). \tag{4.6}$$

Esto nos dice que $(d(x_{n+1}, x_n))$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos y, por tanto, existe $r \geq 0$ tal que $\lim_{n \to \infty} d(x_{n+1}, x_n) = r$.

Veamos que $r = 0$.

Si $r > 0$, entonces, dado que φ es estrictamente creciente, haciendo tender n a infinito en (4.6) se tiene que

$$\varphi(r) < \tau + \varphi(r) \leq \varphi(r),$$

que es una contradicción. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Veamos, a continuación, que (x_n) es de Cauchy.

En caso contrario, existirá $\epsilon > 0$ y subsucesiones $(x_{n(k)})$ y $(x_{m(k)})$ de (x_n) tales que

$$\epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), \quad d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon$$

y

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon.$$

Dado que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) = d(A, B)$$

y

$$d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) = d(A, B),$$

por la propiedad P débil del par (A, B)

$$d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) \leq d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)}).$$

Dado que $\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) = \epsilon > 0$, para todo k salvo a lo sumo un número finito, $d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) > 0$. Aplicando la condición contractiva, resultará entonces que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) &< \tau + \varphi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) \\
&\leq \tau + \varphi\left(d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)})\right) \\
&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) - d(A, B), \\
&\qquad d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) - d(A, B), \\
&\qquad \frac{d(x_{n(k)}, Tx_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, Tx_{n(k)})}{2} - d(A, B)\Bigg\}\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}
d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\
&= d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(A,B) - d(A,B) \\
&= d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})
\end{aligned}$$

y, análogamente,

$$d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) - d(A,B) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})$$

y, además,

$$\begin{aligned}
&\frac{d(x_{n(k)}, Tx_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, Tx_{n(k)})}{2} - d(A,B) \\
&\quad \leq \frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) + d(A,B) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(A,B)}{2} - d(A,B) \\
&\quad \leq \frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})}{2} \\
&\quad \leq \frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})}{2} \\
&\quad = \frac{2d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})}{2},
\end{aligned}$$

de la desigualdad (4.7) se deduce que

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) < \tau + \varphi\left(d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})\right) \\
&\quad \leq \tau + \varphi\left(d(Tx_{n(k)}, Tx_{m(k)})\right) \\
&\quad \leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}), \\
&\qquad\qquad \frac{2d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})}{2}\Bigg\}\Bigg)
\end{aligned}$$

y haciendo tender k a infinito y teniendo en cuenta que φ es continua, queda

$$\varphi(\epsilon) \leq \tau + \varphi(\epsilon) \leq \varphi\left(\max\left\{\epsilon, 0, 0, \frac{2\epsilon}{2}\right\}\right) = \varphi(\epsilon)$$

lo que es absurdo, ya que entonces $\tau = 0$.

Por tanto, (x_n) es de Cauchy. Y por ser (X,d) un espacio métrico completo existirá $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Veamos que (Tx_n) es de Cauchy.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $d(Tx_n, Tx_m) > 0$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(Tx_n,Tx_m)\right) &< \tau + \varphi\left(d(Tx_n,Tx_m)\right)\\
&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_n,x_m), d(x_n,Tx_n)-d(A,B), d(x_m,Tx_m)-d(A,B),\\
&\qquad\qquad \frac{d(x_n,Tx_m)+d(x_m,Tx_n)}{2}-d(A,B)\Bigg\}\Bigg)\\
&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_n,x_m), d(x_n,x_{n+1}), d(x_m,x_{m+1}),\\
&\qquad\qquad \frac{d(x_n,x_{m+1})+d(x_m,x_{n+1})}{2}\Bigg\}\Bigg)\\
&\leq \varphi\left(\max\left\{d(x_n,x_m), d(x_n,x_{n+1}), d(x_m,x_{m+1})\right\}\right),
\end{aligned}$$

donde hemos usado aquí que

$$d(x_n,Tx_n)-d(A,B) \leq d(x_n,x_{n+1}),$$

$$d(x_m,Tx_m)-d(A,B) \leq d(x_m,x_{m+1})$$

y

$$\frac{d(x_n,Tx_m)+d(x_m,Tx_n)}{2}-d(A,B) \leq \frac{d(x_n,x_{m+1})+d(x_m,x_{n+1})}{2}.$$

Como

$$\frac{d(x_n,x_{m+1})+d(x_m,x_{n+1})}{2} \leq \frac{2d(x_n,x_m)+d(x_m,x_{m+1})+d(x_n,x_{n+1})}{2},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(Tx_n,Tx_m)\right) &< \tau + \varphi\left(d(Tx_n,Tx_m)\right)\\
&\leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{d(x_n,x_m), d(x_n,x_{n+1}), d(x_m,x_{m+1}),\\
&\qquad\qquad \frac{2\,d(x_n,x_m)+d(x_m,x_{m+1})+d(x_n,x_{n+1})}{2}\Bigg\}\Bigg).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que (x_n) es de Cauchy, y que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ y el hecho de que

$$\lim_{m,n\to\infty} \max\left\{d(x_n, x_m), d(x_n, x_{n+1}), d(x_m, x_{m+1}), \frac{2d(x_n, x_m) + d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})}{2}\right\} = 0$$

resultará que, tomando límite cuando n y m tienden a infinito en la última desigualdad, se llega, teniendo en cuenta que $\varphi \in \mathfrak{F}$ a que

$$\lim_{n,m\to\infty} \varphi\left(d(Tx_n, Tx_m)\right) = -\infty.$$

Como $\varphi \in \mathfrak{F}$, se tiene que $\lim_{n,m\to\infty} d(Tx_n, Tx_m) = 0$ y esto prueba que (Tx_n) es de Cauchy. Luego $Tx_n \to p$ para cierto $p \in X$. Veamos que $p = Tx$.

Dado que, $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$, haciendo tender n al infinito, se deduce que $d(x, p) = d(A, B)$.

Supongamos que $d(p, Tx) > 0$. Entonces, para n suficientemente grande $d(Tx_n, Tx) > 0$ y

$$\begin{aligned}\tau + \varphi\left(d(Tx_n, Tx)\right) &\\ \leq \varphi\Bigg(\max\Bigg\{& d(x_n, x), d(x_n, Tx_n) - d(A, B), d(x, Tx) - d(A, B), \\ &\frac{d(x_n, Tx) + d(x, Tx_n)}{2} - d(A, B)\Bigg\}\Bigg)\end{aligned}$$

Como

$$d(x_n, Tx_n) - d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+1}),$$

$$d(x, Tx) - d(A, B) \leq d(x, p) + d(p, Tx) - d(A, B) = d(p, Tx)$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{d(x_n, Tx) + d(x, Tx_n)}{2} - d(A, B) \\ &\qquad \leq \frac{d(x_n, p) + d(p, Tx) + d(p, x) + d(p, Tx_n)}{2} - d(A, B),\end{aligned}$$

resultará que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(Tx_n, Tx)\right) &< \tau + \varphi\left(d(Tx_n, Tx)\right) \\
&\leq \varphi\left(\max\left\{d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(p, Tx), \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{d(x_n, p) + d(p, Tx) + d(A, B) + d(p, Tx_n)}{2} - d(A, B)\right\}\right)
\end{aligned}$$

y haciendo tender n a infinito y teniendo en cuenta que φ es continua, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d(p, Tx)\right) &< \tau + \varphi\left(d(p, Tx)\right) \\
&\leq \varphi\left(\max\left\{0, 0, d(p, Tx), \frac{d(A, B) + d(p, Tx) + d(A, B) + 0}{2} - d(A, B)\right\}\right) \\
&= \varphi\left(\max\left\{d(p, Tx), \frac{d(p, Tx)}{2}\right\}\right) = \varphi\left(d(p, Tx)\right),
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $d(p, Tx) = 0$, esto es, $p = Tx$, lo que implica que $d(A, B) = d(x, p) = d(x, Tx)$ y x es un punto de mejor aproximación de T.

Esto prueba la existencia de un punto de mejor aproximación.

Si x_1 es otro punto de mejor aproximación de T, y $x_1 \neq x$, teniendo en cuenta que $d(x_1, Tx_1) = d(A, B)$ y la propiedad P débil de (A, B) se deduce que

$$0 < d(x, x_1) \leq d(Tx, Tx_1)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\tau &+ \varphi\left(d(Tx, Tx_1)\right) \\
&\leq \varphi\left(\max\left\{d(x, x_1), d(x, Tx) - d(A, B), d(x_1, Tx_1) - d(A, B), \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{d(x, Tx_1) + d(x_1, Tx)}{2} - d(A, B)\right\}\right) \\
&= \varphi\left(\max\left\{d(x, x_1), 0, 0, \frac{d(x, x_1) + d(x, x_1)}{2}\right\}\right) = \varphi\left(d(x, x_1)\right),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\varphi\left(d(x,x_1)\right) \leq \varphi\left(d(Tx,Tx_1)\right) < \tau + \varphi\left(d(Tx,Tx_1)\right) \leq \varphi\left(d(x,x_1)\right)$$

y esto es una contradicción. Luego $x = x_1$. Esto finaliza la prueba. $\square$

4.5. Sobre un resultado de Popescu

El siguiente resultado tiene su motivación en un reciente trabajo debido a O. Popescu que generaliza un resultado anterior de Bogin de 1976. El resultado de Bogin aparece en [10] y es el siguiente.

Teorema 27 ([10])**.** *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $T\colon X \to X$ una aplicación que satisface, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) + b\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) + c\left(d(x,Ty) + d(y,Tx)\right),$$

donde $a \geq 0$, $b >$, $c > 0$ y $a + 2b + 2c = 1$. Entonces T tiene un único punto fijo.

O. Popescu generaliza en [28] el teorema 27 añadiendo una condición antecedente a la propiedad contractiva. Su resultado es el siguiente.

Teorema 28 ([28])**.** *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación que satisface, para cualesquiera $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d(x,Tx) \leq d(x,y) \\
&\Rightarrow d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) + b\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) + c\left(d(x,Ty) + d(y,Tx)\right)
\end{aligned}$$

donde $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $a + 2b + 2c = 1$. Entonces T tiene un único punto fijo.

Utilizamos a continuación la clase de funciones de comparación ya usada en algunas de las secciones anteriores. Recordemos que se dice que que una función $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es de comparación si es creciente y satisface que $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ para cualquier $t > 0$ (aquí φ^n representa la n-ésima iteración de φ).

Nuestro resultado es el siguiente.

Teorema 29. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) tales que $A_0 \neq \emptyset$ y sea $T\colon A \to B$ una aplicación tal que $T(A_0) \subset B_0$. Supongamos que existe una función de comparación φ tal que, para cualesquiera $x, y \in A_0$,*

$$d(x,Tx) \leq d(x,y) + d(A,B) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \varphi\left(M(x,y) - d(A,B)\right),$$

siendo $M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}$.

Supongamos, además, que T es continua y el par (A,B) tiene la propiedad P débil. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Sea $x_0 \in A_0$ ($A_0 \neq \emptyset$). Como $Tx_0 \in T(A_0) \subset B_0$, podemos encontrar $x_1 \in A_0$ tal que $d(x_1, Tx_0) = d(A,B)$. Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión $(x_n) \subset A_0$ tal que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B) \text{ para cualquier } n \geq 0.$$

Si existe $n_0 \geq 0$ tal que $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, entonces se tiene que

$$d(A,B) = d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}) = d(x_{n_0}, Tx_{n_0})$$

y x_{n_0} es un punto de mejor aproximación de T.

En lo que sigue supondremos que $d(x_n, x_{n+1}) > 0$ para cualquier $n \geq 0$.

Dado que, para cualesquiera $n, m \geq 0$,

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B) \text{ y } d(x_{m+1}, Tx_m) = d(A,B),$$

por la propiedad P débil del par (A, B), se tiene que

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(Tx_n, Tx_m).$$

Además, para cualquier $n \geq 0$,

$$d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B)$$

y, por tanto, usando la condición contractiva, se tiene que

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tx_{n+1}) &\leq \varphi\left(M(x_n, x_{n+1}) - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right\} - d(A, B)\right). \end{aligned}$$

Veamos que $d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)$ para cualquier $n \geq 0$.

En efecto, caben tres posibilidades.

Caso 1: $\max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right\} = d(x_n, x_{n+1})$.

En este caso, de la última desigualdad y haciendo uso de que φ es creciente, se sigue que

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1}) - d(A, B)\right) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right).$$

Por tanto, se satisface que $d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)$.

Caso 2: $\max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right\} = d(x_n, Tx_n)$.

En este caso, puesto que

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) - d(A, B) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - d(A, B) \\ &= d(x_n, x_{n+1}) + d(A, B) - d(A, B) = d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

se tiene que

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, Tx_n) - d(A, B)\right) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)$$

y, también, se satisface que $d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)$.

Caso 3: $\max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right\} = d(x_{n+1}, Tx_{n+1})$.

En este caso, dado que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) - d(A, B)\right) \\ &\leq \varphi\left(d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, Tx_{n+1}) - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(A, B) - d(A, B)\right) = \varphi\left(d(x_{n+1}, x_{n+2})\right) \end{aligned}$$

y, dado que $d(x_{n+1}, x_{n+2}) > 0$ y φ es de comparación, se deduce que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \varphi\left(d(x_{n+1}, x_{n+2})\right) < d(x_{n+1}, x_{n+2}),$$

lo que es una contradicción.

Por tanto, en cualquier caso obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)$$

para cualquier $n \geq 0$.

Por consiguiente,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi^n\left(d(x_0, x_1)\right)$$

para cualquier $n \geq 1$, y, dado que φ es de comparación, y $d(x_0, x_1) > 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

A continuación, veremos que (x_n) es de Cauchy.

En caso contrario, existirán $\epsilon > 0$ y dos subsucesiones $(x_{n(k)})$ y $(x_{m(k)})$ tales que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

- $k \leq m(k) < n(k)$,
- $\epsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)})$,
- $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \epsilon$,
- $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \epsilon$
- $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) = \epsilon$
- $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) = \epsilon$.

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $n \geq n_1$, $d(x_n, x_{n+1}) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Por otra parte, dado que $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) = \epsilon$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq n_2$, $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \geq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y sea $k \geq n_0$. Entonces $n(k) - 1 \geq m(k) > k \geq n_0$ y

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) \\ &= d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(A, B) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + d(A, B) \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(A, B) \end{aligned}$$

y, aplicando la condición contractiva,

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) &\leq d(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)-1}) \\ &\leq \varphi\left(M\left(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\right) - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\Big(\max\big\{d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}), \\ &\qquad\qquad d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1})\big\} - d(A, B)\Big). \end{aligned}$$

Analicemos los tres casos posibles.

Caso 1:

$$\begin{aligned} &\max\left\{d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}), d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1})\right\} \\ &\qquad\qquad = d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}). \end{aligned}$$

En este caso, se obtiene que

$$\begin{aligned}
d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) &\le \varphi\left(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) - d(A,B)\right)\\
&\le \varphi\left(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})\right) \le \varphi(\epsilon).
\end{aligned}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned}
\max\left\{d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}), d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1})\right\}&\\
= d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}).&
\end{aligned}$$

En este caso, dado que

$$\begin{aligned}
&M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) - d(A,B)\\
&\qquad = d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) - d(A,B)\\
&\qquad \le d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) - d(A,B)\\
&\qquad = d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(A,B) - d(A,B)\\
&\qquad = d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) \le \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

se tiene que

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \le \varphi\left(d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) - d(A,B)\right) \le \varphi\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \le \varphi(\epsilon)$$

Caso 3:

$$\begin{aligned}
\max\left\{d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}), d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1})\right\}&\\
= d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}).&
\end{aligned}$$

En este caso, dado que

$$\begin{aligned}
M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) - d(A,B) &= d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}) - d(A,B)\\
&\le d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \le \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \le \varphi\left(d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}) - d(A,B)\right) \le \varphi\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \le \varphi(\epsilon).$$

Por tanto, para cualquier $k \geq n_0$, se tiene que

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \varphi(\epsilon)$$

y, haciendo tender k a infinito, obtenemos

$$\epsilon \leq \varphi(\epsilon) < \epsilon,$$

que es una contradicción.

Por tanto, (x_n) es de Cauchy y, dada la completitud del espacio métrico (X, d), existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Como $(x_n) \subset A_0 \subset A$ y A es cerrado, $x \in A$. Además, como T es continua, $Tx_n \to Tx$ y, dado que

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \text{ para cualquier } n \geq 0,$$

haciendo tender n a infinito, se obtiene que

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

Esto prueba que x es un punto de mejor aproximación de T.

Supongamos que y es un punto de mejor aproximación de T y que $x \neq y$. Esto significa que

$$d(x, Tx) = d(y, Ty) = d(A, B)$$

y por la propiedad P débil del par (A, B),

$$d(x, y) \leq d(Tx, Ty).$$

Por otra parte, $d(x, Tx) = d(A, B) \leq d(x, y) + d(A, B)$ y, aplicando la condición contractiva,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(Tx,Ty) \\ &\le \varphi\left(M(x,y)-d(A,B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}-d(A,B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\{d(x,y)-d(A,B),0,0\}\right) \\ &= \varphi\left(d(x,y)-d(A,B)\right) \le \varphi\left(d(x,y)\right) < d(x,y), \end{aligned}$$

y esto es una contradicción. Por tanto $x = y$.

Esto finaliza la prueba. $\square$

En lo que sigue, daremos un ejemplo de una aplicación que satisface la condición contractiva del teorema 29 y que no es continua.

El mismo ejemplo 11 nos sirve.

Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la aplicación dada por

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{4}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso $A = B = [0,1]$, $d(A,B) = 0$, $B_0 = A_0 = [0,1]$ y $T(A_0) \subset B_0$. Claramente T no es continua en $x_0 = 1$.

Si $x, y \in [0,1)$, $d(Tx,Ty) = 0$. Y si $x \in [0,1)$ e $y = 1$,

$$d(Tx,Ty) = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4},$$

y $M(x,y) = \max\{d(x,1),d(x,Tx),d(1,T1)\} \ge d(1,T1) = \dfrac{3}{4}$. Luego

$$d(Tx,T1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} \le \frac{1}{3}M(x,1)$$

y la condición contractiva se satisface para la función $\varphi(t) = \dfrac{1}{3}t$, independientemente del antecedente.

El siguiente resultado nos da una versión del teorema 29 donde la continuidad del operador T es reemplazada por otras condiciones.

Teorema 30. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos y cerrados de un espacio métrico completo (X,d) tales que $A_0 \neq \emptyset$ y sea $T\colon A \to B$ una aplicación tal que $T(A_0) \subset B_0$. Supongamos que existe una función de comparación φ tal que para cualesquiera $x \in A_0$ e $y \in A$,*

$$rd(x,Tx) \leq d(x,y) + d(A,B) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \varphi\left(M(x,y) - d(A,B)\right),$$

siendo $M(x,y) = \text{máx}\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\right\}$ y r tal que

- *si $d(A,B) > 0$, entonces $r < 1$;*
- *si $d(A,B) = 0$, entonces $r \leq \dfrac{1}{2}$.*

Supongamos que el par (A,B) tiene la propiedad P. Entonces T tiene un único punto de mejor aproximación.

Demostración. Dado que la propiedad P implica la propiedad P débil, siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado en la prueba del teorema 29 encontramos una sucesión $(x_n) \subset A_0$ tal que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B)$ para cualquier $n = 0,1,2,\ldots$ y, además, existe $x \in A$ tal que $x_n \to x$.

Usando la propiedad P del par (A,B), se deduce que, para cualesquiera $n, m \geq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B) \\ d(x_{m+1}, Tx_m) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x_{n+1}, x_{m+1}) = d(Tx_n, Tx_m)$$

y, como (x_n) es de Cauchy (por ser convergente), de lo anterior inferimos que (Tx_n) es también de Cauchy.

Dado que $(Tx_n) \subset B_0 \subset B$ y B es cerrado, existe $z \in B$ tal que $Tx_n \to z$.

Por ser $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B)$ para cualquier $n = 0,1,2,\ldots$, tomando límite cuando n tiende a infinito, se obtiene que

$$d(x,z) = d(A,B).$$

Veamos a continuación que $z = Tx$.

Distinguimos dos casos: $z = x$ y $z \neq x$.

Caso 1: $z = x$.

En este caso, dado que $d(x,z) = d(A,B)$, se tiene que $d(A,B) = 0$ y, por tanto $r \leq \dfrac{1}{2}$. Además, dado que $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A,B) = 0$, $x_{n+1} = Tx_n$ para cualquier $n \geq 0$.

En lo que sigue, vamos a probar que el conjunto

$$D = \{n\colon d(x_n, x_{n+1}) \leq 2d(x_n, x)\}$$

es infinito.

En caso contrario, existirá $n \geq 0$ tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) > 2d(x_n, x) \text{ para cualquier } n \geq n_0.$$

Por tanto, para $n \geq n_0$,

$$2d(x_n, x) < d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x) + d(x, x_{n+1})$$

y de aquí se infiere que

$$d(x_n, x) < d(x_{n+1}, x)$$

para $n \geq n_0$.

Dado que $0 < \epsilon_0 = d(x_{n_0}, x) < d(x_{n+1}, x)$ para $n \geq n_0$, esto contradice el hecho de que $x_n \to x$.

Por tanto D es un conjunto infinito.

Existe por tanto una subsucesión $(x_{n(k)})$ de (x_n) tal que

$$rd(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) = rd(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) \leq \frac{1}{2}d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) \leq d(x_{n(k)}, x)$$

para cualquier k.

Usando la condición contractiva que aparece en nuestra hipótesis se tiene que, para cualquier k,

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)+1}, Tx) &= d(Tx_{n(k)}, Tx) \\ &\leq \varphi\left(M(x_{n(k)}, x)\right) \\ &= \varphi\left(\text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x), d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d(x, Tx)\right\}\right) \\ &= \varphi\left(\text{máx}\left\{d(x_{n(k)}, x), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x, Tx)\right\}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x_{n(k)} \to x$ y que $d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) \to 0$ cuando $k \to \infty$, si $d(x, Tx) > 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $k \geq k_0$,

$$d(x_{n(k)}, x) < d(x, Tx) \text{ y } d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) < d(x, Tx)$$

y, por tanto, de la última cadena de igualdades, se tiene que, para $k \geq k_0$,

$$d(x_{n(k)+1}, Tx) \leq \varphi\left(d(x, Tx)\right)$$

y haciendo tender k a infinito, se deduce que

$$d(x, Tx) \leq \varphi\left(d(x, Tx)\right),$$

lo cual es una contradicción, ya que, por ser φ una función de comparación, $\varphi(t) < t$ para $t > 0$.

Por tanto, $d(x, Tx) = 0$ y $x = z = Tx$.

Además, $d(x, z) = d(A, B) = 0$, por lo que $d(x, Tx) = d(A, B)$ y x es un punto de mejor aproximación de T.

Caso 2: $z \neq x$.

Veamos que $z = Tx$.

Dado que $d(A, B) = d(x, z) > 0$, en este caso $r < 1$.

Por otra parte, dado que

$$\lim_{n\to\infty} rd(x_n, Tx_n) = rd(x, z)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} (rd(x_n, x) + d(A, B)) = d(A, B) = d(x, z),$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$rd(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x) + d(A, B).$$

Usando la condición contractiva, tenemos, para $n \geq n_0$, que

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tx) &\leq \varphi\left(M(x_n, x) - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n), d(x, Tx)\right\} - d(A, B)\right). \end{aligned}$$

Consideramos a continuación los siguientes conjuntos:

$$N_1 = \{n \geq n_0 \colon \max\left\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n), d(x, Tx)\right\} = d(x_n, x)\},$$

$$N_2 = \{n \geq n_0 \colon \max\left\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n), d(x, Tx)\right\} = d(x_n, Tx_n)\}$$

y

$$N_3 = \{n \geq n_0 \colon \max\left\{d(x_n, x), d(x_n, Tx_n), d(x, Tx)\right\} = d(x, Tx)\}.$$

Dado que $N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{n \colon n \geq n_0\}$, al menos uno de los conjuntos $N_i, i = 1, 2, 3$ es infinito.

Supongamos que N_1 es infinito. Existe entonces una subsucesión $(x_{n(k)})$ de (x_n) tal que, teniendo en cuenta que φ es creciente y que $\varphi(t) < t$ si $t > 0$,

$$d(Tx_{n(k)}, Tx) \leq \varphi\big(d(x_{n(k)}, x) - d(A, B)\big) \leq \varphi\big(d(x_{n(k)}, x)\big) < d(x_{n(k)}, x),$$

Haciendo tender k a infinito en la última desigualdad se obtiene que $d(z, Tx) \leq 0$ y por tanto $z = Tx$, que es el resultado buscado.

Supongamos ahora que N_2 es infinito. Existe entonces una subsucesión $(x_{n(k)})$ de (x_n) tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&M(x_{n(k)}, x) - d(A,B) \\
&\qquad = d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\
&\qquad \leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, Tx_{n(k)}) - d(A,B) \\
&\qquad = d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(A,B) - d(A,B) = d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}).
\end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
d(Tx_{n(k)}, Tx) &\leq \varphi\left(M(x_{n(k)}, x) - d(A,B)\right) \\
&\leq \varphi\left(d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})\right) < d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})
\end{aligned}$$

y llevando k al infinito, se deduce que $d(z, Tx) \leq 0$ y, por tanto, $z = Tx$, como se buscaba.

Por último, supongamos que N_3 es infinito. Existe entonces una subsucesión $(x_{n(k)})$ de (x_n) tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
d(Tx_{n(k)}, Tx) &\leq \varphi\left(d(x, Tx) - d(A,B)\right) \\
&\leq \varphi\left(d(x,z) + d(z, Tx) - d(A,B)\right) \\
&= \varphi\left(d(A,B) + d(z, Tx) - d(A,B)\right) = \varphi\left(d(z, Tx)\right).
\end{aligned}$$

Si $d(z, Tx) > 0$, haciendo tender k a infinito,

$$d(z, Tx) \leq \varphi\left(d(z, Tx)\right) < d(z, Tx),$$

y esto nos da una contradicción.

Por tanto $d(z, Tx) = 0$, que es lo que buscábamos.

En cualquier caso, x es un punto de mejor aproximación.

Supongamos ahora que y es otro punto de mejor aproximación. Entonces, por la propiedad P se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} d(x, Tx) = d(A,B) \\ d(y, Ty) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = d(Tx, Ty).$$

Además, como en cualquier caso $r < 1$, se tiene que

$$rd(x, Tx) = rd(A, B) \leq d(x, y) + d(A, B)$$

y por tanto, aplicando la condición contractiva que aparece en nuestra hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \varphi\left(M(x, y) - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\right\} - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(A, B), d(A, B)\right\} - d(A, B)\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(A, B)\right\} - d(A, B)\right). \end{aligned}$$

Si $\max\left\{d(x, y), d(A, B)\right\} = d(x, y) > 0$, entonces, de la última desigualdad se obtiene que

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \varphi\left(d(x, y) - d(A, B)\right) \leq \varphi\left(d(x, y)\right) < d(x, y),$$

lo que es una contradicción, salvo que $x = y$.

Si $\max\left\{d(x, y), d(A, B)\right\} = d(A, B)$, entonces, se tiene que

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \varphi\left(d(A, B) - d(A, B)\right) = \varphi(0) = 0$$

y, por tanto, $x = y$.

Esto prueba la unicidad del punto de mejor aproximación de T. $\square$

Dado que si $d(A, B) = 0$, entonces el par (A, B) tiene la propiedad P, se tiene el siguiente resultado de punto fijo.

Corolario 16. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación tales que existen una función de comparación φ y $r \in \mathbb{R}$ de modo que, para cualquier $x, y \in X$,*

$$rd(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \varphi\left(M(x, y)\right)$$

con $M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\right\}$.

Supongamos también que se da una da las dos condiciones siguientes

I) T *es continua y* $r = 1$*;*

II) $0 < r \leq \dfrac{1}{2}$.

Entonces T *tiene un único punto fijo.*

Bibliografía

[1] A. Abkar y M. Gabeleh, A note on some best proximity point theorems proved under P-property, *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 189567, 3, 2013, 3124078, ISSN: 1085-3375.

[2] M. A. Al-Thagafi y N. Shahzad, Convergence and existence results for best proximity points, *Nonlinear Anal.*, vol. 70, n.º 10, págs. 3665-3671, 2009, ISSN: 0362-546X.

[3] Y. I. Alber y S. Guerre-Delabriere, Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces, en *New results in operator theory and its applications*, ép. Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 98, Birkhäuser, Basel, 1997, págs. 7-22.

[4] A. Almeida, J. Harjani y K. Sadarangani, Existence and uniqueness of best proximity point for contractions of Geraghty type, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, vol. 108, n.º 2, págs. 957-971, 2014, ISSN: 1578-7303.

[5] A. Almeida, J. Harjani y K. Sadarangani, A best proximity point theorem for generalized weakly contractive non self mappings. English, *J. Convex Anal.*, vol. 21, n.º 4, págs. 989-1006, 2014, ISSN: 0944-6532.

[6] A. Almeida, E. Karapınar y K. Sadarangani, A note on best proximity point theorems under weak P-property, *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 716825, 4, 2014, ISSN: 1085-3375.

[7] A. Almeida, A. F. Roldán de Hierro y K. Sadarangani, On existence and uniqueness of best proximity points under a popescu's type contractivity condition. English, *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. 16, n.º 3, págs. 529-538, 2015, ISSN: 1345-4773; 1880-5221/e.

[8] J. Anuradha y P. Veeramani, Proximal pointwise contraction, *Topology Appl.*, vol. 156, n.º 18, págs. 2942-2948, 2009, ISSN: 0166-8641.

[9] N. Bilgili, E. Karapınar y K. Sadarangani, A generalization for the best proximity point of Geraghty-contractions, *J. Inequal. Appl.*, 2013:286, 9, 2013, ISSN: 1029-242X.

[10] J. Bogin, A generalization of a fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi, *Canad. Math. Bull.*, vol. 19, n.º 1, págs. 7-12, 1976, ISSN: 0008-4395.

[11] M. Bukatin, R. Kopperman, S. Matthews y H. Pajoohesh, Partial metric spaces, *Amer. Math. Monthly*, vol. 116, n.º 8, págs. 708-718, 2009, http://dx.doi.org/10.4169/193009709X460831, ISSN: 0002-9890.

[12] J. Caballero, J. Harjani y K. Sadarangani, A best proximity point theorem for Geraghty-contractions, *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:231, 9, 2012.

[13] B. S. Choudhury, P. Konar, B. E. Rhoades y N. Metiya, Fixed point theorems for generalized weakly contractive mappings, *Nonlinear Anal.*, vol. 74, n.º 6, págs. 2116-2126, 2011, ISSN: 0362-546X.

[14] P. N. Dutta y B. S. Choudhury, A generalisation of contraction principle in metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, Art. ID 406368, 8, 2008, ISSN: 1687-1820.

[15] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, *J. London Math. Soc.*, vol. 37, págs. 74-79, 1962, ISSN: 0024-6107.

[16] A. A. Eldred y P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 323, n.º 2, págs. 1001-1006, 2006, ISSN: 0022-247X.

[17] M. A. Geraghty, On contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 40, págs. 604-608, 1973, ISSN: 0002-9939.

[18] A. Ivanov, Fixed points of mappings of metric spaces. English, *J. Sov. Math.*, vol. 12, págs. 1-64, 1979, zbMATH03628003, ISSN: 0090-4104.

[19] M. Jleli, E. Karapinar y B. Samet, On best proximity points under the P-property on partially ordered metric spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 150970, 6, 2013, 3073440, ISSN: 1085-3375.

[20] Z. Kadelburg y S. Radenovic, A note on some recent best proximity point results for non-self mappings, *Gulf Journal of Mathematics*, vol. 1, n.º 1, págs. 36-41, 2013.

[21] R. Kannan, Some results on fixed points. II, *Amer. Math. Monthly*, vol. 76, págs. 405-408, 1969, ISSN: 0002-9890.

[22] E. Karapınar, On best proximity point of ψ-Geraghty contractions, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:200, 9, 2013.

[23] W. A. Kirk, S. Reich y P. Veeramani, Proximinal retracts and best proximity pair theorems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 24, n.º 7-8, págs. 851-862, 2003, ISSN: 0163-0563.

[24] J. Markin y N. Shahzad, Best approximation theorems for nonexpansive and condensing mappings in hyperconvex spaces, *Nonlinear Anal.*, vol. 70, n.º 6, págs. 2435-2441, 2009, ISSN: 0362-546X.

[25] S. G. Matthews, Partial metric topology, en *Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)*, ép. Ann. New York Acad. Sci. Vol. 728, New York Acad. Sci., New York, 1994, págs. 183-197.

[26] S. Matthews. (). Partial metrics, dirección: `http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/`.

[27] M. Omidvari, S. M. Vaezpour y R. Saadati, Best proximity point theorems for F-contractive non-self mappings, *Miskolc Math. Notes*, vol. 15, n.º 2, págs. 615-623, 2014, ISSN: 1787-2405.

[28] O. Popescu, Two generalizations of some fixed point theorems, *Comput. Math. Appl.*, vol. 62, n.º 10, págs. 3912-3919, 2011, ISSN: 0898-1221.

[29] V. S. Raj, Banach's contraction principle for non-self mappings(preprint).

[30] ——, A best proximity point theorem for weakly contractive non-self-mappings, *Nonlinear Anal.*, vol. 74, n.º 14, págs. 4804-4808, 2011, 2810719 (2012d:47159), ISSN: 0362-546X.

[31] E. Rakotch, A note on contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 13, págs. 459-465, 1962, ISSN: 0002-9939.

[32] B. E. Rhoades, Some theorems on weakly contractive maps, en *Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 4 (Catania, 2000)*, 1972392 (2004c:47125), vol. 47, 2001, págs. 2683-2693.

[33] S. Romaguera, Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces, *Topology Appl.*, vol. 159, n.º 1, págs. 194-199, 2012, 2852962, ISSN: 0166-8641.

[34] I. A. Rus, Some fixed point theorems in metric spaces, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, vol. 3, 169-172 (1972), 1971, ISSN: 0049-4704.

[35] ——, Generalized contractions and applications. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001, pág. 198, 1947742 (2004f:54043), ISBN: 973-8095-71-9.

[36] S. Sadiq Basha y P. Veeramani, Best proximity pair theorems for multifunctions with open fibres, *J. Approx. Theory*, vol. 103, n.º 1, págs. 119-129, 2000, ISSN: 0021-9045.

[37] B. Samet, C. Vetro y F. Vetro, From metric spaces to partial metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:5, 11, 2013.

[38] V. Sankar Raj y P. Veeramani, Best proximity pair theorems for relatively nonexpansive mappings, *Appl. Gen. Topol.*, vol. 10, n.º 1, págs. 21-28, 2009, ISSN: 1576-9402.

[39] T. Suzuki, The existence of best proximity points with the weak P-property, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:259, 6, 2013, ISSN: 1687-1812.

[40] D. Wardowski y N. Van Dung, Fixed points of F-weak contractions on complete metric spaces, *Demonstr. Math.*, vol. 47, n.º 1, págs. 146-155, 2014, ISSN: 0420-1213.

[41] D. Wardowski, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:94, 6, 2012.

[42] J. Zhang, Y. Su y Q. Cheng, A note on ‘A best proximity point theorem for Geraghty-contractions’, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013:99, 4, 2013, 3055859.