

### Anexo I

# DON JESÚS CASTILLO ORTÍZ SECRETARIO DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA,

#### CERTIFICA,

Que el Consejo de Doctores del Departamento en su sesión de fecha, trece de mayo de dos mil quince, tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada "Aportaciones al Método de la Celda en el Diseño y Análisis de un Modelo de Máquina Rotativa Trifásico de Inducción Magnética" presentada por el doctorando D. Leopoldo Simón Rodríguez y dirigida por los Doctores José Miguel Monzón Verona y Miguel Joaquín Martínez Melgarejo.

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Reglamento para la elaboración, defensa, tribunal y evaluación de tesis doctorales de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a trece de mayo de dos mil guince.





#### Anexo II

#### UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Programa de doctorado: Tecnología Industrial

#### Título de la Tesis

APORTACIONES AL MÉTODO DE LA CELDA EN EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN MODELO DE MÁQUINA ROTATIVA TRIFÁSICA DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Tesis Doctoral presentada por D. Leopoldo Simón Rodríguez

Dirigida por el Dr. D. José Miguel Monzón Verona

Codirigida por el Dr. D. Miguel Joaquín Martínez Melgarejo

**El Director** 

**El Codirector** 

El Doctorando

Las Palmas de Gran Canaria, a 11 de mayo de 2015



## Tesis Doctoral

## Aportaciones al Método de la Celda en el Diseño y Análisis de un Modelo de Máquina Rotativa Trifásica de Inducción Magnética

Autor: Leopoldo Simón Rodríguez

Directores: José Miguel Monzón Verona Miguel Joaquín Martínez Melgarejo

Las Palmas de Gran Canaria, 2015

## Agradecimientos

La elaboración de una tesis implica a un amplio número de personas que directa o indirectamente terminan formando parte de la misma.

En un intento por nombrarlas a todas he de comenzar por mi esposa María Esther y mis hijas Miriam y Natalia, por su incondicional comprensión y paciencia por todo este tiempo que no les he dedicado, para tal fin.

Agradezco a mis directores de tesis, ante todo compañeros del departamento, Dr. D. José Miguel Monzón Verona y Dr. D. Miguel Joaquín Martínez Melgarejo, quienes han tenido la paciencia y dedicación en la continua orientación y ayuda de este trabajo de tesis doctoral.

Especialmente agradezco al profesor Dr. D. José Fernándo Medida Padrón, por la inestimable ayuda, apoyo y ánimo que me ha brindado en todo este tiempo.

Agradezco a los profesores de máquinas eléctricas del Departamento de Ingeniería Eléctrica, D. Guillermo Hernández Lezcano y D. Pablo Ignacio González Domínguez, por el desinteresado asesoramiento y ayuda en lo que a máquinas se refiere.

Con especial cariño, he de mencionar a Dña. María Victoria Ramírez Quevedo, por su ánimo y asesoramiento documental.

Y en general, a todos los compañeros del Departamento de Ingeniería Eléctrica.

Por instituciones, agradecer al Departamento de Ingeniería Eléctrica el apoyo recibido en el desarrollo de la misma.

Y a la Cátedra Endesa Red de la Universidad de las Palmas de Gran Canaria, por la dotación económica otorgada en su Programa de Ayudas al Fomento de Tesis Doctorales.

## Acrónimos

ANSYS Software de Simulación basado en FEM BEM Método de los Elementos de Contorno COMSOL Software de Simulación basado en FEM

CM Método de la Celda

EEM Método de los Elementos de Arista

FF Formulación Finita o Global

GA Algoritmos Genéticos

 $egin{array}{lll} PDE & Ecuaciones \ Differenciales \ Parciales \ FDM & Método de las \ Differencias \ Finitas \ FEM & Método de los \ Elementos \ Finitos \ FVM & Método de los \ Volúmenes \ Finitos \ FIT & Técnica de \ Integración \ Finita \ \end{array}$ 

FDTD Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo

MGE Ecuaciones de Malla de Maxwell

MAFIA MAxwell Finite Integration Algorithm. Software Desarrollado con FIT

GEDTP Programa de Elementos Finitos de Propósito General

FEMM Programa de Elementos Finitos para Campos Magnéticos

GNU/C++ Compilador C++ de Licencia Pública SCILAB Software para Computación Numérica

MNM Método Nodal Modificado de Análisis de Circuitos Eléctricos

GMSH Mallador con Postprocesado y Motor para CAD

KVL Leyes de Kirchhoff para las Tensiones KCL Leyes de Kirchhoff para las Corrientes RKF Método de Runge – Kutta – Fehlberg

ODE	Ecuaciones	Diferenciales	Ordinarias
DAE	Ecuaciones	Diferenciales	Algebraicas

 $WA \hspace{1cm} Algoritmo \hspace{1cm} de \hspace{1cm} Welsh$ 

NRM  $M\'etodo\ de\ Newton\ Raphson$ 

BCGM Método del Biconjugado del Gradiente

## Nomenclatura

G	Matriz Topológica de Incidencia (aristas – nudos) en el mallado Primal	[-]
C	Matriz Topológica de Incidencia (caras – aristas) en el mallado Primal	[-]
D	$Matriz\ Topológica\ de\ Incidencia\ (volúmenes-caras)\ en\ el\ mallado\ Primal$	[-]
A	Matriz Topológica de Incidencia (nudos – aristas) en el mallado Primal	[-]
B	Matriz Fundamental de Bucles de un Grafo Lineal	[-]
Q	Matriz Fundamental de Cortes de un Grafo Lineal	[-]
$\Gamma_C$	Contorno	[-]
$\Omega_D$	$Dominio\ Total$	[-]
$\Omega_s$	$Subdominio\ Fuente$	[-]
$\Omega_a$	$Subdominio\ Aire$	[-]
$\Omega_c$	$Subdominio\ Conductor$	[-]
χ	Característica de Euler / Función Auxiliar	[-]
g	Género de una Figura	[-]
K	Conjunto de Elementos Geométricos de Dimensión 0,1,2,3 en el Primal	[-]
$\tilde{K}$	Conjunto de Elementos Geométricos de Dimensión 0,1,2,3 en el Dual	[-]
$ ilde{G}$	Matriz Topológica de Incidencia (aristas – nudos) en el mallado Dual	[-]
$ ilde{C}$	Matriz Topológica de Incidencia (caras – aristas) en el mallado Dual	[-]
$\tilde{D}$	$Matriz\ Topológica\ de\ Incidencia\ (volúmenes-caras)\ en\ el\ mallado\ Dual$	[-]
$\mathbf{P}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 0 en el Mallado Primal	[-]
p	Punto, Nudo o Vértice en el Mallado Primal	[-]
${f L}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 1 en el Mallado Primal	[-]
1	Línea, Lado o Arista en el Mallado Primal	[-]
$\mathbf{S}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 2 en el Mallado Primal	[-]
$\mathbf{s}$	Superficie o Cara en el Mallado Primal	[-]

$\mathbf{V}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 3 en el Mallado Primal	[-]
$\mathbf{v}$	Volúmen o Celda en el Mallado Primal	[-]
$ ilde{\mathbf{P}}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 0 en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{p}}$	Nudo o Vértice en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{L}}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 1 en el Mallado Dual	[-]
ĩ	Lado o Arista en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{S}}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 2 en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{s}}$	Superficie o Cara en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{V}}$	Conjunto de Elementos de Dimensión 3 en el Mallado Dual	[-]
$ ilde{\mathbf{v}}$	Volúmen, Celda en el Mallado Dual	[-]
$oldsymbol{U}$	Vector de Incógnitas de las Tensiones Eléctricas en las Aristas Primales	[V]
$oldsymbol{\Phi}$	Vector de Incógnitas de los Flujos Magnéticos en las Superficies Primales	[Wb]
$ ilde{F}_m$	Vector de Incógnitas de las Fuerzas Magnetomotrices en las Aristas Duales	[A]
$ ilde{m{I}}$	Vector de Incógnitas de las Corrientes en las Superficies Duales	[A]
$\tilde{\boldsymbol{\varPsi}}$	Vector de Incógnitas de los Flujos Eléctricos en las Superficies Duales	[Wb]
$\nu$	Resistividad Magnética	[m/H]
$\sigma$	Conductividad Eléctrica Volumétrica	[S/m]
a	Integral de Línea del Potencial Vector Magnético	[Wb]
$\mathbf{t},\mathbf{I}$	Instantes de Tiempo Primales	[s]
$oldsymbol{ au}, \mathbf{T}$	Intervalos de Tiempo Primales	[s]
$\tilde{\mathbf{t}},\tilde{\mathbf{I}}$	Instantes de Tiempo Duales	[s]
$\tilde{\boldsymbol{\tau}},\tilde{\mathbf{T}}$	Intervalos de Tiempo Duales	[s]
$W^n$	$Vectores\ de\ Funciones\ de\ Forma\ de\ los\ Elementos\ n=p,l,s,v$	[-]
$\mathcal{M}_{\mu}$	Matriz Constitutiva Magnética	[-]
$\mathcal{M}_{\sigma}$	Matriz Constitutiva Elétrica	[-]
j	Unidad Imaginaria	[-]
L	Longitud	[m]
s	$\acute{A}rea$	$[m^2]$
v	Volumen	$[m^3]$
$\chi$	Función Potencial Magnético Asociado a los Nudos del Primal	[Wb]
$\varrho$	Tensor de Maxwell	[-]
$\vec{n}$	Vector Normal Unitario	[-]
$r_s$	Radio Interno	[m]

$r_{ss}$	Radio Externo	[m]
$Q^c$	Cantidad de Carga Eléctrica Volumétrica	[C]
U	Tensión Eléctrica Asignada a las Aristas del Primal	[V]
$\mathcal{U}$	Tensión Eléctrica (impulso) Asignada a las Aristas del Primal	[Wb]
$Q^f$	Flujo de Carga Eléctrica Superficial	[C]
$ ilde{\varPsi}$	Flujo Eléctrico Asignado a las Superficies del Dual	[C]
Φ	Flujo Magnético Asignada a las Aristas del Primal	[Wb]
E	Fuerza Electromotriz Asignada a las Aristas del Primal	[V]
$\varepsilon$	Fuerza Electromotriz (impulso) Asignada a las Aristas del Primal	[Wb]
$\tilde{F}_m$	Fuerza Magnetomotriz Asignada a las Aristas del Dual	[A]
$ ilde{\mathcal{F}}_m$	Fuerza Magnetomotriz (impulso) Asignada a las Aristas del Dual	[C]
$T_e$	Par Electromagnético	$[N \cdot m]$
V	Potencial Eléctrico Asignado a los Nudos del Primal	[V]
$\mathcal{V}$	Potencial Eléctrico (impulso) Asignado a los Nudos del Primal	[Wb]
$V_m$	Potencial Escalar Magnético	[A]
$\mathcal{V}_m$	Potencial Escalar Magnético (impulso)	[C]
$\vec{T}$	Potencial Vector Eléctrico	[C/m]
$\vec{A}$	Potencial Vector Magnético	[Wb/m]
$\vec{D}$	Vector Densidad de Flujo Eléctrico	$[C/m^2]$
$\mu$	Permeabilidad Magnética	[H/m]
$\mu_o$	Permeabilidad Magnética en el Vacío	[H/m]
$\mu_r$	Permeabilidad Magnética Relativa	[-]
$\omega$	Frecuencia Angular	[rad/s]
f	Frecuencia	[1/s]
$ ilde{I}$	Corriente Eléctrica	[A]
$ ilde{J}$	Densidad de Corriente Eléctrica	$[A/m^2]$
$\vec{E}$	Intensidad del Campo Eléctrico	[V/m]
$\vec{B}$	Densidad de Flujo Magnético	$[Wb/m^2]$
$\vec{B}_n$	Componente Normal de la Densidad de Flujo Magnético	$[Wb/m^2]$
$\vec{B_t}$	Componente Tangencial de la Densidad de Flujo Magnético	$[Wb/m^2]$
$\vec{H}$	Densidad del Campo Magnético	[A/m]
$ ho_E$	Densidad de Carga Elétrica	$[C/m^3]$
D	Desplazamiento Eléctrico	$[C/m^{2}]$

# Índice general

1.	Intr	oducción.	1
	1.1.	Objetivos y Metodología	2
		1.1.1. Objetivos	2
		1.1.2. Metodología	3
	1.2.	Estructura de la tesis.	4
	1.3.	Resumen de publicaciones	5
2.	Esta	ado del Arte.	9
	2.1.	Métodos de análisis en máquinas eléctricas	10
		2.1.1. Evolución histórica	10
	2.2.	Ecuaciones topológicas: El Método de la Celda	12
	2.3.	Ecuaciones del medio magnéticas y eléctricas	14
		2.3.1. Ecuaciones constitutivas	14
		2.3.2. Ecuaciones circuitales	15
3.	Geo	metría Computacional Aplicada a la Formulación Finita.	<b>25</b>
	3.1.	Introducción	26
	3.2.	Celdas complejas. Discretización del espacio euclíde o $\mathbb{R}^3.$	28
	3.3.	Orientación de las celdas complejas	31
	3.4.	Matrices de incidencia en celdas complejas	33
	3.5.	La fórmula de Euler-Poincarè	34
	3.6.	Relación entre elementos para mallados densos.	36
	3.7.	Resultados y discusión	37

		3.7.1.	Cálculo de matrices topológicas	37			
		3.7.2.	Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 2	46			
		3.7.3.	Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 3	48			
		3.7.4.	Estudio de la convergencia en mallados densos.	51			
4.	Ecu	acione	s Topológicas de Las Leyes de Maxwell en la Formulación Fi-				
	nita	١.		59			
	4.1.	Introd	ucción	60			
	4.2.	Clasifi	cación de las magnitudes electromagnéticas	62			
	4.3.	La téc	enica de integración finita y las ecuaciones de Maxwell	64			
		4.3.1.	Introducción	64			
		4.3.2.	Ecuaciones de Maxwell	66			
	4.4.	Princi	pios asociados a la formulación finita	74			
		4.4.1.	Elementos de tiempo	75			
	4.5.	Las le	yes de Maxwell en forma finita o global	77			
	4.6.	Forma	local de las ecuaciones de campo.	80			
	4.7.	Ejemplos de la forma local de las ecuaciones de campo					
		4.7.1.	Ley de Inducción de Faraday	81			
		4.7.2.	Ley de Inducción de Ampère-Maxwell	83			
		4.7.3.	Ley de Gauss Magnética	84			
		4.7.4.	Ley de Gauss Eléctrica	84			
<b>5.</b>	Disc	cretiza	ción de las Ecuaciones Constitutivas.	91			
	5.1.	Introd	ucción.	91			
	5.2.	Ecuac	ión constitutiva magnética $\vec{B}=\mu\vec{H}$	93			
		5.2.1.	Aproximación uniforme del campo	93			
		5.2.2.	Aproximación por interpolación de Whitney	96			
	5.3.	Ecuac	ión constitutiva eléctrica $\vec{J} = \sigma \vec{E}.$	96			
		5 3 1	Aproximación por interpolación de Whitney	90			

6.	Ecuación Global del Método de la Celda y el Método Nodal Modificado			
	en I	Proble	mas Electromagnéticos y Circuitales en 2D.	105
	6.1.	Introd	ucción	. 106
	6.2.	Una va	ariación del método nodal modificado.	. 107
	6.3.	Ecuac	iones de Maxwell y circuitales con la FF y el MNM en 2D	. 110
		6.3.1.	Formulation $\{a, (a,V)\}\$ in 2D	. 110
		6.3.2.	Discretización para el modelo de conductor filiforme (conjunto tipo	
			5)	. 113
		6.3.3.	Discretización para el modelo de conductor sólido (conjunto tipo 4)	). 114
		6.3.4.	Ensamble de todas las ecuaciones en una matriz global	. 115
	6.4.	Result	ados y discusión	. 116
		6.4.1.	Respuesta en frecuencia	. 116
		6.4.2.	Respuesta transitoria	. 117
7.	La I	Matriz	Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplic	a-
	ción	a un	Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.	. 123
	7.1.	Introd	ucción	. 124
	7.2.	Base t	eórica de la formulación finita de las ecuaciones de Maxwell	. 126
		7.2.1.	Ecuaciones topológicas	. 126
		7.2.2.	Ecuaciones constitutivas	. 129
		7.2.3.	Sistema global de ecuaciones	. 131
		7.2.4.	Ley de continuidad en el segundo miembro	. 134
	7.3.	Result	ados y discusión	. 137
		7.3.1.	Resumen	. 137
		7.3.2.	Ley de Continuidad. Resultados	. 138
		7.3.3.	Resultados del campo magnético y de las corrientes inducidas para	
			excitaciones de corriente lineal, superficial y volumétrica	. 149
8.	El N	Método	o de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquir	ıa
	de I	nducc	ión Magnética.	159
	8.1.	Introd	ucción	. 160
			to y Matrices	

	8.3.	Result	ados y discusión	168
		8.3.1.	Comparación de resultados del método de la celda con el FEM	И 169
		8.3.2.	Excitación con corriente	169
		8.3.3.	Excitación con tensión	174
		8.3.4.	Experiencias con roturas de barras	175
		8.3.5.	Cálculo del par electromagnético. Análisis en frecuencia	182
	8.4.		ineal y no lineal	
9.	Idei	ntificac	ión y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de l	Induc-
	ción	Magn	ética usando Algoritmos Genéticos.	193
	9.1.	Introd	ucción	194
	9.2.	Modelo	o continuo FEM	196
	9.3.	Condic	ciones de frontera del modelo continuo	197
	9.4.	Identif	icación del modelo paramétrico.	198
	9.5.	Análisi	is mediante el FEMM	200
	9.6.	Ajuste	de los parámetros por algoritmos genéticos	201
	9.7.	Result	ados y discusión	202
10	.Con	clusior	nes y Líneas Futuras de Trabajo.	211
	10.1	. Conclu	siones	211
	10.2	. Líneas	futuras de investigación	213
$\mathbf{A}_{1}$	nexo	A. Pul	blicaciones	215
Aı	nexo	В. Есч	uaciones constitutivas magnéticas	233
A	nexo	C. Ecu	uaciones constitutivas eléctricas	243
$\mathbf{A}$ 1	nexo	D. Mo	delo paramétrico del motor de inducción en régimen din	ámico251
Bi	bliog	grafía C	General	257

# Índice de figuras

3.1.	Discretización de una esfera mediante tetraedros	28
3.2.	Subdivisión baricéntrica dual - línea de puntos -, arista dual $\tilde{\mathbf{l}}_j$ y nudo dual	
	$ ilde{\mathbf{p}}_k$	29
3.3.	Una de las caras cuadriláteras que forma una cara dual $\tilde{\mathbf{s}}_i$	30
3.4.	Una celda dual $\tilde{\mathbf{v}}_h$ forma un volumen delimitado por caras duales $\tilde{\mathbf{s}}_i$	30
3.5.	Elementos de dimensión 0, 1, 2 y 3, y orientación interna	31
3.6.	Elementos de dimensión 0, 1, 2 y 3, y orientación externa	32
3.7.	Orientación externa de una línea según la dimensión del espacio que la	
	contiene	32
3.8.	Tetraedro como figura elemental	37
3.9.	Mallado más simple de un tetraedro en dos cel das tetraédricas	37
3.10.	Orientaciones de los elementos de forma-1	38
3.11.	Orientaciones de los elementos de forma-2	39
3.12.	Elementos de forma-3, separados	40
3.13.	Tetraedro de referencia $\{p,i,j,k\}$	41
3.14.	Lazo formado por $\{l_1,l_2,l_3,l_4\}.$	43
3.15.	Árbol del conjunto formado por $\{l_1,l_2,l_3,l_7\}.$	45
3.16.	Grupo de corte $\{l_7, l_8, l_9\}$	46
3.17.	Elementos 2D de la superficie de una esfera	47
3.18.	Elementos 2D de la superficie de un toro	47
3.19.	Elementos 2D de la superficie de un cilindro, obtenido con el mallador Gmsh.	48
3.20.	Elementos 3D del volúmen de una esfera, obtenido con el mallador Gmsh	49

3.21	. Elementos 3D del volúmen de un toro con $g=1,\ldots,\ldots$	49
	. Elementos 3D del volúmen de un cilindro con $g=0,\ldots,\ldots$	50
	. Elementos 3D del volúmen de un toro con $g=2$ y $g=3$	51
	. Convergencia asintótica con el aumento de la densidad del mallado	52
	. Prototipo genérico para un cuarto de esfera y dominio $\Omega_D$	52
4.1.	Diagrama de magnitudes electromagnéticas de Tonti	62
4.2.	Tetraedro de referencia orientado	65
4.3.	Diferencias de Potenciales $U_i$ asociadas a las aristas del complejo primario.	67
4.4.	Fuerza Magnetomotriz $\tilde{F}_m$ , asociada a las aristas del complejo dual	68
4.5.	Intensidad Eléctrica $\tilde{I}$ , asociada a las caras del complejo dual	68
4.6.	Flujo Eléctrico $\tilde{\Psi},$ asociado a las caras del complejo dual	69
4.7.	Flujo Magnético $\phi$ asociado a las caras y diferencia de potenciales $U_i$ a las	
	aristas, en el complejo primal	72
4.8.	Discretización primal-dual del eje de tiempo. Salto de la rana	76
4.9.	Variables físicas asociadas al complejo <i>primal</i>	78
4.10	. Variables físicas asociadas al complejo dual	78
6.1.	Modelos continuos y discretos	107
6.2.	División del dominio	111
6.3.	Modelos de conductores en el CM. Siendo $N_f$ =número de conductores,	
	$\Delta$ =área de triángulo y L=Longitud axial	113
6.4.	Modelo continuo con división primaria y dual, punto de referencia A y	
	modelo circuital.	116
6.5.	Validación de resultados de las simulaciones con transitorios	118
7.1.	Dominio del problema y su mallado	126
7.2.	Tetraedro de Referencia	128
7.3.	Magnitudes involucradas en las ecuaciones constitutivas	130
7.4.	Dibujo de un grafo lineal	
7.5.	Calidad del mallado y relación entre elementos obtenidos en los 19 experi-	
	mentos numéricos.	138

7.6.	Superficie del subdominio fuente, donde se aplica una $\vec{J}_{\rm s}$
7.7.	Evaluación superficial 2D de $\vec{J_s}$
7.8.	Sección del subdominio fuente $\Omega_s \subset \Omega_D$ . Cortes, Coárbol y Árbol(en negrita). 143
7.9.	Zonas de Cortes donde se ha hecho el balance
7.10.	Árbol(negrita) y coárbol de la superficie $\in \Omega_s$
7.11.	Distribución del Balance Nodal de Corrientes
7.12.	Evaluación volumétrica de $\vec{J_v}$
7.13.	Campo magnético y corrientes inducidas para una excitación de densidad de corriente lineal -línea negra-, para un mallado de ${f P}=2904,~{f L}=$
	19545, $\mathbf{S} = 33230$ , $\mathbf{V} = 16588$
7.14.	Análisis de la convergencia para el campo magnético y las corrientes inducidas
7.15.	Comparación de resultados con una excitación de corriente lineal para $\vec{J}_{real}$
7.16.	y $\vec{J}_{imag}$ con FF, GETDP y FEMM
7.17.	Campo magnético y corrientes inducidas. Excitación con una densidad de corriente volumétrica $(A/m^2)$ -vectores de color negro
8.1.	Mallados sin simetría y con simetría en 3D
8.2.	Zonas de corte trazadas en el estátor $l_s$ , el entrehierro $l_e$ y el rotor $l_r$ 162
8.3.	Modelo circuital de la máquina, con los cinco modelos de elementos $164$
8.4.	Sección transversal de la máquina
8.5.	Forma y distribución de la $\vec{A}$ sobre la línea de rotor $(l_r)$
8.6.	Forma y distribución de la $\vec{J}$ sobre la línea de rotor $(l_r)$ 171
8.7.	Parte real e imaginaria de la densidad de corriente en todo el desarrollo de
	la zona $(l_r)$ del rotor $(2\pi)$
8.8.	Parte real e imaginaria de la densidad de corriente en $\frac{\pi}{3}$ de la $(l_r)$ del rotor,
	de la $fase\ A.$
8.9.	Diagrama fasorial de las corrientes de barras
8.10.	Módulo y ángulo de las corrientes de barras del rotor

8.11.	Potencial Vector Magnético en $\frac{\pi}{3}$ de la $(l_s)$ del estátor, de la $fase\ A.$ 176
8.12.	Potencial Vector Magnético en $\frac{\pi}{3}$ de la $(l_e)$ del entrehierro, de la $fase\ A$ 177
8.13.	Potencial Vector Magnético en $\frac{\pi}{3}$ de la $(l_r)$ del rotor, de la $fase\ A.$ 178
8.14.	Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras 179
8.15.	Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras 180
8.16.	Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras 181
8.17.	Curvas de saturación B-H para el modelo lineal y el no lineal 186
8.18.	Representación FEM del campo $\vec{B}$
9.1.	Sección de los cinco tipos de geometrías de barras de rotor analizadas 196
9.2.	Módulo de la densidad de corriente en el modelo continuo por elementos
	finitos
9.3.	Modelo simple por fase del motor de inducción en régimen estacionario 199
9.4.	Ajuste de la parte real de la inducción mediante GA para la geometría de
	rotor tipo 0
9.5.	Ajuste de la parte imaginaria de la inducción mediante GA para la geo-
	metría de rotor tipo 0
9.6.	Validación del par electromagnético para la geometría de rotor tipo $0.\dots 204$
9.7.	Perfil del módulo del vector potencial magnético y sus componentes com-
	plejas
9.8.	Módulo de la inducción magnética
9.9.	Representación de las curvas par-velocidad para todos los tipos de geometría. $205$
9.10.	Representación de la intensidad en una de las fases, para todas las geometrías.206
D.1.	Circuito equivalente de la máquina de inducción

# Índice de tablas

3.1.	Relación entre entidades para un mallado asintótico
3.2.	Relación asintótica entre Elementos Topológicos y Nudos
6.1.	Resultados de la respuesta en frecuencia
7.1.	Evaluación en el Baricentro, sin aplicar el WA
7.2.	Evaluación en el Punto Medio de las aristas duales, sin aplicar el WA 141
7.3.	Evaluación en el Baricentro, aplicando el WA
7.4.	Evaluación en el Punto Medio de las aristas duales, aplicando el WA 143
7.5.	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ evaluada en el Baricentro y en el Punto Medio en zona 1, sin aplicar el
	WA
7.6.	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ evaluada en el Baricentro y en el Punto Medio en zona 2, sin aplicar el
	WA
7.7.	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ evaluada en el Baricentro y en los Puntos Medios en zona 1, o sea, con
	divergencia cero
7.8.	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ evaluadas en el Baricentro y en los Puntos Medios en zona 2, o sea, con
	divergencia cero
8.1.	Comparación del número de incógnitas (nudos) de un problema sin simetría
	con otro con simetría
8.2.	Comparación del par por frecuencias, entre el CM5 y el FEM(GETDP) 185
8.3.	Comparación de las corrientes de la fase A, entre el CM5 y el FEM(GETDP).185

9.1. Valores óptimos resultantes de la solución por algoritmos genéticos de la constante de tiempo del rotor  $\tau(s)$ , la inductancia mutua M(H) y la inductancia de dispersión  $L_l(H)$ , para los cinco tipos de geometría. . . . . . 202

## Capítulo 1

## Introducción.

## Índice

1.1. Objetivos y Metodología	
1.1.1. Objetivos	
1.1.2. Metodología	
1.2. Estructura de la tesis	
1.3. Resumen de publicaciones	

## Resumen.

Actualmente, en el estudio de las máquinas eléctricas se han utilizado técnicas de discretización constituidas por ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales, basadas en las leyes de Maxwell.

Cuando se modela un problema físico, se plantea de tal manera que permita simplificar su análisis. Para ello, el problema físico es representado mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales que no siempre tienen solución analítica, con lo que hay que resolverlas numéricamente.

Como métodos de resolución se han venido utilizando métodos clásicos como el de elementos finitos (FEM), el método de los elementos de contorno (BEM) o el método de

las diferencias finitas (FDM), entre otros.

Estos métodos clásicos basados en la formulación diferencial utilizan técnicas para transformar la forma diferencial de las ecuaciones de campo, en ecuaciones algebraicas. Esta transformación se debe a que los ordenadores, como herramienta informática que se utiliza para tal fin, están diseñados para llevar a cabo operaciones algebraicas.

En el estudio del modelo de máquinas eléctricas rotativas de inducción magnética—objeto de esta tesis—, las leyes físicas que se utilizan son las leyes de Maxwell.

La formulación utilizada se denomina Formulación Finita (FF) o Global de las ecuaciones de Maxwell y el método matemático que se ha utilizado para resolverlo, se denomina el Método de la Celda (CM). La elección de este método numérico responde según la literatura consultada, a su amplia difusión y sencillez.

Tanto la formulación como el método numérico se han implementado mediante programación informática.

## 1.1. Objetivos y Metodología.

## 1.1.1. Objetivos.

El objetivo principal de esta tesis es la aplicación de la Formulación Finita (FF) y de su método numérico —el Método de la Celda (CM)—, al estudio de un modelo de máquina trifásica de inducción magnética.

Como objetivos particulares considerados se encuentran:

- La implementación de las ecuaciones de Maxwell mediante la FF a un modelo de corrientes inducidas en 3D y un modelo de corrientes inducidas 2D de una máquina de inducción trifásica.
- El planteamiento en una matriz global de las ecuaciones circuitales utilizando el Método Nodal Modificado (MNM) con las ecuaciones de Maxwell en la Formulación Finita.
- La utilización del Método de la Celda aplicado a roturas comunes en barras.

 Se ajusta los parámetros de un modelo circuital de una máquina de inducción trifásica, con algoritmos genéticos, para diferentes geometrías de barras de rotor.

### 1.1.2. Metodología.

Prácticamente, este trabajo de tesis es eminentemente metodológico. Fundamentalmente, su núcleo está formado por métodos basadas en experimentaciones numéricas implementadas en diferentes lenguajes de programación (C++, Scilab, Petsc, etc.), y en la implementación de los problemas sobre herramientas basadas en el Método de los Elementos Finitos (FEMM, Getdp, etc), para el estudio de convergencia y validación de resultados.

El fundamento de la misma, viene determinado por los principios que rigen la Formulación Finita, y el Método de la Celda, para la solución numérica.

Con la Formulación Finita, se pueden escribir las ecuaciones algebraicas directamente sin ningún proceso de discretización. En ella se utilizan ecuaciones topológicas y constitutivas donde las magnitudes son globales.

El Método de la Celda, es el utilizado para la formulación algebraica directa en la Formulación Finita, permitiendo resolver estas ecuaciones de forma sencilla. Utiliza dos celdas complejas, una dual de la otra.

En la formulación circuital, se ha implementado en C++ el algoritmo de Welsh para la obtención de la matriz fundamental de bucles y la matriz fundamental de cortes, para determinar las corrientes y las tensiones en la matriz global.

Los modelos circuitales se han resuelto mediante el Método Nodal Modificado, aportándose ampliaciones en los grupos de definición, según el caso. Esto último ha permitido la combinación de modelos circuitales con modelos discretos para su estudio y análisis.

En el dominio del tiempo, para análisis de transitorios, se ha utilizado los métodos clásicos de Euler-Crank-Nicholson.

Se ha utilizado los algoritmos genéticos como herramienta para optimizar los parámetros de un modelo circuital, en función de diferentes geometrías propuestas de barras de rotor.

## 1.2. Estructura de la tesis.

La organización de la presente tesis se ha hecho en 11 capítulos que se describen a continuación. El capítulo 1, que es el actual, corresponde a la introducción, objetivos y metodología empleada, estructura de la misma y se enumeran las publicaciones realizadas.

El capítulo 2, corresponde al estado del arte en el estudio y análisis de máquinas trifásicas de inducción magnética. Se exponen los métodos clásicos de análisis y se detallan características de la formulación finita como método alternativo aplicado en las aportaciones de esta tesis.

En el capítulo 3, se exponen las nociones principales de la geometría computacional aplicada a la formulación finita. El concepto de celda compleja, la dualidad en los mallados y los elementos discretos y su orientación. Se ha comprobado mediante las ecuaciones de Euler-Poincarè la relación entre elementos topológicos, que facilitará un conocimiento previo del número de incógnitas.

En el capítulo 4, se plantea la discretización de las ecuaciones de Maxwell en la formulación finita en su forma global discreta y sus principios asociados, y se determinan las ecuaciones de malla de Maxwell.

En el capítulo 5, se discretizan las ecuaciones constitutivas magnética y eléctrica.

En el capítulo 6, se aplica una ampliación del Método Nodal Modificado con el Método de la Celda en las ecuaciones de campo. Se propone ensamblar en una sola matriz, las ecuaciones de campo discretizadas con las ecuaciones circuitales, validando resultados con el método de los elementos finitos.

En el capítulo 7, se lleva a cabo un amplio estudio de la continuidad en base a la divergencia nula. Se utilizan las matrices topológicas, la matriz fundamental de bucles y el algoritmo de Welsh para tal fin. Los análisis aportados se aplican a un problema de corrientes inducidas tanto en 2D como en 3D.

En el capítulo 8, se trabaja con la característica de simetría plana que tiene una sección transversal de una máquina eléctrica, lográndose un planteamiento singular de las variables magnéticas. Se realizan un conjunto de experiencias con excitaciones en corriente y en tensión, así como roturas de barras, cálculo del par y análisis en frecuencia, comparándose resultados con el método de los elementos finitos.

En el capítulo 9, se identifica y se ajusta paramétricamente una máquina mediante algoritmos genéticos. La identificación de los parámetros se ha hecho mediante un análisis en frecuencia del modelo por elementos finitos y del modelo cirucital. Los algoritmos genéticos evolutivos se han utilizado para ajustar los parámetros del modelo circuital, con diferentes geometrías de rotor.

En el capítulo 10, se proponen posibles líneas futuras de investigación que den continuidad al trabajo expuesto en la tesis.

## 1.3. Resumen de publicaciones.

Los estudios de investigación previos realizados en la elaboración de la presente tesis, han supuesto un conjunto de publicaciones desde el principio de la misma, hasta el momento actual. En estas publicaciones se puede observar una evolución con aportaciones dirigidas al estudio de la máquina trifásica de inducción magnética. A continuación se relacionan las mismas en orden cronológico:

- 1. Acople del Método Nodal Modificado y el Método de los Elementos Finitos. Implementación en Lenguaje Scilab y C++, autores: J. M. Monzón, F. J. Santana y L. Simón expuesta en el XCLEEE 2007, (10th Portuguese-Spanish Congress in Electrical Engineering), en Julio 2007. Funchal (Island of Madeira)- Portugal.
- 2. The Finite Element Method For Parametric Identification Of A Three-Phase Induction Machine With Genetic Algorithms, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en el XCHLIE 2009, (11a. Conferencia Hispano-Lusa de Ingeniería Eléctrica), en Julio 2009. Zaragoza España.
- 3. Identificación Paramétrica y Análisis de Sensibilidad de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética. Modelado del Régimen Dinámico. Implementación en C++, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en el CAIP 2009, (9 Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), en Agosto 2009. Montevideo - Uruguay.

- 4. Modelado del Régimen Dinámico y Análisis de Sensibilidad de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética, autores: L. Simón y J. M. Monzón, publicación en la revista Scielo de Información Tecnológica en 2010, con factor de impacto.
- 5. Identificación Paramétrica de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética, con Algoritmos Genéticos, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en el CAIP 2009, (9 Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), en Agosto de 2009. Montevideo Uruguay.
- 6. Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos, autores: L. Simón y J. M. Monzón, publicación en la revista Scielo de Información Tecnológica en 2010, con factor de impacto.
- 7. Parametric Identification of a Three-Phase Induction Machine with Genetic Algorithms, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en ISEF 2009, (XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering), en Septiembre de 2009. Arras Francia.
- 8. Parametric Identification of a Three-Phase Induction Machine with Genetic Algorithms, autores: L. Simón y J. M. Monzón, capítulo 9, S. Wiak et al. (Eds): Computational Methods for Electrical Devices Design, SCI 327, pp. 167–184. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010. ISBN: 978-3-642-16224-4 (Print). e-ISBN: 978-3-642-16225-1 (Online). DOI 10.1007/978-3-642-16225-1. Studies in Computational Intelligence ISSN 1860-949X. Library of Congress Control Number: 2010937107. 2010 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- 9. Cell Method and Modified Nodal Method in Eddy Current Electromagnetic Problems, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en ICREPQ 2011, (International Conference on Renewable Energies and Power Quality), en Abril 2010. Las Palmas de Gran Canaria España.
- 10. Computational Geometry applied to Finite Formulation, autores: L. Simón, P. González y J. M. Monzón, expuesta en ISEF 2011, (XV International Symposium on Elec-

- tromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering), en Septiembre de 2011. Funchal (Island of Madeira) Portugal.
- 11. Global Equation of Cell Method and Modified Nodal Method of Electromagnetic and Circuital Problems, autores: J. M. Monzón, L. Simón y P. González, expuesta en ISEF 2011, (XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering), en Septiembre de 2011. Funchal (Island of Madeira)- Portugal.
- 12. The Fundamental Loop Matrix in Eddy Current Problem with Finite Formulation, autores: L. Simón y J. M. Monzón, expuesta en 2012, (MASCOT12&ISGG12 IMACS/ISGG Conference), en Agosto de 2012. Las Palmas de Gran Canaria España.
- 13. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D, autores: L. Simón, P. I. González, J. M. Monzón, M. Martínez, enviado al CAIP 2015, (12 Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), aceptado en Abril 2015. Cartagena de Indias Colombia.
- 14. El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética, autores: L. Simón, P. I. González, J. M. Monzón, M. Martínez, enviado al CAIP 2015, (12 Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), aceptado en Abril 2015. Cartagena de Indias Colombia.
- 15. El Método de la Celda Aplicado al estudio de Campos Electromagnéticos y Transferencia de Calor en Motores de Inducción, autores: P. I. González, L. Simón, J. M. Monzón, M. Martínez, enviado al CAIP 2015, (12 Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), aceptado en Abril 2015. Cartagena de Indias Colombia.
- Thermal Constitutive Matrix Applied to Asynchronous Electrical Machine Using The Cell Method, autores: P. I. González, J. M. Monzón, L. Simón, S. García-Alonso, enviado al ISEF 2015, (XVII International Symposium on Electromagnetic Fields

in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering), aceptado en Mayo 2015. Valencia - España.

## Capítulo 2

## Estado del Arte.

## Índice

2.1. Métodos de análisis en máquinas eléctricas	10
2.1.1. Evolución histórica	10
2.2. Ecuaciones topológicas: El Método de la Celda	12
2.3. Ecuaciones del medio magnéticas y eléctricas	14
2.3.1. Ecuaciones constitutivas	14
2.3.2. Ecuaciones circuitales	15

## Resumen e introducción.

En este capítulo se hace una revisión del estado actual de los métodos de análisis clásicos utilizados en el estudio de máquinas eléctricas, focalizando la atención en la formulación finita (FF) como método de discretización basado en magnitudes globales y en el planteamiento que hace de las ecuaciones electromagnéticas. Se recoge un breve compendio histórico con los métodos clásicos de discretización basados en la formulación diferencial, hasta la propuesta de la formulación finita (FF) para expresar dichas leyes como un conjunto de ecuaciones algebraicas globales.

## 2.1. Métodos de análisis en máquinas eléctricas.

Entre los métodos de resolución numérica para el análisis y el diseño de máquinas eléctricas que se describen con ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) [SP90, PS05], están los métodos clásicos conocidos como el método de las diferencias finitas (FDM) [Y<sup>+</sup>66, LHK<sup>+</sup>90, PS05] el método de los elementos finitos (FEM) [SF96, ZLO77, PS05] el método de los volúmenes finitos (FVM) [PS05, Sch06], y el método de los elementos de contorno (BEM) [Hal94, PR90], entre otros.

En estos métodos se dá por sentado que las ecuaciones diferenciales contienen toda la información sobre las leyes físicas y geométricas del fenómeno físico electromagnético que ellas describen. Pero realmente se pierde información importante como la distinción entre tipos de variables (configuración, fuente y energía), el poder introducir variables globales desde el mismo planteamiento del problema, la noción de los dos tipos de orientación en los elementos espaciales (interna y externa) y cuando se depende del tiempo, algunas variables deben evaluarse en un instante de tiempo o entre uno inicial y otro final, pues de lo contrario la formulación numérica acarrearía errores de precisión, inestabilidad y violación de la conservación de la energía [TZ10].

Junto a la formulación diferencial como herramienta matemática, la algebraica es la que permite una descripción más profunda del fenómeno físico electromagnético.

Existen multitud de programas comerciales de análisis FEM, como el ANSYS [Man], COMSOL [Mul94], Opera 3D [Fie04], etc. Y otros tantos GNU de fuente abierta o de libre distribución, como el FEMM [Mee09], Getdp [DG13], Imoose [ABK+06], Open-Foam [Ope10], etc. Estos programas son implementaciones del método de los elementos finitos, ampliamente conocidos en la divulgación científica. Sin embargo, el autor no conoce en toda la literatura consultada, ningún programa comercial ni de fuente abierta que basados en los principios de la formulación finita y el método de la celda.

#### 2.1.1. Evolución histórica.

La topología algebraica y su analogía con las redes eléctricas y el cálculo vectorial ya fueron estudiadas en los años sesenta por multiples autores [Bry61, Bra66, Bra64].

Los problemas de redes, además de una estructura de grafo lineal, tienen una es-

tructura algebraica asociada, dando a conocer la relación existente entre la física y la geometría desde un punto de vista matemático [Bra66]. Este último aspecto es el que se denomina como topología algebraica y en particular, teoría de la homología de las celdas complejas [Ton95].

De entre los muchos métodos de análisis numérico que surgieron, uno de los más importante fué el método de los elementos finitos (FEM). Su origen fué para aplicaciones en el campo de la mecánica, donde los desplazamientos y fuerzas son representados por vectores asociados a los nudos del mallado.

Históricamente, en la aplicación del método FEM al estudio de campos electromagnéticos, se trataron las magnitudes vectoriales electromagnéticas (intesidad del campo eléctrico y magnético) como funciones nodales asociadas a los nudos del mallado, de igual forma que las mecánicas (desplazamientos y fuezas), pero realmente están asociadas a otro tipo de elementos geométricos. Esto supuso un error en el tratamiento numérico de este tipo de problemas que conllevó la aparición de soluciones espúreas [Bos90, JWP96].

En su larga trayectoria, el FEM ha evolucionado hasta convertirse en una de las herramientas de análisis discreto más versátiles. La literatura consultada revela diversas aportaciones al FEM como las que hace *A. Bossavit* de los elementos de arista *edge elements method* (EEM) [Bos98, Mur94], así como las formas diferenciales y las formas de *Whitney* [WPFH94, Bos88a].

Pero es K. S. Yee quien propone por primera vez un método diferente basado en el método de las diferencias finitas (FDM), donde considera un mallado cartesiano escalonado con dos tipos de mallados duales, uno para el campo eléctrico y otro para el magnético [Y<sup>+</sup>66, BK00].

Cuando los sistemas de computación y las herramientas informáticas de programación adquiere más relevancia y accesibilidad, en los años setenta *M. Weiland* es uno de los pioneros en el desarrollo de la técnica de integración finita (FIT) [SW01, CW01b], basado en un esquema generalizado de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) para la solución de las ecuaciones de Maxwell, haciendo un planteamiento discreto de las mismas para fines computacionales [Wei96, Wei84a, Wei84b]. El planteamiento de las ecuaciones matriciales discretas que él hace constituyen las denominadas ecuaciones de malla de Maxwell (MGE) [CW99, Y+66]. El método permite obtener una representación

exacta de las ecuaciones de Maxwell usando variables de campo integradas en vez de componentes de campo. *M. Clemens* junto a *M. Weiland*, colaborarán en los siguientes años en el desarrollo de la implentación del método FIT basadas en las ecuaciones de malla MGE [CW99, CW01a].

En los años setenta, *E. Tonti* elabora un planteamiento algo distinto de las ecuaciones electromagnéticas [Ton01c]. Con respecto a la discretización de las ecuaciones de Maxwell, muestra que es posible expresar las leyes del electromagnetismo directamente como un conjunto de ecuaciones algebraicas [Ton02b, Ton02a, Ton95]. A la hora de discretizar e integrar las variables espaciales también discretiza el tiempo, en lo que él define como formulación finita (FF) o global [Ton14]. Clasifica las variables físicas y establece unos principios que asocian las variables con los elementos de espacio y tiempo. Las leyes físicas del electromagnetismo y sus ecuaciones constitutivas las interpreta geométricamente mediante variables integrales que define como variables globales.

Al representar las variables físicas globales, estas se encuentran asociadas de forma natural con elementos orientados de espacio y tiempo que son representadas mediante dos celdas complejas en relación dual.

Para el desarrollo de este análisis físico se plantea un método numérico denominado método de la celda (CM). El método de la celda (CM) es un método de resolución numérica que aplica y utiliza las variables globales en mallados no estructurados basados en triángulos y tetraedros [Ton02a, Mar02, Mar04].

Muchos aspectos del CM son comunes con la FIT, y planteamientos similares se han expuesto en diferentes investigaciones [BK00].

### 2.2. Ecuaciones topológicas: El Método de la Celda.

La teoría de grafos está relacionada con las propiedades estructurales de los circuitos eléctricos y el modelado de fenómenos discretos [Ton76, Ton01a, DST06].

El hecho de utilizar variables globales permite escribir las ecuaciones físicas de forma discreta, mediante los operadores discretos. Estos operadores discretos en la FF son matrices de incidencia entre los elementos espaciales líneas-puntos, superficies-líneas y volúmenes-superficies, siendo homólogos de los operadores diferenciales gradiente, rota-

cional y divergencia respectivamente [LYL07b, LYL07a]. Es decir, en relación a las ecuaciones topológicas se tienen ecuaciones de balance (divergencia), ecuaciones de circulación (rotacional) y ecuaciones de diferencias (gradiente), representadas como matrices en el CM [Ton01b, Mar01a].

Estas matrices van a representar un grafo orientado formado por pares de elementos ordenados entre entidades geométricas en mallados duales, mediante relaciones de dualidad [DFRR09].

Las ecuaciones topológicas no contienen información métrica, asociando las variables físicas con entidades geométricas del mismo tipo.

En general, fenómenos físicos análogos pueden compartir las mismas ecuaciones topológicas para el mismo espacio discreto con la misma estructura en sus ecuaciones matriciales, diferenciándose sólo en las ecuaciones constitutivas [AFR10, GMSM15].

Las ecuaciones de Maxwell una vez discretizadas mediante la FF, quedan de forma que las leyes de Maxwell-Àmpere y la ley Gauss eléctrica, por su naturaleza eléctrica están asociadas al mallado dual, con variables fuente. Las leyes de Faraday y la ley de Gauss para el campo magnético, por su naturaleza magnética están asociadas al mallado primal, con variables de configuración [Ton95, Ton01b, Ton13].

El CM es el método numérico asociado a la FF de las ecuaciones de Maxwell. Permite formular las funciones de dominio (ecuaciones de campo) directamente en forma finita usando variables globales (integradas) [Ton01b, TZ10, Ton14].

Las ecuaciones constitutivas y las leyes físicas se definen a nivel de celda.

Su estructura matemática se basa en dos celdas complejas duales orientadas con una asiganación de las variables globales a sus elementos(simplex).

Su implementación a nivel de programas comerciales de uso genérico, se desconoce en la literatura consultada. Existe un proyecto de implementación que usa el método FIT dirigido por *T. Weiland*, y cuyo software se denomina MAxwell Finite Integration Algoritm (MAFIA) [Wei90, BDD<sup>+</sup>92].

Los programas que se han utilizado para el método FEM, son el Getdp y el FEMM [DG13, Mee09]. Los programas implementados con el CM se han desarrollado en GNU/C++ y Scilab [Tie88, Ent12]. Se han utilizado estos programas por ser software libre o de fuente abierta, con reputado uso en el ámbito científico, permitiendo amplias posibilidades de

adaptación programática a los problemas planteados.

En las aportaciones que se presentan en esta tesis, se utiliza la Formulación Finita (FF) con una implementación original del Método de la Celda (CM) [HB10]. Se han hecho aportaciones del CM con ecuaciones circuitales tanto en 3D como en 2D. Los resultados se han comparado con aquellos resultantes de aplicar el Método de los Elementos Finitos (FEM) en cada caso. Comprobándose la convergencia de los resultados del método CM en función de incrementos en la densidad del mallado, con los de referencia obtenidos mediante el FEM.

### 2.3. Ecuaciones del medio magnéticas y eléctricas.

### 2.3.1. Ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones constitutivas son aquellas que relacionan las variables de configuración, asociadas al mallado primal, con las variables fuente, asociadas al mallado dual, y que además contienen información acerca del material y de los parámetros del sistema.

Con el fin de asociar adecuadamente estas variables en los mallados, las primeras clasificaciones distinguen entre el grupo de variables eléctricas asociadas al mallado primal y el grupo de variables magnéticas asociadas al mallado dual. En estas primeras clasificaciones los mallados se definieron ortogonales entre sí  $[Y^+66, BK00]$ .

En geometrías complejas con contornos curvos y objetos de dimensión espacial irregular, se hace necesaria una discretización basada en tetraedros y triángulos, entre otras formas posibles [Ton02a, Mar02, Mar04]. Las ecuaciones constitutivas además, contienen información métrica y de parámetros constitutivos, asociando las variables físicas con entidades geométricas de distinto tipo.

Las primera clasificación rigurosa del análisis teórico de las leyes físicas y la relación existente entre ellas están representadas en los diagramas de Tonti [Ton01c, Ton01a, Ton01b, DFRR09].

Para resolver las matrices constitutivas se ha utilizado como método númerico el método de la celda (CM). Estas matrices deben cumplir una serie de propiedades para resolverse mediante el CM. Deben de ser matrices simétricas definidas positivas, precisas y consistentes. Con estas propiedades se asegura la estabilidad del método numérico, se reducen los errores de discretización en mallados poco densos y se asegura que las matrices reconstruyen un campo uniforme sin introducir variaciones [Mar01b, CST07].

Las ecuaciones que rigen el medio son las ecuaciones magnéticas y las ecuaciones eléctricas.

Las hipóstesis consideradas asumen la uniformidad de los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en el interior de cada volumen o celda.

Las ecuaciones constitutivas magnéticas relacionan el vector de flujo magnético (variable de configuración) con el vector de voltaje magnético (variable fuente) de forma local [Rep07, CFRG08].

En esta tesis la alternativa utilizada se basa en la interpolación local para relacionar el vector de flujo magnético con el vector de voltaje magnético, para ello se utilizan las funciones de forma de Whitney, dentro de cada celda [Bos88b, WPFH94, GB11]. Este tipo de vectores y las funciones de interpolación son utilizados para definir las ecuaciones constitutivas para el CM [HB10].

En las ecuaciones eléctricas, la interpolación relaciona los vectores de corrientes (variable fuente) y fuerzas electromotrices (variable de configuración), utilizándose también las funciones de Whitney dentro de cada celda [Rep07].

Para la deducción de las ecuaciones constitutivas no hay un método único. Desde un punto de vista geométrico se pueden definir funciones de interpolación como las funciones de Whitney que se utilizan en esta tesis, pero existen otros como el método de la microcelda [Mar04, MFF02], métodos mixtos [Mar99], etc.

#### 2.3.2. Ecuaciones circuitales.

Junto con los dominios discretos también se han implementado dominios circuitales, constituídos por ecuaciones circuitales.

Las ecuaciones circuitales tienen una parte topológica y otra parte de ecuaciones constitutivas.

Las matrices topológicas utilizadas en las ecuaciones circuitales son las matrices A, B y Q.

Las ecuaciones constitutivas generales de ramas pueden resolverse mediante un método general que es el método de la tabla , además de otros métodos particulares como el método de las corrientes de bucle y el método de las tensiones de corte.

En la solución de las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones circuitales se ha utilizado el método nodal modificado (MNM) [CNC00, HRB75, ST98, MSS07]. El método MNM permite reducir el número de incógnitas y además puede ser utilizado en sistemas no lineales y en transitorios. En general, se han utilizado conjuntamente el método nodal modificado, el método de la celda y la formulación finita, para resolver los dominios circuitales y discretos.

## Bibliografía

- [ABK<sup>+</sup>06] G. Arians, T. Bauer, C. Kaehler, W. Mai, C. Monzel, D. van Riesen, and C. Schlensok. imoose, 2006.
- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [BDD+92] M. Bartsch, M. Dehler, M. Dohlus, F. Ebeling, P. Hahne, R. Klatt, F. Krawczyk, M. Marx, Z. Min, T. Pröpper, D. Schmitt, P. Schütt, B. Steffen, B. Wagner, T. Weiland, S. G. Wipf, and H. Wolter. Solution of maxwell's equations. Computer Physics Communications, 73(1-3):22-39, 1992.
- [BK00] A. Bossavit and L. Kettunen. Yee-like schemes on staggered cellular grids: A synthesis between fit and fem approaches. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 36(4):861–867, 2000.
- [Bos88a] A. Bossavit. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education Reviews, IEE Proceedings A*, 135(8):493–500, Nov 1988.
- [Bos88b] A. Bossavit. Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 135(8):493–500, 1988.

- [Bos90] A. Bossavit. Solving maxwell equations in a closed cavity, and the question of 'spurious modes'. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 26(2):702–705, Mar 1990.
- [Bos98] A. Bossavit. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements. Academic Press, 1998.
- [Bra64] F. H. Branin, Jr. D-c and transient analysis of networks using a digital computer. In *Proceedings of the SHARE Design Automation Workshop*, DAC '64, pages 4.1–4.23, New York, NY, USA, 1964. ACM.
- [Bra66] F. H. Branin. The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus. In *Symposium on generalized networks*, pages 453–491, 1966.
- [Bry61] P. R. Bryant. The algebra and topology of electrical networks. *Proceedings* of the IEE-Part C: Monographs, 108(13):215–229, 1961.
- [CFRG08] A. Canova, F. Freschi, M. Repetto, and G. Gruosso. Coupling of finite formulation with integral techniques. COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 27(1):37–46, 2008.
- [CNC00] M. C. Costa, S. L. Nabeta, and J. R. Cardoso. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with fem in the simulation of a universal motor. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 36(4):1431–1434, Jul 2000.
- [CST07] L. Codecasa, R. Specogna, and F. Trevisan. Symmetric positive-definite constitutive matrices for discrete eddy-current problems. *IEEE transactions on magnetics*, 43(2):510–515, 2007.
- [CW99] M. Clemens and T. Weiland. Transient eddy-current calculation with the fi-method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 35(3):1163 –1166, may 1999.
- [CW01a] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations. *International Computing Society newsletter*, 8:S. 13–20, January 2001.

- [CW01b] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32(32):65–87, 2001.
- [DFRR09] C. Delprete, F. Freschi, M. Repetto, and C. Rosso. Thermo-mechanical analysis using a multiphysics approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 181(1):012095, 2009.
- [DG13] P. Dular and C. Geuzaine. Getdp reference manual: the documentation for getdp, a general environment for the treatment of discrete problems, 2013.
- [DST06] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Coupling between circuits and a-χ discrete geometric approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1043 –1046, apr 2006.
- [Ent12] Scilab Enterprises. Scilab: Free and open source software for numerical computation. Scilab Enterprises, Orsay, France, 2012. http://www.scilab.org/.
- [Fie04] Vector Fields. Opera-3d reference manual. Vector Fields Limited, England, 2004.
- [GB11] A. Gillette and C. Bajaj. Dual formulations of mixed finite element methods with applications. *Computer-Aided Design*, 43(10):1213–1221, 2011.
- [GMSM15] P. I. González, J. M. Monzón, L. Simón, and M. Martínez. El método de la celda aplicado al estudio de campos electromagnéticos y transferencia de calor en motores de inducción. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [Hal94] W. S. Hall. Boundary Element Method. Springer, 1994.
- [HB10] M. Heshmatzadeh and G. E. Bridges. Finite formulation for modeling guided wave structures embedded in a lossy half-space. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 11(3):146–156, 2010.

- [HRB75] C. W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan. The modified nodal approach to network analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 22(6):504–509, 1975.
- [JWP96] B. Jiang, J. Wu, and L. A. Povinelli. The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *Journal of Computational Physics*, 125(1):104 123, 1996.
- [LHK+90] R. Luebbers, F. P. Hunsberger, K. S. Kunz, R. B. Standler, and M. Schneider. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 32(3):222–227, 1990.
- [LYL07a] R. Liu, D. Yan, and W. Li. Computation technology of finite formulation method on electromagnetic field in electrical machines. In *Electrical Machines* and Systems, 2007. ICEMS. International Conference on, pages 1380–1384. IEEE, 2007.
- [LYL07b] R. Liu, D. Yan, and W. Li. Finite formulation computation technology for 2d eddy current field. In *Electrical Machines and Systems*, 2007. ICEMS. International Conference on, pages 1376–1379. IEEE, 2007.
- [Man] ANSYS Manual. Ansys inc., 2013, release 11.0 documentation for ansys workbench. Analysis Settings (10 March 2013).
- [Mar99] René Marklein. The finite integration technique as a general tool to compute acoustic, electromagnetic, elastodynamic, and coupled wave fields. *Review of radio science*, 2002:201–244, 1999.
- [Mar01a] M. Marrone. Computational aspects of the cell method in electrodynamics. In
   F. L. Teixeira, editor, Geometric Methods in Computational Electromagnetics,
   PIER 32, pages 317–356. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001.
- [Mar01b] M. Marrone. Convergence and stability of the cell method with non symmetric constitutive matrices. In *Proc. Computing Conf.*, volume 4, pages 16–17, 2001.

- [Mar02] M. Marrone. The equivalence between cell method, fdtd and fem. In *IEE Fourth International Conference on Computation in Electromagnetics*, pages 8–11, 2002.
- [Mar04] M. Marrone. A new consistent way to build symmetric constitutive matrices on general 2-d grids, 2004.
- [Mee09] D. Meeker. Femm 4.2. User's Manual, Virginia, 2009.
- [MFF02] M. Marrone, A. M. F. Frasson, and H. E. H. Figueroa. A novel numerical approach for electromagnetic scattering: The cell method. In *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2002. IEEE, volume 1, pages 160–163. IEEE, 2002.
- [MSS07] J. M. Monzón, F. Santana, and L. Simón. Acople del método nodal modificado y el método de los elementos finitos. implementación en lenguaje scilab y c++. XCLEEE X Conference in Electrical Engineering, Aug 2007.
- [Mul94] COMSOL Multiphysics. Comsol. Inc., Burlington, MA, www. comsol. com, 1994.
- [Mur94] G. Mur. Edge elements, their advantages and their disadvantages. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 30(5):3552–3557, Sep 1994.
- [Ope10] OpenFOAM. Openfoam documentation user guide, Oct 2010. http://openfoam.com/docs/user/.
- [PR90] L. Pichon and A. Razek. Force calculation in axisymmetric induction devices using a hybrid fem-bem technique. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 26(2):1050–1053, Mar 1990.
- [PS05] J. Peiró and S. Sherwin. Finite difference, finite element and finite volume methods for partial differential equations. In *Handbook of materials modeling*, pages 2415–2446. Springer, 2005.
- [Rep07] M. Repetto. Discrete constitutive matrices. 2007.

- [Sch06] M. Schäfer. Computational engineering: introduction to numerical methods. Springer, 2006.
- [SF96] P. P. Silvester and R. L. Ferrari. Finite elements for electrical engineers. Cambridge university press, 1996.
- [SP90] M. N. O. Sadiku and A. F. Peterson. A comparison of numerical methods for computing electromagnetic fields. In Southeastcon'90. Proceedings., IEEE, pages 42–47. IEEE, 1990.
- [ST98] D. E. Schwarz and C. Tischendorf. Structural analysis for electric circuits and consequences for mna. 1998.
- [SW01] R. Schuhmann and T. Weiland. Conservation of Discrete Energy and Related Laws in the Finite Integration Technique, volume 32, pages 301–316. EMW Publishing, Cambridge, MA, 2001.
- [Tie88] M. D. Tiemann. User's guide to gnu c++. Free Software Foundation, 1000, 1988.
- [Ton76] E. Tonti. The reason for analogies between physical theories. Applied Mathematical Modelling, 1(1):37–50, 1976.
- [Ton95] E. Tonti. On the Geometrical Structure of the Electromagnetism. Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures. for the 80th Birthday of A. Lichnerowicz; G. Ferrarese: Pitagora Editrice, pages 281–308, 1995.
- [Ton01a] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation for the Wave Equation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(4):1355–1382, 2001.
- [Ton01b] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method. CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2(2):237–258, 2001.
- [Ton01c] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. Geometric Methods in Computational Electromagnetics PIER 32, 32(2):1–44, 2001.

- [Ton02a] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.
- [Ton02b] E. Tonti. Finite formulation on unstructured grids. In Computation in Electromagnetics, 2002. CEM 2002. The Fourth International Conference on (Ref. No. 2002/063), page 2 pp., april 2002.
- [Ton13] E. Tonti. The mathematical structure of classical and relativistic physics.  $Birkh\alpha user\ Basel,\ 2013.$
- [Ton14] Enzo Tonti. Why starting from differential equations for computational physics? *Journal of Computational Physics*, 257:1260–1290, 2014.
- [TZ10] E. Tonti and F. Zarantonello. Algebraic formulation of elastodynamics: the cell method. Computer Modeling in Engineering & Sciences(CMES), 64(1):37–70, 2010.
- [Wei84a] T. Weiland. On the numerical solution of maxwell's equations and applications in the field of accelerator physics. Technical report, Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg (Germany, FR), 1984.
- [Wei84b] T. Weiland. On the unique numerical solution of maxwellian eigenvalue problems in three dimensions. Technical report, Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg (Germany, FR), 1984.
- [Wei90] T. Weiland. Solving maxwell's equations in 3d and 2d by means of mafia. In Proc. of the Conf. on Computer Codes and the Linear Accelerator Community, LA-11857-C, 1990.
- [Wei96] T. Weiland. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, 1996.
- [WPFH94] M.-F. Wong, O. Picon, and V. Fouad Hanna. The impact of whitney forms on computational electromagnetics. In *Antennas and Propagation Society*

- International Symposium, 1994. AP-S. Digest, volume 3, pages 2076–2079 vol.3, June 1994.
- [Y<sup>+</sup>66] K. S. Yee et al. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag*, 14(3):302–307, 1966.
- [ZLO77] O. C. Zienkiewicz, J. Lyness, and D. Owen. Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential—a finite element solution. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 13(5):1649–1656, Sep 1977.

# Capítulo 3

Índice

# Geometría Computacional Aplicada a la Formulación Finita.

3.1.	Introducción	
3.2.	Celdas complejas. Discretización del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ 28	
3.3.	Orientación de las celdas complejas	
3.4.	Matrices de incidencia en celdas complejas	
3.5.	La fórmula de Euler-Poincarè	
3.6.	Relación entre elementos para mallados densos	
3.7.	Resultados y discusión	
	3.7.1. Cálculo de matrices topológicas	
	3.7.2. Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 2	

3.7.3. Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 3. . . . . . . . .

3.7.4. Estudio de la convergencia en mallados densos. . . . . . . . .

51

### Resumen.

En este capítulo, se hace uso de la *celda compleja* como elemento básico mediante el cual se derivarán las nociones de orientación, dualidad y números de incidencia.

También se definen los elementos topológicos necesarios para obtener un conjunto de matrices topológicas denominadas G, C, y D y sus respectivas duales  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{C}$ , y  $\tilde{D}$ .

Definidas las matrices de incidencias, se determinarán el  $\acute{a}rbol$  de la red topológica, la matriz fundamental de bucle y la matriz fundamental de corte.

Mediante la fórmula de Euler-Poincarè, se podrá cuantificar las relaciones entre los diferentes elementos. Pero especialmente para mallados muy densos, donde el número de ecuaciones es bastante elevado, se hace necesario disponer de alguna herramienta que determine cuantitativamente estas relaciones.

Una aproximación asintótica de dicha fórmula, hace posible esta cuantificación dando información sobre el número de incógnitas totales, al no existir una ecuación analítica.

### 3.1. Introducción.

La topología – -topo lugar, -logia estudio – es la rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma. De como unas formas están relacionadas e interconectadas con sus vecinas para formar un espacio. Es una disciplina esencialmente constructiva, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, teoría de grafos, teoría de conjuntos y del álgebra lineal.

El término de topología computacional ha terminado derivando en lo que se conoce como geometría computacional, que es el estudio mediante la computación para resolver problemas geométricos, con algoritmos y estructuras de datos eficientes [Mil97, PS78, Sha05].

Indiscutiblemente, la geometría es el fundamento de la mayoría de las teorías físicas actuales. En todas ellas existe una gran estructura geométrica subyacente. Y se ha con-

vertido en el lengua madre de numerosas teorías físicas y matemáticas actuales [DKT08].

En este capítulo se definen los elementos que forman una red topológica y la relación que existen entre ellos, tanto en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$  para el plano, como en  $\mathbb{R}^3$  para el espacio tridimensional. Entre estas definiciones se encuentra como elemento de mayor dimensión la *celda compleja*, herramienta topológica básica que determina las nociones de *orientación*, dualidad y números de *incidencia*, mediante un conjunto de matrices topológicas primarias y duales [Ton76, Ton01a, DST06].

Las  $celdas\ complejas\ van\ a\ representar\ los\ denominados\ grafos\ orientados\ o\ dirigidos\ [Mar<math>01$ , Ton 01b].

La teoría de grafos ha jugado un papel fundamental en el descubrimiento de propiedades estructurales en los circuitos eléctricos. Esto es porque son una representación pictográfica de los circuitos y capturan todas sus características estructurales. Por ello, en las matrices circuitales quedará reflejada la naturaleza dual de los circuitos y los conjuntos de corte, mediante el árbol y las matrices de bucle y de corte fundamentales. Para hallar estas matrices circuitales se ha utilizadado una implementación del algoritmo de Welsh [KPSB+97, TVMG99].

Las expresiones de Euler-Poincarè van a determinar las relaciones cuantitativas que existen entre los elementos topológicos. Esta cuantificación en las relaciones, permite conocer la relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas en problemas determinados [SGM11].

En los mallados esta cuantificación se corresponde con la fórmula de Euler-Poincarè y su característica, que depende del *género* que posea el objeto topológico.

En mallados muy densos se puede obtener de forma empírica una relación aproximada entre el número de elementos de menor dimensión y los correspondientes de mayor dimensión, permitiendo un conocimiento previo del número de incógnitas, lo que permitirá determinar el método de resolución más adecuado [SGM11].

Como mallador se ha utilizado el programa Gmsh de fuente abierta, que incorpora un generador de mallas, un motor de diseño asistido CAD y un postprocesador [GR08, GR09].

# 3.2. Celdas complejas. Discretización del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ .

En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , los grafos lineales están constituidos por elementos del plano definidos como formas-0 o celdas-0 para los puntos, y formas-1 o celdas-1 para las líneas. Sin embargo, en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  aparecen dos nuevos tipos de elementos topológicos, los volúmenes y las superficies definidas como formas-3 o celdas-3 y formas-2 o celdas-2, respectivamente.

Las celdas complejas son las herramientas básicas de la topología algebraica. En esta rama de la topología muchos conceptos se han desarrollado alrededor de las celdas complejas incluyendo las nociones de orientación, dualidad y números de incidencia [Ton13, TK04, Ton14].

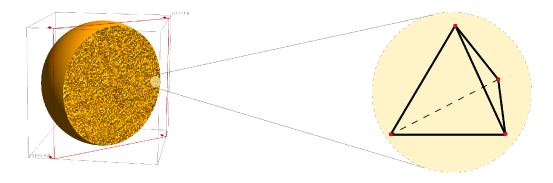


Figura 3.1: Discretización de una esfera mediante tetraedros.

Los elementos geométricos orientados que discretizarán el espacio en donde se encuentran, se pueden entender como parte de la celda compleja primaria, principal o fundamental. Estos elementos crearán un mallado que abarcará toda la región donde el fenómeno físico a estudiar será considerado.

Los vértices  $\mathbf{p}_h$ , lados  $\mathbf{l}_i$ , caras  $\mathbf{s}_j$  y celdas  $\mathbf{v}_k$  serán representadas por puntos  $\mathbf{P}$ , líneas  $\mathbf{L}$ , superficies  $\mathbf{S}$  y volúmenes  $\mathbf{V}$  de la celda compleja primaria K. Los subíndices indican el número de elementos geométricos.

A partir del complejo primario, se introduce el complejo dual  $\tilde{K}$  compuesto de los elementos geométricos  $\tilde{\mathbf{v}}_h$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{l}}_j$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_k$  indicados con la tilde de la letra  $\tilde{n}$  o virgulilla ( $\tilde{\phantom{n}}$ ) para

distinguirlos de los elementos geométricos correspondientes de la celda primaria compleja K.

La dualidad entre los dos complejos K y  $\tilde{K}$  relaciona los elementos geométricos correspondientemente de la siguiente forma:

$$\mathbf{p}_{h} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{v}}_{h}$$

$$\mathbf{l}_{i} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{s}}_{i}$$

$$\mathbf{s}_{j} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{l}}_{j}$$

$$\mathbf{v}_{k} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_{k}$$

$$(3.1)$$

Las celdas del complejo primario K están basadas en celdas tetraédricas  $\mathbf{v}_k$ , y las del dual complejo  $\tilde{K}$  se basan en la subdivisión baricéntrica a partir de K. Es decir, el nudo dual  $\tilde{\mathbf{p}}_k$  es el baricentro del tetraedro  $\mathbf{v}_k$ ; el lado o arista dual  $\tilde{\mathbf{l}}_j$  atraviesa la cara o superficie primaria  $\mathbf{s}_j$ , que tiene dos segmentos que van cada uno, del baricentro de la cara  $\mathbf{s}_j$  a los baricentros de los dos tetraedros que comparten la cara (Fig. 3.2) [RT04].

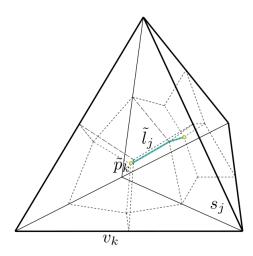


Figura 3.2: Subdivisión baricéntrica dual - línea de puntos -, arista dual  $\tilde{\mathbf{l}}_j$  y nudo dual  $\tilde{\mathbf{p}}_k$ .

La cara dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ , atravesada por el lado del primario  $\mathbf{l}_i$ , es la unión de un número de caras cuadriláteras que están delimitadas cada una de ellas por cuatro nudos definidos

por: el baricentro del lado  $\mathbf{l}_i$ , el baricentro del tetraedro que contiene las dos caras  $\mathbf{s}_j$  que tienen en común el lado  $\mathbf{l}_i$ , y los baricentros de las dos caras  $\mathbf{s}_j$  (Fig. 3.3).

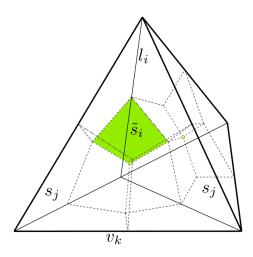


Figura 3.3: Una de las caras cuadriláteras que forma una cara dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ .

Una celda dual  $\tilde{\mathbf{v}}_h$  forma un volumen que contiene un nudo principal  $\mathbf{p}_h$ , que es el baricentro dual. Las caras que lo rodean son las caras duales  $\tilde{\mathbf{s}}_j$  (Fig. 3.4).

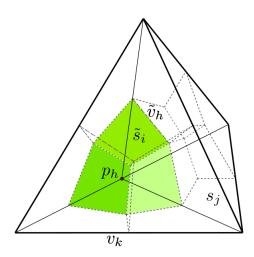


Figura 3.4: Una celda dual  $\tilde{\mathbf{v}}_h$  forma un volumen delimitado por caras duales  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ .

Por tanto, el complejo primario K estará formado por un mallado simplicial de dimensión 1-d, 2-d o 3-d según el problema, mientras el complejo dual  $\tilde{K}$  estará formado por un mallado baricéntrico de igual dimensión [DFRR09].

### 3.3. Orientación de las celdas complejas.

Los elementos espaciales como los puntos, líneas, superficies y volúmenes pueden ser dotados de una orientación [FGR08, Mar01, Ton01b]. Hay dos tipos de orientaciones: interna y externa.

**Orientación interna:** Siempre que la orientación de un elemento espacial se encuentre en el mismo elemento, se dice que se ha establecido una *orientación interna*, como se muestra en la figura 3.5.

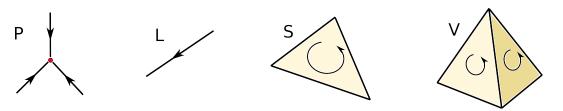


Figura 3.5: Elementos de dimensión 0, 1, 2 y 3, y orientación interna.

La orientación interna de un punto puede ser concebida como una fuente o sumidero. En la presente tesis, la orientación interna de los elementos de forma - 0 o puntos **P** tiene valor positivo cuando es considerado como un sumidero.

La orientación interna del elemento de forma-1 o línea  $\mathbf{L}$ , es la dirección intrínseca coincidente con ella misma.

La orientación interna del elemento de forma-2 o superficie  ${\bf S},$  es la dirección a lo largo de su frontera.

Por último, la orientación interna del elemento de forma-3 o volumen V, es la orientación compatible con la de sus caras. La orientación interna de los volúmenes en la presente tesis tiene valor positivo cuando es considerado como una fuente [Ton01b]. Esta es equivalente a la regla del sacacorcho [Tre02].

**Orientación externa:** Siempre que la orientación de un elemento espacial dependa del espacio en donde el elemento se encuentra implícito, la *orientación externa* se define, como se muestra en la figura 3.6.

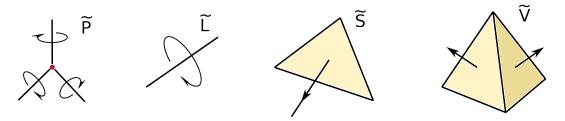


Figura 3.6: Elementos de dimensión 0, 1, 2 y 3, y orientación externa.

La orientación externa de un punto  $\tilde{\mathbf{P}}$  es la orientación interna de un volumen conteniendo dicho punto.

La orientación externa de una línea  $\tilde{\mathbf{L}}$  es la orientación interna de la superficie que atraviesa la línea.

La orientación externa de una superficie  $\tilde{\mathbf{S}}$  es la orientación interna de la línea que atraviesa la superficie.

Y por último, la orientación externa de un volumen  $\tilde{\mathbf{V}}$  viene dada por la elección de las normales hacia fuera o hacia dentro. La orientación tomada como positiva se corresponde con una orientación hacia fuera de las normales.

Contrariamente a la orientación interna que es intrínseca, la orientación externa depende de la dimensión del espacio en la que el elemento está incrustado. Así, la orientación externa de un segmento de línea incrustado en un espacio de tres dimensiones tiene un sentido de rotación alrededor del segmento (Fig. 3.7a).

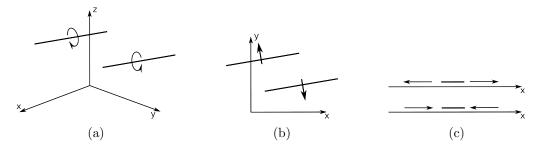


Figura 3.7: Orientación externa de una línea según la dimensión del espacio que la contiene.

En un espacio de dos dimensiones ésta es una flecha que atraviesa la línea (Fig. 3.7b). Y cuando el segmento está integrado en un espacio unidimensional, ésta es representada por dos flechas como si el segmento se comprimiera o expandiera (Fig. 3.7c) [Ton01a, Ton76].

### 3.4. Matrices de incidencia en celdas complejas.

En un espacio tridimensional hay que contar con un nuevo conjunto de elementos topológicos que se añaden a los anteriormente definidos. Estos nuevos elementos son las matrices de incidencia. Estas matrices van a representar un grafo orientado o dirigido, formado por los pares de elementos ordenados que la constituyen. Existen tres matrices de incidencia que se denotan como la matriz G, que representa las incidencias entre aristas y vértices. La matriz C, que representa las incidencias entre caras y aristas. Y la matriz D, que representa las incidencias entre volúmenes y caras. Todo ello para el complejo primario K [Ton13].

Si los nudos se han definido como sumideros, o sea con orientación positiva de sus normales entrante o hacia el interior, la matriz G de incidencia ramas-nudos se definie como:

$$G_{ramas \times nudos} = G_{r,n} = \begin{cases} G_{r,n} = +1 & \Leftrightarrow \{n \in r\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ es \ entrante \ en \ n\} \\ G_{r,n} = -1 & \Leftrightarrow \{n \in r\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ es \ saliente \ de \ n\} \\ G_{r,n} = 0 & \Leftrightarrow \{n \notin r\} \end{cases}$$

$$(3.2)$$

Matriz C de incidencia caras-ramas, que definirá la relación existente entre la orientación dada en las caras y la orientación de las ramas que la forman.

$$C_{caras \times ramas} = C_{c,r} = \begin{cases} C_{c,r} = +1 & \Leftrightarrow \{r \in c\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ coincide \ con \ el \ de \ c\} \\ C_{c,r} = -1 & \Leftrightarrow \{r \in c\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ es \ contrario \ al \ de \ c\} \\ C_{c,r} = 0 & \Leftrightarrow \{r \notin c\} \end{cases}$$

$$(3.3)$$

Y la matriz D de incidencia volumen-caras. Si los volúmenes han sido definidos como fuentes, o sea con orientación positiva de sus normales salientes o hacia el exterior, la matriz D definirá la relación existente entre la orientación dada en las caras y la orientación de los volúmenes formadados por dichas caras.

$$D_{vol\'umenes \times caras} = D_{v,c} \begin{cases} D_{v,c} = +1 & \Leftrightarrow \{c \in v\} \land \{el \ sentido \ de \ c \ coincide \ con \ el \ de \ v\} \\ D_{v,c} = -1 & \Leftrightarrow \{c \in v\} \land \{el \ sentido \ de \ c \ es \ contrario \ al \ de \ v\} \\ D_{v,c} = 0 & \Leftrightarrow \{c \notin v\} \end{cases}$$

$$(3.4)$$

De igual forma según la correspondencia entre las entidades geométricas del primario y del dual y numerando los elementos congruentemente, se obtiene las tres matrices  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  para el complejo dual  $\tilde{K}$  [DFRR09], de forma que:

$$\tilde{G} = D^{T}$$

$$\tilde{C} = C$$

$$\tilde{D} = -G^{T}$$
(3.5)

### 3.5. La fórmula de Euler-Poincarè.

La fórmula de Euler-Poincaré describe la relación entre el número de vértices, el número de aristas, el número de caras y el número de volúmenes de una descomposición celular (un mallado) de una variedad topológica [Ton14].

En la descomposición de cada celda se define como elementos principales:  $\mathbf{P}$  el número de vértices o nudos,  $\mathbf{L}$  el número de aristas o lados,  $\mathbf{S}$  el número de caras y  $\mathbf{V}$  el número de volúmenes.

Una superficie topológica es una variedad de dimensión 2, compacta (cerradas y acotadas) y conexa.

Las principales superficies son el plano proyectivo  $\mathbb{R}^2$ , la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2$ . Cualquier superficie cerrada se puede obtener a partir de ellas, mediante sumas conexas.

Las superficies poliédricas de dimensión 2 o bidimensionales cerradas son homeomorfas

a una esfera  $\mathbb{S}^2$ , es decir, son topológicamente equivalentes (Fig. 3.17).

En topología, el género g de una superficie es un invariante que viene determinado por el número de agujeros en la superficie. El género, está relacionado con la característica de Euler  $\chi$  de la siguiente forma

$$\chi = 2 - 2g = 2(1 - g) \tag{3.6}$$

La característica de Euler,  $\chi(M)$ , de una superficie M para un poliedro convexo, homeomorfo a una esfera sin agujeros (g=0) es:

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} = \chi(M) = 2 \tag{3.7}$$

La característica de Euler constituye un invariante topológico para este espacio homeomorfo, o sea, para la esfera su valor es  $\chi(M) = (2 - 2g) = 2$ .

El toro  $\mathbb{T}^2$  de dimensión 2 es una superficie homeomorfa a una superficie de un anillo sólido (Fig. 3.18).

La característica de Euler para un toro con un único agujero, es decir con género igual a g=1, tiene un valor de  $\chi(M)=2-2g=2-2\cdot 1=0$ . Y la expresión que la define es

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} = 2 - 2q = 0 = \chi(M) \tag{3.8}$$

En geometrías homeomórficas al toro como sería un cilindro hueco, resultaría coincidente su género g = 1 y por tanto, también su característica que valdría  $\chi(M) = 0$ .

De igual forma, para un cilindro cerrado, al no tener agujeros su género es cero y su característica tendría un valor de  $\chi(M) = 2$  (Fig. 3.19).

Las expresiones de Euler-Poincaré contendrán ahora el elemento de nueva dimensión. De forma genérica para poliedros de dimensión d se tiene

$$E_0 - E_1 + E_2 - E_3 + \dots E_d = 1 + (-1)^d$$
(3.9)

donde  $E_i$  denota un elemento de dimensión i, (i = 0, 1, 2...d). Para objetos simples (sin agujeros) y con una dimensión d = 2, esta expresión se reduce a (3.7).

En una variedad de dimensión 3, se introduce un elemento de dimensión superior,

los volúmenes. El entero  $\chi$ , como se ha visto, es una constante de Euler-Poincarè de un dominio, y una de su formas es

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} = \chi(\Omega) \tag{3.10}$$

### 3.6. Relación entre elementos para mallados densos.

En mallados tetraédricos tridimensionales, no existe una relación entre el número de tetraedros y el número de nudos. Cuando los mallados tridimensionales son de gran densidad, se utiliza una aproximación asintótica de la fórmula de Euler-Poincarè que viene dada por

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} \simeq 0 \tag{3.11}$$

donde  ${\bf V}$  representa el número de volúmenes tetraédricos.

En un mallado tetraédrico M el promedio de entidades encontradas quedan relacionadas en la tabla 3.1.

Mallado Tetraédrico
$V \sim 6 \cdot P$
$\mathbf{S} \sim 12 \cdot \mathbf{P}$
$\mathbf{L} \sim 7.\mathbf{P}$

Tabla 3.1: Relación entre entidades para un mallado asintótico.

En esta tabla se indica que la mayoría de los mallados tetraédricos densos contendrán, 6 veces más tetraedros que vértices, 12 veces más caras que vértices y 7 veces más lados que vértices.

Los resultados son correctos en mallados finos o densos pero no se corresponden cuando el mallado es grueso o poco denso [GR08, GR09].

### 3.7. Resultados y discusión.

### 3.7.1. Cálculo de matrices topológicas.

En este apartado se obtienen todas matrices de incidencia utilizando un tetraedro como figura elemental (Fig. 3.8).

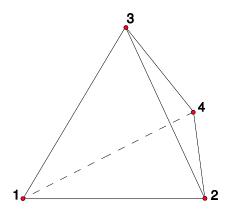


Figura 3.8: Tetraedro como figura elemental.

El mallado más simple que se puede hacer del mismo se corresponde con dos celdas tetraédricas adyacentes (Fig. 3.9), donde quedan defininos cinco nudos correspondientes a los cinco vértices denominada como forma-0.

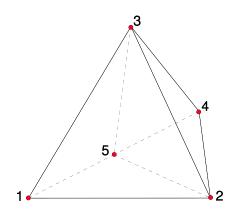


Figura 3.9: Mallado más simple de un tetraedro en dos celdas tetraédricas.

Este conjunto está formado por:

$$nudos = \{1, 2, 3, 4, 5\} \tag{3.12}$$

El conjunto de lados o aristas viene determinado por pares de nudos. La orientación de las aristas es arbitraria y el sentido está definido de nudo inicial a nudo final (Fig. 3.10).

Las aristas están formadas por el conjunto indicado a continuación,

$$aristas = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_5, \mathbf{l}_6, \mathbf{l}_7, \mathbf{l}_8, \mathbf{l}_9\}$$
 (3.13)

Cada arista  $\mathbf{l}_n$  está formada por el conjunto de pares de nudos con una orientación interna que va del primer nudo al segundo nudo, quedando asignados de la siguiente forma:

$$\mathbf{l}_1 = \{2,3\} \; ; \; \mathbf{l}_2 = \{3,5\} \; ; \; \mathbf{l}_3 = \{5,4\} \; ; \; \mathbf{l}_4 = \{4,2\} \; ; \; \mathbf{l}_5 = \{2,5\} \; ;$$

$$\mathbf{l}_6 = \{3,4\} \; ; \; \mathbf{l}_7 = \{2,1\} \; ; \; \mathbf{l}_8 = \{1,3\} \; ; \; \mathbf{l}_9 = \{5,1\}$$
(3.14)

En la figura 3.10 están definidos los elementos forma-1 que se corresponden con las aristas y sus respectivas orientaciones respecto de los nudos o vértices.

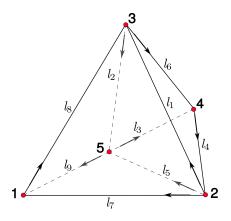


Figura 3.10: Orientaciones de los elementos de forma-1.

El conjunto de caras definen la denominada forma-2. Este conjunto está formado por las caras de los tetraedros.

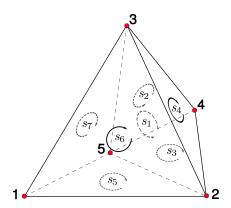


Figura 3.11: Orientaciones de los elementos de forma-2.

Su orientación viene determinada de forma arbitraria y el sentido viene dado por el orden de secuencia de la tripleta de nudos que la componen. El conjunto se define de la siguiente forma:

$$caras = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4, \mathbf{s}_5, \mathbf{s}_6, \mathbf{s}_7\}$$

$$(3.15)$$

Cada cara  $\mathbf{s}_n$  está formada por el conjunto de tripletas de nudos cuya orientación interna viene dada por la secuencia nudo primero, nudo segundo, nudo tercero.

$$\mathbf{s}_{1} = \{2, 3, 5\} \; ; \; \mathbf{s}_{2} = \{3, 5, 4\} \; ; \; \mathbf{s}_{3} = \{5, 4, 2\} \; ; \; \mathbf{s}_{4} = \{3, 4, 2\} \; ;$$

$$\mathbf{s}_{5} = \{5, 2, 1\} \; ; \; \mathbf{s}_{6} = \{2, 1, 3\} \; ; \; \mathbf{s}_{7} = \{1, 3, 5\}$$

$$(3.16)$$

En la Fig. 3.11 están definidos los elementos forma-2 que se corresponden con las caras y sus respectivas orientaciones.

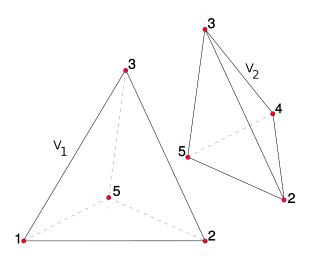


Figura 3.12: Elementos de forma-3, separados.

Por último en la Fig. 3.12 se representan los elementos denominados como forma-3, que se corresponden con los volúmenes que forman los dos tetraedros del mallado.

$$volúmenes = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \tag{3.17}$$

Cada volúmen  $\mathbf{v}_n$  está formado por el conjunto de cuadrupletas de nudos cuya orientación interna viene dada por la secuencia arbitraria de sus aristas.

$$\mathbf{v}_1 = \{2, 3, 5, 4\} \; ; \; \mathbf{v}_2 = \{5, 2, 1, 3\}$$
 (3.18)

Por definición, así como los nudos están orientados internamente como sumideros, o sea con signo positivo todo lo que entra hacia su interior, los volúmenes están orientados internamente como fuentes, o sea con signo positivo todo lo que sale hacia el exterior.

Para determinar la orientación del volumen de cada tetraedro, las cuadrupletas de nudos identificadas como  $\{i, j, k, p\}$ , se comparan con un volumen orientado de referencia como el de la figura 3.13, cuya orientación es positiva, con las caras orientadas hacia el exterior según la regla de la mano derecha o sentido antihorario.

En el ejemplo, las cuadrupletas de nudos de cada volúmen se van a identificar como  $\{i, j, k, p\}$ , de tal forma que la cara formada por los nudos i, j, k forman un plano que divide al espacio en dos partes. Si desde el lado opuesto al nudo  $\mathbf{p}$  se observa el sentido

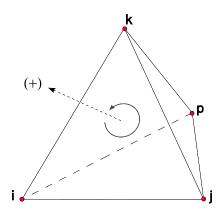


Figura 3.13: Tetraedro de referencia  $\{p, i, j, k\}$ .

de los demás nudos i, j, k hacia la izquierda (sentido antihorario), el volumen es positivo (+), y si el sentido es hacia la derecha (sentido horario), el volumen es (-) [FT97].

Para el ejemplo tratado, la matriz de incidencias entre aristas en las filas (9 elementos) y vértices en las columnas (5 elementos), proporcionará la matriz G definida como

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3.19)$$

La matriz C viene determinada por las incidencias del conjunto de caras (7 elementos) en las filas, frente a aristas (9 elementos) en las columnas.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3.20)$$

Y por último, la matriz D correspondiente viene determinada por las incidencias del conjunto de volúmenes (2 elementos) en las filas, frente a las caras (7 elementos) en las columnas.

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
 (3.21)

Las matrices obtenidas G, C y D, son las matrices de incidencias entre las diferentes formas que definen en el denominado mallado primal o primario.

Uno de los nuevos elementos topológicos es la matriz A. La matriz A está definida por las incidencias entre el número de vértices o nudos en las filas y el número de ramas en las columnas y se define como:

$$A = -G^T (3.22)$$

Para el ejemplo desarrollado el número de nudos = 5 y el número de ramas = 9. El lazo es un conjunto de aristas que forman una línea cerrada. Topológicamente las caras son un caso particular de los lazos.

Y viene dado por la expresión:

$$n\'umero de lazos = n\'umero de ramas - (n\'umero de nudos - 1)$$
 (3.23)

en el ejemplo que se viene desarrollando el número de lazos = 5.

Los conjuntos que forman los lazos en el ejemplo son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{2}, \mathbf{l}_{3}, \mathbf{l}_{4}\} \\
\{\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{2}, \mathbf{l}_{5}\} \\
\{\mathbf{l}_{2}, \mathbf{l}_{3}, \mathbf{l}_{6}\} \\
\{\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{7}, \mathbf{l}_{8}\} \\
\{\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{2}, \mathbf{l}_{7}, \mathbf{l}_{9}\}
\end{aligned} (3.24)$$

En la figura 3.14 se representa el lazo formado por el conjunto  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ .

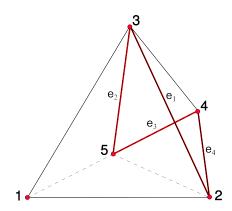


Figura 3.14: Lazo formado por  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ .

El primer elemento topológico a definir es el árbol.

Una estructura topológica conexa es aquella que permite pasar de uno de sus nudos a otro cualquiera mediante una línea continua formada por aristas o ramas de la propia estructura. Si se tiene una estructura conexa con n nudos, entonces un árbol es cualquier subconjunto de sus aristas o ramas que sea conexo pero abierto, es decir sin lazos o bucles, que además contenga a todos los nudos.

El número de aristas o ramas del árbol está formado por:

$$n\'umero de ramas del \'arbol = n\'umero de nudos - 1$$
 (3.25)

Para la obtención del árbol y de las matrices B y Q, se ha implementado el algoritmo de Welsh mediante un programa escrito en C++ [KPSB<sup>+</sup>97].

En el ejemplo viene dado por:

El árbol obtenido no es único y varía en función del criterio de búsqueda adoptado.

Su representación se puede ver en la figura 3.15.

Bucle básico o fundamental es aquel bucle que se define respecto de un árbol y contiene un sólo eslabón.

n'umero de bucles fundamentales = n'umero de ramas del 'arbol - (n'umero de nudos - 1) (3.27)

$$B_{bucles \times ramas} = B_{b,r} = \begin{cases} B_{b,r} = +1 & \Leftrightarrow \{r \in b\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ coincide \ con \ el \ de \ b\} \\ B_{b,r} = -1 & \Leftrightarrow \{r \in b\} \land \{el \ sentido \ de \ r \ es \ contrario \ al \ de \ b\} \\ B_{b,r} = 0 & \Leftrightarrow \{r \notin b\} \end{cases}$$

$$(3.28)$$

Un grupo de corte básico o fundamental respecto de un árbol dado, es un conjunto de ramas de las que sólo una pertenece al árbol.

 $n\'{u}mero de grupos de corte b\'{a}sico = n\'{u}mero de ramas del \'{a}rbol = n\'{u}mero de nudos - 1$  (3.29)

$$Q_{cortes \times ramas} = Q_{c,r} = \begin{cases} Q_{c,r} = +1 & \Leftrightarrow \{r \in c\} \land \{el \ sentido \ de \ la \ r \ coincide \ con \ el \ de \ c\} \\ Q_{c,r} = -1 & \Leftrightarrow \{r \in c\} \land \{el \ sentido \ de \ la \ r \ es \ contrario \ al \ de \ c\} \\ Q_{c,r} = 0 & \Leftrightarrow \{r \notin c\} \end{cases}$$

$$(3.30)$$

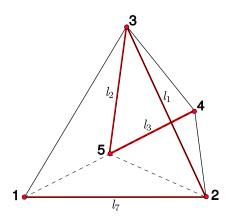


Figura 3.15: Árbol del conjunto formado por  $\{l_1, l_2, l_3, l_7\}$ .

La matriz fundamental de bucle la determina todas las incidencias entre los conjuntos de lazos o bucles fundamentales y las aristas o ramas, quedando definida como:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(3.31)

Los grupos de corte están formados por aquel conjunto de aristas de forma que su supresión, dejaría dividida en dos partes inconexas la estructura topológica.

Topológicamente las aristas que concurren en un nudo son un caso particular del grupo de corte.

Los conjuntos que forman los grupos de corte en el ejemplo, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
&\{l_7, l_8, l_9\} \\
&\{l_1, l_4, l_5, l_8, l_9\} \\
&\{l_2, l_4, l_5, l_6, l_9\} \\
&\{l_3, l_4, l_6\}
\end{aligned} (3.32)$$

En la figura 3.16 se representa el grupo de corte formado por el conjunto  $\{l_7, l_8, l_9\}$ .

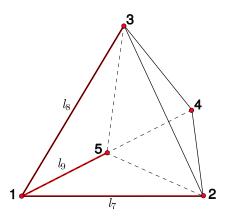


Figura 3.16: Grupo de corte  $\{l_7, l_8, l_9\}$ .

Y por último se define la matriz fundamental de corte, determinada por las incidencias entre los cortes y las ramas:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(3.33)

Como referencia, los elementos de mayor número de forma estarán siempre en las filas frente a la forma inmediatamente inferior en las columnas. Los elementos de forma-1 (aristas) y los elementos de forma-2 (caras) que se comparten y son comunes, son evaluados una sola vez.

### 3.7.2. Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 2.

La fórmula de Euler-Poincaré se comprueba para espacios de dimensión 2, en la esfera, el toro y el cilindro. Estos dominios serán los que se utilicen como prototipos en la presente tesis.



	Número de Elementos
Vértices (P)	110
Aristas (L)	324
Caras (S)	216

Figura 3.17: Elementos 2D de la superficie de una esfera.

En la esfera de dimensión 2, aplicando la fórmula (3.7), se obtiene que

$$P - L + S = 110 - 324 + 216 = 2 \tag{3.34}$$

si su género g=0, la característica de Euler valdrá

$$\chi(S) = 2 - 2g = 2 \tag{3.35}$$



	Número de Elementos
Vértices (P)	261
Aristas (L)	783
Caras (S)	522

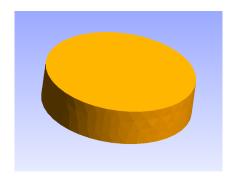
Figura 3.18: Elementos 2D de la superficie de un toro.

Para la superficie del toro, aplicando la misma fórmula se obtiene

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} = 261 - 783 + 522 = 0 \tag{3.36}$$

en este caso su género  $g=1,\,{\bf y}$ la característica de Euler valdrá

$$\chi(T) = 2 - 2g = 0 \tag{3.37}$$



	Número de Elementos
Vértices (P)	441
Aristas (L)	1317
Caras $(S)$	878

Figura 3.19: Elementos 2D de la superficie de un cilindro, obtenido con el mallador Gmsh.

Para la superficie de un cilindro cerrado de dimensión 2, se obtiene

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} = 441 - 1317 + 878 = 2 \tag{3.38}$$

su género es g=0 y por tanto, la característica de Euler valdrá

$$\chi(S) = 2 - 2g = 2 \tag{3.39}$$

## 3.7.3. Fórmulas de Euler para objetos de dimensión 3.

La fórmula de Euler-Poincaré para espacios de dimensión 3, donde además aparece el elemento volumen (tetraedro) de dimensión superior, queda de la siguiente forma

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} = \chi \tag{3.40}$$

donde  $\chi$  es la característica [Bos98].

Para los casos sometidos a estudio, la característica está relacionada con el género de la forma

$$\chi = 1 - g \tag{3.41}$$

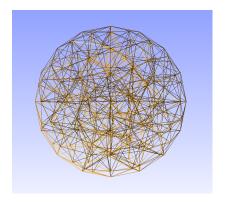
donde g es el número de agujeros en el objeto.

Para la esfera de dimensión 3, aplicando la expresión (3.40) se obtiene

$$P - L + S - V = 199 - 1138 + 1772 - 832 = 1$$
(3.42)

su género es g=0 y por tanto, la característica de Euler valdrá

$$\chi = 1 - g = 1 \tag{3.43}$$



	Número de Elementos
Vértices (P)	199
Aristas (L)	1138
Caras (S)	1772
Volúmenes (V)	832

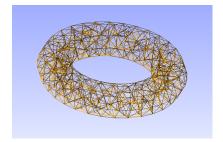
Figura 3.20: Elementos 3D del volúmen de una esfera, obtenido con el mallador Gmsh.

Para el toro, aplicando la expresión (3.40) se obtiene

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} = 360 - 1899 + 2817 - 1278 = 0 \tag{3.44}$$

su género es g=1 y por tanto, la característica de Euler valdrá

$$\chi = 1 - g = 0 \tag{3.45}$$



	Número de Elementos
Vértices (P)	360
Aristas (L)	1899
Caras (S)	2817
Volúmenes (V)	1278

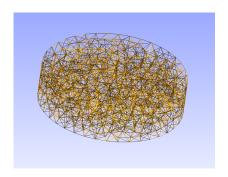
Figura 3.21: Elementos 3D del volúmen de un toro con g = 1.

Para el cilindro, aplicando la expresión (3.40) se obtiene

$$P - L + S - V = 729 - 4226 + 6557 - 3059 = 1$$
(3.46)

su género es g=0 y por tanto, la característica de Euler valdrá

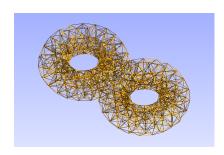
$$\chi = 1 - g = 1 \tag{3.47}$$

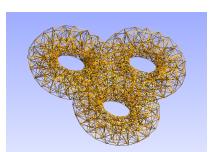


	Número de Elementos
Vértices (P)	729
Aristas (L)	4226
Caras (S)	6557
Volúmenes (V)	3059

Figura 3.22: Elementos 3D del volúmen de un cilindro con g=0.

La relación (3.41) se ha comprobado además de para el toroide simple, para otras formas toroidales superiores con dos y tres agujeros, como se puede observar en la figura 3.23.





	Número de Elementos	
Vértices (P)	748	
Aristas (L)	4342	
Caras (S)	6736	
Volúmenes $(\mathbf{V})$	3143	
$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} = \chi = -1$		

	Número de Elementos	
Vértices (P)	1131	
Aristas (L)	6653	
Caras (S)	10386	
Volúmenes (V)	4866	
$\mathbf{P} - \mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{V} = \chi = -2$		

Figura 3.23: Elementos 3D del volúmen de un toro con g=2 y g=3.

## 3.7.4. Estudio de la convergencia en mallados densos.

Con respecto a la convergencia en mallados densos de los elementos topológicos vistos en la tabla 3.1, se han realizado una serie de experiencias que se muestran en la tabla 3.2.

Longitud	Nudos	Arístas	Caras	Volúmenes	Búcles	Cortes
Característica					Fundamentales	Fundamentales
0,5000	72	416	658	313	345	71
0,0238	443	2854	4679	2267	2412	442
0,0121	2943	19900	33227	16269	16958	2942
0,0081	8871	61502	103664	51032	52632	8870
0,0070	14062	98390	166487	82158	84329	14061
0,0065	16758	117613	199188	98332	100856	16757

Tabla 3.2: Relación asintótica entre Elementos Topológicos y Nudos.

La tendencia de los valores obtenidos mostrados en la figura 3.24, se corresponden con

las relaciones para mallados densos de la tabla 3.1.

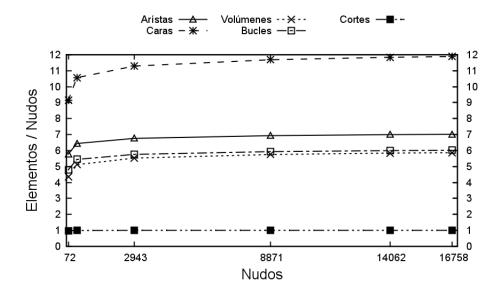


Figura 3.24: Convergencia asintótica con el aumento de la densidad del mallado.

Los mallados realizados corresponden a un prototipo basado en un dominio  $\Omega_D$ , con simetría axial según se puede observar en la figura 3.25a [CF04, CFS<sup>+</sup>05, DST06].

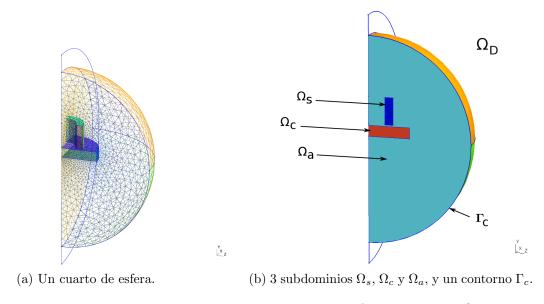


Figura 3.25: Prototipo genérico para un cuarto de esfera y dominio  $\Omega_D$ .

En la figura 3.25b, se muestran tres subdominios dentro del contorno  $\Gamma_c = \partial (\Omega_D)$ , donde el subdominio  $\Omega_s$  se corresponde con un cilindro. El subdominio  $\Omega_c$  está representado por un disco de cierto espesor. Y el último subdominio  $\Omega_a$  se corresponde con la zona restante, de forma que

$$\Omega_D = \Omega_s \cup \Omega_c \cup \Omega_a \tag{3.48}$$

El incremento de la densidad del mallado se realiza mediante la variación de la longitud característica del mallado que es una variable característica de éste.

Así mismo, se han calculado los bucles fundamentales y los cortes fundamentales según las expresiones (3.27) y (3.29) respectivamente.

Los resultados obtenidos se representan gráficamente en la figura 3.24.

# Bibliografía

- [Bos98] A. Bossavit. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements. Academic Press, 1998.
- [CF04] E. Cardelli and A. Faba. FEM analysis of thin cracks in metallic plates. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, (19):503–507, 2004.
- [CFS+05] E. Cardelli, A. Faba, R. Specogna, A. Tamburrino, F. Trevisan, and S. Ventre. Analysis methodologies and experimental benchmarks for eddy current testing. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(5):1380 1383, May 2005.
- [DFRR09] C. Delprete, F. Freschi, M. Repetto, and C. Rosso. Thermo-mechanical analysis using a multiphysics approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 181(1):012095, 2009.
- [DKT08] M. Desbrun, E. Kanso, and Y. Tong. Discrete differential forms for computational modeling. In ACM SIGGRAPH ASIA 2008 courses, SIGGRAPH Asia '08, pages 15:1–15:17, New York, NY, USA, 2008. ACM.
- [DST06] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Coupling between circuits and a- $\chi$  discrete geometric approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1043 –1046, apr 2006.
- [FGR08] F. Freschi, L. Giaccone, and M. Repetto. Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism. *COMPEL The International*

- Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 27(6):1343–1357, 2008.
- [FT97] F. R. Feito and J. C. Torres. Inclusion test for general polyhedra. *Computers & Graphics*, 21(1):23–30, 1997.
- [GR08] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. An introduction to geometrical modelling and mesh generation with Gmsh. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Nov 2008.
- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [KPSB<sup>+</sup>97] P. Kuo-Peng, N. Sadowski, J. P. A. Bastes, R. Carlson, N. J. Batistela, and M. Lajoie-Mazenc. A general method for coupling static converters with electromagnetic structures. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 33(2):2004 –2009, Mar 1997.
- [Mar01] M. Marrone. Computational aspects of the cell method in electrodynamics. In
   F. L. Teixeira, editor, Geometric Methods in Computational Electromagnetics,
   PIER 32, pages 317–356. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001.
- [Mil97] V. Milenkovic. Shortest path geometric rounding. *Algorithmica*, 27:2000, 1997.
- [PS78] F. P. Preparata and M. I. Shamos. Computational Geometry: An Introduction. Springer-Verlag, 1978.
- [RT04] M. Repetto and F. Trevisan. Global formulation of 3D magnetostatics using flux and gauged potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):755–772, 2004.
- [SGM11] L. Simón, P. González, and J. M. Monzón. Computational geometry applied to finite formulation. XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Sep 2011.

- [Sha05] L. F. Shampine. Error estimation and control for odes. *Journal of Scientific Computing*, 25(1):3–16, 2005.
- [TK04] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of discrete approaches to solving magnetostatic problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):361–365, March 2004.
- [Ton76] E. Tonti. The reason for analogies between physical theories. Applied Mathematical Modelling, 1(1):37–50, 1976.
- [Ton01a] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation for the Wave Equation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(4):1355–1382, 2001.
- [Ton01b] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method. CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2(2):237–258, 2001.
- [Ton13] E. Tonti. The mathematical structure of classical and relativistic physics. Birkhauser Basel, 2013.
- [Ton14] Enzo Tonti. Why starting from differential equations for computational physics? Journal of Computational Physics, 257:1260–1290, 2014.
- [Tre02] F. Trevisan. Plane Magnetic Field Analysis with the Finite Formulation. Dec 2002.
- [TVMG99] F. Tourkhani, P. Viarouge, T. A. Meynard, and R. Gagnon. A new approach to simplify the steady-state computation problem of a power converter. In Power Electronics Specialists Conference, 1999. PESC 99. 30th Annual IEEE, 1999.

# Capítulo 4

# Ecuaciones Topológicas de Las Leyes de Maxwell en la Formulación Finita.

Índice	
4.1. Introducción	60
4.2. Clasificación de las magnitudes electromagnéticas	62
4.3. La técnica de integración finita y las ecuaciones de Maxwell.	64
4.3.1. Introducción	64
4.3.2. Ecuaciones de Maxwell	66
4.4. Principios asociados a la formulación finita	<b>74</b>
4.4.1. Elementos de tiempo	75
4.5. Las leyes de Maxwell en forma finita o global	77
4.6. Forma local de las ecuaciones de campo	80
4.7. Ejemplos de la forma local de las ecuaciones de campo	81
4.7.1. Ley de Inducción de Faraday	81
4.7.2. Ley de Inducción de Ampère-Maxwell	83
4.7.3. Ley de Gauss Magnética	84
4.7.4. Ley de Gauss Eléctrica	84

## Resumen.

La formulación diferencial de las ecuaciones de Maxwell, ha sido utilizada durante más de dos siglos en el analisis de campos electromagnéticos.

Sin embargo, la Formulación Finita está siendo cada vez más utilizada en la solución de problemas de campos electromagnéticos, puesto que en su formulación no se hace uso de los operadores diferenciales.

Weiland hace una descripción en forma discreta de las mismas, mediante su Técnica de Integración Finita (FIT), y las expresa como un conjunto de ecuaciones matriciales adecuadas para la computación numérica.

Este conjunto de ecuaciones matriciales discretas constituye las denominadas ecuaciones de malla de Maxwell (MGE).

Como técnica similar, Tonti en su Formulación Global además de las variables espaciales también discretiza el tiempo.

Dá un enfoque en el estudio de campos electromagnéticos, basado en el uso de valores integrales de las variables que denomina variables globales.

Proporciona una clasificación de las variables físicas y establece unos principios que asocian las variables con los elementos de espacio y tiempo.

## 4.1. Introducción.

En el presente capítulo, se plantean las ecuaciones de Maxwell para los campos electromagnéticos, en su forma finita.

La literatura consultada, indica que Weiland hace un planteamiento discreto de estas ecuaciones, enfocado a fines computacionales, creando una reformulación de las mismas mediante lo que denomina Técnica de Integración Finita [CW99, CW01b, HM04, KLMDP08].

La notación y las ideas sobre la FIT, derivan directamente de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral. Estas se resuelven obteniéndose un conjunto matricial de ecuaciones que constituyen los análogos discretos de cada una de ellas [Wei96, CW01a, Mar01, Mar04].

Para el tratamiento computacional, se trabaja con un dominio espacial acotado del problema de campo electromagnético, que contiene la región de interés.

El dominio se descompone mediante un número finito de celdas tetraédricas simpliciales, que constituyen el mallado primario y su respectivo dual.

Las magnitudes físicas se asignan a los elementos del mallado primal y del mallado dual como grados de libertad en las p-celdas [AFR10, CW01a].

Weiland en definitiva, hace una primera discretización de las ecuaciones de Maxwell usando integrales de variables de estado asignadas a los elementos de dimensión-p que forman las celdas del mallado [SW01, CW01a].

Por otra parte, los análisis electromagnéticos llevada a cabo por Tonti [Ton02a, Ton02b, Ton76, Ton01] contribuyen al planteamiento de una forma discreta de las ecuaciones de Maxwell, donde no intervienen los vectores de campo involucrados en la formulación diferencial, siendo ésta una diferencia con el planteamiento hecho por Weiland.

Las leyes físicas del electromagnetismo y sus ecuaciones constitutivas se interpretan geométricamente mediante variables integrales, que Tonti define como variables globales.

Tonti estructura su planteamiento mediante dos principios fundamentales, donde establece los criterios que relacionan las variables globales con los elementos de espacio y de tiempo. El tiempo lo discretiza considerando un conjunto discreto de instantes e intervalos [Ton76, Rep07].

En el capítulo, se asocian los planteamientos matemáticos-físicos desarrolladados por Weiland y Tonti en el planteamiento de las leyes electromagnéticas de Maxwell, basada en la formulación finita y la formulación global.

En la sección 4.2 se clasifican las magnitudes físicas de origen electromagnético, atendiendo al tipo de variable y a su orientación.

En la sección 4.3 se introduce las técnicas de integración finita y las ecuaciones de Maxwell.

En las sección 4.4 son definidos los principios asociados a la formulación finita que relacionan los elementos de espacio y tiempo.

En la sección 4.5 se plantea las leyes electromagnéticas en su forma global.

En la sección 4.6 se planteas las mismas en su forma local.

Y por último, en la sección 4.7 se desarrolla un ejemplo para la forma local.

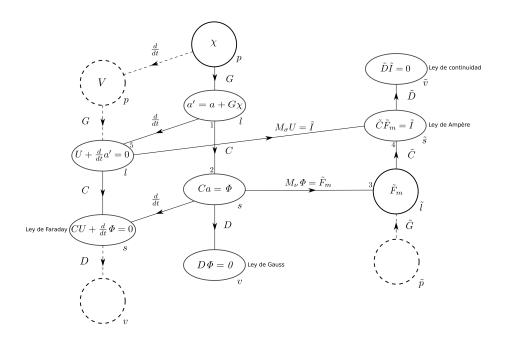


Figura 4.1: Diagrama de magnitudes electromagnéticas de Tonti.

# 4.2. Clasificación de las magnitudes electromagnéticas.

Un *primer criterio de clasificación*, de gran utilidad en la enseñaza e investigación, es aquel que está basado en el papel que desempeña cada variable física en una teoría. Este análisis lleva a la definición de tres clases de variables: las variables de configuración, las variables de fuente y las variables de energía. En electromagnetismo, estas variables se muestran mediante los diagramas de Tonti, como el de la figura 4.1 [Ton02b, Ton02a, Ton76, Ton01, FGR08].

En cada campo de la física se puede encontrar:

• Las variables de configuración, que son las que describen la configuración de un campo o de un sistema. Estas variables están relacionadas unas con otras mediante operaciones de suma, diferencia, límite, derivada e integral.

- Las variables fuente, que son las que describen las fuentes de un campo o las fuerzas que actúan sobre un sistema. Estas variables están relacionadas unas con otras mediante operaciones de suma, diferencia, límite, derivada e integral.
- Las variables de energía, que son las que se obtiene mediante el producto de una variable de configuración por una variable fuente. Estas variables están relacionadas unas con otras mediante operaciones de suma, diferencia, límite, derivada e integral.

Esta clasificación desempeña un papel crucial en las teorías físicas [Ton02b, Ton02a, Ton76, Ton01].

Como consecuencia de esta clasificación se definen las ecuaciones constitutivas, que son ecuaciones que relacionan las variables de configuración con las variables fuente de un campo físico, y contienen propiedades físicas de los materiales y parámetros métricos del sistema (longitudes, superficies, volúmenes e intervalos de tiempo).

Es notable que las variables de configuración integral tienen todas la dimensión de un flujo magnético y que las variables fuente integral tienen todas la dimensión de una carga eléctrica.

El producto de una variable de configuración global y una variable de fuente global tienen la dimensión de una acción (energía x tiempo).

El diagrama 4.1 muestra las seis variables integrales que se pueden medir y su correspondientes funciones de campo [TS05, ST05].

Un **segundo criterio de clasificación** distingue entre variables globales y variables de campo.

La formulación finita en electromagnetismo implica la búsqueda de un tipo de formulación independiente a la diferencial.

Las variables globales son en realidad las comúnmente conocidas como variables integrales.

Las medidas físicas están relacionadas o asociadas principalmente con las variables globales, y con ellas se pueden medir directamente voltajes, flujos, contenido de carga y flujos de carga, pero no los vectores de campo.

Sin embargo, una magnitud o cantidad global está referida a un sistema, a un espacio o elemento de tiempo, como son las líneas, superficies, volúmenes, intervalos, etc., o sea,

son una función del dominio.

Por ejemplo, un medidor de flujo mide la carga eléctrica que atraviesa una superficie dada en un intervalo de tiempo. Un tensiómetro magnético mide el impulso de tensión magnética referida a una línea y a un intervalo de tiempo. Las cantidades físicas correspondientes están asociadas con elementos de espacio y tiempo, no con puntos e instantes.

Una de las ventajas fundamentales de las variables globales es que son contínuas a través de la superficie existente entre dos materiales, mientras que las variables de campo sufren discontinuidades. Lo que implica que la formulación diferencial tiene fuertes restricciones en el medio material, debiéndose disgregar los dominios en subdominios, uno para cada material e introducir condiciones de salto o de continuidad en las fronteras, con lo que se está imponiendo condiciones de derivabilidad en funciones de campo que son restrictivas desde el punto de vista físico.

Por el contrario, una formulación finita directa basada en variables globales, acepta discontinuidades en el material, es decir, no añade condiciones de regularidad a aquellas condiciones propias de la naturaleza de la variable física.

# 4.3. La técnica de integración finita y las ecuaciones de Maxwell.

#### 4.3.1. Introducción.

La Técnica de Integración Finita (FIT) es un método numérico utilizado para la simulación de campo propuesto por primera vez por Weiland en 1977. Esta técnica FIT genera analogías algebraicas exactas de las ecuaciones de Maxwell, garantizando que las propiedades físicas de los campos se mantienen en el espacio discreto y conducen a una solución única [BDD<sup>+</sup>92, CW01a, HM04, KLMDP08].

La aplicación del FIT consiste en una restricción espacial del problema de campo electromagnético, donde una región del espacio con dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  contiene a la región de interés.

Para que una región de mallado K considerada de interés, pueda ser tratada en términos computacionales ha de definirse con un número finito de celdas tetraédricas y simpli-

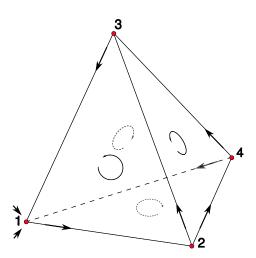


Figura 4.2: Tetraedro de referencia orientado.

ciales  $\mathbf{v}_k$ , que como premisa principal debe cumplir que todas las celdas deben de encajar unas con otras, es decir, la intersección entre dos celdas diferentes debe estar siempre vacía, o debe ser una cara  $\mathbf{s}_j \in K$  2-dimensional simplemente conectada, o una arista  $\mathbf{l}_i \in K$  1-dimensional compartida por ambas celdas o un vértice  $\mathbf{p}_n \in K$ . Esta descomposición produce las celdas complejas simpliciales finita K, que sirve como mallado computacional [CW01a].

Las p-celdas de K, donde  $p \in \{0, 1, 2, 3\}$  indica la dimensión del elemento geométrico de la celda compleja. Estos elementos son los vértices  $\mathbf{p}_i \in \mathbf{P}$ , las aristas  $\mathbf{l}_i \in \mathbf{L}$ , las caras  $\mathbf{s}_i \in \mathbf{S}$  y los volúmenes  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$ .

Para este mallado primario K se define un mallado dual  $\tilde{K}$ , de forma que cada p-celda del mallado primario K se corresponde con una (3-p)-celda de su mallado dual  $\tilde{K}$ , formado por los elementos  $\tilde{\mathbf{p}}$ ,  $\tilde{\mathbf{l}}$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}$ , y  $\tilde{\mathbf{v}}$ .

A cada p-celda formada por el par  $\left\{K, \tilde{K}\right\}$  se le atribuye una orientación, es decir, cada arista tiene una dirección u orientación inicial, de forma que la unión de todas estas aristas de la celda describen un grafo orientado Fig.4.2. De igual forma, las caras de la celda compleja tienen asociadas una orientación mediante sus vectores normales dirigidos [Ton76].

#### 4.3.2. Ecuaciones de Maxwell.

La formulación discreta de los campos electromagnéticos surge del planteamiento de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral y de las relaciones constitutivas del material en la región de mallado  $\left\{K, \tilde{K}\right\}$  [FGR08, BDD<sup>+</sup>92, Mar01].

En vez de definir las magnitudes de campo en un punto como la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$ , la densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$  y la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ , se usan integrales de variables de estado asignadas a las p-celdas de  $\left\{K, \tilde{K}\right\}$  para formular el problema. Esto es, las tensiones y los flujos de malla se introducen como variables de estado eléctrico y magnético, y se definen como las integrales de los vectores de campo eléctrico y magnético sobre los elementos (p-celdas) del mallado [SW01, CW01a].

De igual forma la diferencia de potencial U, la fuerza magnetomotriz  $\tilde{F}_m$ , el flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$ , la corriente eléctrica  $\tilde{I}$  y el flujo magnético  $\Phi$  son definidos por integrales de línea y de superficie, de los valores elementales de campo como la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$ , la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$ , la densidad del flujo eléctrico  $\vec{D}$ , la densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$  y la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ .

De esta forma, se suceden las siguientes definiciones [CW01b, SW01]:

- La tensión eléctrica de malla  $U_i$  es asignada a cada linea elemental  $\mathbf{l}_i$  como una variable de estado.
- El flujo magnético de malla  $\Phi_i$  normal a la superficie elemental  $\mathbf{s}_i$  es asignado como una variable de estado a cada superficie elemental  $\mathbf{s}_i$ .
- La fuerza magnetomotriz  $\tilde{F}_m$  se asigna como una variable de estado a cada linea elemental dual  $\tilde{\mathbf{l}}_i$ .
- El flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}_i$  normal a la superficie dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  es asignado como variable de estado a cada superficie elemental dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ .
- La corriente eléctrica total  $\tilde{I}_i$  normal a la superficie dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  es asignada como una variable de estado a cada superficie elemental dual  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ .
- La carga discreta  $Q_i^c$ , situadas en los puntos nodales del mallado primario K, son asignados como variables de estado a cada volumen elemental dual  $\tilde{\mathbf{v}}_i$ .

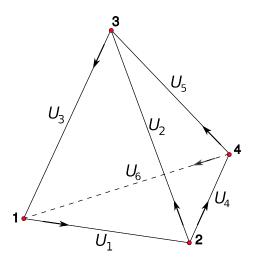


Figura 4.3: Diferencias de Potenciales  $U_i$  asociadas a las aristas del complejo primario.

Es decir, para las tensiones del mallado:

$$U_{i} = \int_{\vec{\mathbf{l}}_{i}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathbf{L}} \qquad \left(\tilde{F}_{m}\right)_{i} = \int_{\vec{\mathbf{l}}_{i}} \vec{H} \cdot d\vec{\mathbf{L}}$$

$$(4.1)$$

y para los flujos del mallado:

$$\tilde{\Psi}_i = \int_{\vec{\mathbf{s}}_i} \vec{D} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \qquad \tilde{I}_i = \int_{\vec{\mathbf{s}}_i} \vec{J} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \qquad \Phi_i = \int_{\vec{\mathbf{s}}_i} \vec{B} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$
(4.2)

Estas integrales se asignan como grados de libertad en las p-celdas de K y  $\tilde{K}$ .

Las diferencias de potenciales  $U_i$ , son asignadas a las aristas 1 del mallado primario K, como se indica en la Fig. 4.3.

Los flujos magnéticos  $\Phi_i$  son asignados a las caras s de K.

Ambos forman los vectores de grados de libertad  $\boldsymbol{U} = \{U_i\}_{i:\mathbf{l}_i \in \mathbf{L}}$  y  $\boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_i\}_{i:\mathbf{s}_i \in \mathbf{S}}$ , respectivamente.

Las fuerzas magnetomotrices  $\left(\tilde{F}_{m}\right)_{i}$ , son asignadas a las aristas  $\tilde{\mathbf{l}}$  del mallado dual  $\tilde{K}$ , como se indica en la Fig. 4.4.

Su vector de grados de libertad es  $\tilde{\pmb{F}}_{\pmb{m}} = \left\{ \left( \tilde{F}_m \right)_i \right\}_{i:\tilde{\mathbf{I}}_i \in \tilde{\mathbf{L}}}.$ 

Las corrientes eléctricas  $\tilde{I}_i$  y los flujos eléctricos  $\tilde{\Psi}_i$  están asociados a las caras  $\tilde{\mathbf{s}}$  del mallado dual  $\tilde{K}$ , como se indica en las figuras 4.5 y 4.6.

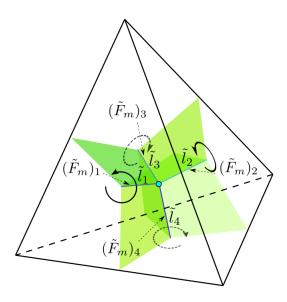


Figura 4.4: Fuerza Magnetomotriz  $\tilde{F}_m$ , asociada a las aristas del complejo dual.

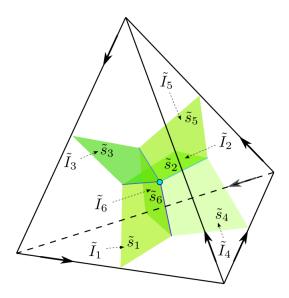


Figura 4.5: Intensidad Eléctrica  $\tilde{I},$  asociada a las caras del complejo dual.

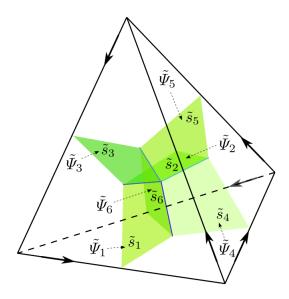


Figura 4.6: Flujo Eléctrico  $\tilde{\Psi}$ , asociado a las caras del complejo dual.

Sus vectores de grados de libertad son  $\tilde{\boldsymbol{I}} = \left\{ \tilde{I}_i \right\}_{i:\tilde{\mathbf{s}}_i \in \tilde{\mathbf{S}}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_i \right\}_{i:\tilde{\mathbf{s}}_i \in \tilde{\mathbf{S}}}$ . Con estos vectores, las dos ecuaciones rotacionales de Maxwell pueden ser formuladas

Con estos vectores, las dos ecuaciones rotacionales de Maxwell pueden ser formuladas de acuerdo con las relaciones de incidencia local de las p-celdas de K y  $\tilde{K}$  respectivamente.

La Ley de inducción de Faraday en forma integral es reescrita como

$$\sum_{j:\mathbf{l}_{i}\in\mathbf{L}}c_{i,j}U_{j} = -\frac{d}{dt}\Phi_{i} \quad \forall i:\mathbf{s}_{i}\in\mathbf{S}$$
(4.3)

y la ley de Ampère,

$$\sum_{j:\tilde{\mathbf{I}}_{i}\in\tilde{\mathbf{L}}}\tilde{c}_{i,j}\left(\tilde{F}_{m}\right)_{j}=\tilde{I}_{i}+\frac{d}{dt}\tilde{\Psi}_{i}\quad\forall i:\tilde{\mathbf{s}}_{i}\in\tilde{\mathbf{S}}$$
(4.4)

donde  $c_{i,j} \in \{0, \pm 1\}$  y  $\tilde{c}_{i,j} \in \{0, \pm 1\}$  representan la relación de incidencia de las 1-celdas de K y las 2-celdas de  $\tilde{K}$ , y sus orientaciones.

El valor de  $c_{i,j} = \pm 1$  es alcanzado por ejemplo si  $\mathbf{l}_j \in \partial \mathbf{s}_i$ , donde el signo se corresponde con la orientación relativa de estos elementos geométricos; de otra forma  $c_{i,j} = 0$ .

Las matrices de incidencia del primario y del dual

$$C := \{c_{i,j}\}_{i:\mathbf{s}_i \in \mathbf{S}; j:\mathbf{l}_j \in \mathbf{L}}$$

$$(4.5)$$

у

$$\tilde{C} := \{\tilde{c}_{i,j}\}_{i:\tilde{\mathbf{s}}_i \in \tilde{\mathbf{S}}; \ j:\tilde{\mathbf{l}}_i \in \tilde{\mathbf{L}}}$$

$$(4.6)$$

respectivamente, son los análogos discretos del operador rotacional.

De igual forma, el teorema de Gauss para el campo magnético

$$\sum_{j:\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}} d_{i,j} \, \Phi_j = 0 \quad \forall i: \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$$

$$\tag{4.7}$$

y para el dual

$$\sum_{j:\tilde{\mathbf{s}}_j\in\tilde{\mathbf{S}}}\tilde{d}_{i,j}\tilde{\Psi}_j = Q_i^c \quad \forall i:\tilde{\mathbf{v}}_i\in\tilde{\mathbf{V}}$$

$$(4.8)$$

donde el lado derecho de la igualdad dado por

$$Q_i^c = \int_{i:\tilde{\mathbf{v}}_i \in \tilde{\mathbf{V}}} \rho_E \cdot d\mathbf{V} \tag{4.9}$$

son las cargas dentro del volumen  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  de la celda dual, relacionada con la densidad de carga  $\rho_E$  agrupada en un vector de grados de libertad  $\mathbf{Q}^c = \{Q_i^c\}_{i:\tilde{\mathbf{v}}_i \in \tilde{\mathbf{V}} \subset \tilde{K}}$ .

Las matrices de incidencia caras-volúmenes del primario y del dual son

$$D := \{d_{i,j}\}_{i:\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}; j:\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}}$$

$$\tag{4.10}$$

у

$$\tilde{D} := \left\{ \tilde{d}_{i,j} \right\}_{i:\tilde{\mathbf{v}}_i \in \tilde{\mathbf{V}}; j:\tilde{\mathbf{s}}_i \in \tilde{\mathbf{S}}}$$

$$(4.11)$$

respectivamente, donde  $d_{i,j}, \tilde{d}_{i,j} \in \{0, \pm 1\}.$ 

Estas matrices se corresponden con los análogos discretos del operador divergencia para K y  $\tilde{K}$ .

Análogamente, las matrices de incidencia nudos-aristas del primario y del dual, se van a corresponder con los análogos discretos del gradiente

$$G := \{g_{i,j}\}_{i:\mathbf{l}_i \in \mathbf{L}; \, j:\mathbf{p}_j \in \mathbf{P}}$$

$$\tag{4.12}$$

у

$$\tilde{G} := \{\tilde{g}_{i,j}\}_{i:\tilde{\mathbf{I}}_i \in \tilde{\mathbf{L}}: \ j:\tilde{\mathbf{p}}_i \in \tilde{\mathbf{P}}}$$

$$\tag{4.13}$$

respectivemente, donde  $g_{i,j}, \tilde{g}_{i,j} \in \{0, \pm 1\}.$ 

Esto va a permitir sumar los valores del potencial eléctrico  $V_i$  y los valores del potencial magnético  $\vec{A}_j$  situados en los vértices  $\mathbf{p}_i \in \mathbf{P}$  y  $\tilde{\mathbf{p}}_j \in \tilde{\mathbf{P}}$ , para la obtención de los vectores de fuerza electromotriz y fuerza magnetomotriz mediante

$$\sum_{j:\mathbf{p}_i \in \mathbf{P}} g_{i,j} V_j = U_i \quad \forall i: \mathbf{l}_i \in \mathbf{L}$$
 (4.14)

у

$$\sum_{j:\tilde{\mathbf{p}}_{i}\in\tilde{\mathbf{P}}}\tilde{g}_{i,j}\vec{A}_{j} = \left(\tilde{F}_{m}\right)_{i} \quad \forall i:\tilde{\mathbf{l}}_{i}\in\tilde{\mathbf{L}}$$

$$(4.15)$$

respectivamente.

La dualidad de los mallados  $\left\{K, \tilde{K}\right\}$  quedan mostrados en las matrices identidad

$$C = \tilde{C}^T \tag{4.16}$$

$$D = \tilde{G}^T \tag{4.17}$$

$$\tilde{D} = -G^T \tag{4.18}$$

Sumando las expresiones de la (4.3) a la (4.8), las ecuaciones de Maxwell en forma integral para mallados duales  $\{K, \tilde{K}\}$ , se reformulan exactamente por construcción, obteniéndose las ecuaciones de malla de Maxwell (MGE) [BDD<sup>+</sup>92, CW01a, CW99, Wei96],

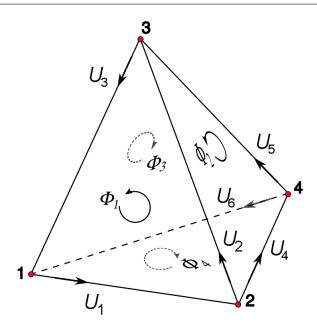


Figura 4.7: Flujo Magnético  $\phi$  asociado a las caras y diferencia de potenciales  $U_i$  a las aristas, en el complejo primal.

#### Ley de Inducción de Faraday.

$$\int_{\partial \mathbf{s}_{i}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathbf{L}} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{s}_{i}} \vec{B} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad \forall \mathbf{s}_{i} \in \mathbf{S} \subset K \Rightarrow C \cdot \mathbf{U} = -\frac{d}{dt} \mathbf{\Phi}$$
 (4.19)

Por ejemplo, para la ley de inducción de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.20}$$

Clemens [Cle05], plantea esta ley mediante la expresión 4.19, donde si se integra en el tiempo queda de la siguiente forma

$$C \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\Delta \boldsymbol{\Phi} \tag{4.21}$$

para ilustrar esta ecuación obsérvese la figura 4.7. tre06,spe01

Ley de Inducción de Ampère-Maxwell.

$$\int_{\partial \mathbf{s}_{i}} \vec{H} \cdot d\vec{\mathbf{L}} = \int_{\tilde{\mathbf{s}}_{i}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad \forall \tilde{\mathbf{s}}_{i} \in \tilde{\mathbf{S}} \subset \tilde{K} \ \Rightarrow \tilde{C} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{m} = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{\Psi}} + \tilde{\mathbf{I}}$$
(4.22)

Como ejemplo ver la figura 4.4.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4.23}$$

Clemens [Cle05], plantea esta ley mediante la expresión 4.22, donde si se integra en el tiempo queda de la siguiente forma

$$\tilde{C} \cdot \tilde{F}_{m} \cdot \tilde{\tau} = \Delta \tilde{\Psi} + \tilde{I} \cdot \tilde{\tau} \tag{4.24}$$

De igual forma se plantean las leyes de Gauss para el campo magnético y para el eléctrico,

Ley de Gauss Magnética.

$$\int_{\partial \mathbf{v}_i} \vec{B} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{V} \subset K \Rightarrow D \cdot \mathbf{\Phi} = 0$$
(4.25)

Ley de Gauss Eléctrica.

$$\int_{\partial \tilde{\mathbf{v}}_i} \vec{D} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{\tilde{\mathbf{v}}_i} \rho_E d\mathbf{V} \quad \forall \tilde{\mathbf{v}}_i \in \tilde{V} \subset \tilde{K} \ \Rightarrow \tilde{D} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{Q}^c$$
 (4.26)

La propiedad algebraica de las matrices de incidencia de mallas

$$DC = 0, \ \tilde{D}\tilde{C} = 0, \ CG = 0, \ \tilde{C}\tilde{G} = 0$$
 (4.27)

coincide con el comportamiento de sus equivalentes en las ecuaciones continuas

$$\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0 , \ \nabla \times (\nabla) \equiv 0 \tag{4.28}$$

permitiendo por ejemplo, derivar una versión discreta de la ecuación continua.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que la ecuación  $D \cdot \Phi = 0$  revela la existencia de un vector  $a = \{a_i\}$ , donde

$$a_i = \int_{i:\mathbf{l}_i \in \mathbf{L}} \vec{A} \cdot d\vec{\mathbf{L}} \tag{4.29}$$

correspondiente a un vector potencial magnético  $\vec{A}$ , que contiene un  $\Phi = C \cdot a$ . Con la expresión (4.19), el vector de tensiones puede entonces ser representado como

$$U = -\frac{d}{dt}a - GV \tag{4.30}$$

con la introducción de una función escalar potencial eléctrico V como se muestra en (4.14), o una integral de tiempo  $\mathcal{X}$  del mismo, dada por  $V = \frac{d}{dt}\mathcal{X}$ .

De igual forma, para  $\tilde{D}I=0$  algún vector  $\Upsilon$  cuyas componentes están formadas por

$$\Upsilon_i := \int_{\tilde{\mathbf{l}}_i \in \tilde{\mathbf{L}}} \vec{T} \cdot d\vec{\mathbf{L}} \tag{4.31}$$

se encuentra relacionado con un vector potencial eléctrico  $\vec{T}$ , que puede ser introducido mediante  $I = \tilde{C} \cdot \tau$ .

Las identidades indicadas en (4.27) son condiciones necesarias para la consistencia de la formulación discreta.

# 4.4. Principios asociados a la formulación finita.

Del análisis de un gran número de variables físicas de campos, Tonti [Ton02a, Ton76] establece:

#### Primer Principio.

Las variables de configuración globales están asociadas con los elementos de espacio y tiempo dotados con orientación interna. Al contrario, las variables de fuente globales (y las variables de energía globales) están asociadas con los elementos de espacio y tiempo dotados con orientación externa.

La razón para asociar las variables de energía y fuente con la orientación externa es que ellas son usadas en ecuaciones de balance y un balance requiere un volumen con orientación externa (normales hacia el exterior o interior).

Este principio ofrece un criterio racional para asociar variables globales de cada teoría física para elementos de espacio y tiempo, con lo que es útil en electromagnetismo computacional.

#### Segundo principio.

En cada teoría física, hay leyes físicas que relacionan variables globales referidas a elementos espacio-temporales orientados  $(\Omega)$ , con otros referidos a su frontera orientada  $(\partial\Omega)$ .

Las leyes fundamentales del electromagnetismo satisfacen este principio [Ton02a].

Para dar un ejemplo dentro del ámbito del electromagnetismo, este principio dice que una cantidad física referida a una variedad p-dimensional  $\Omega$ , como puede ser la corriente I que fluye a través de una superficie (2-dimensional), es igual a una cantidad física referida a su frontera (p-1)-dimensional  $\partial\Omega$ , correspondiente a la fuerza magnetomotriz a lo largo de esa frontera ((2-1)-dimensional).

### 4.4.1. Elementos de tiempo.

Considérese un intervalo dado en el eje del tiempo, y divídase este en pequeños intervalos como en la Fig. 4.8 [Ara02, CW01b, Mar01, Ton02b]. En una celda compleja en el eje del tiempo, se denota  $\mathbf{t}_n$  como los instantes de tiempo y  $\boldsymbol{\tau}_m$  como los intervalos. Los instantes del primario  $\mathbf{t}_o, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_{n-1}, \mathbf{t}_n, \mathbf{t}_{n+1}, ...$  están orientados como sumideros, como un espacio de puntos [Rep07, Ton02b, Ton01]. Los intervalos del primario  $\boldsymbol{\tau}_1, ..., \boldsymbol{\tau}_n, \boldsymbol{\tau}_{n+1}, ...$  tendrán orientación interna, es decir, serán orientación externa, es decir, tienen la misma orientación que los intervalos del primario. Los instantes del dual  $tre06, spe01\boldsymbol{\tau}_1, ..., \tilde{\boldsymbol{\tau}}_n, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, ...$  tienen orientación externa, que es por definición, la orientación interna de los instantes del primario [Tre02].

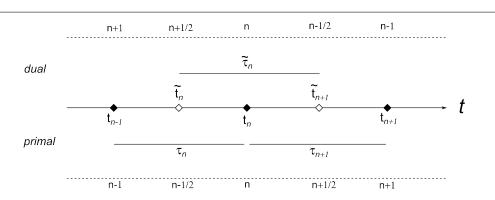


Figura 4.8: Discretización primal-dual del eje de tiempo. Salto de la rana.

Cuando se trata con fenómenos dependientes del tiempo, la física computacional discretiza el tiempo y considera un conjunto discreto de instantes y los correspondientes intervalos. Para ello, se crea una celda compleja unidimensional sobre el eje del tiempo. En esta celda compleja se definen los dos elementos de tiempo, los instantes del primario I, orientados como sumideros igual que los puntos en el espacio. Los intervalos del primario T, dotados de orientación interna, o sea, están orientados hacia el incremento de tiempo [Ton02b, Ton01, Tre02].

Si se elige un instante dentro de cada intervalo de tiempo, se obtiene un instante dual  $\tilde{\mathbf{I}}$  que automaticamente queda dotado de una orientación externa. El intervalo  $\tilde{\mathbf{T}}$  entre dos instantes duales es un intervalo dual que automáticamente queda dotado de una orientación externa.

De esta forma, a cada instante del complejo primario le corresponde un intervalo del dual, y a cada intervalo del primal le corresponde un instante del dual.

Por lo tanto, se obtiene una correspondencia dual formada por  $\mathbf{I} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{T}}$  y  $\tilde{\mathbf{I}} \leftrightarrow \mathbf{T}$ .

En base a la nomenclatura empleada:

Los vértices son puntos  $\mathbf{P}$  que se denotan en el volumen  $\mathbf{V}$  como vértices  $\mathbf{p}_h$ .

La arista  $\mathbf{L}$  conecta el vértice  $\mathbf{p}_k$  con el vértice  $\mathbf{p}_h$ , por lo que puede denotarse como  $\mathbf{l}_{hk}$ . Pero se denotará de una forma más cómoda, utilizando un subíndice griego como  $\mathbf{l}_{\alpha}$ . Si  $\mathbf{l}_{\alpha}$  denota la arista,  $l_{\alpha}$  denota su longitud.

Las caras **S** se denotará como  $\mathbf{s}_{\beta}$ . Si  $\mathbf{s}_{\beta}$  denota una cara,  $s_{\beta}$  denota su área.

El volumen V representado como celda será  $\mathbf{v}_k$ . Si  $\mathbf{v}_k$  denota una celda,  $v_k$  denota su

volumen [Ton01].

Como se ha visto anteriormente, en el espacio se tienen cuatro elementos y en el tiempo se tienen dos elementos: los instantes  $\mathbf{I}$  y los intervalos  $\mathbf{T}$ .

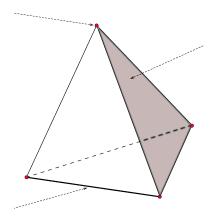
# 4.5. Las leyes de Maxwell en forma finita o global.

La asociación de las variables físicas a los elementos espaciales y temporales en un complejo primal y en un complejo dual, permiten definir las leyes del electromagnetismo con estos criterios de relación en una celda compleja orientada (Figuras 4.9 y 4.10) [Mar01, Ton02a].

#### Leyes del Electromagnetismo.

- La fuerza electromotriz impulso  $\varepsilon$  referida a la frontera  $\partial \mathbf{S}$  de una superficie dotada con orientación interna durante un intervalo de tiempo  $\mathbf{T}$  es contraria a la variación de flujo magnético  $\Phi$  que atraviesa la superficie  $\mathbf{S}$  en el mismo intervalo (Ley de inducción electromagnética de Faraday).
- El flujo magnético  $\Phi$  referido a la frontera  $\partial \mathbf{V}$  de un volumen  $\mathbf{V}$  dotado de orientación interna se desvanece en cualquier instante  $\mathbf{I}$  (Ley magnética de Gauss).
- La fuerza magnetomotriz impulso  $\tilde{\mathcal{F}}_m$  referida a la frontera de una superficie  $\partial \tilde{\mathbf{S}}$  dotada de orientación exterior en un intervalo de tiempo  $\tilde{\mathbf{T}}$ , es igual a la suma del flujo de carga eléctrica  $Q^f$  que fluye a través de la superficie  $\tilde{\mathbf{S}}$  en ese intervalo de tiempo y a la variación de flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$  que atraviesa la superficie  $\tilde{\mathbf{S}}$  en el mismo intervalo (Ley de Ampère-Maxwell).
- El flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$  a través de la frontera  $\partial \tilde{\mathbf{V}}$  de un volumen  $\tilde{\mathbf{V}}$  dotado con orientación exterior en cualquier instante  $\tilde{\mathbf{I}}$  es igual a la carga eléctrica  $Q^c$  contenida en el interior del volumen  $\tilde{\mathbf{V}}$ , en ese instante (Ley de inducción electrostática de Faraday = Ley eléctrica de Gauss).
- La carga eléctrica que fluye  $Q^f$  a través de la frontera  $\partial \tilde{\mathbf{V}}$  de un volumen  $\tilde{\mathbf{V}}$  dotado de orientación exterior, en un intervalo, es opuesta a la variación de la carga eléctrica

El Potencial Eléctrico V, está referido a los puntos del complejo primario.



El Flujo Magnético  $\Phi$ , está referido a las *superficies* del complejo primario.

La Diferencia de Potencial *U*, está referido a las *líneas* del complejo primario.

Figura 4.9: Variables físicas asociadas al complejo primal.

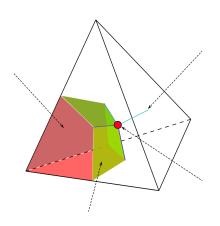
 $contenida Q^c$  en el interior del volumen, en el mismo intervalo (conservación de la carga).

La relación entre las variables físicas globales y los elementos espaciales tanto del primal complejo como del dual complejo se muestra para el campo eléctrico y para el campo magnético en las figuras 4.9 y 4.10.

Las 4+1 leyes descritas del electromagnetismo en forma global, se pueden escribir como [Ara02, Ton02a, Ton01]

$$\begin{cases}
\varepsilon[\mathbf{T}, \partial \mathbf{S}] &= \Phi[\mathbf{I}^{-}, \mathbf{S}] - \Phi[\mathbf{I}^{+}, \mathbf{S}] \\
\Phi[\mathbf{I}, \partial \mathbf{V}] &= 0 \\
\tilde{F}_{m}[\tilde{\mathbf{T}}, \partial \tilde{\mathbf{S}}] &= \tilde{\Psi}[\tilde{\mathbf{I}}^{+}, \tilde{\mathbf{S}}] - \tilde{\Psi}[\tilde{\mathbf{I}}^{-}, \tilde{\mathbf{S}}] + Q^{f}[\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{S}}] \\
\tilde{\Psi}[\tilde{\mathbf{I}}, \partial \tilde{\mathbf{V}}] &= Q^{c}[\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{V}}] \\
Q^{f}[\tilde{\mathbf{I}}, \partial \tilde{\mathbf{V}}] &= Q^{c}[\tilde{\mathbf{I}}^{-}, \tilde{\mathbf{V}}] - Q^{c}[\tilde{\mathbf{I}}^{+}, \tilde{\mathbf{V}}]
\end{cases} (4.32)$$

El Contenido de Carga Eléctrica  $Q^c$ , está referido a los *volúmenes* del complejo dual.



El Fuerza Magnetomotriz  $\tilde{F}_m$ , está referida a las *líneas* del complejo dual.

El Flujo Eléctrico  $\tilde{\Psi}$ , está referido a las superficies del complejo dual.

El Potencial Magnético  $\tilde{V}_m$ , está referido a los *puntos* del complejo dual.

Figura 4.10: Variables físicas asociadas al complejo dual.

Estas leyes pueden ser expresadas sin recurrir a las celdas complejas, y constituyen las leyes de campo para la formulación finita correspondiente a las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones (4.32) son los 4+1 leyes del electromagnetismo en la formulación finita, que se estaban buscando. Se trata de ecuaciones algebraicas que cumplen con las siguientes propiedades:

- vinculan variables físicas de la misma naturaleza, es decir, variables de configuración con variables de configuración, y variables fuente con variables fuente;
- son válidas en cualquier medio y por tanto, están libres de cualquier parámetro del material;
- son válidas para cualquier superficie y cualquier volumen, por lo que son válidas para lo grande y lo pequeño;
- y no implican nociones métricas, es decir, las longitudes, áreas, medidas de volúmenes y tiempos, no son necesarias.

Estas cinco ecuaciones, describen la estructura del campo y se llamarán ecuaciones de estructura. Estas propiedades también indican que las ecuaciones de campo no requieren elementos espaciales infinitesimales y por tanto, no son formales en la formulación diferencial. En tanto son válidas para cualquier volumen y para cualquier superficie respectivamente, ellas son de naturaleza topológica y se pueden llamar también ecuaciones topológicas.

# 4.6. Forma local de las ecuaciones de campo.

Cuando las ecuaciones (4.32) son aplicadas a las celdas de los dos complejos, se obtiene la forma local de las ecuaciones del campo electromagnético en un conjunto finito [Mar01, Ton02b, Ton01],

$$\begin{cases}
\sum_{\alpha} c_{\beta\alpha} \varepsilon \left[\boldsymbol{\tau}_{n+1}, l_{\alpha}\right] + \left\{\boldsymbol{\Phi}\left[\mathbf{t}_{n+1}, s_{\beta}\right] - \boldsymbol{\Phi}\left[\mathbf{t}_{n}, s_{\beta}\right]\right\} = 0 \\
\sum_{\beta} d_{k\beta} \boldsymbol{\Phi}\left[\mathbf{t}_{n}, s_{\beta}\right] = 0 \\
\sum_{\beta} \tilde{c}_{\alpha\beta} \tilde{\mathcal{F}}_{m} \left[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}, \tilde{l}_{\beta}\right] - \left\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \tilde{s}_{\alpha}\right] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n}, \tilde{s}_{\alpha}\right]\right\} = Q^{f}\left[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}, \tilde{s}_{\alpha}\right] \\
\sum_{\alpha} \tilde{d}_{h\alpha} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n}, \tilde{s}_{\alpha}\right] = Q^{c}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n}, \tilde{v}_{h}\right] \\
\sum_{\alpha} \tilde{d}_{h\alpha} Q^{f}\left[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}, \tilde{s}_{\alpha}\right] + \left\{Q^{c}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \tilde{v}_{h}\right] - Q^{c}\left[\tilde{\mathbf{t}}_{n}, \tilde{v}_{h}\right]\right\} = 0
\end{cases} \tag{4.33}$$

como se muestra en la figura 4.8, la estimación de la variable global asociada a un intervalo de tiempo con la duración del intervalo, tiene un valor medio. Si el intervalo es pequeño la variable global tiene como valor medio, el instante medio del intervalo. Si el instante medio de un intervalo es el instante de tiempo del complejo dual, se puede escribir

$$\frac{\mathcal{U}\left[\boldsymbol{\tau}_{n}, l_{\alpha}\right]}{\boldsymbol{\tau}_{n}} \approx U_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_{n}) \qquad \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{m}\left[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}, \tilde{l}_{\beta}\right]}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}} \approx (U_{m})_{\beta}(\mathbf{t}_{n}) \qquad \frac{Q^{f}\left[\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}, \tilde{s}_{\alpha}\right]}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}} \approx I_{\alpha}(\mathbf{t}_{n}) \qquad etc.$$
(4.34)

Los corchetes denotan que las ponderaciones son funciones de los instantes de tiempo.

De esta forma, las fuerzas magnetomotrices y los flujos se convierten en variables más naturales para su uso en electromagnetismo computacional, pudiéndose escribir de una forma simple como

$$\begin{cases}
\sum_{\alpha} c_{\beta\alpha} U_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_{n}) + \frac{\Phi_{\beta}(\mathbf{t}_{n}) - \Phi_{\beta}(\mathbf{t}_{n-1})}{\boldsymbol{\tau}_{n}} = 0 \\
\sum_{\beta} d_{k\beta} \Phi_{\beta}(\mathbf{t}_{n}) = 0 \\
\sum_{\beta} \tilde{c}_{\alpha\beta} \tilde{F}_{m\beta}(\mathbf{t}_{n}) - \frac{\tilde{\Psi}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - \tilde{\Psi}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_{n})}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}} = I_{\alpha}(\mathbf{t}_{n}) \\
\sum_{\alpha} \tilde{d}_{h\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_{n}) = Q_{h}^{c}(\tilde{\mathbf{t}}_{n}) \\
\sum_{\alpha} \tilde{d}_{h\alpha} \tilde{I}_{\alpha}(\mathbf{t}_{n}) + \frac{Q_{h}^{c}(\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - Q_{h}^{c}(\tilde{\mathbf{t}}_{n})}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}} = 0
\end{cases} \tag{4.35}$$

lo que indica que mientras la tensión magnética, el flujo magnético y la corriente eléctrica deben ser evaluados sobre los instantes del primario de la celda compleja, la diferencia de potencial y el flujo eléctrico deben ser evaluados en los instantes intermedios, o sea, los instantes duales. Esto es el algoritmo del salto de la rana que se muestra en la figura 4.8.

# 4.7. Ejemplos de la forma local de las ecuaciones de campo.

Tonti en sus planteamientos integra el tiempo en todas las magnitudes, obteniendo así magnitudes globales. Las leyes electromagnéticas en forma finita de forma local sobre cada celda, se pueden expresar como:

### 4.7.1. Ley de Inducción de Faraday.

Según la figura 4.7, la matriz de incidencias  $caras \times aristas$  en el complejo primal K es

$$C_{s \times l} = C_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 6}$$

$$(4.36)$$

las variables físicas globales integradas en el tiempo están definidas de la siguiente forma, la diferencia de potencial impulso como  $\mathcal{U}[l_{\alpha}, \boldsymbol{\tau}_{n+1}]$  que para el intervalo primal de tiempo  $\boldsymbol{\tau}_n$ , según la figura 4.8 es,

$$\mathcal{U}_{l\times1}[l_{\alpha},\boldsymbol{\tau}_{n}] = \mathcal{U}_{6\times1}[l_{\alpha},\boldsymbol{\tau}_{n}] = \begin{bmatrix}
\mathcal{U}_{1}[l_{1},\boldsymbol{\tau}_{n}] \\
\mathcal{U}_{2}[l_{2},\boldsymbol{\tau}_{n}] \\
\mathcal{U}_{3}[l_{3},\boldsymbol{\tau}_{n}] \\
\mathcal{U}_{4}[l_{4},\boldsymbol{\tau}_{n}] \\
\mathcal{U}_{5}[l_{5},\boldsymbol{\tau}_{n}] \\
\mathcal{U}_{6}[l_{6},\boldsymbol{\tau}_{n}]
\end{bmatrix}_{6\times1}$$
(4.37)

el subíndice  $\alpha$  se refiere a la línea primal  $l_{\alpha}$  o a la superficie dual  $\tilde{s}_{\alpha}$ , y el subíndice  $\beta$  se refiere a la superficie primal  $s_{\beta}$  o la línea dual  $\tilde{l}_{\beta}$ , según corresponda. La variación del flujo magnético  $\Phi$  asociado a las caras del primal, en el intervalo de tiempo  $\tau_n$ , donde según la Fig. 4.8,

$$\Phi_{s\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{s\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_{n-1}] = \Phi_{4\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{4\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_{n-1}] = \begin{bmatrix}
\Phi_{1}[s_{1}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{1}[s_{1}, \boldsymbol{t}_{n-1}] \\
\Phi_{2}[s_{2}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{2}[s_{2}, \boldsymbol{t}_{n-1}] \\
\Phi_{3}[s_{3}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{3}[s_{3}, \boldsymbol{t}_{n-1}] \\
\Phi_{4}[s_{4}, \boldsymbol{t}_{n}] - \Phi_{4}[s_{4}, \boldsymbol{t}_{n-1}]
\end{bmatrix}_{4\times 1}$$
(4.38)

pudiéndose resumir de la siguiente forma

$$\Phi_{s\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_n] = \Phi_{s\times 1}[s_{\beta}, \boldsymbol{t}_{n-1}] - \sum_{s} c_{s\times l} \mathcal{U}_{l\times 1}[l_{\alpha}, \boldsymbol{\tau}_n]$$
(4.39)

#### 4.7.2. Ley de Inducción de Ampère-Maxwell.

Según las figuras 4.4 y 4.5, la matriz de incidencias  $caras \times aristas$  en el complejo dual  $\tilde{K}$  se puede poner como,

$$\tilde{C}_{\tilde{s}\times\tilde{l}} = \tilde{C}_{6\times4}; \quad \tilde{C} = C^{T};$$

$$C_{s\times l} = C_{4\times6} \Rightarrow C_{l\times s}^{T} = C_{6\times4}^{T} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}_{6\times4}$$
(4.40)

las fuerzas magnetomotrices  $\tilde{F}_m$  asociadas a las cuatro aristas del dual, en el intervalo temporal dual  $\tilde{\tau}_n$ , donde según la figura 4.8, son:

$$\left(\tilde{F}_{m}\right)_{\tilde{l}\times 1} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] = \left(\tilde{F}_{m}\right)_{4\times 1} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] = \begin{bmatrix} \left(\tilde{F}_{m}\right)_{1} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] \\ \left(\tilde{F}_{m}\right)_{2} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] \\ \left(\tilde{F}_{m}\right)_{3} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] \\ \left(\tilde{F}_{m}\right)_{4} \left[\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}\right] \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

$$(4.41)$$

la variación del flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$  asociado a las caras del dual, en los instantes del dual

 $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}$  y  $\tilde{\mathbf{t}}_n$ , siguiendo el criterio de Fig. 4.8,

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{\tilde{s} \times 1} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{\tilde{s} \times 1} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] = \begin{bmatrix}
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{1} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{1} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{2} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{2} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{2} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{2} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{3} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{3} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{4} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{4} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{5} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{5} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] \\
\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{6} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{6} [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}]
\end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

y las intensidades eléctricas  $\tilde{I}$  asociadas a las caras del dual

$$\tilde{I}_{\tilde{s}\times 1} = \begin{bmatrix}
\tilde{I}_1 \\
\tilde{I}_2 \\
\tilde{I}_3 \\
\tilde{I}_4 \\
\tilde{I}_5 \\
\tilde{I}_6
\end{bmatrix}_{6\times 1}$$
(4.43)

pudiéndose resumir de la siguiente forma para propósitos computacionales

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{s}\times 1}[\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}] = \tilde{\Psi}_{\tilde{s}\times 1}[\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] + \sum_{\tilde{l}} \tilde{c}_{\tilde{s}\times \tilde{l}} \left(\tilde{F}_{m}\right)_{\tilde{l}\times 1} [\tilde{I}_{\beta}, \tilde{\mathbf{t}}_{n}] - \left(Q^{f}\right) [\tilde{s}_{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n}]$$
(4.44)

## 4.7.3. Ley de Gauss Magnética.

Según la figura 4.7, la matriz de incidencias  $volúmenes \times caras$  en el complejo primal K se puede poner como,

$$D_{v \times s} = D_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \tag{4.45}$$

con lo que

$$D_{v\times s}\Phi_{s\times 1}[s_{\beta}, \mathbf{t}_n] = 0 \tag{4.46}$$

pudiéndose resumir como

$$\sum_{\beta} d_{k\beta} \Phi_{\beta}(\mathbf{t}_n) = 0 \tag{4.47}$$

que es la forma global de la ley de Gauss magnética.

## 4.7.4. Ley de Gauss Eléctrica.

Según la figura 4.6, la matriz de incidencias  $volúmenes \times caras$  en el complejo dual  $\tilde{K}$  se puede poner como,

$$\tilde{D}_{\tilde{v}\times\tilde{s}} = \tilde{D}_{4\times6} = -G_{p\times l}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times6}$$
(4.48)

con lo que

$$\tilde{D}_{4\times 6}\tilde{\Psi}_{\tilde{s}\times 1}[\tilde{s}_{\alpha},\tilde{\mathbf{t}}_n] = Q_h^c(\tilde{\mathbf{t}}_n) \tag{4.49}$$

pudiéndose resumir como

$$\sum_{\alpha} \tilde{d}_{h\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{t}}_n) = Q_h^c(\tilde{\mathbf{t}}_n) \tag{4.50}$$

que es la forma global de la ley de Gauss eléctrica.

## Bibliografía

- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [Ara02] R. Araneo. Numerical solution of transient electromagnetic scattering problems using the novel time-domain cell method. volume 1, pages 291–296 vol.1, Aug. 2002.
- [BDD+92] M. Bartsch, M. Dehler, M. Dohlus, F. Ebeling, P. Hahne, R. Klatt, F. Krawczyk, M. Marx, Z. Min, T. Pröpper, D. Schmitt, P. Schütt, B. Steffen, B. Wagner, T. Weiland, S. G. Wipf, and H. Wolter. Solution of maxwell's equations. Computer Physics Communications, 73(1-3):22-39, 1992.
- [Cle05] M. Clemens. Large systems of equations in a discrete electromagnetism: formulations and numerical algorithms. IEE Proceedings Science Measurement and Technology, 152(2):50-72, 2005.
- [CW99] M. Clemens and T. Weiland. Transient eddy-current calculation with the fi-method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 35(3):1163 –1166, may 1999.
- [CW01a] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations. *International Computing Society newsletter*, 8:S. 13–20, January 2001.

- [CW01b] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32(32):65–87, 2001.
- [FGR08] F. Freschi, L. Giaccone, and M. Repetto. Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism. *COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(6):1343–1357, 2008.
- [HM04] F. Hirtenfelder and J. Mollet. Phased Array Simulations using Finite Integration Technique. *JINA Conference*, November 2004.
- [KLMDP08] J. Korecki, Y. Le Menach, J-P. Ducreux, and F. Piriou. Numerical solutions in primal and dual meshes of magnetostatic problems solved with the finite integration technique. COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 27(1):47– 55, 2008.
- [Mar01] M. Marrone. Computational aspects of the cell method in electrodynamics. In F. L. Teixeira, editor, *Geometric Methods in Computational Electromagnetics*, *PIER 32*, pages 317–356. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001.
- [Mar04] M. Marrone. A new consistent way to build symmetric constitutive matrices on general 2-d grids, 2004.
- [Rep07] M. Repetto. Two dimensional quasi-static magnetic analysis. 2007.
- [ST05] R. Specogna and F. Trevisan. Discrete constitutive equations in A- $\chi$  geometric eddy-current formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(4):1259–1263, april 2005.
- [SW01] R. Schuhmann and T. Weiland. Conservation of Discrete Energy and Related Laws in the Finite Integration Technique, volume 32, pages 301–316. EMW Publishing, Cambridge, MA, 2001.

- [Ton76] E. Tonti. The reason for analogies between physical theories. *Applied Mathematical Modelling*, 1(1):37–50, 1976.
- [Ton01] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. Geometric Methods in Computational Electromagnetics PIER 32, 32(2):1–44, 2001.
- [Ton02a] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.
- [Ton02b] E. Tonti. Finite formulation on unstructured grids. In Computation in Electromagnetics, 2002. CEM 2002. The Fourth International Conference on (Ref. No. 2002/063), page 2 pp., april 2002.
- [Tre02] F. Trevisan. The Cell method for the analysis of 3D static and quasi-static magnetic fields. *Elsevier Preprint*, 2002.
- [TS05] F. Trevisan and R. Specogna. Geometric derivation of discrete constitutive equations for eddy-current problems. 2005.
- [Wei96] T. Weiland. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, 1996.

## Capítulo 5

## Discretización de las Ecuaciones Constitutivas.

## Índice

5.1. Introducción	91
5.2. Ecuación constitutiva magnética $\vec{B} = \mu \vec{H}$	93
5.2.1. Aproximación uniforme del campo	93
5.2.2. Aproximación por interpolación de Whitney	96
5.3. Ecuación constitutiva eléctrica $\vec{J} = \sigma \vec{E}$	99
5.3.1. Aproximación por interpolación de Whitney	99

## 5.1. Introducción.

Según la clasificación propuesta por Tonti, todas las variables físicas se pueden clasificar como variables de configuración, variables fuente y variables de energía [Ton02].

En esa línea, pueden definirse las ecuaciones constitutivas como aquellas que relacionan las variables de configuración con las variables fuente, conteniendo información acerca del material y que pueden ser aplicada de forma aproximada a la celda compleja en forma discreta, mediante matrices constitutivas adecuadas [MFF02, MREHF02, GMSGA15].

Cuando el dominio de discretización está formado por geometrías complejas e irregulares, los mallados basados en tetraedros y triángulos, se imponen frente a otras formas posibles. La relación entre las variables magnéticas y eléctricas se hace mediante la creación de un mallado dual, entre entidades topológicas duales [CW01].

Los parámetros constitutivos y el hecho de que no exista una forma única para su cálculo, crean distintas posibilidades en su planteamiento [Bos98, CST07, CT06]. El método numérico que se propone para su cálculo está basado en el método de la celda (CM) [Fer13, Mar01a, MFF02, Mar02, Ton01].

Su aplicación requiere el cumplimiento de una serie de propiedades aunque no todas ellas son necesarias [Bos98, MFF02, Mar01a, BK00].

- Simetría de todas las matrices constitutivas, en el caso de mallados tetraédricos la matriz constitutiva es sparce y normalmente no simétrica, aunque en algunos casos la matriz de rigidez ensamblada final puede tener esta propiedad [TK04, Mar02, CST07].
- Definida positiva, para asegurar la estabilidad del método numérico [SSW02, Bos99, CST07].
- Precisión, reduciendo los errores de discretización a cero cuando la dimensión del mallado se hace pequeña.
- Consistencia, propiedad que debe asegurar que las matrices constitutivas reconstruyen un campo físico sin introducir variaciones ficticias [BK00, CMP04].

La importancia de estas propiedades en la aplicación del CM depende del problema [Mar04b, Mar01b]. En base a las investigaciones realizadas, las aproximaciones que se pueden hacer en el cálculo de las matrices constitutivas sobre tetraedros son:

- Una aproximación geométrica basada en la aplicación de reglas geométricas simples sobre los tetraedros.
- La definición de funciones locales de interpolación en los tetraedros. Esta aproximación aventaja a experiencias previas obtenidas en la aplicación de conceptos similares en el FEM.

La primera aproximación es la mas simple cuando las características físicas del campo satisfacen las hipótesis de un campo uniforme dentro del tetraedro. La otra aproximación puede ser más conveniente en el caso de patrones más complejos del campo [Rep07].

## 5.2. Ecuación constitutiva magnética $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

#### 5.2.1. Aproximación uniforme del campo.

La hipótesis de la uniformidad local de las variables de campo se ha introducido para escribir una conexión entre las variables globales y sus componentes homólogas de campo correspondientes. En estas situaciones, aproximaciones particulares pueden ser definidas dentro de los volúmenes primarios. Los campos conservativos pueden ser tratados dándoles un enfoque de uniformidad. Por tanto, se considera que existe uniformidad en el material magnético y en los campos dentro de cada volumen tetraédrico.

Una de estas aproximaciones para derivar las ecuaciones constitutivas locales es asumiendo la uniformidad de los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en el interior de cada celda (e), es decir, en cada tetraedro [RT04].

Las ecuaciones constitutivas magnéticas relacionan las variables de configuración, o sea el vector local de flujo magnético  $\vec{\Phi}^{(e)} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4]^T$  definido en las caras primarias, con la integral de línea del vector local de tensiones magnéticas  $\tilde{F}_m^{(e)} = [\tilde{F}_{m_1}, \tilde{F}_{m_2}, \tilde{F}_{m_3}, \tilde{F}_{m_4}]^T$  a lo largo de tres de las cuatro porciones de las aristas duales.

La característica solenoidal del vector densidad de flujo magnético para cualquier condición de tiempo variable, crea una propiedad básica que puede ser utilizada dentro de los tetraedros.

Una inducción uniforme satisface automáticamente la ley de Gauss para cada volumen  $\mathbf{v}$ , en cada celda o tetraedro,

$$\forall \mathbf{v}^{(e)} \in \mathbf{V}; \ \sum_{j=1}^{4} d_{e,j} \Phi_j = 0; \equiv \nabla \cdot \Phi = 0$$
 (5.1)

donde  $d_{e,j}$  es el número de incidencia entre la orientación interna del volumen  $\mathbf{v}^{(e)}$  y sus cuatro superficies primales  $\mathbf{s}_j$ .

Si el balance de flujo se expresa como

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0 \tag{5.2}$$

siendo  $\Phi_{1...,4}$  los flujos magnéticos que atraviesan cada cara primaria, uno de los flujos magnéticos asociados se puede expresar en función de los otros tres,

$$\Phi_4 = -\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 \tag{5.3}$$

condición consistente con la uniformidad de la densidad de flujo magnético dentro del volumen, que además indica que solo tres flujos independientes pueden ser definidos en un tetraedro.

Debido a la identidad geométrica  $\sum_{j=1}^{4} d_{e,j} \mathbf{s}_j \equiv 0$  que relaciona los vectores de área de los tetraedros, se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{4} d_{e,j} \Phi_j = \sum_{j=1}^{4} d_{e,j} (B_j \mathbf{s}_j) \equiv 0$$
 (5.4)

Agrupando los tres vectores de área relativos a las tres superficies primarias y teniendo uno de los nudos en común, se definen las cuatro matrices no singulares

$$\vec{A}_1 = [\mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3 \ \mathbf{s}_4]^T$$

$$\vec{A}_2 = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_3 \ \mathbf{s}_4]^T$$

$$\vec{A}_3 = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_4]^T$$

$$\vec{A}_4 = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3]^T$$

$$(5.5)$$

Como se ha indicado, al quedar reducido el vector de flujo magnético a tres independientes, el vector de área correspondiente es una matriz cuadrada de  $3 \times 3$ , y las componentes del campo  $\vec{B}$  es un vector columna de  $3 \times 1$ , y se puede escribir como

$$\vec{B} = \vec{\mathcal{S}}^{-1}\vec{\Phi} \tag{5.6}$$

Como el vector de flujo magnético contiene realmente cuatro componentes, aquí se introduce lo que se denomina una matriz aumentada  $S'_j$  de dimensión  $3 \times 4$  de la matriz

 $ec{\mathcal{S}}^{-1},$  que incluye una columna de ceros en correspondencia con el flujo dependiente.

$$\vec{B} = \mathcal{S}_i' \vec{\Phi} \tag{5.7}$$

A partir de la ecuación constitutiva entre magnitudes de campo uniforme y materiales homogéneos, el vector de campo magnético implica un campo magnético uniforme  $\vec{H}$ , y se puede derivar como

$$\vec{H} = \nu \vec{B} = \mu^{-1} \vec{B} \tag{5.8}$$

siendo  $\nu$  un escalar para materiales isótropos, y un tensor de dimensión  $3\times 3$  para el caso de un medio anisótropo.

Si  $\vec{L}_j = (\vec{L}_{jx}, \vec{L}_{jy}, \vec{L}_{jz})$  son matrices de dimensión  $3 \times 3$  conteniendo en las filas los vectores de las aristas duales,

$$\vec{\tilde{L}}_1 = [\tilde{\mathbf{l}}_2 \ \tilde{\mathbf{l}}_3 \ \tilde{\mathbf{l}}_4]^T 
\vec{\tilde{L}}_2 = [\tilde{\mathbf{l}}_1 \ \tilde{\mathbf{l}}_3 \ \tilde{\mathbf{l}}_4]^T 
\vec{\tilde{L}}_3 = [\tilde{\mathbf{l}}_1 \ \tilde{\mathbf{l}}_2 \ \tilde{\mathbf{l}}_4]^T 
\vec{\tilde{L}}_4 = [\tilde{\mathbf{l}}_1 \ \tilde{\mathbf{l}}_2 \ \tilde{\mathbf{l}}_3]^T$$
(5.9)

el vector de fuerzas magnetomotrices  $\vec{\tilde{F}}_m^{(e)}$  se obtiene por proyección del campo magnético sobre los vectores de las aristas duales  $\vec{\tilde{\mathbf{I}}}_j$ .

De forma compacta, el vector campo  $\vec{\tilde{F}}_m^{(e)}$  puede expresarse para todo el volumen como

$$\vec{H}^{(e)} = \vec{A}_j \vec{\tilde{F}}_m^{(e)} \tag{5.10}$$

siendo  $A_{j=1,2,3,4}$  una matriz cuyos elementos son los  $\tilde{L}_j^{-1}$  añadiendo la  $j-\acute{e}sima$  columna de ceros, y creándose así una matriz aumentada  $\tilde{L}'$  de dimensión  $3\times 4$  [Mar04a].

Ordenando las expresiones se obtiene

$$\tilde{F}_m^{(e)} = \tilde{L}' \nu S' \Phi_i = \mathcal{M}_\nu^{(e)} \Phi_i \tag{5.11}$$

El flujo magnético en las caras del tetraedro y las hipótesis de campo uniforme, asegu-

ran que la componente normal de la densidad de flujo magnético sea continua a lo largo de la frontera de la celda.

$$\tilde{F}_{m}^{(e)} = \mathcal{M}_{\nu}^{(e)} \Phi^{(e)}$$
 (5.12)

La matriz  $\mathcal{M}_{\nu}^{(e)}$  es una matriz local de dimensión  $4 \times 4$ , cuyos valores serán insertados en la matriz cuadrada global  $\mathcal{M}_{\nu}$  de dimensión igual al número de caras del mallado, y obtener así la ecuación constitutiva final.

#### 5.2.2. Aproximación por interpolación de Whitney.

Una segunda aproximación para la deducción de las ecuaciones constitutivas están basadas en la realización de una interpolación para localmente relacionar los vectores  $\tilde{F}_m^{(e)}$  y  $\Phi^{(e)}$ .

Esta interpolación se hace usando las funciones de forma de los elementos denominados como formas de Whitney, dentro de cada tetraedro. Este tipo de vectores y las funciones de interpolación dentro de los tetraedros, son usados para definir las ecuaciones constitutivas para el método de la celda, aplicados en capítulos sucesivos. Al usar estas funciones de interpolación, cada celda primaria se puede escribir como:

$$\vec{B}^{(e)} = \sum_{j=1}^{4} \vec{W}_{j}^{s} \Phi_{j}$$
 (5.13)

siendo  $\vec{W}_{j}^{s}$  son los vectores funciones de forma de los elementos de superficie para la  $j-\acute{e}sima$  cara con vértices en los nudos (a,b,c). Estos son los llamados elementos de cara o forma-2 de Whitney y se utilizan para interpolar vectores asociados a las caras, como por ejemplo la densidad de flujo magnético [RT04].

$$\vec{W}_e^s = 2[N_a \nabla N_b \times \nabla N_c + N_b \nabla N_c \times \nabla N_a + N_c \nabla N_a \times \nabla N_b]$$
 (5.14)

donde  $N_a$  es la función de forma nodal afín para el nudo a. Ver anexo B.

De la ecuación (5.14) se puede verificar que la inducción  $\vec{B}^{(e)}$  es uniforme en el interior del tetraedro y por lo tanto, se deduce que también  $\vec{H}^{(e)}$  es un campo uniforme de la ley

constitutiva, en términos de campos cuantificables:

$$H = (\mu^{(e)})^{-1}B \tag{5.15}$$

siendo  $\vec{H}^{(e)}$  uniforme dentro del  $\mathbf{v}^{(e)}$ , el vector fuerza magnetomotriz  $\vec{\tilde{F}}_m^{(e)}$  se puede derivar como

$$\tilde{F}_{m}^{(e)} = \tilde{L}^{(e)}H$$
 (5.16)

donde  $\tilde{L}^{(e)}$  es la matriz de dimensión  $4 \times 3$  cuyas filas son los cuatro vectores fila  $\vec{\tilde{l}}_1$ ,  $\vec{\tilde{l}}_2$ ,  $\vec{\tilde{l}}_3$ ,  $\vec{\tilde{l}}_4$  de las cuatro porciones de aristas duales interiores a  $\mathbf{v}^{(e)}$ .

Sustituyendo (5.15) y (5.13) en (5.16), la forma de la matriz final de la ecuación constitutiva magnética puede ser derivada como

$$\tilde{F}_m^{(e)} = \mathcal{M}^{(e)} \Phi^{(e)} \tag{5.17}$$

siendo  $\mathcal{M}^{(e)}$  la matriz elemental cuadrada no simétrica de dimensión 4 relativa a la celda (e), sin embargo para  $C^T \mathcal{M}^{(e)} C$  se tiene una matriz simétrica llamada de rigidez.

Si se evalúa ahora la función nodal en el baricentro del tetraedro,

$$N_a = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

y se simplifica,

$$\vec{W}_{1}^{\mathbf{s}} = \frac{\vec{\mathbf{l}}_{1}}{\mathbf{v}^{(e)}}; \ \vec{W}_{2}^{\mathbf{s}} = \frac{\vec{\mathbf{l}}_{2}}{\mathbf{v}^{(e)}}; \ \vec{W}_{3}^{\mathbf{s}} = \frac{\vec{\mathbf{l}}_{3}}{\mathbf{v}^{(e)}}; \ \vec{W}_{4}^{\mathbf{s}} = \frac{\vec{\mathbf{l}}_{4}}{\mathbf{v}^{(e)}} \Rightarrow$$

y se obteniene

$$\mathcal{M}_{\nu}^{(e)} = \frac{\nu^{(e)}}{\mathbf{v}^{(e)}} \begin{bmatrix} \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \\ \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \\ \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \\ \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{1} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{2} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{3} & \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \cdot \vec{\tilde{\mathbf{I}}}_{4} \end{bmatrix}$$

donde  $(C^T)^{(e)}\mathcal{M}_{\nu}^{(e)}C^{(e)}$ , la cual es una matriz simétrica y singular que se desarrolla en

el anexo B.

Los elementos Whitney están dotados con una propiedad en los elementos de frontera. Considerando los elementos arista, la continuidad de la componente tangencial del campo local entre elementos adyacentes se asegura mediante

$$\int_{\mathbf{l}_i} \vec{W}_j^{\mathbf{l}} d\vec{\mathbf{l}} = \begin{cases} 1 & if \ i = j \\ 0 & if \ i \neq j \end{cases}$$
(5.18)

Los elementos Whitney en el método de la celda, son usados como interpoladores de cantidades físicas puntuales que tienen la correspondiente variable global, como grados de libertad.

Por ejemlo, el campo eléctrico dentro de un tetraedro es interpolado por medio de los elementos arista, correspondiendo los 6 grados de libertad al valor de las tensiones a lo largo de cada una de las 6 aristas.

De forma similar, la continuidad de la componente normal de la densidad de flujo magnético asegura el uso de los flujos magnéticos como grados de libertad,

$$\int_{\mathbf{s}_i} \vec{W}_j^{\mathbf{s}} d\vec{\mathbf{s}} = \begin{cases} 1 & if \ i = j \\ 0 & if \ i \neq j \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = \sum_{i=1}^4 \vec{W}_i^{\mathbf{s}} \Phi_i$$
 (5.19)

Los elementos de las matrices constitutivas se pueden construir, sobre la base de la ecuación constitutiva puntual por medio de interpolación con elementos Whitney. Teniendo en cuenta, por ejemplo, el problema eléctrico, el flujo eléctrico a través de la porción  $j - \acute{e}sima$  de la cara dual  $\tilde{\mathbf{s}}_j$  dentro de un tetraedro es:

$$d_{j}^{(e)} = \int_{\tilde{\mathbf{s}}_{j}} \vec{D} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\tilde{\mathbf{s}}_{j}} \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\tilde{\mathbf{s}}_{j}} \varepsilon \left( \sum_{i=1}^{6} \vec{W}_{i}^{E} U_{i} \right) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{6} U_{i} \int_{\tilde{\mathbf{s}}_{j}} \varepsilon \vec{W}_{i}^{E} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{6} m'_{\varepsilon,ji} U_{i}$$

$$(5.20)$$

En (5.20),  $d_j$  es el flujo que se obtiene como una combinación lineal de todas las tensiones  $U_i$  a lo largo de las aristas del tetraedro. El aporte local a la matriz constitutiva son los coeficientes:

$$m'_{\varepsilon,ji}U_i = \int_{\tilde{s}'_j} \varepsilon \vec{W}_i^E \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$
 (5.21)

La matriz constitutiva que une las fuerzas magnetomotrices asignadas a lo largo de las aristas duales, a los flujos magnéticos a través de las caras primarias, se puede construir usando un procedimiento similar, mediante el cálculo de la fuerza magnetomotriz localmente a lo largo de la  $j - \acute{e}sima$  porción de la arista dual  $\tilde{\bf l}_j$  dentro de un tetraedro:

$$h_{j}^{(e)} = \int_{\tilde{\mathbf{I}}_{j}} \vec{H} \cdot d\vec{\mathbf{I}} = \int_{\tilde{\mathbf{I}}_{j}} \nu \vec{B} \cdot d\vec{\mathbf{I}} = \int_{\tilde{\mathbf{I}}_{j}} \nu \left( \sum_{i=1}^{4} \vec{W}_{i}^{F_{m}} \Phi_{i} \right) \cdot d\vec{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^{4} \Phi_{i} \int_{\tilde{\mathbf{I}}_{j}} \nu \vec{W}_{i}^{F_{m}} \cdot d\vec{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^{4} m'_{\nu,ji} \Phi_{i}$$
(5.22)

cuya contribución local es:

$$m'_{\nu,ji} = \int_{\tilde{\mathbf{I}}_i} \nu \vec{W}_i^{F_m} \cdot d\vec{\mathbf{I}}$$
 (5.23)

## 5.3. Ecuación constitutiva eléctrica $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

## 5.3.1. Aproximación por interpolación de Whitney.

De forma similar, en este caso la interpolación se realiza para relacionar los vectores  $\vec{l}$  y  $\vec{V}$  de forma local, utilizando también las funciones de Whitney dentro de cada tetraedro. Al utilizar estas funciones de interpolación en cada celda primaria, se puede escribir

$$\vec{E}^{(e)} = \sum_{j=1}^{6} \vec{W}_{j}^{1} U_{j}$$

donde  $\vec{W}_j^1$  son los vectores funciones de forma de las elementos aristas para la  $j-\acute{e}sima$  arista con vértices en los nudos (a,b) [TS05]. Estos son los llamados elementos arista o forma-1 de Whitney y se utilizan para interpolar vectores asociados a las aristas, como por ejemplo la diferencia de potencial o tensión eléctrica.

$$\vec{W}_i^{\mathbf{l}} = \vec{W}_a^{\mathbf{p}} \nabla \vec{W}_b^{\mathbf{p}} - \vec{W}_b^{\mathbf{p}} \nabla \vec{W}_a^{\mathbf{p}}$$

Las formas-1 de Whitney o elementos aristas, son funciones que cumplen con la propiedad de divergencia libre, la componente tangencial del campo es continua y la componente normal permite discontinuidades a través de la interfaz.

Las ecuaciones constitutivas eléctricas relacionan la variable fuente formada por el vector local de corrientes asociadas a las superficies duales  $\tilde{I}^{(e)} = [\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4, \tilde{I}_5, \tilde{I}_6]^T$ , con la variable de configuración formada por las tensiones asociadas a las aristas primales  $U^{(e)} = [U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6]^T$ .

La forma de la matriz final de la ecuación constitutiva eléctrica queda de la siguiente forma

$$\tilde{I}^{(e)} = \mathcal{M}_{\sigma}^{(e)} U^{(e)} \tag{5.24}$$

donde  $\mathcal{M}_{\sigma}$  es una matriz cuadrada de dimensión  $6 \times 6$ :

$$\mathcal{M}_{\sigma}^{(e)} = \frac{\sigma^{(e)}}{\mathbf{v}^{(e)}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{4} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{5} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{2} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{5} & \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{6} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{6} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{1} & \tilde{\mathbf{s}}_{2} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{3} & \tilde{\mathbf{s}}_{3} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{4} &$$

Estos vectores y las funciones de interpolación dentro de los tetraedros se utilizarán para definir las ecuaciones constitutivas para el método de la celda.

El desarrollo y la matriz completa se pueden ver en el anexo C.

## Bibliografía

- [BK00] A. Bossavit and L. Kettunen. Yee-like schemes on staggered cellular grids: A synthesis between fit and fem approaches. *Magnetics, IEEE Transactions* on, 36(4):861–867, 2000.
- [Bos98] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism. *Journal of Japanese Society of applied electromagnetics and mechanics*, 6:17–28, 1998.
- [Bos99] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry: Building a finite-dimensional "maxwell's house" (1): Network equations. Journal of Japanese Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, 7(2):150–159, 1999.
- [CMP04] L. Codecasa, V. Minerva, and M. Politi. Use of barycentric dual grids for the solution of frequency domain problems by fit. *IEEE transactions on magnetics*, 40(2):1414–1419, 2004.
- [CST07] L. Codecasa, R. Specogna, and F. Trevisan. Symmetric positive-definite constitutive matrices for discrete eddy-current problems. *IEEE transactions on magnetics*, 43(2):510–515, 2007.
- [CT06] L. Codecasa and F. Trevisan. Piecewise uniform bases and energetic approach for discrete constitutive matrices in electromagnetic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(4):548–565, 2006.

- [CW01] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32(32):65–87, 2001.
- [Fer13] E. Ferretti. The cell method: an enriched description of physics starting from the algebraic formulation. *CMC: Computers, Materials & Continua*, 36(1):49–71, 2013.
- [GMSGA15] P. I. González, J. M. Monzón, L. Simón, and S. García-Alonso. Thermal constitutive matrix applied to asynchronous electrical machine using the cell method. ISEF 2015 XVII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, 2015.
- [Mar01a] M. Marrone. Computational aspects of the cell method in electrodynamics. In F. L. Teixeira, editor, *Geometric Methods in Computational Electromagnetics*, *PIER 32*, pages 317–356. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001.
- [Mar01b] M. Marrone. Convergence and stability of the cell method with non symmetric constitutive matrices. In *Proc. Computing Conf.*, volume 4, pages 16–17, 2001.
- [Mar02] M. Marrone. The equivalence between cell method, fdtd and fem. In *IEE Fourth International Conference on Computation in Electromagnetics*, pages 8–11, 2002.
- [Mar04a] M. Marrone. A new consistent way to build symmetric constitutive matrices on general 2-d grids, 2004.
- [Mar04b] M. Marrone. Properties of Constitutive Matrices for Electrostatic and Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. on Magnetic*, 40:1516–1520, 2004.
- [MFF02] M. Marrone, A. M. F. Frasson, and H. E. H. Figueroa. A novel numerical approach for electromagnetic scattering: The cell method. In *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2002. IEEE, volume 1, pages 160–163. IEEE, 2002.

- [MREHF02] M. Marrone, V. Rodriguez-Esquerre, and H. Hernandez-Figueroa. Novel numerical method for the analysis of 2d photonic crystals: the cell method. *Optics express*, 10(22):1299–1304, 2002.
- [Rep07] M. Repetto. Discrete constitutive matrices. 2007.
- [RT04] M. Repetto and F. Trevisan. Global formulation of 3D magnetostatics using flux and gauged potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):755–772, 2004.
- [SSW02] R. Schuhmann, P. Schmidt, and T. Weiland. A new whitney-based material operator for the finite-integration technique on triangular grids. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 38(2):409–412, 2002.
- [TK04] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of discrete approaches to solving magnetostatic problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):361–365, March 2004.
- [Ton01] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method. CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2(2):237–258, 2001.
- [Ton02] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.
- [TS05] F. Trevisan and R. Specogna. Geometric derivation of discrete constitutive equations for eddy-current problems. 2005.

## Capítulo 6

Ecuación Global del Método de la Celda y el Método Nodal Modificado en Problemas Electromagnéticos y Circuitales en 2D.

## Índice

6.1. Introducción
6.2. Una variación del método nodal modificado 107
6.3. Ecuaciones de Maxwell y circuitales con la FF y el MNM en
2D
6.3.1. Formulation $\{a, (a, V)\}$ in $2D.$
6.3.2. Discretización para el modelo de conductor filiforme (conjunto tipo 5)
6.3.3. Discretización para el modelo de conductor sólido (conjunto tipo 4)
6.3.4. Ensamble de todas las ecuaciones en una matriz global 115
6.4. Resultados y discusión

Capítulo 6. Ecuación Global del Método de la Celda y el Método Nodal Modificado en Problemas Electromagnéticos y Circuitales en 2D.

6.4.1.	Respuesta en frecuencia	116
6.4.2.	Respuesta transitoria	117

#### Resumen.

En este capítulo se presenta una aproximación de un problema de corrientes inducidas electromagnéticas acoplado con ecuaciones circuitales en 2D. Se usa el método de la celda (CM) y el método nodal modificado (MNM) de la teoría de circuitos. Las ecuaciones de definición de dos modelos de conductores –filiformes y sólidos– se deducen para esta formulación.

El análisis se desarrolla en estado transitorio y permanente. En el estado transitorio para la discretización del tiempo se usa un esquema clásico Euler-Crank Nicholson.

Para la validación de los resultados se ha comparado con el método de los elementos finitos (FEM).

### 6.1. Introducción.

Hay varias referencias que usan ecuaciones circuitales, usando el método nodal modificado MNM y el método de los elementos finitos FEM [ST85, Str85, CNC00, MSS07]. En [DST06] se estudia una forma de acoplar las ecuaciones de campo con ecuaciones circuitales en un dominio acoplado.

En este capítulo se usa una variación del MNM y el método de la celda CM en las ecuaciones de campo electromagnético [SM11a, MSS07]. Con el método que se propone, es posible ensamblar en una sola matriz las ecuaciones de campo discretizadas, con las ecuaciones circuitales. La ecuación matricial se implementa mediante un programa realizados en Scilab, un paquete de software para cálculo numérico [Ent12]. Para la discretización del dominio continuo se usa el programa GMSH, que es un mallador 3D, con capacidades de preprocesado y postprocesado [GR09].

Se desarrolla un método que usa ambas herramientas el MNM y el CM. Esto permite un análisis simultáneo que integre los modelos circuitales concentrados y el dominio

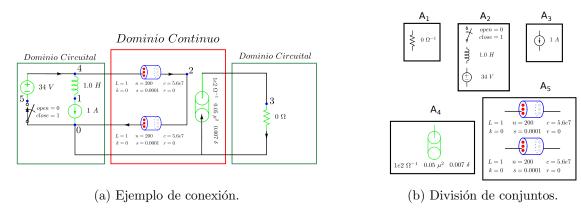


Figura 6.1: Modelos continuos y discretos.

distribuido, como se muestra en la figura 6.1a. Todos los métodos númericos existentes para la solución de una ecuación de campo, tienen de una u otra manera, una formulación diferencial como punto de partida. Como métodos de discretización para una formulación discreta, se tiene el Método de Diferencias Finitas (FDM), el Método de los Elementos Finitos (FEM), o el Método de los elementos del contorno (BEM), entre otros.

Como alternativa se puede reformular las ecuaciones de campo en forma finita [Ton02] de forma que el sistema de ecuaciones algebraico se pueda escribir directamente, evitando el proceso de discretización aplicado a las ecuaciones diferenciales.

Esta aproximación es la Formulación Finita (FF) y el correspondiente método numérico es conocido como el método de la celda (CM) [AFR10].

La FF está basada en el uso de las variables globales [Ton02], obtenidas por la integración de las variables de campo en un sistema de dos mallados complejos, relacionados estrictamente por condiciones de dualidad.

## 6.2. Una variación del método nodal modificado.

La idea fundamental consiste en modificar el MNM, introduciendo dos nuevos conjuntos de forma que se separen los elementos en cinco conjuntos disjuntos entre sí, como se puede ver en la figura 6.1b.

En un primer conjunto A1 se incluyen aquellos elementos que pueden ser expresados

en forma de admitancias.

El segundo conjunto A2 incluye aquellos elementos que no tienen representación en forma de admitancia o se requiere su intensidad.

El tercer conjunto A3 incluye las fuentes independientes de intensidad.

El cuarto conjunto A4 incluye aquellos elementos que modelan los conductores denominados como modelo sólido [Str85]. Éste conjunto incluirá las tensiones e intensidades que sirvan de nexo de unión con la Formulación Finita y su implementación numérica en el método de la celda.

Por último, el quinto conjunto A5 incluye el segundo modelo denominado de conductor filiforme [Str85].

Esto resulta clave para eliminar todas aquellas incógnitas circuitales que no interesen y al mismo tiempo poder representar cualquier tipo de elemento, cosa que no es posible hacer con los métodos nodales puros o de circulación puros.

Reestructuramos los elementos de la red de manera que aplicando la ley de Kirchoff para corrientes (KCL), las ecuaciones puedan ser escritas de la siguiente manera:

$$A_1I_1 + A_2I_2 + A_4I_4 + A_5I_5 + A_3J = 0 (6.1)$$

Siendo la matriz A de dimensión  $A_{n \times b_i}$  una matriz circuital de incidencia nudos, ramas, donde n es el número de nudos del circuito menos 1 y  $b_i$  el número de elementos de cada uno de los conjuntos antes mencionados.

Las divisiones son creadas de manera que:

El vector  $I_1$  contiene las corrientes que circulan por las ramas de los elementos que tienen representación en forma de admitancia y que no son requeridas como soluciones. Siendo la matriz  $Y_1$  diagonal y de dimensión  $[Y_1]_{b1 \times b1}$ , y cuya ecuación de definición es

$$Y_1 U_1 = I_1 (6.2)$$

El vector  $I_2$  contiene las corrientes por las ramas de los elementos que no tienen representación en forma de admitancia. Contiene además, corrientes de ramas de fuentes de tensión y corrientes de ramas que son requeridas como soluciones. La ecuación de definición de estos elementos se muestra a continuación y corresponde al Método de la

Tabla [Chu75]:

$$Y_2U_2 + Z_2I_2 = W_2 (6.3)$$

donde el segundo miembro  $W_2$  contiene las entradas no nulas de las fuentes independientes de tensión únicamente y las matrices  $Y_2$  y  $Z_2$  dependen del tipo de elemento.

El vector  $I_3$  contiene las fuentes independientes de intensidad (J),  $I_3 = J$ .

El vector  $I_4$  contiene las corrientes de los conductores que pertenecen a la región continua con modelo de conductor sólido.

El vector  $I_5$  contiene los conductores que pertenecen a la región continua con modelo de conductor filiforme.

Aplicando la ley de Kirchoff para las tensiones (KVL), las ecuaciones son divididas de la misma forma:

$$U_1 = A_1^T V_n \tag{6.4}$$

$$U_2 = A_2^T V_n \tag{6.5}$$

$$U_3 = A_3^T V_n \tag{6.6}$$

$$U_4 = A_4^T V_n (6.7)$$

$$U_5 = A_5^T V_n \tag{6.8}$$

Siendo  $U_{i=1...5}$  los vectores que contienen las diferencias de potenciales de los elementos que pertenecen a cada conjunto, y  $V_n$  un vector con los potenciales eléctricos de cada uno de los nudos respecto al de referencia.

La ecuación 6.6 se usa para determinar las tensiones en las fuentes de corriente, una vez que se haya encontrado el valor de  $V_n$ .

Reescribiendo 6.9 de la siguiente forma:

$$A_1I_1 + A_2I_2 + A_4I_4 + A_5I_5 = -A_3J (6.9)$$

Y sustituyendo 6.2 de  $I_1$  en 6.9:

$$A_1Y_1U_1 + A_2I_2 + A_4I_4 + A_5I_5 = -A_3J (6.10)$$

Las tensiones en las ramas  $U_1$  pueden ser eliminadas sustituyendo 6.4:

$$A_1 Y_1 A_1^T V_n + A_2 I_2 + A_4 I_4 + A_5 I_5 = -A_3 J (6.11)$$

Y de igual manera sustituyendo 6.5 en 6.3, obtenemos:

$$Y_2 A_2^T V_n + Z_2 I_2 = W_2 (6.12)$$

Las ecuaciones 6.11 y 6.12, serán utilizadas para completar en una sola ecuación matricial, todas las incógnitas.

# 6.3. Ecuaciones de Maxwell y circuitales con la FF y el MNM en 2D.

## 6.3.1. Formulation $\{a, (a, V)\}$ in 2D.

Sean dos mallados complejos en  $\Re^3$  en relación dual denominados K y  $\tilde{K}$ . Supongamos que K esta hecho de tetraedros y sus volúmenes coinciden con esos tetraedros.

El conjunto de nudos  $\tilde{\mathbf{p}}$  del mallado dual K, se corresponde con el baricentro de cada volumen del tetraedro en K.

Una arista de  $\tilde{K}$  es una línea quebrada formada por dos segmentos rectos, que conectan dos nudos duales y pasa a través de un punto interior (b) de una cara de K, común a los dos volúmenes de K que la comparten. Estos puntos  $(b_n)$ , a su vez, se corresponden con los baricentros de las caras en K.

Este procedimiento establece una correspondencia biunívoca entre las caras del mallado primario K y las aristas del mallado dual  $\tilde{K}$ , como puede observarse en la figura 6.2b,

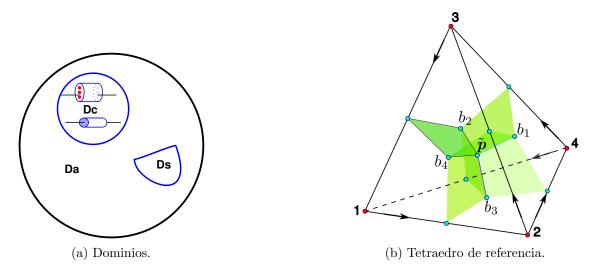


Figura 6.2: División del dominio.

y viceversa, a cada cara del mallado dual  $\tilde{K}$  le corresponde una arista y sólo una del mallado primario K .

Se representa por  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v}$ , el número de lados, caras y volúmenes para cada celda  $\mathbf{v} \in K$  y por  $\tilde{\mathbf{l}}$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$  el número de lados, caras y volúmenes para cada celda  $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{K}$ .

Las magnitudes que intervienen en las ecuaciones de Maxwell son tensiones eléctricas U, tensiones magnéticas  $\tilde{F}_m$ , flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$ , flujo magnético  $\Phi$  y la corriente eléctrica  $\tilde{I}$ . Éstas son definidas por integrales de línea y de superficie de los valores elementales de campo  $\vec{E}$  (intensidad de campo eléctrico),  $\vec{H}$  (intensidad de campo magnético),  $\vec{D}$  (densidad de flujo eléctrico),  $\vec{J}$  (densidad de corriente eléctrica) y  $\vec{B}$  (densidad de flujo magnético). Esas integrales son asignadas como incógnitas a los elementos de los mallados primarios y duales.

Si en el subdominio fuente  $D_s$  (figura 6.2a) se conocen las fuentes de corriente, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, la solución del problema encuentra las incógnitas  $\{\Phi, U, \tilde{F}_m, \tilde{I}\}$ . Para ello se ha escogido el planteamiento con los potenciales magnéticos y eléctricos que son magnitudes auxiliares, que simplifican el problema en cuanto al número de incógnitas, y permiten acoplar fácilmente las ecuaciones circuitales y las de campo.

La primera ecuación corresponde a la ley de Ampère,  $\forall l \in D_a \cup D_s$  a:

$$\tilde{C} \,\mathcal{M}_{\nu} C \,a = \tilde{I} \tag{6.13}$$

donde  $C_{\mathbf{s}\times\mathbf{l}}$  es la matriz de incidencia de los pares  $(\mathbf{s}_i, \mathbf{l}_j)$  se cumple que  $\tilde{C} = C^T$  siendo  $c_{i,j} = \pm 1$  si  $\mathbf{l}_j \in \partial \mathbf{s}_i$ , donde los signos corresponden a la orientación relativa de estos elementos, y siendo  $c_{i,j} = 0$  si  $\mathbf{l}_j \notin \partial \mathbf{s}_i$ .

La segunda ecuación corresponde a la ley de Ampère,  $\forall \mathbf{l} \in D_c$  a:

$$\left(\tilde{C}\,\mathcal{M}_{\nu}C + j\omega\mathcal{M}_{\sigma}\right)a - \mathcal{M}_{\sigma}G\,V = 0 \tag{6.14}$$

Las matrices  $\mathcal{M}$ , representan propiedades métricas y propiedades del medio (magnéticas y eléctricas) y un operador de transferencia de magnitudes entre K y  $\tilde{K}$  (operador de Hodge [Bos98]), descritas en el capítulo 5. La formulación finita no prescribe como se construye esa matriz, la forma en que es construida no es única lo que da lugar a diferentes esquemas numéricos [RT03].

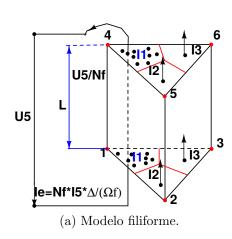
Por último, la tercera ecuación es la ecuación de continuidad de la corriente, correspondiente  $\forall \mathbf{p} \in D_c$  a:

$$\tilde{D} \mathcal{M}_{\sigma} (-j\omega a - GV) = 0 \tag{6.15}$$

Siendo  $\tilde{D}_{\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{s}}}$  la matriz de incidencia de los pares  $(\tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{\mathbf{s}}_j)$  de  $\tilde{K}$ , y por otra parte  $G_{\mathbf{l} \times \mathbf{p}}$  la matriz de incidencia entre los pares  $(\mathbf{l}_i, \mathbf{p}_i)$ .

El número de incógnitas en esta formulación es el número total de aristas más el número total de nudos del mallado. Estas siguen siendo altas, por lo que se hace necesario siempre que sea posible buscar simetrías en el problema.

En problemas tridimensionales con simetría plana, la ecuación de continuidad se cumple automáticamente y el número de incógnitas de potenciales magnéticos se reducen al número de nudos de una sección del modelo. Los potenciales eléctricos asociados a los nudos se pueden reducir enormemente si se utilizan dos tipos de modelos para la región conductora: los conductores sólidos y los conductores filiformes 6.3.



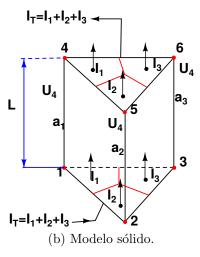


Figura 6.3: Modelos de conductores en el CM. Siendo  $N_f$ =número de conductores,  $\Delta$ =área de triángulo y L=Longitud axial.

## 6.3.2. Discretización para el modelo de conductor filiforme (conjunto tipo 5).

Para obtener la ecuación para el modelo del conductor filiforme en 2D para un elemento e, se parte de un elemento prismático de base triangular como el mostrado en la figura 6.3a [SM11b, MSG11]. Ese elemento es atravesado por un número determinado de filamentos de corriente, como se observa en la figura 6.3a.

Siendo  $U_5$ , la diferencia de potencial total asociada a una región de conductor filiforme y  $N_f$ , el número total de conductores que atraviesan esa región (ver la figura 6.3a), se define:

a)  $C_f^e = \frac{N_f}{\Omega_f} d_f C_1^e$ , donde  $d_f = +1$  si la dirección del dominio f coincide con el de referencia, y  $d_f = -1$  si la dirección del dominio f es contraria a la de referencia, y se hace  $\forall e \in \Omega_f$  y  $\forall \Omega_f$ , siendo  $\Omega_f$  el área efectiva de una región de conductor filiforme.

Y se define

b)  $C_1 = \frac{\Delta}{3}[1\ 1\ 1]^T$ , donde  $\Delta$  es el área de triángulo,

entonces la expresión para un conductor es:

$$jwC_f^T a - 1 V_5 + R_f I_5 = 0 (6.16)$$

donde  $R_f = \left[\frac{N_f^2}{\sigma\Omega_f}L\right]$  es una matriz diagonal de resistencias con dimensión  $b5 \times b5$ , y  $C_f^T$  es una matriz de dimensión  $b5 \times n$ .

La ecuación (6.16) relaciona magnitudes globales del mundo puramente circuital con magnitudes globales asociadas a las aristas del mallado complejo primario, es el nexo de unión de las ecuaciones obtenidas aplicando el MNM y el CM.

## 6.3.3. Discretización para el modelo de conductor sólido (conjunto tipo 4).

En la figura 6.3b se observan las magnitudes globales de diferencia de potencial y de corriente consideradas para una región en este modelo [SM11b, MSG11].

La expresión  $\frac{\Delta \sigma}{L} = Y^e$ , corresponde a la admitancia de un elemento dentro de la región. Si sumamos toda la corriente correspondiente a una región conductora del modelo sólido se obtiene la siguiente ecuación:

$$-jw\frac{\sigma}{L}C_1^T a + Y U_4 - I_4 = 0 (6.17)$$

Si definimos  $C_s = \frac{\sigma}{L} \times d_f \times C_1$  correspondientes a cada una de las regiones conductoras del modelo sólido, donde  $d_f = +1$  si la referencia del dominio f coincide con el de referencia y  $d_f = -1$  si la dirección del dominio f es contraria a la de referencia.

Si se considera más de una región conductora entonces  $I_4$  y  $U_4$  se agruparán en vectores de  $b4 \times 1$ ,  $C_s^T$  será un vector de  $b4 \times n$ , y la matriz  $Y_{b4 \times b4}$  una matriz de admitancias de los conductores sólidos.

Si se tiene en cuenta la ecuación (6.7)

$$-jwC_s^T a + Y A_4^T V_n - I_4 = 0 (6.18)$$

Esta ecuación relaciona magnitudes globales del mundo puramente circuital con magnitudes de campo del mundo continuo, y es el nexo de unión de las ecuaciones obtenidas aplicando el MNM y el CM.

#### 6.3.4. Ensamble de todas las ecuaciones en una matriz global.

Como resultado final, se resume en este apartado todas las ecuaciones antes mencionadas en un sistema global donde aparecen reflejadas las ecuaciones de campo y los modelos de conductores, como se puede observar en la ecuación (6.19). El vector de incógnitas corresponde a la ecuación (6.20), y el segundo miembro del sistema de ecuaciones queda en función de fuentes independientes de tensión y de corriente, en la ecuación (6.21).

$$T = \begin{bmatrix} \left[ \tilde{C} \mathcal{M}_{\nu} C + jw \mathcal{M}_{\sigma} \right]_{n \times n} & \left[ - \left[ C_{s} \right] A_{4}^{T} \right]_{n \times nu} & 0_{n \times b2} & 0_{n \times b4} & - \left[ C_{f} \right]_{n \times b5} \\ \left[ -jw C_{s}^{T} \right]_{b4 \times n} & \left[ \left[ Y \right]_{4} A_{4}^{T} \right]_{b4 \times nu} & 0_{b4 \times b2} & - \left[ 1 \right]_{b4 \times b4} & 0_{b4 \times b5} \\ \left[ jw C_{f}^{T} \right]_{b5 \times n} & \left[ -A_{5}^{T} \right]_{b5 \times nu} & 0_{b5 \times b2} & 0_{b5 \times b2} & \left[ R_{f} \right]_{b5 \times b5} \\ 0_{nu \times n} & \left[ A_{1} Y_{1} A_{1}^{T} \right]_{nu \times nu} & \left[ A_{2} \right]_{nu \times b2} & \left[ A_{4} \right]_{nu \times b4} & \left[ A_{5} \right]_{nu \times b5} \\ 0_{b2 \times n} & \left[ Y_{2} A_{2}^{T} \right]_{b2 \times nu} & \left[ Z_{2} \right]_{b2 \times b2} & 0_{b2 \times b4} & 0_{b2 \times b5} \end{bmatrix}_{n+nu+b2+b4+b5}$$

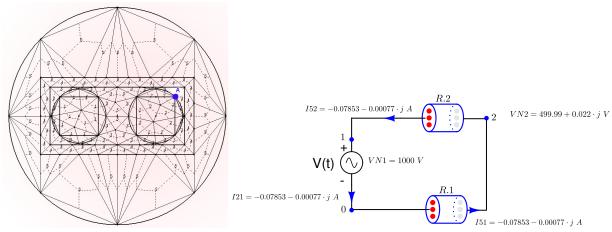
$$(6.19)$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ V_n \\ I_2 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -A_3 J \\ W_2 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

$$T \cdot X = W \tag{6.22}$$

Capítulo 6. Ecuación Global del Método de la Celda y el Método Nodal Modificado en Problemas Electromagnéticos y Circuitales en 2D.



(a) División primal, dual y punto de referencia A.

(b) Modelo circuital del conductor filiforme.

Figura 6.4: Modelo continuo con división primaria y dual, punto de referencia A y modelo circuital.

## 6.4. Resultados y discusión.

#### 6.4.1. Respuesta en frecuencia.

El esquema circuital del ejemplo que se va a estudiar, se puede observar en la figura 6.4b.

Consiste en una fuente de tensión de corriente alterna de 1000 voltios de valor máximo (elemento perteneciente al conjunto tipo 2) y dos regiones conductoras que corresponden a modelos de conductores filiformes (elementos pertenecientes al conjunto tipo 5). Todos los elementos se encuentran en serie y conectados según se indica en la figura 6.4b.

Una sección de la región denominada dominio continuo discretizado se representa en la figura 6.4a. Este dominio se encuentra dividido en cinco regiones. La región numerada como 1, corresponde al conductor filiforme que se encuentra entre el nudo 0 y el nudo 2, el número de conductores es de 1000 con un área de 0.0001571  $m^2$ . Las regiones 3, 4 y 5 corresponden al aire, en este problema.

Como se observa en esta figura 6.4a, el mallado primario corresponde a triángulos, en 3D serían prismas de base triangular. También se observa el mallado dual que corresponde a una división baricéntrica.

Frecuencia [Hz]	I2 [A]	Z [Ohmios]	L [H]
50	0.07853-0.00077j	12732+124.84j	0.397
100	0.07851-0.001515j	12732+245.82j	0.391
1000	0.07571-0.01461j	12732.3+2458.1j	0.391
5000	0.04065- $0.0392$ j	12732.38+12290.89j	0.39
15000	0.00836-0.0242j	12733.23+36874.16j	0.39

Tabla 6.1: Resultados de la respuesta en frecuencia.

Para este problema, las matrices de la ecuación 6.19 constan de 4 submatrices, siendo el vector incógnita  $\begin{bmatrix} a' \ V'_n \ I'_2 \ I'_5 \end{bmatrix}'$  y el vector segundo miembro  $\begin{bmatrix} 0_{1\times n} \ 0_{1\times n} \ 0_{1\times 1} \ W'_2 \end{bmatrix}^T$ .

En la figura 6.4b se observan los resultados circuitales correspondientes a las corrientes de los elementos del conjunto tipo 5 y 2 así como las tensiones de los nudos 1 y 2.

En la Tabla 6.1 se resumen los resultados de la corriente y la impedancia total vista por la fuente de alimentación, correspondientes a las distintas frecuencias que se indican en ésta. Así mismo, se representa el valor del coeficiente de autoinduccion global por metro de longitud y al ser un medio lineal, este coeficiente es constante.

### 6.4.2. Respuesta transitoria.

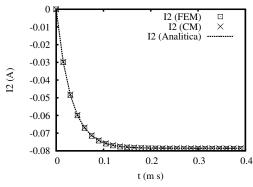
La ecuación 6.22, se puede resolver en el dominio del tiempo para condiciones iniciales iguales a cero (respuesta a estado cero) o con unas condiciones iniciales que sean congruentes (cumplen las leyes de Kirchoff).

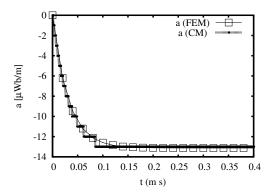
El método consiste en separar la matriz T del sistema, en su parte real y en su parte imaginaria;

$$T = G + jC (6.23)$$

Siendo j la unidad imaginaria y teniendo en cuenta que cada componente imaginaria corresponde a un término temporal del tipo  $\frac{d}{dt}$ , se puede poner la anterior ecuación de la forma:

$$GX + C\frac{dX}{dt} = W ag{6.24}$$





- (a) Transitorio de la corriente.
- (b) Transitorio del potencial magnético en el punto A.

Figura 6.5: Validación de resultados de las simulaciones con transitorios.

El método utilizado para la discretización es el método de Euler-Crank-Nicholson, ecuación 6.25 [Wal05].

$$\left(\frac{C}{\Delta t} + \theta G\right) X^{n+1} = \left(\frac{C}{\Delta t} - (1 - \theta)G\right) X^n + (1 - \theta)W^n + \theta W^{n+1}$$
(6.25)

Distintos esquemas pueden ser utilizados según sea los valores de  $\theta$ . Para  $\theta=1$  es un Euler implícito, para  $\theta=0$  un Euler explícito, para  $\theta=0,5$  un Crank-Nicholson y para  $\theta=2/3$  Galerkin.

Como ejemplo, se ha aplicado un escalón de 1000 Voltios a partir de t=0. Los resultados correspondientes para la corriente I2 se representa en la figura 6.5a. Estos resultados se comparan para su validación, con una ecuación análitica y el FEM (Getdp) [DGGL99], observando la coincidencia en todo el transitorio y también en el régimen permanente, resultando un valor de la corriente en este último tramo de 0,00785 A.

Así mismo, en la figura 6.5b se representa el transitorio correspondiente al potencial magnético asociado al punto (A), como se puede observar en la figura 6.4a.

También se observa la perfecta coincidencia entre las simulaciones realizadas aplicando FEM (Getdp) y el CM.

### Bibliografía

- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [Bos98] A. Bossavit. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements. Academic Press, 1998.
- [Chu75] L. O. Chua. Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques, volume 1. 1975.
- [CNC00] M. C. Costa, S. L. Nabeta, and J. R. Cardoso. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with fem in the simulation of a universal motor. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 36(4):1431–1434, Jul 2000.
- [DGGL99] P. Dular, C. Geuzaine, A. Genon, and W. Legros. An evolutive software environment for teaching finite element methods in electromagnetism. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1682–1685, may 1999.
- [DST06] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Coupling between circuits and a-χ discrete geometric approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1043 –1046, apr 2006.
- [Ent12] Scilab Enterprises. Scilab: Free and open source software for numerical computation. Scilab Enterprises, Orsay, France, 2012. http://www.scilab.org/.

- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [MSG11] J. M. Monzón, L. Simón, and P. González. Global equation of cell method and modified nodal method of electromagnetic and circuital problems. In ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, 2011.
- [MSS07] J. M. Monzón, F. Santana, and L. Simón. Acople del método nodal modificado y el método de los elementos finitos. implementación en lenguaje scilab y c++. XCLEEE X Conference in Electrical Engineering, Aug 2007.
- [RT03] M. Repetto and F. Trevisan. 3-d magnetostatic with the finite formulation.

  Magnetics, IEEE Transactions on, 39(3):1135–1138, May 2003.
- [SM11a] L. Simón and J. M. Monzón. Cell method and modified nodal method in eddy current electromagnetic problems. *Renewable Energies and Power Quality*, pages 1497–1516, 2011.
- [SM11b] L. Simón and J. M. Monzón. Parametric identification of a three-phase machine with genetic algorithms. In Computational Methods for the Innovative Design of Electrical Devices, pages 167–184. Springer, 2011.
- [ST85] E. G. Strangas and K. Theis. Shaded pole motor design and evaluation using coupled field and circuit equations. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 21(5):1880–1882, Sep 1985.
- [Str85] E. G. Strangas. Coupling the circuit equations to the non-linear time dependent field solution in inverter driven induction motors. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 21(6):2408–2411, Nov 1985.
- [Ton02] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.

[Wal05] John B Walsh. Finite element methods for parabolic stochastic pde's. Potential Analysis, 23(1):1-43, 2005.

## Capítulo 7

La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

Índice
--------

7.1. Introducción						
7.2. Base teórica de la formulación finita de las ecuaciones de						
Maxwell						
7.2.1. Ecuaciones topológicas						
7.2.2. Ecuaciones constitutivas						
7.2.3. Sistema global de ecuaciones						
7.2.4. Ley de continuidad en el segundo miembro						
7.3. Resultados y discusión						
7.3.1. Resumen						
7.3.2. Ley de Continuidad. Resultados						
7.3.2.1. Problema en 2D						

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

	7.3.2.2. Problema en 3D	147
7.3.3.	Resultados del campo magnético y de las corrientes inducidas	
	para excitaciones de corriente lineal, superficial y volumétrica.	149

#### Resumen.

En este capítulo se discretiza un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D utilizando el método de la celda (CM) [SMM15].

Se han calculado los resultados del campo magnético y corrientes inducidas para corrientes de excitación lineales, superficiales y volumétricas. El error obtenido es menor de 0.15% cuando se compara con el método de los elementos finitos (FEM).

La contribución de este trabajo está en forzar la condición de la continuidad de las corrientes superficiales y volumétricas de densidad de corriente, a través de un método puramente circuital.

El método se basa en la matriz fundamental de bucle B, definido en un árbol de un grafo lineal en el dominio de las fuentes de corriente  $\Omega_s$ . Para obtener el árbol se utiliza el algoritmo de Welsh.

La densidad de corriente superficial se evalúa en el baricentro de los triángulos y en los puntos medios de las líneas duales.

La condición de continuidad se analiza en algunos cortes del dominio. Se hace un balance nodal para determinar la mejor evaluación de las corrientes en los nudos. La densidad de corriente volumétrica se evalúa en el centroide de los tetraedros y en los centroides de las caras duales.

#### 7.1. Introducción.

Hoy en día, el diseño y el análisis de máquinas eléctricas se realiza con herramientas numéricas de cálculo. Los métodos numéricos para la solución de un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D, aplicadas al análisis de las máquinas eléctricas, tiene una formulación integral o diferencial como punto de partida.

La formulación discreta, se puede obtener entonces por muchos métodos de discretización, tales como el método de los elementos finitos (FEM), el método de las diferencia finitas (FDM), el método de los elementos del contorno (BEM), entre otros [Bos98, Wei96].

Como alternativa, es posible formular las leyes de campo en forma finita de modo que, un sistema de ecuaciones algebraicas puede ser escrito directamente para resolver el problema de campo, evitando de esa forma el uso del proceso de discretización aplicada a una ecuación integral o diferencial. Este enfoque es el que se hace en la formulación finita (FF) que se introduce en las referencias [Ton76, Ton95, Ton02], y el método numérico correspondiente se conoce como el método de la celda (CM) [Ton01a, AP04, AFR10, MVea10].

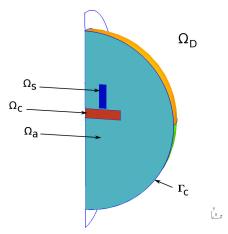
La geometría y la topología, desempeñan un papel fundamental en la discretización de las ecuaciones de campo en derivadas parciales (PDE). Los operadores estándar gradiente, rotacional y divergencia, son el equivalente en la FF a las matrices G, C and D [Ton01b]. Estas matrices tienen una definición topológica natural, ya que corresponden a las incidencias entre los elementos geométricos involucrados en la discretización de la PDE.

Para la definición de las cantidades fisicas y la estructura topológica, se ha seguido la clasificación de Tonti y sus diagramas. Tonti clasifica las cantidades electromagnéticas en variables de fuente, variables de configuración y variables energéticas.

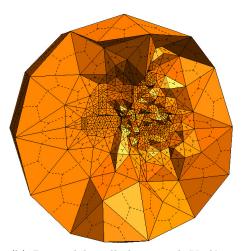
Por otra parte, en la formulación finita esta clasificación se asocia con un par de celdas complejas duales, la primal K y la dual baricéntrica  $\tilde{K}$ . Las interconexiones mutuas de la celda primaria K, describen la matriz de incidencia G entre las aristas  $\mathbf{l}$  y nudos  $\mathbf{p}$ , la matriz C entre las caras  $\mathbf{s}$  y aristas  $\mathbf{l}$ , y la matriz D entre volúmenes  $\mathbf{v}$  y caras s. Las matrices  $\tilde{G} = D^T$ ,  $\tilde{C} = C^T$  y  $\tilde{D} = -G^T$ , describen las interconexiones en la celda dual  $\tilde{K}$ .

La contribución de este trabajo, es forzar la condición de continuidad de la densidad de corriente - superficial y volumétrica - por medio del uso de un método puramente circuital. El método se basa en la matriz de bucle fundamental B, referida a un árbol obtenido del grafo lineal en el dominio de la fuente de corriente  $\Omega_s$  (Fig. 7.1a) [SM12]. Esto se fundamenta en el teorema fundamental del álgebra lineal [Str93].

Los valores de las corrientes en el coárbol, se obtienen evaluando las corrientes en las caras duales, mediante el producto escalar de la densidad de corriente y el vector superficie. La densidad de corriente será evaluada en el baricentro de los tetraedros y en el baricentro de las caras duales (Fig. 7.7). La ley de la continuidad - divergencia cero - se debe cumplir. Para obtener el conjunto de las corrientes, se aplica el algoritmo de Welsh (WA). Los resultados obtenidos, serán comparados con la finalidad de ver en cuál de las dos evaluaciones, se comente un error menor.



(a) Un cuarto del dominio  $\Omega_D = \Omega_s \cup \Omega_a \cup \Omega_c$ ;  $\Gamma_c = \partial \Omega_D$ .



(b) Parte del mallado primal K -línea continua- y del mallado dual  $\tilde{K}$  -línea discontinua-, obtenidos con el mallador Gmsh [GR09].

Figura 7.1: Dominio del problema y su mallado.

# 7.2. Base teórica de la formulación finita de las ecuaciones de Maxwell.

#### 7.2.1. Ecuaciones topológicas.

La formulación de las ecuaciones de Maxwell en la FF se desarrolla en [Ton01a] y en paralelo en [CW01], de manera muy similar. En los diagramas de Tonti, se hace una clasificación sobre la estructura discreta de estas ecuaciones [Ton76, Ton95, Ton02].

Nos basamos en los diagramas de Tonti de las ecuaciones del campo electromagnético, para obtener el sistema de ecuaciones final que se discute en la sección 7.2.3. Los diagramas

del Tonti, muestran los dos tipos de ecuaciones que aparecen en el FF de las ecuaciones de Maxwell.

Por un lado, están las ecuaciones llamadas ecuaciones topológicas en las que no están implicadas ninguna propiedad métrica o física del medio, y por otro lado, están las ecuaciones constitutivas relativas a la propiedad física y métrica.

Las cantidades involucradas en el diagrama de Tonti se clasifican en dos grupos: Las magnitudes de configuración, asociadas a una mallado primal K formado por elementos geométricos, tipo punto  $\mathbf{p}$   $(nudo\ primal)$ , línea  $\mathbf{l}$   $(arista\ primal)$ , superficie  $\mathbf{s}$   $(cara\ primal)$ , y volumen primal  $\mathbf{v}$   $(volumen\ primal)$ , y las  $magnitudes\ fuente$  asociadas al mallado dual  $\tilde{K}$  formado por elementos como el punto dual  $\tilde{\mathbf{p}}$   $(nudo\ dual)$ , la línea dual  $\tilde{\mathbf{l}}$   $(arista\ dual)$ , la superficie dual  $\tilde{\mathbf{s}}$   $(cara\ dual)$  y el volumen dual  $\tilde{\mathbf{v}}$   $(volumen\ dual)$ .

Por último, en las *ecuaciones constitutivas*, se vinculan los dos tipos de cantidades, las *magnitudes de configuración* con las *magnitudes fuente*.

El dominio estudiado se divide como se ve en la figura 7.1b. Hay dos mallados complejos en  $\Re^3$ . El mallado complejo primal K y el mallado complejo dual  $\tilde{K}$ . El mallado primal K está formado por tetraedros. Los centroides de los tetraedros son los conjuntos de puntos de  $\tilde{p}$  del mallado complejo dual  $\tilde{K}$ . Un arista dual  $\tilde{\mathbf{l}}$  del  $\tilde{K}$  está compuesto por dos segmentos de rectas que unen dos nudos duales  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Estas aristas duales son segmentos de recta que atraviesan una cara primal compartida por dos tetraedros.

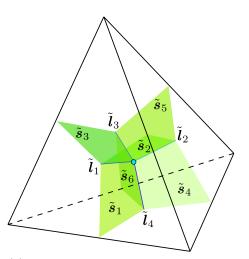
Este procedimiento establece una correspondencia biunívoca entre las caras  $\mathbf{s}$  del mallado primal K y los lados  $\tilde{\mathbf{l}}$  del mallado dual  $\tilde{K}$ , y viceversa 7.2a.

Las magnitudes que operan en las ecuaciones de Maxwell en la FF son magnitudes globales [Ton95]. Se trata de la tensión eléctrica U, la tensión magnéticas  $\tilde{F}_m$ , el flujo eléctrico  $\tilde{\Psi}$ , el flujo magnético  $\Phi$  y la corriente eléctrica  $\tilde{I}$ .

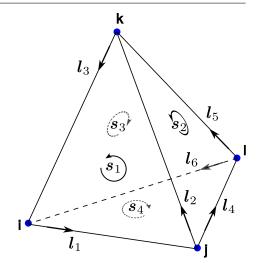
Estos se definen por las integrales de línea y las integrales de superficie de los valores elementales de campo, como la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$ , la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$ , la densidad de flujo eléctrico  $\vec{D}$ , la densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$  y la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ . Estas magnitudes de configuración son asignadas como incógnitas en el mallado primal K y para mallado dual  $\tilde{K}$ , como magnitudes fuente.

Las ecuaciones topológicas de las leyes de Maxwell del campo magnético en estado estacionario sinusoidal, aplicado a todo el dominio  $\Omega_D$  son:

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.



(a) Nudo, aristas y caras duales en el elemento de referencia.



(b) Nudos, aristas y caras del mallado primal y su orientación.

Figura 7.2: Tetraedro de Referencia.

Teorema de Gauss del campo magnético,

$$D\Phi = 0 \tag{7.1}$$

Ley de Inducción de Faraday,

$$CU = -j\omega\Phi \tag{7.2}$$

siendo j la unidad imaginaria y  $\omega$  la frecuencia angular. La ecuación (7.2) desarrollada sería:

$$\sum_{j:\mathbf{l}_j \in \mathbf{L}} c_{i,j} u_j = -j \,\omega \,\Phi_i \quad , \forall \, i: \, \mathbf{s}_i \in \mathbf{S}$$
 (7.3)

donde el coeficiente de la suma  $c_{i,j} \in \{0, \pm 1\}$ .

Si  $c_{i,j} = \pm 1$ , entonces  $\mathbf{l}_j \in \partial \mathbf{s}_i$ , donde el signo corresponde a la orientación relativa de estos elementos.

Si  $c_{i,j} = 0$  entonces  $\mathbf{l}_j \notin \partial \mathbf{s}_i$ .

Ley de Àmpere,

$$\tilde{C}\,\tilde{F_m} = \tilde{I} \tag{7.4}$$

Ley de continuidad de la corriente,

$$\tilde{D}\,\tilde{I} = 0\tag{7.5}$$

donde  $D_{\mathbf{v} \times \mathbf{s}}$  es la matriz de incidencia de los pares  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{s}_j)$  del mallado primal K.

 $C_{\mathbf{s} \times \mathbf{l}}$  es la matriz de incidencia de los pares  $(\mathbf{s}_i, \mathbf{l}_i)$  de K.

 $\tilde{D}_{\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{s}}}$  la matriz de incidencia de los pares  $(\tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{\mathbf{s}}_j)$  de  $\tilde{K}$ .

Y  $\tilde{C}_{\tilde{\mathbf{s}} \times \tilde{\mathbf{l}}}$  es la matriz de incidencia de los pares  $(\tilde{\mathbf{s}}_i, \tilde{\mathbf{l}}_j)$  de  $\tilde{K}$ .

Las caras del mallado primal K y sus correspondientes aristas duales, tienen que ser numeradas y orientadas consistentemente (Fig. 7.2a y 7.2b). Entonces se debe cumplir que  $\tilde{C} = C^T$ ,  $\tilde{G} = D^T$  y  $\tilde{D} = -G^T$ .

#### 7.2.2. Ecuaciones constitutivas.

Ya que las ecuaciones (7.1-7.5) sólo contienen información topológica, los errores de discretización provienen de las ecuaciones constitutivas discretas del material.

Mientras las ecuaciones de campo directamente definidas en la FF describen exactamente las leyes de campo físicas, las ecuaciones constitutivas describen las leyes físicas de una forma aproximada [TK06], [ST05].

La aproximación de la formulación, se produce cuando se relacionan las magnitudes de línea con las magnitudes de superficie en los mallados K y  $\tilde{K}$  respectivamente. Estas variables están relacionadas en los diagramas de Tonti y se muestran en (7.6) y (7.7).

$$\tilde{F}_m = \mathcal{M}_{\nu} \phi \tag{7.6}$$

$$\tilde{I} = \mathcal{M}_{\sigma} U \tag{7.7}$$

En las matrices  $\mathcal{M}$  se representan las propiedades físicas y la métrica del medio, y son un operador de transferencia de magnitudes entre K y  $\tilde{K}$  –operador Hodge– [Bos98].

El método de la celda no dice como se construye esta matriz. De hecho, la forma de construirla no es única, resultando diferentes esquemas numéricos [Mar04, DST08].

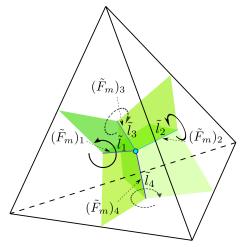
El modelado con la FF, se ve influenciado por la generación de los mallados primal y dual, y por las ecuaciones constitutivas del material, que incluyen una aproximación media de las propiedades del material en el proceso.

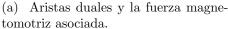
El primer tipo de mallado que se utilizó fué un mallado dual ortogonal estructurado. Estos ofrecían un gran rendimiento, además de simplificar la generación de dichos mallados.

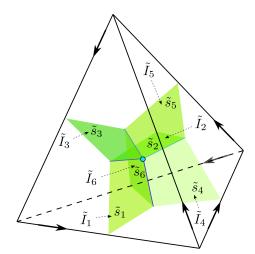
La construcción de un mallado dual ortogonal no estructurado del tipo Dalaunay-Voronoi, es más complejo de obtener, y su existencia no puede ser probada para todos los tipos de dominio  $\Omega$ .

Los mallados ortogonales ofrecen un alto nivel de convergencia con respecto a los no ortogonales, sin embargo los mallados ortogonales se encuentran con dificultades cuando los contornos del modelo son curvos.

Todo ello, hace más útil el uso de mallados no estructurados que usen división baricéntrica, lo que hace más fácil la generación del mallado y garantiza la existencia para cualquier tipo de dominio (Fig. 7.1b).







(b) Superficies duales y la corriente asociada.

Figura 7.3: Magnitudes involucradas en las ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones constitutivas utilizadas en (7.6) y (7.7), son construidas en base a mallados no estructurados con división baricéntrica.

Las ecuaciones (7.8) y (7.9), son ensambladas desde una celda de referencia dada - tetraedro de referencia-, donde las aristas duales y las superficies duales  $\tilde{\vec{l}}_i$ ,  $\tilde{\vec{s}}_i$ , representan los vectores asociados a las superficies del primal y las aristas del primal  $\mathbf{s}_i, \mathbf{l}_i$ , respectivamente (Fig. 7.3a y 7.3b).

$$\left[\tilde{F}_{m_i}\right] = \frac{\nu}{\nu} \left[\tilde{\vec{\mathbf{l}}}_i \tilde{\vec{\mathbf{l}}}_j\right] \left[\Phi_i\right] , \forall i, j 1...,4$$

$$(7.8)$$

$$\left[\tilde{I}_{i}\right] = \frac{\sigma}{v} \left[\tilde{\vec{\mathbf{s}}}_{i}\tilde{\vec{\mathbf{s}}}_{j}\right] \left[U_{i}\right], \forall i, j \ 1...,6$$

$$(7.9)$$

En estas ecuaciones,  $\nu$  y  $\sigma$  son las propiedades físicas magnéticas y eléctricas respectivamente, y v representa el volumen de cada tetraedro [DST06].

#### 7.2.3. Sistema global de ecuaciones.

Para resolver el problema, se ha elegido la aproximación basada en el potencial magnético y el potencial eléctrico -formulación  $\{a, (a, V)\}$ -, que son cantidades auxiliares que simplifican el problema en relación al número de incógnitas, y que permiten acoplar las ecuaciones circuitales y las ecuaciones de campo fácilmente [DST06].

En esta formulación  $a = \int \vec{A} d\mathbf{L}$ , y  $\vec{A}$  es el vector potencial magnético definido sobre las aristas  $\mathbf{l}_i$  del mallado primal, siendo V el potencial escalar eléctrico asociado a los nudos  $\mathbf{p}_i$  del mallado primal [TK04, ST05, CST07].

El planteamiento del problema es el siguiente: conocidas las fuentes de corriente en  $\Omega_s$ , las condiciones de contorno en  $\Gamma_C$  y las condiciones iniciales en todo  $\Omega_D$ , la solución del problema dá cantidades globales  $\{a, V\}$  en todo el dominio  $\Omega_D$ .

Para hacer esto, comenzamos con la definición de  $\Phi = C a$ , lo que implica que el teorema de Gauss se cumple automáticamente. Para obtener un sistema de ecuaciones simétrico hacemos  $V = j\omega\chi$ , donde  $\chi$  es el potencial magnético asociado a los nudos del mallado primal [ST05, CT06], entonces:

$$U = -j\omega \, a - j\omega G \, \chi \tag{7.10}$$

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

También la ley de inducción de Faraday se cumple puesto que CG = 0 siendo  $G_{l \times n}$  la matriz de incidencia entre pares  $(\mathbf{l}_i, \mathbf{n}_i)$ .

Sustituyendo (7.8) en (7.4), tenemos  $\forall \mathbf{l} \in \Omega_s \cup \Omega_a$  la ecuación (7.11), donde el vector  $\tilde{I}$  está formado por los vectores obtenidos con las densidades de corriente asociadas a las fuentes que son conocidas  $\Omega_s$ . Este vector, tiene que satisfacer la condición de continuidad  $\tilde{D}\tilde{I} = 0$  en el mallado dual  $\tilde{K}$ . El método propuesto, es el método de las corrientes de bucle que será explicado detalladamente en la sección 7.3.2.

$$\tilde{C} \,\mathcal{M}_{\nu} C \,a = \tilde{I} \tag{7.11}$$

Si se sustituye en (7.4) la ecuación (7.9) y la ecuación (7.10), se cumple  $\forall \mathbf{l} \in \Omega_c$  la siguiente ecuación (7.12):

$$\left(\tilde{C}\,\mathcal{M}_{\nu}C + j\omega\,\mathcal{M}_{\sigma}\right)a + \mathcal{M}_{\sigma}j\omega G\,\chi = 0 \tag{7.12}$$

Finalmente, la ecuación de continuidad de las corrientes inducidas  $\forall \mathbf{n} \in \Omega_c$ , son obtenidas sustituyendo la ecuación (7.5) en la ecuación (7.9) y a su vez en ésta, la ecuación (7.10), para obtener (7.13):

$$\tilde{D} \mathcal{M}_{\sigma} \left( -j\omega a - j\omega G\chi \right) = 0 \tag{7.13}$$

Llevando a cabo el ensamblado de las ecuaciones (7.11), (7.12) y (7.13) en una matriz global T y todas las incógnitas en el vector  $X = [a, \chi]$  el segundo miembro es un vector W donde las corrientes están en  $\Omega_s$ . El sistema de ecuaciones a resolver es el correspondiente a la ecuación TX = W, donde T es la matriz:

$$\begin{bmatrix} [\Theta_s]_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_s} & 0_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_a} & 0_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_c} & 0_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{p}_c} \\ 0_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_s} & [\Theta_a]_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_a} & 0_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_c} & 0_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{p}_c} \\ 0_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_s} & 0_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_a} & [\Theta_c]_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c} & [\frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c} G_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{p}_c}]_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{p}_c} \\ 0_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{l}_s} & 0_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{l}_a} & [\frac{d}{dt} G_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{l}_c}^T (\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c}]_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{l}_c} & [\frac{d}{dt} G_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{l}_c}^T (\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c} G_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{p}_c}]_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{p}_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{1}} \\ a_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{1}} \\ a_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{1}} \\ \chi_{\mathbf{p}_c \times \mathbf{1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_s \times 1} \\ 0_{\mathbf{l}_a \times 1} \\ 0_{\mathbf{l}_c \times 1} \\ 0_{\mathbf{p}_c \times 1} \end{bmatrix}$$
 (7.14)

donde los términos  $\Theta$  se definen por simplificación como

$$[\Theta_s]_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_s} = \left[ C_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{s}_s}^T (\mathcal{M}_{\nu})_{\mathbf{s}_s \times \mathbf{s}_s} C_{\mathbf{s}_s \times \mathbf{l}_s} \right]_{\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_s}$$
$$[\Theta_a]_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_a} = \left[ C_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{s}_a}^T (\mathcal{M}_{\nu})_{\mathbf{s}_a \times \mathbf{s}_a} C_{\mathbf{s}_a \times \mathbf{l}_a} \right]_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_a}$$
$$[\Theta_c]_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{l}_c} = \left[ C_{\mathbf{l}_c \times \mathbf{s}_c}^T (\mathcal{M}_{\nu})_{\mathbf{s}_c \times \mathbf{s}_c} C_{\mathbf{s}_c \times \mathbf{l}_c} \right]_{\mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_a}$$

Nótese que (7.14), está formada diferenciando los elementos involucrados en cada subdominio  $\Omega_s$ ,  $\Omega_a$ ,  $\Omega_c$ . Sin embargo, por propósitos computacionales esta expresión se reduce a (7.15), en donde están contenidos todos los elementos del dominio  $\Omega_D$  sin diferenciarlos,

$$\begin{bmatrix} C_{\mathbf{l}\times\mathbf{s}}^{T}(\mathcal{M}_{\nu})_{\mathbf{s}\times\mathbf{s}}C_{\mathbf{s}\times\mathbf{l}} + \frac{d}{dt}(\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}\times\mathbf{l}} & \frac{d}{dt}(\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}\times\mathbf{l}}G_{\mathbf{l}\times\mathbf{p}} \\ -\frac{d}{dt}G_{\mathbf{p}\times\mathbf{l}}^{T}(\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}\times\mathbf{l}} & -\frac{d}{dt}G_{\mathbf{p}\times\mathbf{l}}^{T}(\mathcal{M}_{\sigma})_{\mathbf{l}\times\mathbf{l}}G_{\mathbf{l}\times\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mathbf{l}\times\mathbf{1}} \\ \chi_{\mathbf{p}\times\mathbf{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}\times\mathbf{1}} \\ 0_{\mathbf{p}\times\mathbf{1}} \end{bmatrix}$$
(7.15)

donde  $\mathcal{M}_{\nu}$ , es la matriz cuadrada de reluctancias con dimensión  $dim(\mathcal{M}_{\nu}) = \mathbf{s}_{i}$ , siendo  $\mathbf{s}_{i}$  el número de caras del primal en el dominio  $\Omega_{D}$ , y  $\mathcal{M}_{\sigma}$  es la matriz cuadrada de conductancia con dimensión  $dim(\mathcal{M}_{\sigma}) = \mathbf{l}_{i}$ , siendo  $\mathbf{l}_{i}$  el número de aristas del primal en el dominio  $\Omega_{D}$  [CT06].

En el segundo miembro de la ecuación (7.15) están las corrientes de rama. El rango de la matriz (7.15), es el número de bucles fundamentales de todo el dominio  $\Omega_D$ , más el número de nudos menos uno del dominio conductor  $\Omega_c$ , es decir,

$$rango = (n\'{u}mero\ de\ bucles)_{\in\ \Omega_D} + (nudos - 1)_{\in\ \Omega_c}$$
 (7.16)

así que,  $(\mathbf{l} + \mathbf{p}) - rango$ , es el número de variables libres.

#### 7.2.4. Ley de continuidad en el segundo miembro.

Para propósitos computacionales, el dimensionamiento y la forma de las expresiones involucradas se reflejan en el sistema de ecuaciones (7.15). En el segundo miembro están las corrientes de rama.

En estas ramas que pertenecen al subdomino fuente, están las corrientes iniciales. Para asegurar la continuidad se ha aplicado un método puramente circuital. Este método está basado en el algoritmo de Welsh (WA) [KPSB+97], también conocido como el método del árbol-coárbol, que proporcionan las matrices B y Q fundamentales de bucle y corte, respectivamente.

El mallado es tratado como un grafo lineal orientado, como se muentra en la figura 7.4.

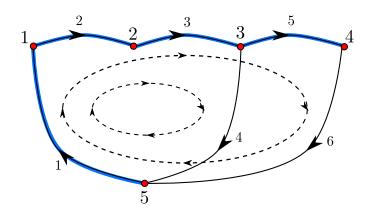


Figura 7.4: Dibujo de un grafo lineal.

Previamente, se ha definido una orientación para los nudos, como fuentes (+) y como sumideros (-). El método comienza con la creación de una matriz A que contiene todas las incidencias de las aristas. El conjunto de nudos están en las filas y el conjunto de aristas en las columnas. Nótese que  $A = -G^T$  en la formulación finita.

La entrada en un nudo es considerado con un signo negativo y la salida con un signo positivo. Las no incidencias son cero. Esta matriz se muestra a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Uno de los nudos es considerado como tierra, y su correspondiente fila es cero. El rango de la matriz A es  $(\mathbf{p} - 1)$ .

El método consiste en recorrer la matriz de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Se comienza en el nudo 1 en las filas, y en la rama 1 en las columnas.

La primera rama siempre pertenece al árbol. Con adiciones y sustracciones entre filas, se hace cero el resto de esa columna. Se continúa con la siguiente columna, se observa cualquier nudo que no haya sido considerado cuyo valor no sea cero. Y así hasta que no haya elementos previamente considerados, distintos de cero, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = > \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = > \dots$$

Por último, el procedimiento requiere un reordenamiento de la matriz resultante.

Primero se sitúan las ramas del árbol y a continuación las que pertenecen al coárbol. La matriz final es,

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz ordenada resultante se puede dividir en dos partes,  $[A_1|A_2]$ .

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

$$[A_1|A_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $A_1$ , está formada por las ramas del árbol. La matriz  $A_2$ , corresponde a las ramas del coárbol.

El algoritmo de Welsh tiene la ventaja de facilitar además la matriz fundamental de cortes y la matriz fundamental de bucles.

Con  $A_1$  y  $A_2$  puede ser determinada la matriz fundamental de cortes, que es obtenida como

$$Q_f = \left[ \begin{array}{cc} 1 & A_1^T \cdot A_2 \end{array} \right] \tag{7.17}$$

Si se define  $F = [A_1^T \cdot A_2]$ , entonces la matriz fundamental de bucles queda definida como

$$B = [-F^T \ 1] \tag{7.18}$$

En el ejemplo, la matriz B es la mostrada a continuación,

$$B = \left[ \begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El número de bucles fundamentales se define como

$$B = ramas - (nudos - 1)$$

La matriz B es usada en la forma

$$i = B^T I_c (7.19)$$

con el fin de obtener las corrientes de las ramas, usando el WA con las corrientes del coárbol, y hacer cumplir la ley de continuidad. Esto es porque la ley de corrientes de Kirchhoff –KCL– se puede escribir como Qi = 0, que cumple con la identidad  $QB^T \equiv 0$ .

#### 7.3. Resultados y discusión.

#### 7.3.1. Resumen.

El problema que se va a resolver con el CM, es un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D con simetría axial. Al tener simetría axial, el problema nos permite comparar y validar resultados con cálculos hechos en 2D, obtenidos mediante otros programas usando el FEM, tales como el GETDP [DGGL99, Geu08] y FEMM [Mee12].

El mallador utilizado es el GMSH, que además posee la capacidad de post procesado y visualización [GR09].

En la figura 7.1b, se observa un ejemplo de una sección del dominio completo  $\Omega_D$ . El sistema global de ecuaciones, las condiciones de contorno y las condiciones de unicidad así como la asignación de las propiedades físicas, se han implementado en un programa desarrollado en Scilab [Ent12].

El sistema de ecuaciones es de naturaleza *sparse* y se ha resuelto con un programa desarrollado con el paquete numérico PETSc [MBC<sup>+</sup>07]. El algoritmo de Welsh, el cálculo de las matrices de incidencia y otros programas, han sido implementados y programados en el lenguaje de programación C++.

El primer subdominio físico es  $\Omega_s$  (Fig. 7.1a). En este subdominio, son impuestas las excitaciones de corriente lineales, superficiales y volumétricas. Esta región, es un volúmen obtenido por extrusión de una superficie rectangular de  $100 \times 3 \ mm$ , alrededor de un eje de simetría. El punto más cercano del rectángulo al eje de simetría es de 6 mm, en esta área, se conoce la densidad de corriente como dato inicial del problema.

El segundo subdominio es  $\Omega_c$ , que es la zona donde se encuentran las corrientes inducidas. Este es un cilindro con un radio de  $15 \, mm$  y una altura de  $4 \, mm$ , centrado sobre el eje de simetría de todo el dominio, separado del subdominio  $\Omega_s$  por una a distancia de  $0,5 \, mm$ . El material que lo forma es cobre tratado, con una conductividad volumétrica de  $\sigma = 5,8e7$  (s/m).

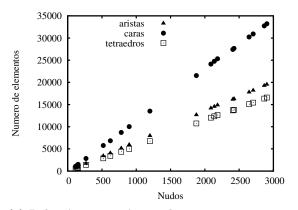
El tercer subdominio considerado es  $\Omega_a$  que corresponde al aire, véase la figura 7.1a.

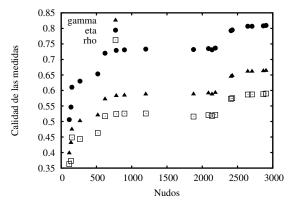
La densidad de corriente  $\vec{J} \in \Omega_s$ , dependiendo de su naturaleza, tiene un valor de 600(A),  $1e4~(^A/m)$  y  $1e6~(^A/m^2)$ , para una  $\vec{J_l}$  lineal,  $\vec{J_s}$  superficial y  $\vec{J_v}$  volumétrica, respectivamente. La permeabilidad magnética en todo el dominio  $\Omega_D$  es  $\mu = 4e - 7 \pi (^{T} A/m)$ .

El número de experimentos llevados a cabo con los tres tipos de excitación han sido 19. Cada uno corresponde a un número de elementos básicos formados por nudos, aristas, caras y volúmenes.

La figura 7.5a, representa el número de nudos -en el eje X- y las aristas, caras y volúmenes -en el eje Y-, correspondientes a cada uno de los experimentos numéricos.

Hay una cierta relación lineal cuando los números de nudos se incrementa. Igualmente, se representan tres parámetros adimensionales que miden la calidad del mallado para cada uno de los experimentos.  $\gamma = \sim \frac{radio\_inscrito}{radio\_circunscrito}$ ,  $\eta = \sim \frac{volumen^{2/3}}{\sum longitud\_arista^2}$ ,  $\rho = \sim \frac{min\_longitud\_arista}{max\_longitud\_arista}$  ver la figura 7.5b [Knu01].





- (a) Relación entre número de aristas, caras y tetraedros con el número de nudos.
- (b) Medida de la calidad del mallado con respecto al número de nudos.

Figura 7.5: Calidad del mallado y relación entre elementos obtenidos en los 19 experimentos numéricos.

#### 7.3.2. Ley de Continuidad. Resultados.

En la clasificación presentada por [Ton02], las variables fuente son asociadas al mallado dual. Las corrientes, tanto del árbol como del coárbol, se encuentran en las superficies del mallado dual. Por dualidad, las corrientes son asignadas a las aristas del primal.

En la figura 7.7, se muestran donde están situadas la densidades de corriente y como se obtienen las corrientes en el mallado dual.

Al vector normal  $\vec{n}_i$  a cada arista dual, se le asigna la longitud de dicha arista y ésta se opera mediante el producto escalar, con el vector densidad de corriente superficial,

$$\tilde{I}_n = \left(\tilde{\vec{n}}_i \tilde{\mathbf{I}}_i\right) \cdot \vec{J}_{\mathbf{s}} \tag{7.20}$$

el resultado, es asignado a su correspondiente arista primal.

La orientación inicial del conjunto de aristas, determinará el signo del valor de estas corrientes. En cada triángulo, se ha obtenido tres valores de corriente asociadas con cada arista.

En el caso bidimensional, las corrientes del subdominio fuente son asignadas a las aristas duales, y en el caso tridimensional, a las caras del mallado dual.

En esta sección se considerará el segundo miembro de la ecuación (7.11). Aquí están todas las corrientes asignadas a las aristas involucradas en todo el dominio  $\Omega_D$ , como se muestra en la figura 7.1a. En el subdominio aire, no hay ninguna densidad de corriente con lo que el valor de las corrientes asignadas a las aristas del mallado primal es cero.

En el subdominio fuente  $\Omega_s$  se impone una densidad de corriente, que en el caso bidimensional corresponde con una densidad de corriente superficial  $|\vec{J}_{\mathbf{s}}| = 1e4(A/m)$ .

Finalmente, en la región del subdominio conductor  $\Omega_c$  se inducen corrientes debido a las corrientes existentes en el subdominio fuente.

La ley de continuidad (7.5), debe que ser satisfecha en todos los dominios donde fluyen corrientes. Esto es, en el subdominio fuente  $\Omega_s$  donde éstas son generadas y el subdominio conductor  $\Omega_c$ , donde éstas son inducidas.

#### 7.3.2.1. Problema en 2D.

Un problema bidimensional, es el representado por la superficie de la tapa superior del subdominio fuente  $\Omega_s$ , como puede verse en la figura 7.6a.

Para este problema, se ha seleccionado un valor de densidad de corriente superficial que es tangencial en todos los puntos de la circunferencia.

La densidad de corriente, es continua y uniforme en toda la superficie (Fig. 7.6a).

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

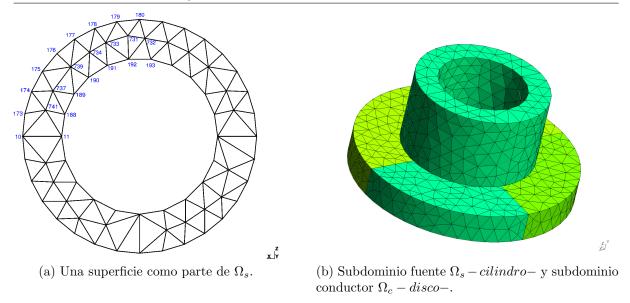


Figura 7.6: Superficie del subdominio fuente, donde se aplica una  $\vec{J}_{\mathbf{s}}$ .

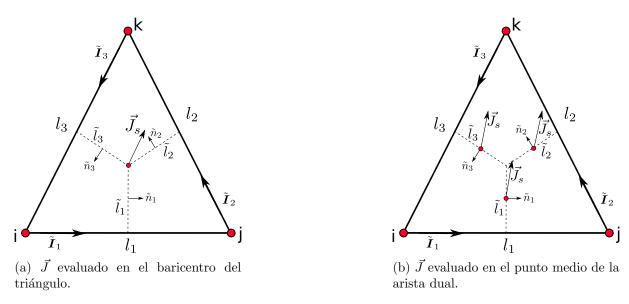


Figura 7.7: Evaluación superficial 2D de  $\vec{J}_{\rm s}.$ 

La densidad de corriente, es evaluada en los baricentros de los triángulos en (Fig. 7.7a) y en los puntos medios de las aristas duales (Fig. 7.7b). Los valores de las corrientes resultantes, son la asignación de los valores de la densidad de corriente en su correspondiente

arista primal (Fig. 7.7) (7.20).

La orientación inicial del conjunto de aristas, determinará el signo del valor de estas corrientes.

En cada triángulo, se han obtenido tres valores de corriente asociados a cada arista.

Por lo tanto, la complejidad de los cálculos sobre en el mallado dual, se ha reducido mediante una transformación geométrica consistente en la asignación de los valores de corriente del mallado dual, sobre el mallado primal.

	Balance de Corriente Neta en los cortes (A)						
Arista	Corte C1	Arista	Corte C2	Arista	Corte C3	Arista	Corte C4
[24, 79]	8.40131	[10, 79]	8.40131	[55, 10]	9.29168	[55, 56]	9.29169
[79, 25]	9.5194	[10, 80]	9.51939	[11, 55]	9.77948	[56, 60]	9.77948
[80, 25]	11.1032	[80, 11]	11.1032	[60, 11]	10.482	[60, 61]	10.482
	29.02391		29.0239		29.55316		29.55317

Tabla 7.1: Evaluación en el Baricentro, sin aplicar el WA.

	Balance de Corriente Neta en los cortes (A)						
Arista	Corte C1	Arista	Corte C2	Arista	Corte C3	Arista	Corte C4
[24, 79]	8.85532	[10, 79]	8.85531	[55, 10]	9.49136	[55, 56]	9.49137
[79, 25]	8.64775	[10, 80]	8.64774	[11, 55]	9.39905	[56, 60]	9.39904
[80, 25]	10.2893	[80, 11]	10.2893	[11, 60]	10.1201	[60, 61]	10.1201
	27.79237		27.79235		29.01051		29.01051

Tabla 7.2: Evaluación en el Punto Medio de las aristas duales, sin aplicar el WA.

La evaluación se ha hecho con dos densidades de mallado del dominio completo. Los balances de corriente, se han evaluado en cuatro zonas de corte (Fig. 7.8). Algunas de las corrientes se muestran en la figura 7.8.

El objetivo es que se cumpla la ley de continuidad (7.5), para todo el subdominio en consideración. El valor dado para la  $|\vec{J_s}|$  es 1e4 ( $^4/_m$ ) y el ancho de la región es 3 mm. Con lo que corresponde para cada corte  $C_{i;\ i=1,2,3,4}$ , una corriente total de 30 A. El WA se ha utilizado para obtener el árbol, el coárbol, la matriz fundamental de cortes y la matriz fundamental de bucles. Las corrientes pertenecientes al coárbol son impuestas.

La matriz fundamental de bucles se ha utilizado en la forma (7.19), y se han obtenido las corrientes de árbol, de forma que la continuidad (7.5) se ha garantizado.

Las corrientes, están en el segundo miembro del sistema de ecuaciones (7.15).

La primera experiencia, se corresponde con un mallado de baja densidad para todo el dominio  $\Omega_D$ , correspondientes a un conjunto de elementos de  $\mathbf{P} = 167$ ,  $\mathbf{L} = 1005$ ,  $\mathbf{S} = 1650$ ,  $\mathbf{V} = 811$ , definidos como nudos, aristas, caras y volúmenes, respectivamente.

La sección del subdominio fuente  $\Omega_s$ , donde se hace la evaluación, tiene un conjunto de elementos de  $\mathbf{P} = 20$ ,  $\mathbf{L} = 40$ ,  $\mathbf{S} = 20$ , definidos como nudos, aristas, y caras, respectivamente. Las superficies son triángulos, que son los elementos discretos.

La evaluación de los datos, se hacen en cuatro cortes sobre la superficie analizada (Fig. 7.8). Los valores obtenidos, se corresponden para una densidad de corriente situada en el baricentro de los triángulos y para una situada en el punto medio de las aristas duales, con una pequeña variación angular.

Esto es porque en cada punto, la densidad de corriente es tangente a la sección circular (Fig. 7.6a). Entre las aristas del primal y las aristas del dual, existe una correspondencia unívoca.

Los resultados de la tabla 7.1, muestran la evaluación con la densidad de corriente situada en el baricentro y la tabla 7.2, muestra la evaluación en el punto medio, ambos sin aplicar el WA (Fig. 7.8).

El error que se produce, es con respecto al valor dado de corriente total de 30 A. Los resultados de la tabla 7.3, muestran la evaluación en el baricentro y en la tabla 7.4 muestra la evaluación en el punto medio de los triángulos, aplicando el WA.

El error obtenido en el balance hecho en el corte C1 en el baricentro es 3,253 % y en el punto medio es 7,358 %, sin aplicar el WA. El error obtenido en el balance hecho en el corte C2 en el baricentro es 3,253 % y en el punto medio es 7,358 %, sin aplicar el WA. El error obtenido en el balance hecho en el corte C3 en el baricentro es 2,489 % y en el punto medio es 3,298 %, sin aplicar el WA. El error obtenido en el balance hecho en el corte C4 en el baricentro es 2,489 % y en el punto medio es de 3,298 %, sin aplicar el WA. Los valores obtenidos en el baricentro son los los más cercanos al valor dado de la corriente de 30 A. Obviamente, el mejor valor es el que se corresponde con el menor error porcentual, que a su vez es el más cercano a cumplir la ley de continuidad (7.5).

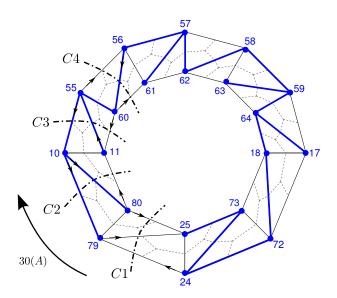


Figura 7.8: Sección del subdominio fuente  $\Omega_s \subset \Omega_D$ . Cortes, Coárbol y Árbol(en negrita).

	Balance de Corriente Neta en los Cortes (A)						
Arista	Corte C1	Arista	Corte C2	arista	Corte C3	arista	Corte C4
[24, 79]	8.40131	[10, 79]	7.93558	[55, 10]	6.49501	[55, 56]	9.29169
[79, 25]	9.5194	[10, 80]	9.98513	[11, 55]	12.0469	[56, 60]	9.25022
[80, 25]	11.1032	[80, 11]	11.1032	[11, 60]	10.482	[60, 61]	10.482
	29.02391		29.02391		29.02391		29.02391

Tabla 7.3: Evaluación en el Baricentro, aplicando el WA.

	Balance de Corriente Neta en los Cortes (A)						
Arista	Corte C1	Arista	Corte C2	Arista	Corte C3	Arista	Corte C4
[24, 79]	8.85532	[10, 79]	8.83262	[55, 10]	5.67197	[55, 56]	9.49137
[79, 25]	8.64775	[10, 80]	8.67045	[11, 55]	12.0003	[56, 60]	8.1809
[80, 25]	10.2893	[80, 11]	10.2893	[11, 60]	10.1201	[60, 61]	10.1201
	27.79237		27.79235		27.79237		27.79237

Tabla 7.4: Evaluación en el Punto Medio de las aristas duales, aplicando el WA.

En una segunda experiencia, la evaluación se hace con un mallado de mayor densidad, como puede verse en la figura 7.9. La evaluación de los datos, es analizada en dos cortes

y en dos areas de la superficie analizada (Fig. 7.9a y Fig. 7.9b).

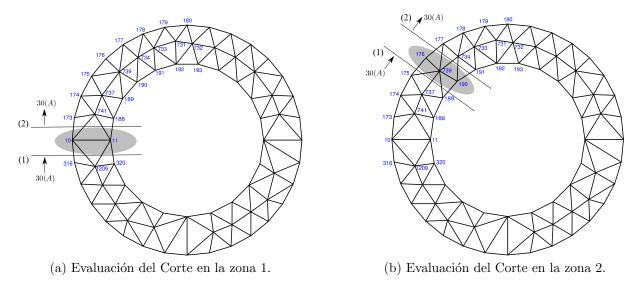


Figura 7.9: Zonas de Cortes donde se ha hecho el balance.

La experiencia llevada a cabo, se corresponde para un mallado del domino completo  $\Omega_D$ , con un conjunto de elementos de  $\mathbf{P}=2904$ ,  $\mathbf{L}=19545$ ,  $\mathbf{S}=33230$ ,  $\mathbf{V}=16588$ , que son nudos, aristas, caras y volúmenes, respectivamente. La sección del subdominio fuente  $\Omega_s$ , donde se hace la evaluación, tiene un conjunto de elementos de  $\mathbf{P}=75$ ,  $\mathbf{L}=171$ ,  $\mathbf{S}=96$ , que son nudos, aristas y caras, respectivamente.

El árbol y el coárbol son un grafo lineal, como se puede observar en la figura 7.10. Los resultados de las tablas 7.5 y 7.6, muestran las diferencias existentes entre las corrientes entrantes y las corrientes salientes en dos zonas (Fig. 7.9). De igual forma, la densidad de corriente se ha evaluado en el baricentro y en el punto medio de las aristas duales con una pequeña diferencia angular. Los resultados, se corresponden con los valores de corriente directamente asignados sobre cada arista primal, es decir, sin aplicar el WA.

Con respecto al valor de corriente aplicado 30 A, el error es expresado porcentualmente. De igual forma, se indica el balance neto de las corrientes y su error porcentual.

Se observa como las corrientes en los cortes, no están completamente balanceadas. Esto es porque las corrientes asignadas sobre las aristas no tienen suficiente precisión, así que el balance de corrientes en cada nudo no cumple la ley de Kirchhoff para las corrientes.

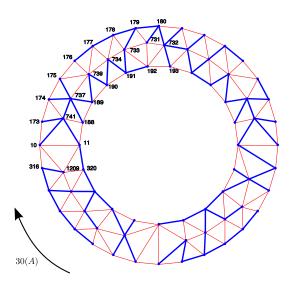


Figura 7.10: Árbol(negrita) y coárbol de la superficie  $\in \Omega_s$ .

Balance en el	Balance en el Corte (zona 1) sin aplicar el WA. (Baricentro)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J_s}$ entrante (1) $\vec{J_s}$ saliente (2)			
I(A)	30.30985	30.18185			
Error (%)	1.032833	0.606166			
—Balance—	0.128 (A) = 0.426667 %				

(a) Corrientes evaluadas situando la  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en el Baricentro de los triángulos en la zona 1

Balance en el Corte (zona 1) sin aplicar el WA. (Punto Medio)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ saliente (2)		
I(A)	30.31422	30.1858		
Error (%)	1.0474	0.61933		
—Balance—	0.12842 (A) = 0.42807 %			

<sup>(</sup>b) Corrientes evaluadas situando el  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en el Punto Medio de las aristas duales en la zona 1

Tabla 7.5:  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  evaluada en el Baricentro y en el Punto Medio en zona 1, sin aplicar el WA.

Los balances con la evaluación de la densidad en el baricentro, dá en la zona 1 un error del  $0.42\,\%$  y con la evaluación en el punto medio, dá un error del mismo orden.

Los balances con la evaluación de la densidad en el baricentro, dá en la zona 2 un error

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

Balance en el	Balance en el Corte (zona 2) sin aplicar el WA. (Baricentro)				
	$\vec{J_s}$ entrante (1) $\vec{J_s}$ saliente (2)				
I(A)	30.16437	30.20365			
Error (%)	0.5479	0.678833			
—Balance—	-0.0392 (A) = -0.130933 %				

(a) Corrientes evaluadas situando el  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en el Baricentro de los triángulos en la zona 2.

Balance en el	Balance en el Corte (zona 2) sin aplicar el WA. (Punto Medio)					
	$\vec{J_{\rm s}}$ entrante (1) $\vec{J_{\rm s}}$ saliente (2)					
I(A)	30.18313	30.18171				
Error (%)	0.610433	0.6057				
—Balance—	0.00142(A) = 0.004733%					

<sup>(</sup>b) Corrientes evaluadas situando el  $\vec{J_s}$  en los Puntos Medios de las aristas duales en la zona 2.

Tabla 7.6:  $\vec{J_s}$  evaluada en el Baricentro y en el Punto Medio en zona 2, sin aplicar el WA.

del 0,13 % y con la evaluación en el punto medio, dá un error del 0,004 %.

Observando los resultados y las zonas de evaluación, se determina que la forma y la densidad de los mallados influyen en los valores de los balances netos. Cuando más homogéneo y denso sea el mallado, los balances son más equilibrados y se tiene más precisión.

En las tablas 7.7 y 7.8, la divergencia cero se asegura mediante la aplicación del WA. Esto significa que los balances dan cero. Prácticamente, los valores de las corrientes entrantes y salientes están balanceadas. Aplicando el WA, en las tablas 7.7 y 7.8 se puede observar que una evaluación en el baricentro en el corte zona 1 dá un error prácticamente cero.

Para la evaluación en el punto medio se tiene el mismo valor, incluso el valor es menor. Esto se produce porque la divergencia cero se está cumpliendo.

De cualquier forma, el hecho es que la ley de continuidad se está cumpliendo y ello es posible por la aplicación del WA. La ley de Kirchhoff para las corrientes se cumple en todos los nudos. Y la divergencia cero se garantiza para todo el dominio.

Por último, se realiza otro experimento. Éste se muestra en la figura 7.11, donde se

obtiene un balance nodal de acuerdo a la evaluación de la densidad de corriente  $\vec{J_{\rm s}}.$ 

Los valores de las corrientes corresponden a los valores asignados directamente a las aristas del primal, sin aplicar el WA. Estas distribuciones son normalizadas.

La figura 7.11a, muestra el balance nodal de las corrientes superficiales, para un mallado en 2D con 1827 nudos. La ley de Kirchhoff para las corrientes, se cumple mejor con los valores de corriente obtenidos con la evaluación de  $\vec{J_s}$  en el punto medio de las aristas duales

La media obtenida tiene un valor de 1,597e - 9(A) con la evaluación de  $\vec{J_s}$  en el baricentro, y un valor de -2,265e - 9(A) con la evaluación en los puntos medios.

La desviación estándar tiene un valor de  $4{,}590e - 5(A)$  evaluada la  $\vec{J_s}$  en el baricentro, y un valor de  $1{,}460e - 5(A)$  en los puntos medios.

La figura 7.11b, muestra el balance nodal de las corrientes volumétricas, para un mallado en 3D con 2240 nudos. La ley de Kirchhoff para las corrientes, se cumple mejor con los valores de corriente obtenidos de la evaluación de  $\vec{J}_{\mathbf{v}}$  en el baricentro de los tetraedros.

La media obtenida tiene un valor de 1,597e-9(A) evaluado en el baricentro y un valor de -2,265e-9(A) en los puntos medios. La desviación estándar tiene un valor de 4,590e-5(A) evaluada la  $\vec{J_v}$  en el baricentro y un valor de 1,460e-5(A) en los puntos medios.

#### 7.3.2.2. Problema en 3D.

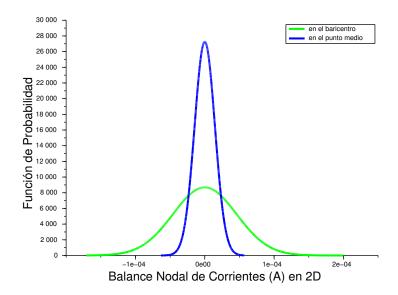
Un problema tridimensional, es el representado por el volumen del subdominio fuente  $\Omega_s$  o por el subdominio conductor  $\Omega_c$ , como se puede ver en la figura 7.6b.

Las corrientes están asociadas a las superficies duales en cada tetraedro, que es el elemento discreto.

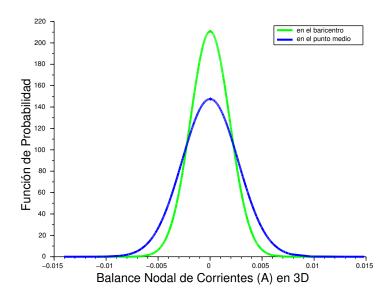
En este caso, la densidad de corriente será evaluada en el baricentro del tetraedro (Fig. 7.12a) y en los puntos medios de las superficies duales (Fig. 7.12b).

El vector normal con un módulo igual al área, opera mediante el producto escalar con el vector densidad de corriente volumétrica,

$$\tilde{\mathbf{I}}_n = \left(\tilde{\vec{n}}_i \tilde{\mathbf{s}}_i\right) \cdot \vec{J}_{\mathbf{v}} \tag{7.21}$$



(a) Balance nodal de la densidad de corriente superficial, con 1827 nudos.



(b) Balance nodal de la densidad de corriente volumérica, con  $2240~\mathrm{nu-dos.}$ 

Figura 7.11: Distribución del Balance Nodal de Corrientes.

Balance en el Corte (zona 1) aplicado el WA. (Baricentro)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ saliente (2)		
I(A)	30.25017	30.25016		
Error (%)	0.8339	0.833866		
—Balance—	0.000034 %			

(a) Corrientes evaluadas con la  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en el Baricentro de los triángulos en zona 1.

Balance en el Corte (zona 1) aplicado el WA. (Punto Medio)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J_{\rm s}}$ saliente (2)		
I(A)	30.31164	30.31159		
Error (%)	0.010388	0.01038633		
—Balance—	0.00000166 %			

<sup>(</sup>b) Corrientes evaluadas con la  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en los Puntos Medios de las aristas duales en zona 1.

Tabla 7.7:  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  evaluada en el Baricentro y en los Puntos Medios en zona 1, o sea, con divergencia cero.

El resultado es la asignación de los valores obtenidos de corriente, sobre su correspondiente arista primal.

La orientación inicial dada a las superficies, determinará el signo de los valores de cada una de estas corrientes asignadas.

En cada tetraedro, se obtienen seis valores de corriente asociadas a sus respectivas aristas.

También en este caso, se reduce un cálculo relativamente complejo sobre el mallado dual, con una asignación sobre el mallado primal.

# 7.3.3. Resultados del campo magnético y de las corrientes inducidas para excitaciones de corriente lineal, superficial y volumétrica.

El primer conjunto de experimentos, consiste en aplicar un tipo de fuente de corriente lineal de 600 A, con una frecuencia de 50 Hz. Una parte de la corriente, se muestra en la

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

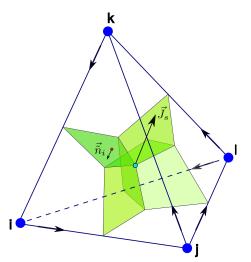
Balance en el Corte (zona 2) aplicado el WA. (Baricentro)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J_{\mathbf{s}}}$ saliente (2)		
I(A)	30.25017	30.25017		
Error (%)	0.008339	0.008339		
—Balance—		0 %		

(a) Corrientes evaluadas con la  $\vec{J_{\mathbf{s}}}$  en los Baricentros de los triángulos en zona 2.

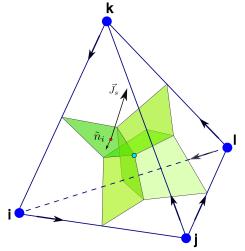
Balance en el Corte (zona 2) aplicando el WA. (Punto Medio)				
	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ entrante (1)	$\vec{J}_{\mathbf{s}}$ saliente (2)		
I(A)	30.31164	30.31164		
Error (%)	0.010388	0.010388		
—Balance—	0 %			

(b) Corrientes evaluadas con la  $\vec{J_s}$  en los Puntos Medios de las aristas duales en zona 2.

Tabla 7.8:  $\vec{J_s}$  evaluadas en el Baricentro y en los Puntos Medios en zona 2, o sea, con divergencia cero.



(a)  $\vec{J}$  evaluada en el baricentro del tetraedro.



(b)  $\vec{J}$  evaluada en el punto medio de las superficies duales.

Figura 7.12: Evaluación volumétrica de  $\vec{J}_{\mathbf{v}}$ .

figura 7.13a. La distribución espacial de esta corriente, es un círculo de radio r = 9 mm y está situada en la parte superior de un cilindro de altura 10.5 mm.

En la figura 7.13a, también se observa la componente imaginaria de la corriente inducida en un disco de cobre. Ésta corriente, tiene un valor máximo de 6,62e5 ( $^{A}/m^{2}$ ) y valor cercano a cero en el centro del disco.

En la figura 7.13b, se puede observar la componente real del campo magnético debido a ésta corriente, para un mallado compuesto por un número de elementos de  $\mathbf{P} = 2904$ ,  $\mathbf{L} = 19545$ ,  $\mathbf{S} = 33230$ ,  $\mathbf{V} = 16588$ , para el experimento número 15.

En la figura 7.14a, se muestra la convergencia en término de número de nudos, para la componente real del campo magnético en el centro del bucle de corriente. El error obtenido es menor de  $0.15\,\%$ .

En la figura 7.14b, se muestra la evolución del error cuando se incrementa el número de nudos entre los valores  $\mathbf{P}=115 \rightarrow 2904$ , para la componente real e imaginaria de las corrientes inducidas en el disco de cobre, en un punto que está dentro de un radio de  $9\,mm$  y a mitad de altura del disco. En este caso, el error es menor de 1,35 %.

En las gráficas 7.15a y 7.15b, se observa la comparación de las magnitudes obtenidas con la FF y con el FEM, mediante los programas GETDP y FEMM.

La comparación se hace a lo largo de una línea recta, que va desde el centro del disco hasta un radio igual a  $9 \, mm$ . Observando la gráfica, se observa que los resultados obtenidos con la FF están entre los obtenidos con los de FEM, mediante GETDP y FEMM.

En un segundo grupo de experimentos, el valor de la densidad de corriente superficial aplicada es de  $|\vec{J_s}| = 1e4 \ (A/m)$  y la frecuencia es de 50 Hz.

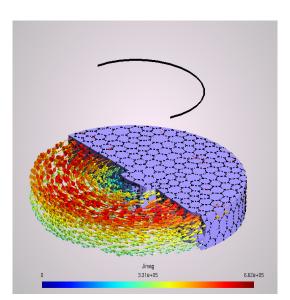
Las corrientes, se calcularon considerando la densidad de corriente en el baricentro del triángulo. Éstas se han aplicado en un anillo superficial, con un radio interno de  $r_i = 6 \ mm$  y un radio externo de  $r_e = 9 \ mm$ , a una distancia del disco de 10,5 mm.

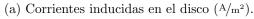
Ellas están representadas por vectores en color negro en la figura 7.16.

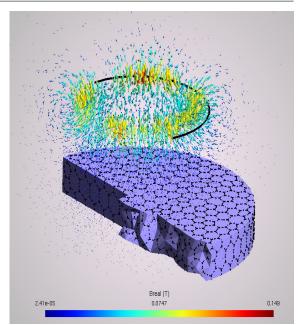
La componente imaginaria de la densidad de corriente inducida en el disco de cobre, se muestra en al figura 7.16a.

El valor máximo de ésta, se encuentra concentrada sobre la superficie del disco con un valor de 2,56e4 ( $^{A}/_{m}$ ). Sin embargo, el valor de la densidad de corriente inducida, es prácticamente cero en el centro del disco.

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

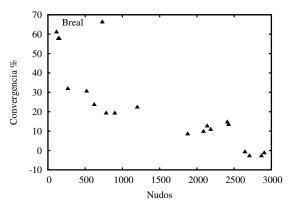




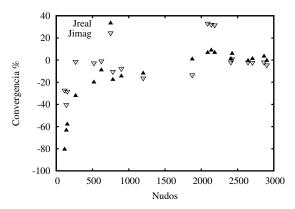


(b) Componente real del campo magnético inducido (T).

Figura 7.13: Campo magnético y corrientes inducidas para una excitación de densidad de corriente lineal -línea negra-, para un mallado de  ${\bf P}=2904,~{\bf L}=19545,~{\bf S}=33230,~{\bf V}=16588.$ 



(a) Convergencia de la componente real del campo magnético inducido.



(b) Convergencia de las corriente inducidas (real e imaginaria).

Figura 7.14: Análisis de la convergencia para el campo magnético y las corrientes inducidas.

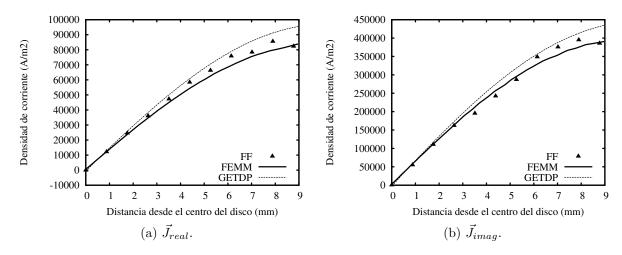


Figura 7.15: Comparación de resultados con una excitación de corriente lineal para  $\vec{J}_{real}$  y  $\vec{J}_{imag}$  con FF, GETDP y FEMM.

La figura 7.16b, representa la componente real del campo magnético en todo el dominio  $\Omega_D$ , el valor máximo de éste es  $4{,}59e-3~T(Teslas)$ , siendo  $T={\rm Wb/m^2}$ .

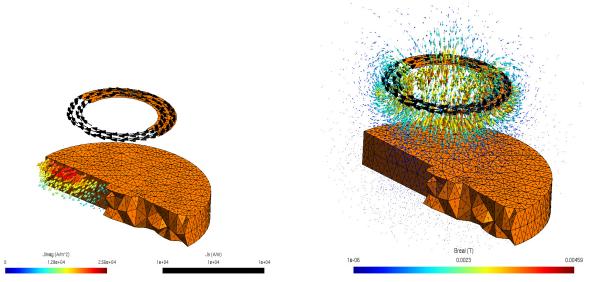
El tercer conjunto de experiencias realizadas, se corresponden con excitaciones de densidad de corrientes volumétricas, cuyo módulo tiene un valor de  $|\vec{J}_{\mathbf{v}}| = 1e6 \ (^{A}/m^{2})$ .

La dirección de estas corrientes, puede verse en la figura 7.17a, y son representados por vectores de color negro. La evaluación de las corrientes asignadas a los planos duales, han sido calculados considerando la densidad de corriente volumétrica en el baricentro de los tetraedros.

La figura 7.17a, muestra los resultados de la componente imaginaria de las corrientes inducidas en el disco. Éstas alcanzan un pico de 8,7e4 ( $^{A}/m^{2}$ ) en la superficie del disco y los valores más cercanos a cero se encuentran en el centro del mismo, como se puede observar en 7.17a.

El valor máximo de la componente real del campo magnético es  $2,39e3\ T,$  mostrado en la figura 7.17b.

Capítulo 7. La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.



- (a) Corrientes inducidas en el disco (A/m²).
- (b) Componente real del campo magnético inducido (T).

Figura 7.16: Campo magnético y corrientes inducidas. Excitación con densidad de corriente superficial  $\binom{A}{m}$  -vectores de color negro-.

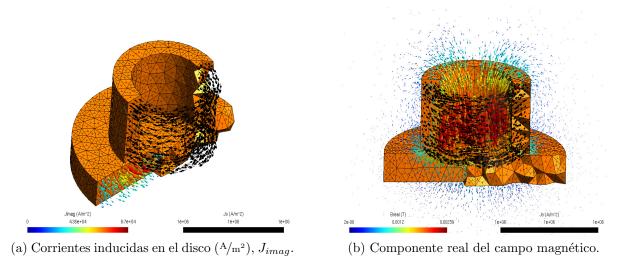


Figura 7.17: Campo magnético y corrientes inducidas. Excitación con una densidad de corriente volumétrica  $(A/m^2)$  -vectores de color negro-.

# Bibliografía

- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [AP04] P. Alotto and I. Perugia. Matrix Properties of a Vector Potential Cell Method for Magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40:1045–1048, 2004.
- [Bos98] A. Bossavit. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements. Academic Press, 1998.
- [CST07] L. Codecasa, R. Specogna, and F. Trevisan. Symmetric positive-definite constitutive matrices for discrete eddy-current problems. *IEEE transactions on magnetics*, 43(2):510–515, 2007.
- [CT06] L. Codecasa and F. Trevisan. Piecewise uniform bases and energetic approach for discrete constitutive matrices in electromagnetic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(4):548–565, 2006.
- [CW01] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32(32):65–87, 2001.
- [DGGL99] P. Dular, C. Geuzaine, A. Genon, and W. Legros. An evolutive software environment for teaching finite element methods in electromagnetism. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1682–1685, may 1999.

- [DST06] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Coupling between circuits and a- $\chi$  discrete geometric approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1043 –1046, apr 2006.
- [DST08] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Constitutive Matrices Using Hexahedra in a Discrete Approach for Eddy Currents. *IEEE Trans. on Magnetics*, 44:694–697, 2008.
- [Ent12] Scilab Enterprises. Scilab: Free and open source software for numerical computation. Scilab Enterprises, Orsay, France, 2012. http://www.scilab.org/.
- [Geu08] C. Geuzaine. GetDP: a general finite-element solver for the de Rham complex. In PAMM Volume 7 Issue 1. Special Issue: Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich 2007, volume 7, pages 1010603–1010604. Wiley, 2008.
- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [Knu01] P. M. Knupp. Algebraic mesh metrics. SIAM J.SCI. COMPUT., 23(1):193– 218, 2001.
- [KPSB<sup>+</sup>97] P. Kuo-Peng, N. Sadowski, J. P. A. Bastes, R. Carlson, N. J. Batistela, and M. Lajoie-Mazenc. A general method for coupling static converters with electromagnetic structures. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 33(2):2004 –2009, Mar 1997.
- [Mar04] M. Marrone. Properties of Constitutive Matrices for Electrostatic and Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. on Magnetic*, 40:1516–1520, 2004.
- [MBC<sup>+</sup>07] A. Murli, V. Boccia, L. Carracciuolo, L. DAmore, G. Laccetti, and M. Lapegna. Monitoring and Migration of a PETSc-based Parallel Application

- for Medical Imaging in a Grid computing PSE. Grid-Based Problem Solving Environments, pages 421–432, 2007.
- [Mee12] D. C. Meeker. An improved continuum skin and proximity effect model for hexagonally packed wires. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(18):4635–4644, 2012.
- [MVea10] J. M. Monzon Verona et al. ElectroQuasistatic Analysis of an Electrostatic Induction Micromotor Using the Cell Method. Sensors, 10(10):9102-9117, 2010.
- [SM12] L. Simón and J. M. Monzón. The fundamental loop matrix in eddy current problem with the finite formulation. *MASCOT&ISGG 2012 International Workshops*, Aug 2012.
- [SMM15] L. Simón, J. M. Monzón, and M. Martínez. La matriz fundamental de bucles b en el método de la celda. aplicación a un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3d. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [ST05] R. Specogna and F. Trevisan. Discrete constitutive equations in A- $\chi$  geometric eddy-current formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(4):1259–1263, april 2005.
- [Str93] G. Strang. The Fundamental Theorem of Linear Algebra. The American Mathematical Monthly, 100(9):848–855, 1993.
- [TK04] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of discrete approaches to solving magnetostatic problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):361–365, March 2004.
- [TK06] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of finite-dimensional eddy-current formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13):1888–1908, 2006.

- [Ton76] E. Tonti. The reason for analogies between physical theories. Applied Mathematical Modelling, 1(1):37–50, 1976.
- [Ton95] E. Tonti. On the Geometrical Structure of the Electromagnetism. Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures. for the 80th Birthday of A. Lichnerowicz; G. Ferrarese: Pitagora Editrice, pages 281–308, 1995.
- [Ton01a] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation for the Wave Equation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(4):1355–1382, 2001.
- [Ton01b] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. Geometric Methods in Computational Electromagnetics PIER 32, 32(2):1–44, 2001.
- [Ton02] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.
- [Wei96] T. Weiland. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, 1996.

# Capítulo 8

# El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética.

Índice				
8.1	l. Intro	oducción		
8.2	2. Circ	uito y Matrices		
8.3	3. Resu	ultados y discusión		
	8.3.1.	Comparación de resultados del método de la celda con el FEM. 169		
	8.3.2.	Excitación con corriente		
	8.3.3.	Excitación con tensión		
	8.3.4.	Experiencias con roturas de barras		
	8.3.5.	Cálculo del par electromagnético. Análisis en frecuencia 182		
8.4	1. Caso	o lineal y no lineal		

### Resumen.

El análisis de máquinas eléctricas mediante el método de los elementos finitos, es bien conocido. Una de las aportaciones de esta tesis, es la comprobación de la formulación finita aplicada en el estudio de máquinas eléctricas trifásicas de inducción magnética.

Los estudios realizados, se han hecho sobre un modelo basado en una sección bidimensional de la máquina (Fig. 8.2). Junto al modelo discreto se han incorporado ecuaciones circuitales, que consideran cinco tipos de elementos circuitales (Fig. 8.3). En un primer conjunto de experiencias, el sistema discreto se analiza imponiendo las corrientes de fase como fuente.

### 8.1. Introducción.

En este capítulo se va a trabajar con una sección transversal de un prototipo de una máquina eléctrica (Fig. 8.2). En las hipótesis que se plantean se presupone una máquina con simetría plana, sin efecto *skew*.

De forma general, el conjunto sería tratado como un gran dominio tridimensional, cuyos elementos discretos en el mallado serían tetraedros, véase prototipo tridimensional en el capítulo anterior y el correspondiente a la máquina eléctrica en la figura 8.1a. Pero la sección, por su diseño, tiene simetría plana, lo que permite un planteamiento singular de las variables magnéticas [SMM15].

Dado que el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  y el vector potencial magnético  $\vec{A}$  tienen el mismo sentido y son perpendiculares a la sección transversal, sus componentes magnéticas vectoriales sólo tienen valor en el eje Z, es decir, la circulación en las aristas de  $\vec{A}$  viene dada por la integral de línea  $a = \int \vec{A} \cdot d\vec{l}$ , donde sus componentes vienen dadas como  $\vec{A} = (\vec{A_x}, \vec{A_y}, \vec{A_z})$ , siendo sus componentes  $\vec{A_x} = 0$  y  $\vec{A_y} = 0$  (Fig. 8.1b y 8.1c).

El valor del vector potencial magnético proyectado en las aristas de los triángulos de la superficie, es cero.

Donde único tiene valor es en los nudos, de tal forma que en las aristas del prisma

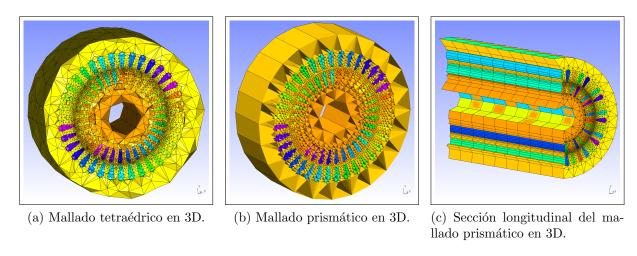


Figura 8.1: Mallados sin simetría y con simetría en 3D.

(proyección de los nudos) que se forma por simetría, adquieren el valor del potencial magnético. Es decir, las corrientes son perpendiculares y las incógnitas son las proyecciones en los nudos de las aristas.

En virtud de ello, el mallado que se utiliza es prismático, por su correspondencia con la ortogonalidad de las vectores magnéticos y la simetría plana de la sección.

El número de variables libres está determinada por el número de ramas del árbol, y el número de ramas donde el  $\vec{A}=0$  determina el número de incógnitas. La matriz del conjunto de ecuaciones del sistema es singular, por lo que se debe aplicar alguna condición de unicidad. La condición de unicidad, se impone dándole un valor conocido a alguna de las incógnitas, es decir, asignando un valor a uno de los nudos. De esta forma, el número de ecuaciones = número de nudos -1.

Como procedimiento general, se asigna un valor cero al potencial magnético a uno de los nudos. Con respecto a las matrices de incidencia, en este caso la matriz G = C.

El flujo magnético asociado a las caras del primal, tiene valor sólo en las caras perpendiculares cuadrangulares de los prismas, siendo en las superficies (caras) de la sección, cero.

Las características de simetría inherentes al problema, han permitido una gran reducción del número de aritas, o sea, del número de incógnitas. Cuantitativamente, mediante la ecuación de Euler [Wil85], se puede observar una sustancial reducción del número de

incógnitas (nudos) para un mismo problema sin simetría y con simetría, como se puede observar en la tabla 8.1.

Reducción del número de incógnitas				
	Nudos	Aristas	Superficies	Volúmenes
Modelo Sin simetría	10010	68428	114474	56056
Modelo Con simetría	767	2285	1518	-

Tabla 8.1: Comparación del número de incógnitas (nudos) de un problema sin simetría con otro con simetría.

El conjunto está formado por un dominio discreto que incorpora el estátor, el entrehierro y el rotor, y un modelo circuital de parámetros concentrados que representa la fuente que alimenta al mismo.

Los análisis que se proponen en esta tesis, se basan en la implementación del método de la celda (CM), utilizando la formulación finita (FF) como fundamento teórico [Ton02, AFR10, Ton01].

La formulación que se propone para resolver el modelo de corrientes inducidas es el basado en el modelo  $a, \chi$  [Tre04, ST05]. Los resultados, se comparan con métodos de referencia basados en programas de análisis por elementos finitos FEMM y GETDP [Mee09, GR08, GR09].

Los experimentos numéricos, corresponden a los obtenidos a lo largo de tres circunferencias trazadas sobre el estátor -zona  $(l_s)$ -, el entrehierro -zona  $(l_e)$ - y el rotor -zona  $(l_r)$ - (Fig. 8.2).

En la primera parte, se han desarrollado experiencias con diferentes densidades de mallado, con el objeto de ver la convergencia de resultados.

Se representa el potencial vector magnético -magnitud asociada a los nudos-, en las tres zonas de estudio.

En un primer conjunto de experiencias, los análisis se han realizado sobre una sección equivalente a 1/6 de la superficie que representa la máquina.

Esta sección corresponde a la localización de la fase A+, que abarca 6 de las 36 ranuras del estátor (Fig. 8.4b). Los resultados corresponden a 5 incrementos de densidad del mallado en el análisis mediante CM(1-5), representándose la convergencia de los resultados

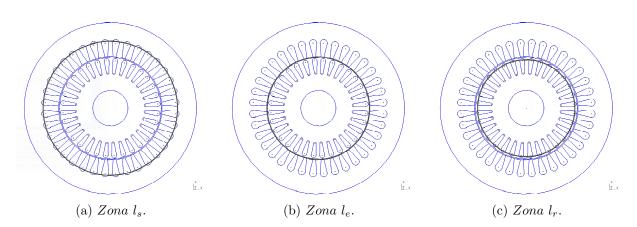


Figura 8.2: Zonas de corte trazadas en el estátor  $l_s$ , el entrehierro  $l_e$  y el rotor  $l_r$ .

con los de referencia FEMM y GETDP aplicados al mismo problema.

Los incrementos en la densidad de los mallados denominados del CM1 al CM5, se corresponden con una densidad de nudos de 3501, 5294, 10498, 15183 y 44125, respectivamente.

La densidad de nudos en los mallados utilizados como referencia, son de 44125 para el GETDP y de 1395031 para el FEMM.

Un segundo conjunto de experiencias, recogen los resultados obtenidos de la densidad de corriente en el rotor para la fase A+, y para todo el desarrollo correspondiente a la zona  $(l_r)$  del rotor.

También se representa un diagrama circular módulo-argumental correspondiente a las corrientes de barras.

En la segunda parte, se llevan a cabo un conjunto de experiencias basadas en el modelo lineal de la máquina. El modelo es alimentado por corrientes conocidas y se representa la convergencia del modelo implementado CM(1-5), frente a los de referencia FEMM y GETDP. La comparación con el FEMM solo permite alimentar con corriente.

En la tercera parte, se realizan un conjunto de ensayos de roturas en barras y en la fuente, analizándose el comportamiento y la implicación de las corrientes adyacentes en tales casos. En estos análisis se ha representando el régimen transitorio que se produce cuando se presentan las roturas.

En la cuarta parte, se estudia el modelo no lineal de la máquina. En esta parte, se

construye la curva B-H correspondiente al tipo de conductor (permeabilidad) que se ha utilizado en las experiencias. Para la construcción de la curva, se ha utilizado el método propuesto por Arkkio [VLA+11, A+87].

## 8.2. Circuito y Matrices.

Las simulaciones realizadas en este capítulo se han desarrollado en base al circuito de la figura 8.3.

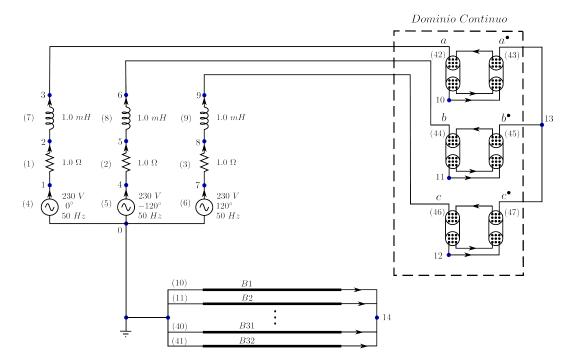


Figura 8.3: Modelo circuital de la máquina, con los cinco modelos de elementos.

En este circuito hay tres partes diferenciadas. Por una parte, la fuente de excitación formada por un circuito de parámetros concentrados donde cada fase está formada por una fuente de tensión, una bobina y una resistencia en forma de conductancia, con valores de 230 V/50~Hz, 1,0 mH y 1,0  $\Omega$ , repectivamente.

Por otra, el estátor lo representa un circuito discreto de parámetros distribuidos, cuya geometría está representada por un modelo trifásico compuesto por seis ranuras como se

puede observar en la figura 8.4a.

Por último, el conjunto circuital del inducido, representado por las barras del rotor cuya geometría también se puede observar en la misma figura 8.4a.

En el método nodal modificado desarrollado en el capítulo 6, los elementos discretos del circuito se agrupan en conjuntos con fines computacionales, donde quedan reflejadas las incidencias nodales.

En el conjunto de experiencias llevadas a cabo en este capítulo, cuando el circuito de la figura 8.3 es alimentado con fuentes de tensión, los elementos del mismo se clasifican de la siguiente forma:

Al conjunto A1 pertenecen todas las conductancias, correspondientes a los elementos A1 = 1, 2, 3 del circuito de la figura 8.3.

Al conjunto A2 pertenecen las fuentes de tensión y las bobinas, correspondientes a los elementos A2 = 4, 5, 6, 7, 8, 9 del circuito.

El conjunto A3 no es utilizado, porque no hay fuentes de corriente.

En el conjunto A4 se encuentran todas las barras rotóricas, correspondientes a los elementos A4 = 10, ..., 41 del circuito.

Y por último, en el conjunto A5 se encuentran las fases AA', CC' y BB', correspondientes a los elementos A5 = 42, ..., 47 del circuito.

De forma matricial, el conjunto  $A1_{14\times3}$  contiene las conductancias, el  $A2_{14\times6}$  las fuentes de tensión y las bobinas, el  $A4_{14\times32}$  las barras rotóricas y el  $A5_{14\times6}$  las tres fases.

Estas matrices son matrices de incidencia que contienen las orientaciones de todos los elementos del circuito.

La matriz |A| de dimensión 14  $nudos \times 47$  elementos tiene como elementos las matrices  $[A]_{14\times47} = [[A1]_{14\times3} \ [A2]_{14\times6} \ [A4]_{14\times32} \ [A5]_{14\times6} \ ].$ 

Capítulo 8. El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética.

0

Cuando el circuito de la figura 8.3 es alimentado con fuentes de corriente, los elementos 4,5 y 6 son sustituidos por fuentes de corriente, y se clasifican de la siguiente forma:

El conjunto A1 pertenecen todas las conductancias, correspondientes a los elementos A1 = 1, 2, 3 del circuito de la figura 8.3.

Al conjunto A2 pertenecen las fuentes de tensión y las bobinas. Como solo hay bobinas, pertenecerán a este conjunto los elementos A2 = 7, 8, 9 del circuito.

Al conjunto A3 pertenecen las fuentes de corriente, que sustituyen en esta experiencia a las fuentes de tensión. Con lo cual, este conjunto estará formado por los elementos A3 = 4, 5, 6.

En el conjunto A4 se encuentran todas las barras rotóricas, correspondientes a los elementos A4 = 10, ..., 41 del circuito.

Y por último, en el conjunto A5 se encuentran las fases AA', CC' y BB', correspondientes a los elementos A5 = 42, ..., 47 del circuito.

De forma matricial, el conjunto  $A1_{14\times3}$  contiene las conductancias, el  $A2_{14\times6}$  sólo las bobinas al no haber fuentes de tensión, el  $A3_{14\times3}$  las fuentes de corriente, que sustituyen a las de tensión. el  $A4_{14\times32}$  las barras rotóricas y el  $A5_{14\times6}$  las tres fases.

Estas matrices son matrices de incidencia que contienen las orientaciones de todos los elementos del circuito.

La matriz |A| de dimensión 14 nudos  $\times$  47 elementos tiene como elementos las matrices  $[A]_{14\times47}=[[A1]_{14\times3}$   $[A2]_{14\times3}$   $[A3]_{14\times3}$   $[A4]_{14\times32}$   $[A5]_{14\times6}$  ].

## 8.3. Resultados y discusión.

Las experiencias realizadas en este capítulo, están desarrolladas sobre un modelo en dos dimensiones de una máquina.

La sección transversal es la que se observa en la figura (Fig. 8.4a), y se corresponde con un estátor bobinado trifásico filiforme de 36 ranuras, de 10 hilos por ranura.

En la figura (Fig. 8.4a), las ranuras de la 1-6, 13-18 y 25-30 corresponden a las fases A, C y B, respectivamente. Y los retornos de fase A', C' y B', corresponden a las ranuras de la 19-24, 31-36 y 7-12, respectivamente.

Las dimensiones del modelo de motor de inducción están en metros y son las siguientes: diámetro exterior del estátor  $0,1529\ m$ , diámetro interior del estátor  $0,09208\ m$ , entrehierro  $0,0008\ m$ , diámetro exterior del rotor  $0,09048\ m$  y el diámetro interior del rotor  $0,03175\ m$ . El dominio exterior de aire, donde se encuentra el conjunto, tiene un diámetro de  $0,3054\ m$ .

El modelo consta de un modelo circuital y un modelo discreto (Fig. 8.3).

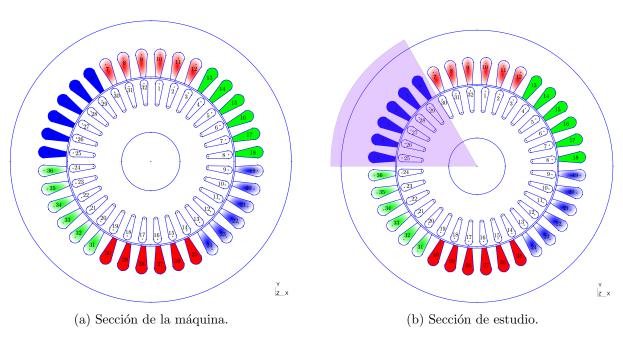


Figura 8.4: Sección transversal de la máquina.

El modelo circuital, corresponde al conjunto de impedancias que representan las excitaciones en las fases de la fuente del estátor. Está compuesta por una fuente de tensión de 230 v, una bobina de 1 mH y una resistencia de 1  $\Omega$ , con una deflexión de  $\pm 120^{\circ}$  entre fases.

El modelo discreto, se corresponde con el dominio de corrientes inducidas en el rotor. Se ha mallado con el programa GMSH [GR09], y las experiencias se han realizado para una densidad de elementos correspondientes con 44125 nudos y 88216 triángulos.

# 8.3.1. Comparación de resultados del método de la celda con el FEM.

#### 8.3.2. Excitación con corriente.

Como se ha indicado anteriormente, este conjunto de experiencias se ha llevado a cabo a lo largo de tres zonas definidas en la sección de la máquina, situadas en el estátor -zona  $(l_s)$ -, el entrehierro -zona  $(l_e)$ - y el rotor -zona  $(l_r)$ - (Fig. 8.2).

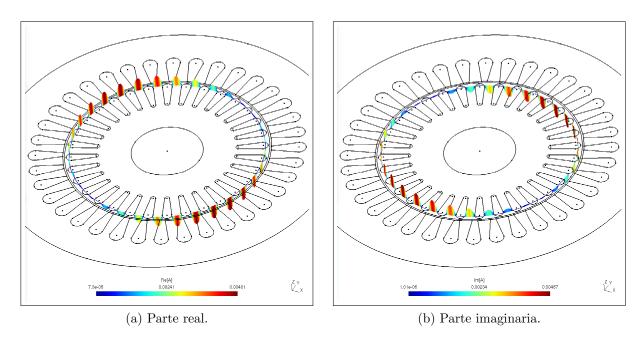


Figura 8.5: Forma y distribución de la  $\vec{A}$  sobre la línea de rotor  $(l_r)$ .

Los análisis se han realizado sobre una parte equivalente a 1/6 de la superficie de la máquina coincidente con la localización de la fase A+, que abarca 6 de las 36 ranuras del estátor (Fig.8.4b).

La excitación en este grupo de experiencias, se ha hecho aplicando una densidad de corriente  $\vec{J}=1530625~{\rm A/m^2}$ . La superficie media de las ranuras del estátor es de  $0,0004084~m^2$ .

Si cada fase agrupa 6 ranuras, y en cada ranura hay 10 hilos, se deduce que la corriente que circula por el devanado de cada fase es de 10,418453 A.

En la figura 8.7, se puede observar las partes real e imaginaria de la densidad de corriente  $\vec{J}$  a lo largo de todo el desarrollo de la zona  $(l_r)$  del rotor  $(2\pi)$ .

Los valores de densidad de corriente son las inducidas en cada barra, siendo prácticamente de valor nulo entre ellas.

Se puede observar que a medida que se incrementa la densidad en los mallados con el método de la celda, se produce una convergencia hacia los resultados obtenidos mediante el FEM.

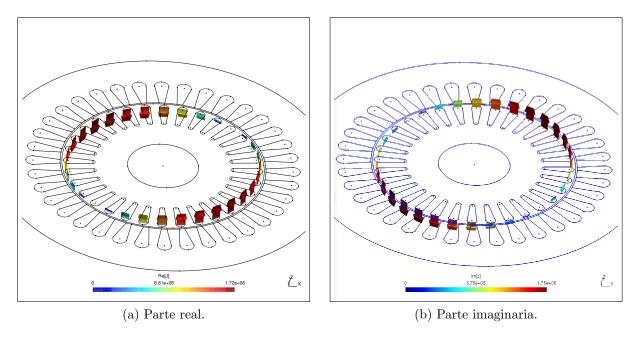


Figura 8.6: Forma y distribución de la  $\vec{J}$  sobre la línea de rotor  $(l_r)$ .

De una forma más detallada, en la figura (Fig. 8.8), se observa las  $\vec{J}$  inducidas en las barras del rotor directamente situadas en la sección de la fase A (B25 B30).

Los valores máximos de la  $\vec{J}$  se corresponden con los aplicados en la fase, o sea del orden de  $1,5\cdot 10^6~(A/m^2)$ .

En la figura (Fig. 8.9), se representa el módulo de las corrientes de barra en un diagrama cartesiano circular módulo argumental, de las corriente inducidas.

Los valores en módulo de corriente son del orden de 64 A, siendo el error que se comete con respecto a los valores de corriente de referencia por elementos finitos del orden de  $|\varepsilon| = 0,25888696\%$ , correspondiente al mallado más denso realizado con el CM5.

En la figura (Fig. 8.10), se observa por una parte la variación del módulo de las corrientes de barra, donde en función de la fase de la fuente con la que están alineadas, la corriente fluctúa obteniéndose una valor medio de 64,28~A (Fig. 8.10a); y por otra, la representación del valor del ángulo entre barras, obteniéndose un valor medio angular de  $10,53^{\circ}$  (Fig. 8.10b).

En la figura (Fig. 8.11), se observa como se distribuye el potencial vector magnético

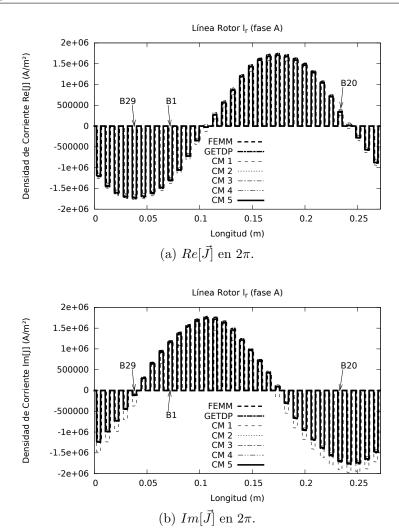


Figura 8.7: Parte real e imaginaria de la densidad de corriente en todo el desarrollo de la zona  $(l_r)$  del rotor  $(2\pi)$ .

en el estátor a lo largo de la línea  $(l_s)$ , equivalente a un arco de longitud 0,0626 m.

Se observa la continuidad de la magnitud a lo largo de las ranuras con valor constante y de la variación entre éstas.

Se puede observar la convergencia de valores obtenidos por el CM, con los de referencia obtenidos mediante el FEM.

En la figura (Fig. 8.12), se observa la convergencia del método de la celda implementado

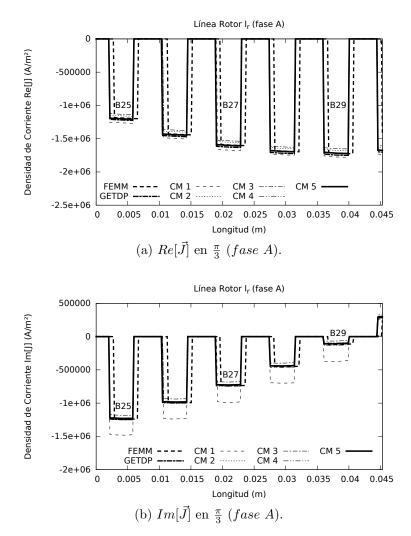


Figura 8.8: Parte real e imaginaria de la densidad de corriente en  $\frac{\pi}{3}$  de la  $(l_r)$  del rotor, de la  $fase\ A$ .

con los resultados obtenidos del FEM.

El potencial vector magnético se evalúa en la línea  $(l_e)$  del entrehierro, abarcando la  $fase\ A\ (\frac{\pi}{3})$ , equivalente a un arco de longitud 0,0478 m.

En la figura (Fig. 8.13), se observa la distribución del potencial vector magnético a lo largo de la línea  $(l_r)$  en el rotor, abarcando la  $fase~A~(\frac{\pi}{3})$ , equivalente a un arco de longitud 0,0453 m. El potencial se distribuye por el hierro entre las barras del rotor, y en

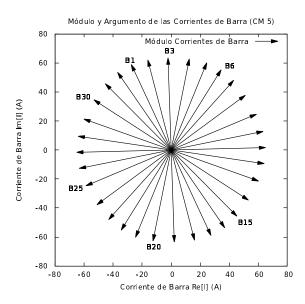


Figura 8.9: Diagrama fasorial de las corrientes de barras.

éstas tienen un valor nulo.

#### 8.3.3. Excitación con tensión.

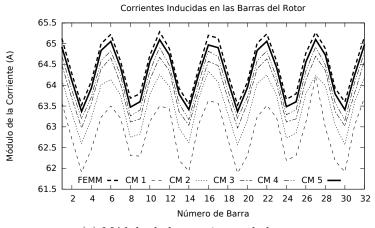
Las experiencias que se realizan en este apartado, son alimentadas por el modelo circuital propuesto en la figura 8.3.

El modelo se ha implementado con los elementos que existen en una fuente real, para lo que se ha dispuesto de una fuente de tensión, una bobina y una resistencia, que la represente.

En este caso, la corriente en cada fase es una incógnita.

Los datos que se toman como referencia, son aquellos que resultan del análisis del modelo mediante elementos finitos con el FEM-Getdp.

Los resultados de la implementación del CM aplicado al modelo, se comparan con los de referencia FEM.



(a) Módulo de las corrientes de barra.

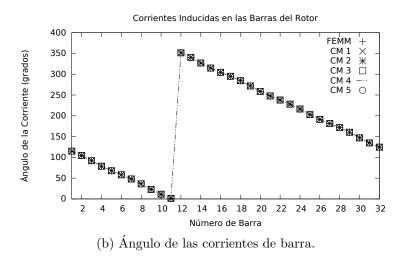


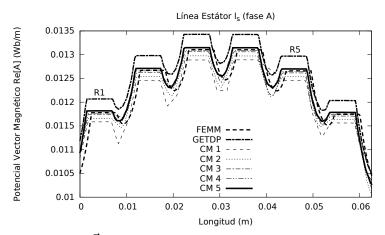
Figura 8.10: Módulo y ángulo de las corrientes de barras del rotor.

## 8.3.4. Experiencias con roturas de barras.

Uno de los análisis críticos en máquinas eléctricas, son los referidos a roturas que se producen en las barras del rotor.

En la literatura consultada, la frecuencia con que se producen algún tipo de rotura relacionada con el rotor o con el estátor están en el orden de entre el 10% y el 35%, respectivamente. [TF01, GAK13, DZ09, KMP97].

Con el modelo de máquina en 2D utilizado en las experimentaciones, se han hecho una



(a)  $Re[\vec{A}]$  en  $\frac{\pi}{3}$  (fase A) en la línea ( $l_s$ ) del estátor.

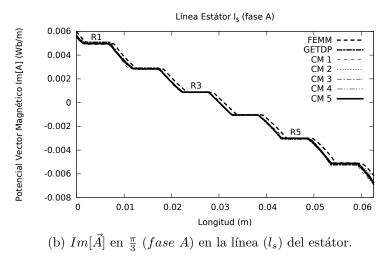
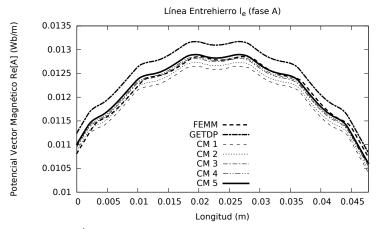


Figura 8.11: Potencial Vector Magnético en  $\frac{\pi}{3}$  de la  $(l_s)$  del estátor, de la fase~A.

serie de experiencias contrastándose resultados con los de referencia analizados por FEM.

En todas las experiencias se representa el transitorio inicial de arranque y llegado al permanente, se simula la rotura en varios casos. La primera experiencia, muestra una ruptura en la barra rotórica B4 (Fig. 8.14).

En la figura 8.14a, se muestra como después del transitorio de arranque inicial, se produce una ruptura de la barra rotórica B4. De forma inmediata, las corrientes en las barras adyacentes aumentan en una proporción del orden de 28 % con respecto a la intensidad



(a)  $Re[\vec{A}]$  en  $\frac{\pi}{3}$  (fase A) en la línea ( $l_e$ ) del entrehierro.

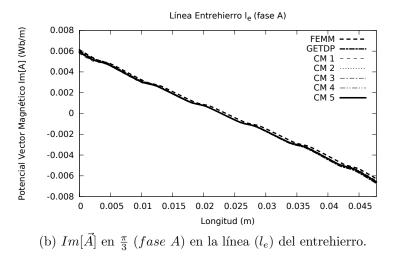


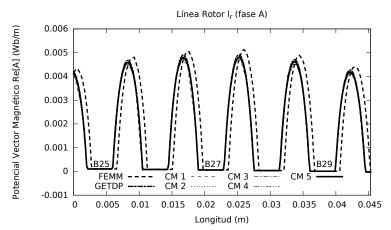
Figura 8.12: Potencial Vector Magnético en  $\frac{\pi}{3}$  de la  $(l_e)$  del entrehierro, de la  $fase\ A$ .

media en barras.

La siguiente experiencia, puede observarse en la figura 8.15, donde la rotura se produce en dos barras consecutivas la B4 y B5.

La figura 8.15a, muestra como después del transitorio inicial se produce la rotura en dichas barras.

En la figura 8.15b, se muestra el diagrama de corrientes donde se observa la variación del módulo de las corrientes adyacentes.



(a)  $Re[\vec{A}]$  en  $\frac{\pi}{3}$  (fase A) en la línea  $(l_r)$  del rotor.

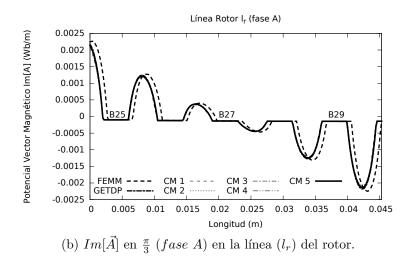


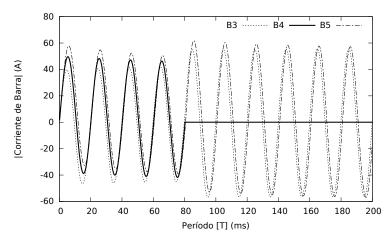
Figura 8.13: Potencial Vector Magnético en  $\frac{\pi}{3}$  de la  $(l_r)$  del rotor, de la  $fase\ A$ .

La corriente en las barras B3 y B6 adyacentes aumenta en una proporción del orden del  $43\,\%$  y  $46\,\%$  respectivamente, en relación a la intensidad media en barras.

Por último la figura 8.16, muestra una experiencia donde se rompen tres barras próximas, dos consecutivas B4-B5 y una alterna B7.

En la figura 8.16a, se representan las corrientes del conjunto de barras implicadas y sus adyacentes, después del transitorio inicial.

En la figura 8.16b, se observa la variación de los valores de los módulos de las corrientes



(a) Transitorio y ruptura de barra 4 con efecto colateral de corriente.

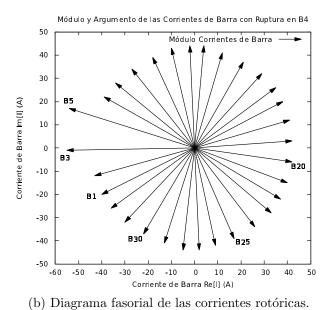
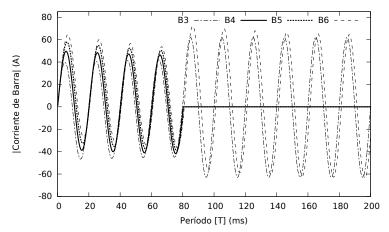


Figura 8.14: Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras.



(a) Transitorio y ruptura de barras 4 y 5 con efecto colateral de corriente.

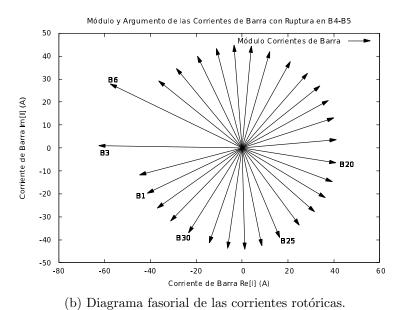
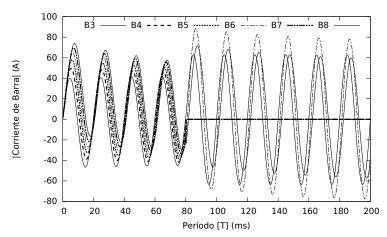


Figura 8.15: Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras.



(a) Transitorio y ruptura de barra 4, 5 y 7 con efecto colateral de corriente.

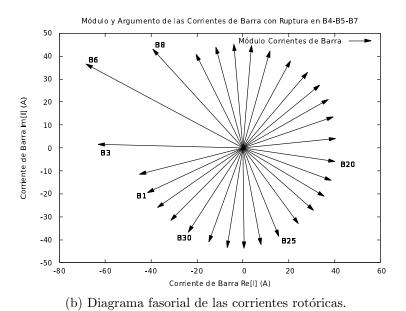


Figura 8.16: Módulo del transitorio y diagrama fasorial de las corrientes de barras.

de cada una de las barras. En este caso, las corrientes en las barras adyacentes a las que se han roto que son la B3, B6 y B8, aumentan en una proporción del orden del 46 %, 79 % y 34 % respectivamente, en relación a la intensidad media en barras.

Estos incrementos de corriente en las barras adyacentes a las que sufren una fractura, están de acuerdo con las estimaciones para este tipo de problemas según la literaura consultada [FLAB11, CL<sup>+</sup>07, TF01].

### 8.3.5. Cálculo del par electromagnético. Análisis en frecuencia.

El análisis del par propuesto, implementado en código scilab para su verificación, se ha hecho aplicando el método que propone Arkkio, basado en una simplicación del método de los trabajos virtuales [A+87, SLLMC92, VLA+11].

Los métodos comunes utilizados para el cálculo del par en el FEM, están basados en el tensor de Maxwell. En concreto, el par electromagnético se obtiene como una integral de superficie:

$$T_e = \oint_S r \times \varrho \ dS = \oint_S r \times \left(\frac{1}{\mu_0} (B \ \vec{n}) \ B - \frac{1}{2\mu_0} \ B^2 \ \vec{n}\right) \ dS \tag{8.1}$$

donde  $\varrho$  es el tensor de Maxwell y  $\vec{n}$  es el vector normal unitario de la superficie de integración S. Esta integral aplicada al cálculo del par de un motor de inducción, debe elegirse de forma que la superficie de integración cierre el espacio libre del rotor.

En un modelo en dos dimensiones, la integral de superficie se reduce a una integral de línea a lo largo del entrehierro. Si el círculo de radio r que forma, se toma como línea de integración, el par se obtiene de la siguiente forma:

$$T_e = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 B_n B_t dt \tag{8.2}$$

Si la solución fuera exacta, el valor del par en (8.2) sería independiente del radio r que varía entre su valor interno y externo en el entrehierro.

En la práctica, una solución aproximada del par como una función del radio r puede variar un 50 % sobre el valor medio [Mee13, Mee14]. Para elementos lineales [RFV76] sugiere una ruta de integración alrededor de los puntos medios de los elementos discretos.

En el método de los trabajos virtuales, una integral de superficie tridimensional en (8.1) es sustituida por una integral de volumen que rodea al rotor en movimiento [SLLMC92, Cou83]. En el modelo en dos dimensiones de una máquina eléctrica, si el radio interno en  $r_s$  y el externo  $r_{ss}$ , se tiene un método similar que puede ser derivado fácilmente.

Como el verdadero par es independiente del radio, integrando la expresión (8.2) en la dirección radial sobre el entrehierro, se obtiene que:

$$T_e = \frac{1}{\mu_0(r_s - r_{ss})} \int_S r \ B_n \ B_t \ dS \tag{8.3}$$

donde  $B_n$  y  $B_t$  son las componentes normal y tangencial del campo, respectivamente. Este método ha demostrado dar mejores resultados que los obtenidos con (8.2), y se ha implementado para la obtención del par.

La implementación hecha para el CM se desarrolló en scilab. En el algoritmo (1), se puede observar parte del código donde se lleva a cabo la integral de las componentes normal y tangencial del campo.

De igual forma, en el algoritmo (2), se puede observar parte del código donde se calcula el par mediante el tensor de Maxwell, según propone el método de Arkkio, implementado en FEM-GETDP.

La comparativa de resultados entre el par en frecuencia, evaluado con un método y con otro, se muestran en la tabla (8.2). Y la variación de las corrientes de fase a las diferentes frecuencias, entre un método y otro, se muestran en la tabla (8.3).

Con respecto al deslizamiento, se ha experimentado con un deslizamiento cercano a cero, esto es, próximo a la frecuencia de sincronía, simulando una situación de funcionamiento en vacío de la máquina.

## 8.4. Caso lineal y no lineal

En los modelos lineales y no lineales estudiados, se ha experimentado con una curva B-H de saturación efectiva como se observa en la gráfica (Fig. 8.17).

En dicha gráfica, se ha representado las curvas correspondientes al caso lineal y al no lineal. Los datos, en ambos casos, han sido obtenidos mediante un análisis FEM 8.18,

Algoritmo 1 Porción de código implementado en CM-Scilab para el cálculo del par, por el método de Arkkio.

```
Unx=x/sqrt(x^2+y^2); //vector unitario normal en el B
Uny=y/sqrt(x^2+y^2);
Utx=Uny;
Uty=-Unx;
Bn_r=Bx*Unx+By*Uny;//real Bt_r=Bx*Utx+By*Uty;//parte real
Bn_i=Bxi*Unx+Byi*Uny;//imag Bt_i=Bxi*Utx+Byi*Uty;//parte imaginaria
rr=0.04524;
rs=0.04604;
Te_r=Te_r+1/(permi_o*(rs-rr))*(radio*Bn_r*Bt_r*sup);
Te_i=Te_i+1/(permi_o*(rs-rr))*(radio*Bn_i*Bt_i*sup);
...
endfunction
[Te_r,Te_i]=par(nudos,ele,xx1,nu_e);
disp(Te_r); disp(Te_i);
...
```

**Algoritmo 2** Porción de código implementado en FEM-GETDP para el cálculo del par, por el método de Arkkio.

```
... // Maxwell stress tensor  T_{max}[] = ( \text{SquDyadicProduct}[\$1] - \text{SquNorm}[\$1] * \text{TensorDiag}[0.5, 0.5, 0.5] ) / \text{mu0} ; \\ T_{max\_cplx}[] = \text{Re}[0.5*(\text{TensorV}[\text{CompX}[\$1]*\text{Conj}[\$1], \text{CompY}[\$1]*\text{Conj}[\$1], \text{CompZ}[\$1]*\text{Conj}[\$1]] - \$1*\text{Conj}[\$1] * \text{TensorDiag}[0.5, 0.5, 0.5] ) / \text{mu0}]; \\ T_{max\_cplx\_2f}[] = 0.5*(\text{TensorV}[\text{CompX}[\$1]*\$1, \text{CompY}[\$1]*\$1, \text{CompZ}[\$1]*\$1] - \$1*\$1 * \text{TensorDiag}[0.5, 0.5, 0.5]) / \text{mu0} ; \\ ... \\ \{ \text{Name Torque\_Maxwell} ; // \text{Torque computation via Maxwell stress tensor Value } \{ \text{Integral } \{ [\text{CompZ}[\text{XYZ}]] / (\text{T\_max\_cplx}[\{\text{d a}\}] * \text{XYZ}[]) ] * 2*\text{Pi*AxialLength/SurfaceArea}[] ] ; \text{In entre\_hierro} ; \text{Jacobian Vol} ; \text{Integration I1; } \} \} \\ ... \\ ... \\ \end{tabular}
```

$Par\ por\ frecuencias\ CM5$ - $Fem(Getdp)$				
Frecuencia (Hz)	Par CM5	$Par\ FEM(Getdp)$	Error (%)	
50	0.0639008	0.0661033848	3.3320302869	
45	0.086241	0.0892867218	3.411169898	
40	0.1209572	0.1253124189	3.4754886401	
35	0.1780554	0.1845954402	3.5429045136	
30	0.2791499	0.2896251683	3.6168363134	
25	0.4767162	0.4950613245	3.7056266823	
20	0.9206157	0.9572775994	3.8298085508	
15	2.154881	2.2458630773	4.0510963569	
10	7.1194045	7.4638035825	4.6142570435	
5	52.190109	54.4294586951	4.1142237105	

Tabla 8.2: Comparación del par por frecuencias, entre el CM5 y el FEM(GETDP).

$Corrientes\ de\ la\ fase\ A\ entre\ CM5$ - $Fem(Getdp)$				
Frecuencia (Hz)	Corriente fase A con CM5	Corriente fase A con FEM(Getdp)	Error (%)	
50	7.1435778	6.8766286218	3.7369114696	
45	7.9359172	7.6398575082	3.7306297976	
40	8.9260007	8.593606649	3.7238855587	
35	10.198084	9.8193173859	3.7140958453	
30	11.892412	11.4525039936	3.6990646339	
25	14.260441	13.7364798109	3.6742285117	
20	17.801808	17.1558361533	3.6286867419	
15	23.668107	22.8324054223	3.530918538	
10	35.217511	34.0708211437	3.2560218588	
5	67.582697	64.3358327022	4.8042834067	

Tabla 8.3: Comparación de las corrientes de la fase A, entre el CM5 y el FEM(GETDP).

como puede observarse en las figuras 8.18a y 8.18b.

El problema se resuelve para un conjunto discreto de elementos, formados por un conjunto de nudos P=71489 y de triángulos S=142816. La permeabilidad relativa del material férrico utilizado en el modelo lineal, tiene un valor de  $\mu_r=1000$ , por lo que la permeabilidad absoluta  $\mu=\mu_r\cdot\mu_o$ .

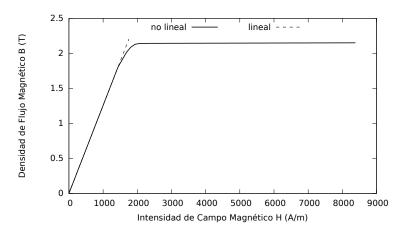


Figura 8.17: Curvas de saturación B-H para el modelo lineal y el no lineal.

El método utilizado para la resolución del sistema de ecuaciones, es el biconjugado del gradiente (BCGM) [BC94]. La precisión aplicada ha sido del orden de 10<sup>-8</sup>.

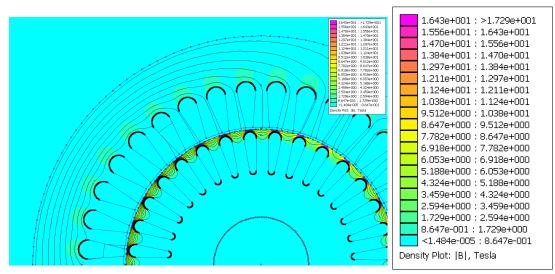
Como método iterativo de convergencia, se ha utilizado el método de Newton-Raphson (NRM) [OO95], con una relajación variable  $0 \le \alpha \ge 1$  [FNOM93]. La convergencia se ha producido después de 128 iteraciones.

La curva para densidades de flujo  $B > 1, 8 \ (T)$ , se obtienen mediante aproximaciones de las expresiones:

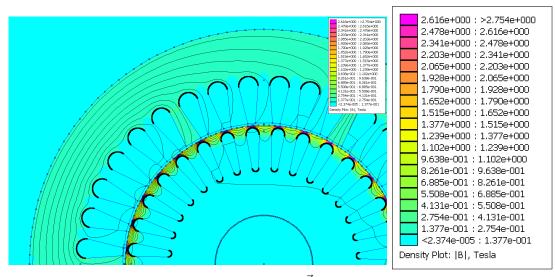
$$B = \mu_0 \cdot H + (a \cdot H^2 + b \cdot H + c)$$
, para  $(1, 8 \le B \le 2, 22 \ (T))$  (8.4)

$$B = \mu_0 \cdot H + M_s , para (B \ge 2, 22 (T))$$
 (8.5)

donde la permeabilidad del aire es  $\mu_o=4\pi\cdot 10^{-7}~(\text{N/A}^2)$  y la magnetización de saturación del material férrico utilizado es de  $M_s=2,14~(T)~[\text{KSTZ01},~\text{Ida96}]$ .



(a) Representación del campo  $\vec{B}$  en el caso lineal.



(b) Representación del campo  $\vec{B}$  en el caso no lineal.

Figura 8.18: Representación FEM del campo  $\vec{B}$ .

# Bibliografía

- [A+87] A. Arkkio et al. Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations. Helsinki University of Technology, 1987.
- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [BC94] R. E. Bank and T. F. Chan. A composite step bi-conjugate gradient algorithm for nonsymmetric linear systems. *Numerical Algorithms*, 7(1):1–16, 1994.
- [CL+07] C. C. M. Cunha, R. O. C. Lyra, et al. Detection of rotor faults in torque controlled induction motor drives. In *Power Electronics and Applications*, 2007 European Conference on, pages 1–10. IEEE, 2007.
- [Cou83] J. L. Coulomb. A methodology for the determination of global electrome-chanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 19(6):2514–2519, 1983.
- [DZ09] F. Duan and R. Zivanovic. Induction motor fault diagnostics using global optimization algorithm. In *Power Engineering Conference*, 2009. AUPEC 2009. Australasian Universities, pages 1–5. IEEE, 2009.
- [FLAB11] R. Fiser, H. Lavric, V. Ambrozic, and M. Bugeza. Diagnostic system for on-line detection of rotor faults in induction motor drives. In *Diagnostics for*

- Electric Machines, Power Electronics & Drives (SDEMPED), 2011 IEEE International Symposium on, pages 77–83. IEEE, 2011.
- [FNOM93] K. Fujiwara, T. Nakata, N. Okamoto, and K. Muramatsu. Method for determining relaxation factor for modified newton-raphson method. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 29(2):1962–1965, Mar 1993.
- [GAK13] K. N. Gyftakis, D. K. Athanasopoulos, and J. Kappatou. Evaluation of different broken bar fault diagnostic means in double-cage induction motors with fem. In *Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives (SDEMPED)*, 2013 9th IEEE International Symposium on, pages 36–42. IEEE, 2013.
- [GR08] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. An introduction to geometrical modelling and mesh generation with Gmsh. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Nov 2008.
- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [Ida96] N. Ida. Verification of computational electromagnetic programs. International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields, 9:159–165, 1996.
- [KMP97] G. B. Kliman, J. G. Mazereeuw, and S. C. Patel. Sensorless approach to on-line motor diagnostics. In *Cement Industry Technical Conference*. 1997. XXXIX Conference Record., 1997 IEEE/PCA, pages 135–140. IEEE, 1997.
- [KSTZ01] H. Kanayama, R. Shioya, D. Tagami, and H. Zheng. A numerical procedure for 3-d nonlinear magnetostatic problems using the magnetic vector potential. *Theoretical and Applied Mechanics*, 50:411–418, 2001.
- [Mee09] D. Meeker. Femm 4.2. User's Manual, Virginia, 2009.

- [Mee13] David Meeker. Improvised open boundary conditions for magnetic finite elements. *IEEE Trans. Magn*, 49(11):5243–5247, 2013.
- [Mee14] David C Meeker. Improvised asymptotic boundary conditions for electrostatic finite elements. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(6):1–9, 2014.
- [OO95] J. O'Dwyer and T. O'Donnell. Choosing the relaxation parameter for the solution of nonlinear magnetic field problems by the newton-raphson method.

  \*Magnetics, IEEE Transactions on, 31(3):1484–1487, May 1995.
- [RFV76] K. Reichert, H. Freundl, and W. Vogt. The calculation of forces and torques within numerical magnetic field calculation methods. In *Proc. Compumag*, volume 76, pages 64–74. Springer, 1976.
- [SLLMC92] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, and J. Cros. Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement.

  \*Magnetics, IEEE Transactions on, 28(2):1410–1413, 1992.
- [SMM15] L. Simón, J. M. Monzón, and M. Martínez. El método de la celda aplicado al análisis de fallos en una máquina de inducción magnética. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [ST05] R. Specogna and F. Trevisan. Discrete constitutive equations in A- $\chi$  geometric eddy-current formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(4):1259–1263, april 2005.
- [TF01] W. T. Thomson and M. Fenger. Current signature analysis to detect induction motor faults. *Industry Applications Magazine*, *IEEE*, 7(4):26–34, Jul 2001.
- [Ton01] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method. CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2(2):237–258, 2001.

- [Ton02] E. Tonti. Finite formulation on unstructured grids. In Computation in Electromagnetics, 2002. CEM 2002. The Fourth International Conference on (Ref. No. 2002/063), page 2 pp., april 2002.
- [Tre04] F. Trevisan. 3-d eddy current analysis with the cell method for NDE problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):1314–1317, 2004.
- [VLA+11] H. VuXuan, D. Lahaye, S. O. Ani, H. Polinder, and J. A. Ferreira. Effect of design parameters on electromagnetic torque of pm machines with concentrated windings using nonlinear dynamic fem. In *Electric Machines & Drives* Conference (IEMDC), 2011 IEEE International, pages 383–388. IEEE, 2011.
- [Wil85] P. R. Wilson. Euler formulas and geometric modeling. Computer Graphics and Applications, IEEE, 5(8):24–36, 1985.

# Capítulo 9

# Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos.

Índice	
9.1.	Introducción
9.2.	Modelo continuo FEM
9.3.	Condiciones de frontera del modelo continuo 197
9.4.	Identificación del modelo paramétrico
9.5.	Análisis mediante el FEMM
9.6.	Ajuste de los parámetros por algoritmos genéticos 201
9.7.	Resultados y discusión

#### Resumen.

En este capítulo se analiza mediante el método de los elementos finitos un motor trifásico de inducción magnética, al cual se le han aplicado diferentes geometrías de barras en el rotor. Estas variaciones geométricas del rotor crean un perfil electromagnético diferente para cada tipo de geometría. Para estudiar el rotor en movimiento, se procede con un análisis en frecuencia del modelo que permitirá simular la evolución de la máquina eléctrica, tanto del modelo circuital como del modelo continuo por elementos finitos. Los parámetros identificativos deducidos desde el método de los elementos finitos, se ajustarán mediante algoritmos genéticos evolutivos. De esta forma, los parámetros en el modelo circuital quedarán identificados para cada geometría objeto de estudio. Finalmente, también se hace una comprobación del par como validación del modelo, comprobando y verificando la exactitud del método.

#### 9.1. Introducción.

Las herramientas informáticas han permitido llevar a cabo técnicas numéricas que antaño eran irrealizables, como son la simulación de modelos circuitales equivalentes basados en sus ecuaciones de equilibrio (Fig. 9.3), y métodos de modelado discreto como el Método de los Elementos Finitos (FEM), conocidos desde hace bastante tiempo, pero sólo aplicables a partir de la aparición de estas poderosas herramientas de cómputo [Mee02, MST09, NPP04, Yam02].

No solo es interesante la identificación y el control en las máquinas de inducción, ya sea para auditorías o modelado constructivo previo, sino que también es necesaria su optimización ante la variedad de procesos industriales existentes, que particularizan distintos diseños de las mismas.

La aportación que se hace en este capítulo, está en el ajuste por algoritmos genéticos (GA) de los parámetros del modelo circuital [Mee02, MST09] de un motor trifásico de inducción magnética, con diferentes geometrías en el diseño del rotor (Fig. 9.1), minimi-

zando el error cuadrático de los resultados obtenidos con el modelo continuo FEM, para las distintas geometrías [SM11, SM10a].

El FEM, es un método de aproximación de problemas continuos [BFG90, NPP04, Sal95]. Su planteamiento, se basa en la transformación de un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado.

Esta transformación, es denominada como discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nudos.

Es por tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

Paralelamente a la evolución tecnológica que ha permitido el diseño de potentes herramientas electrónicas de cálculo, han evolucionado en complejidad y abstracción los algoritmos para resolución de multitud de problemas científicos. Los algoritmos genéticos son una prueba de ello [ÇA06, Urs03, VLHB04].

Una vez más, un proceso natural como la selección y la evolución de los individuos en una población, ha sido aplicado al campo científico para hacer evolucionar sistemas y observar su tendencia, a partir de ciertas condiciones iniciales. Los individuos en las poblaciones intercambian información por medio de operadores evolutivos.

Existen tres operadores genéticos principales: la selecci'on, el cruzamiento y la muta-ci'on [ÇA06].

Mediante la *selección*, los individuos son escogidos de la población de acuerdo al valor de su función de adaptación, para someterse a la acción futura de otros operadores.

El operador de *cruzamiento*, se encargará de intercambiar los componentes de los individuos seleccionados para producir nuevas soluciones, encargándose de la transferencia por herencia de las características de los mejores individuos de una generación a la siguiente.

La *mutación*, es utilizada como un operador cuyo propósito es la exploración aleatoria de nuevas porciones del espacio de búsqueda, introduciendo nuevo material genético en la búsqueda de soluciones.

La ventaja principal de estos algoritmos sobre otros métodos de optimización, es que son capaces de encontrar un extremo de la función global o absoluto, en lugar de uno local, y que la estimación inicial no tiene que estar cerca de los valores reales. Más aún,

Capítulo 9. Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos.

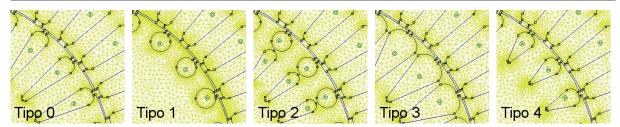


Figura 9.1: Sección de los cinco tipos de geometrías de barras de rotor analizadas.

estos trabajan directamente sobre la función y no requieren el uso de su derivada ni de ninguna otra función auxiliar.

Toda esta metodología aplicada al estudio de máquinas de inducción, permite un nuevo punto de vista en el conocimiento profundo de las mismas.

El programa utilizado como aplicación del método por elementos finitos es el Finite Element Method Magnetics (FEMM), que es una herramienta de software libre muy versátil [Mee02].

Para el análisis por algoritmos genéticos se han utilizado las librerías de código abierto GAlib [Wal96], escritas por Matthew Wall en el Massachusetts Institute of Technology (MIT), que contiene un conjunto de algoritmos genéticos objeto en C++ [Wal00].

#### 9.2. Modelo continuo FEM.

En este apartado se hace un análisis de varias geometrías de barras en el rotor (Fig. 9.1 mediante el programa FEMM, que ensambla todas las ecuaciones de campo para el caso magnético, en el estudio de máquinas eléctricas.

La densidad de corriente  $\vec{J}$ , está definida de tal forma que su orientación es perpendicular al plano, con lo cual, el campo vectorial  $\vec{A}$ , que es un vector de tres componentes y que tiene su misma orientación, queda definido como una función de  $A_z(x,y)$ . Con lo cual, un problema que en principio tenía un planteamiento tridimensional, al tener simetría plana se convierte en un problema bidimensional [DDWBF97].

Para la derivación de las ecuaciones de elementos finitos en su aplicación para las máquinas eléctricas en dos dimensiones, de entre los métodos existentes, es bastante utilizado el método de Galerkin, que es un caso especial del método de los residuos ponde-

rados, donde la función de ponderación tiene la misma forma que la función de forma del elemento finito [Sal95].

En 9.1, se muestra la forma armónica de la ecuación de difusión del vector potencial magnético para un problema en dos dimensiones, donde su componente z es desconocida.

$$\left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu} \left(\nabla \times \vec{A}_z\right)\right] = \vec{J}_z \tag{9.1}$$

En dicha ecuación,  $\nabla \times$  es el operador diferencial rotacional, y se definen  $\vec{A}_z$  (Wb/m) como el vector potencial magnético,  $\vec{J}_z$   $(A/m^2)$  como la densidad de corriente,  $\vec{H}$  (A/m) la intensidad del campo magnético y  $\mu$  (H/m) la permeabilidad magnética del medio.

Si la excitación es en el dominio de la frecuencia y los materiales son lineales, con una simetría plana esta última expresión se simplifica quedando como se muestra en (9.2)

$$\left(\nabla \cdot \nu \nabla \vec{A}_z - \sigma j \omega \vec{A}_z\right) = \vec{J}_z \tag{9.2}$$

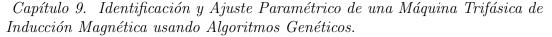
donde el operador nabla  $\nabla \cdot$ , representa el operador divergencia y el operador  $\nabla$  el gradiente, y donde  $\nu$  es la reluctividad del medio que es la inversa de la permeabilidad  $\mu$ , la  $\omega$  (1/s) es la frecuencia angular,  $\sigma$  (siemens/m) es la conductividad eléctrica, y  $\vec{A}_z$ ,  $\vec{J}_z$  son las componentes normales del vector potencial magnético y la densidad de corriente, respectivamente [ÇAB07].

#### 9.3. Condiciones de frontera del modelo continuo.

La aplicación del FEM, implica por naturaleza un dominio finito. Los problemas sin frontera o de frontera abierta, se enfocan mediante las transformaciones de Kelvin [DDWBF97, Sal95].

Para ello, la región sin frontera se mapea dentro de una región limitada circular con frontera, donde los problemas sean más fácilmente resueltos.

En el caso de dos dimensiones, el exterior puede ser modelado por otra región también circular, que representa el campo lejano, donde en su centro, el valor del potencial  $\vec{A}=0$ . A los bordes de los círculos que limitan ambas regiones se les imponen condiciones de frontera periódicas. Con ello se consigue forzar la continuidad de  $\vec{A}$  en los bordes de



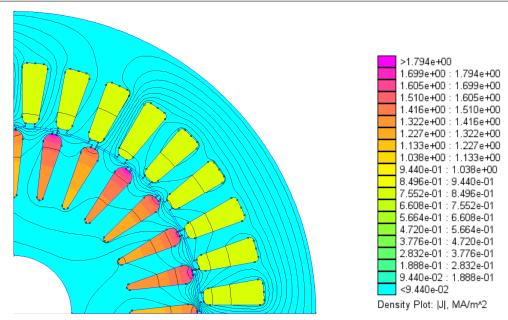


Figura 9.2: Módulo de la densidad de corriente en el modelo continuo por elementos finitos.

ambas regiones.

Por otra parte, con la finalidad de hacer más eficiente el estudio, se ha reducido los análisis al primer cuadrante de la sección de la máquina. Los valores de distribución en el primer cuadrante, se ha comprobado que equivalen a la cuarta parte de los valores totales que se determinan en la sección completa (Fig. 9.2).

Para ello, ha de tenerse en cuenta que las condiciones de contorno en ambos lados adyacentes a los otros cuadrantes, que deberán ser antiperiódicas.

Ello reducirá enormemente los tiempos y los costes computacionales. Por tanto, todos los análisis están reducidos al primer cuadrante (Fig. 9.2).

### 9.4. Identificación del modelo paramétrico.

Una máquina de inducción con un rotor en movimiento puede ser modelada usando un modelo circuital relativamente simple [BFG90, ÇA06, Mee02, MST09]. Este modelo está basado en uno más complejo como el que se desarrolla en el anexo D [SM10b, SM, SM09].

Aunque los parámetros circuitales pueden ser a menudo aproximados por expresiones

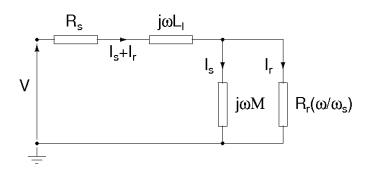


Figura 9.3: Modelo simple por fase del motor de inducción en régimen estacionario.

de forma en términos explícitos en cuanto a la geometría del motor, la identificación de estos parámetros mediante el análisis por el FEM consiste en validar las aproximaciones y simplificaciones que inevitablemente tienen que ser hechas en la derivación de las fórmulas de diseño analíticas.

Para identificar parámetros en un modelo de motor de inducción, se necesita un modelo razonablemente sencillo que podría ser el mostrado en la figura 9.3.

En este modelo, el flujo de dispersión está agrupado en el lado del estátor, en la impedancia  $L_l$  [BCL07]. La inductancia M, es la inductancia mutua entre el rotor y el estátor. Representado por  $R_r(\omega/\omega s)$ , se tiene el trabajo disipado en forma de calor en el rotor y en la carga como potencia mecánica.

Si  $\omega$  es la frecuencia angular en radianes/segundo y p es el número de pares de polos, la frecuencia de deslizamiento  $\omega_s$  en términos de frecuencia eléctrica y velocidad mecánica de rotor  $\omega_r$ , queda definida en (9.3) de la siguiente forma

$$\omega_s = \omega - p\omega_r \tag{9.3}$$

o sea, como la diferencia entre la frecuencia eléctrica y la frecuencia mecánica del rotor. Como relaciones útiles, se obtienen la inductancia dependiente de la frecuencia de deslizamiento (9.4), mostrándose el resultado en sus componentes real y compleja

$$L(\omega_s) = \left(L_l + \frac{M}{1 + (\tau \omega_s)^2}\right) - j\left(\frac{\tau \omega_s M}{1 + (\tau \omega_s)^2}\right)$$
(9.4)

La dependencia de  $L(\omega_s)$  sobre la frecuencia de deslizamiento, permitirá identificar

algunos parámetros del motor como la inductancia mutua M, la inductancia de dispersión  $L_l$  y la resistencia del rotor  $R_r$  [MST09], siendo  $\tau$  la constante de tiempo del rotor definida como  $M/R_r$ .

Como validación del modelo se obtiene la expresión (9.5), perfectamente válida para el par electromagnético  $T_e$ .

$$T_e = 3pMI^2 \left(\frac{\tau \omega_s}{1 + (\tau \omega_s)^2}\right) \tag{9.5}$$

Si la corriente se toma como constante y la frecuencia de deslizamiento se varía, se obtiene una curva con un par máximo en  $\tau \omega_s = 1$ .

#### 9.5. Análisis mediante el FEMM.

Al usar el FEMM, se analiza el rotor de forma estática. En el caso de velocidad cero, el deslizamiento de frecuencia simplemente degenera a  $\omega_s = \omega$ .

Lo lógico sería hacer la identificación de los parámetros en base a los resultados de par  $T_e$  analizados, usando una corriente de estátor constante sobre un rango de frecuencias, simulando así el movimiento del rotor. Pero entonces el cálculo del par debe hacerse mediante el tensor de Maxwell (9.6), lo que es menos preciso en los desarrollos integrales que incorpora el programa FEMM.

La densidad de fuerza del tensor de Maxwell dada en  $N/m^2$  para un motor circular, queda definida por las componentes normal y tangencial de la densidad de flujo (9.6).

$$p_{t} = \frac{B_{n}B_{t}}{\mu_{0}}$$

$$p_{n} = \frac{B_{n}^{2} - B_{t}^{2}}{2\mu_{0}}$$
(9.6)

El modulo de la densidad de flujo es  $|B| = \sqrt{B_n^2 + B_t^2}$ , como se encuentra representado en la figura 9.8. Entonces, el par electromagnético dado en N\*m a lo largo del entrehierro, queda definido como  $T_e = \oint r\left(\frac{B_n B_t}{\mu_0}\right) ds$ .

Sin embargo, otra opción sería mediante el ajuste de los resultados de inductancia que se obtienen por el análisis del bloque integral  $\vec{A} \cdot \vec{J}$ , formado por el potencial vector magnético y la densidad de corriente sobre el volumen del bobinado de interés, en el rango de frecuencias analizado [NPP04, PCU02].

De esta forma se obtiene una alta precisión, ya que la integral de volumen (9.7) está estrechamente relacionada con la energía almacenada.

$$L = \int \frac{\vec{A} \cdot \vec{J}}{|I|^2} d\nu \tag{9.7}$$

# 9.6. Ajuste de los parámetros por algoritmos genéticos.

Se han obtenido en primer lugar, los resultados analíticos del modelo para los cinco tipos de geometrías del rotor propuestas (Fig. 9.1), y en segundo lugar, los resultados de las simulaciones hechas mediante el análisis por elementos finitos mediante el FEMM.

Los resultados de ambos análisis han dado un perfil paramétrico de la máquina de inducción para cada geometría objeto de estudio.

En el análisis en frecuencia realizado para simular el movimiento del rotor, se ha obtenido la evolución de algunos parámetros significativos por fase como son el flujo y el par desde el tensor de Maxwell (9.6) calculado en el FEMM, para diferentes frecuencias de deslizamiento, con lo que se podrá identificar los parámetros M,  $L_l$  y  $\tau$  del motor de inducción.

Estos parámetros se han ajustado con GA mediante la función objetivo (9.8), tomando la parte real e imaginaria de la inductancia como función dependiente de la frecuencia de deslizamiento, estrechamente ligada con estos parámetros de ajuste. El procedimiento del GA, consiste en hacer mínimo el error cuadrático medio entre los valores obtenidos en las simulaciones en frecuencia mediante el FEMM (9.7), y los valores obtenidos del circuito equivalente (9.4) para cada geometría.

Capítulo 9. Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos.

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
$\tau(s)$	0.1635770	0.0703136	0.0619364	0.238499	0.0944839
M(H)	0.3131150	0.1646140	0.1402150	0.139849	0.1640650
$L_l(H)$	0.0155642	0.0068207	0.0093843	0.006775	0.0088807

Tabla 9.1: Valores óptimos resultantes de la solución por algoritmos genéticos de la constante de tiempo del rotor  $\tau(s)$ , la inductancia mutua M(H) y la inductancia de dispersión  $L_l(H)$ , para los cinco tipos de geometría.

$$E_{objetivo} = \sum_{K=0}^{10} \left( Re \left[ \int \frac{\vec{A}^k \cdot \vec{J}^k}{|I|^2} \right] d\nu - \left[ L_l + \frac{M}{1 + (\tau \omega_s^k)^2} \right] \right)^2$$
(9.8)

Para la parte imaginaria de la inducción, se utiliza la misma expresión anterior (9.8). En el GA, ha sido utilizado un genoma binario a decimal con 16 bits de resolución [ÇA06, VLHB04]. El algoritmo obtiene un valor óptimo para los parámetros M,  $L_l$ , y  $\tau$ . Para el ajuste de los tipos de geometría estudiados, los valores de los operadores evolutivos de selección, cruzamiento y mutación que permitieron un ajuste óptimo, se indican en la tabla 9.1.

### 9.7. Resultados y discusión.

Los valores generales aplicados en el algoritmo genético son los mismos, y se basan en un tamaño de poblaci'on = 50, un número de generaciones = 200, una probabilidad de mutaci'on = 0,01 y una probabilidad de cruzamiento = 0,6.

Como ejemplo, se representan en las figuras 9.4 y 9.5, los ajustes obtenidos para la geometría tipo 0, donde los valores resultantes del ajuste por GA han proporcionado unos valores para  $\tau = 0, 163577(s), M = 0, 313115(H), L_l = 0, 015564(H)$ .

La representación, muestra la parte real (Fig. 9.4) y la parte imaginaria (Fig. 9.5) de la inductancia L(H) del modelo circuital, ajustada con el modelo continuo simulado por el FEM. Para ello, se ha hecho un análisis en frecuencia, variando la frecuencia de deslizamiento desde 0 hasta 10Hz.

Los valores que permitieron este ajuste están recogidos en la tabla 9.1, junto con los

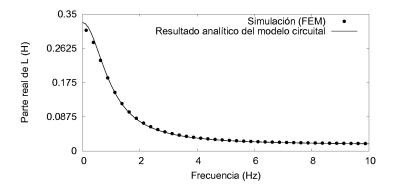


Figura 9.4: Ajuste de la parte real de la inducción mediante GA para la geometría de rotor tipo 0.

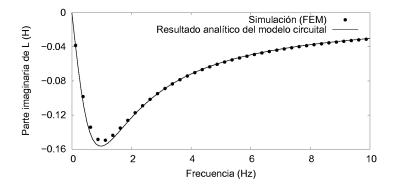


Figura 9.5: Ajuste de la parte imaginaria de la inducción mediante GA para la geometría de rotor tipo 0.

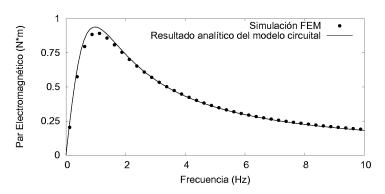


Figura 9.6: Validación del par electromagnético para la geometría de rotor tipo 0.

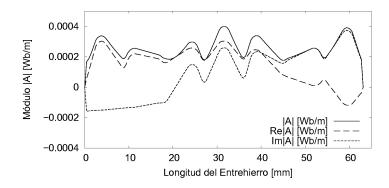


Figura 9.7: Perfil del módulo del vector potencial magnético y sus componentes complejas.

valores que ajustaron las demás geometrías. Estos valores determinan por su relación, el flujo concatenado con cualquier fase y el par como una función de corriente de fase.

Como validación del procedimiento, se ha representado en la figura 9.6 el par electromagnético entre el modelo circuital paramétrico y el tensor de Maxwell del FEM para la geometría tipo 0, donde el ajuste obtenido manifiesta la fiabilidad del método. Las simulaciones con el FEM, dan el par electromagnético utilizando el tensor magnético de Maxwell, y este es validado con el par electromagnético del modelo paramétrico (9.5).

La figura 9.7 muestra el módulo del vector potencial magnético, junto a sus partes real e imaginaria. La representación se muestra a lo largo del entrehierro en el primer cuadrante. La longitud del entrehierro es de 65mm en un cuadrante.

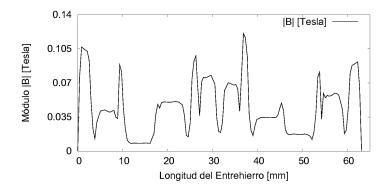


Figura 9.8: Módulo de la inducción magnética.

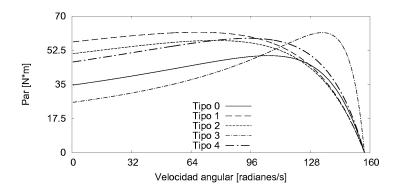


Figura 9.9: Representación de las curvas par-velocidad para todos los tipos de geometría.

La figura 9.8, muestra el perfil del módulo de la inducción magnética a lo largo del entrehierro en el primer cuadrante. Estos valores son necesarios para obtener el par electromagnético desde el tensor de Maxwell. La relación entre la figura 9.7 y la figura 9.8 viene dada por  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

Como parte de los resultados, se muestra una representación en la figura 9.9 de las curvas características de par-velocidad de todas las geometrías aplicadas a las barras del rotor que se han estudiado.

Así mismo, en la figura 9.10 se observan los diferentes valores de la intensidad en una de las fases para todas las geometrías estudiadas.

Estas curvas se han obtenido mediante un programa realizado en Scilab, donde se han

Capítulo 9. Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos.

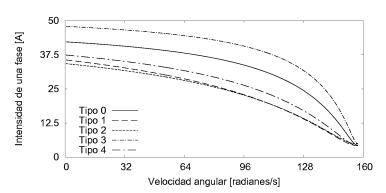


Figura 9.10: Representación de la intensidad en una de las fases, para todas las geometrías. incluido todos los valores de ajustes por GA mostrados en la tabla 9.1.

# Bibliografía

- [BCL07] A. Boglietti, A. Cavagnino, and M. Lazzari. Experimental high-frequency parameter identification of ac electrical motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 43(1):23–29, 2007.
- [BFG90] R. Belmans, R. D. Findlay, and W. Geysen. A circuit approach to finite element analysis of a double squirrel cage induction motor. *Energy Conversion*, *IEEE Transactions on*, 5(4):719–724, 1990.
- [ÇA06] M. Çunkaş and R. Akkaya. Design optimization of induction motor by genetic algorithm and comparison with existing motor. -, 2006.
- [ÇAB07] M. Çunkaş, R. Akkaya, and O. Bilgin. Cost optimization of submersible motors using a genetic algorithm and a finite element method. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(3-4):223–232, 2007.
- [DDWBF97] D. Dolinar, R. De Weerdt, R. Belmans, and E.M. Freeman. Calculation of two-axis induction motor model parameters using finite elements. *Energy Conversion*, *IEEE Transactions on*, 12(2):133–142, Jun 1997.
- [Mee02] D. Meeker. Induction motor example. *IEEE*, Los Alamitos, 2002.
- [MST09] B. Mirafzal, G.L. Skibinski, and R.M. Tallam. Determination of parameters in the universal induction motor model. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 45(1):142–151, Jan 2009.

- [NPP04] J. Nerg, J. Pyrhonen, and J. Partanen. Finite element modeling of the magnetizing inductance of an induction motor as a function of torque. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 40(4):2047–2049, 2004.
- [PCU02] T. Phumiphak and C. Chat-Uthai. Estimation of induction motor parameters based on field test coupled with genetic algorithm. In *Power System Technology*, 2002. Proceedings. PowerCon 2002. International Conference on, volume 2, pages 1199–1203. IEEE, 2002.
- [Sal95] S. J. Salon. Finite element analysis of electrical machines, volume 101. Kluwer academic publishers Boston, 1995.
- [SM] L. Simón and J. M. Monzón. El método de los elementos finitos para la identificación paramétrica de una máquina trifásica de inducción magnética, con algoritmos genéticos.
- [SM09] L. Simón and J. M. Monzón. Identificación paramétrica y análisis de sensibilidad de una máquina trifásica de inducción magnética. modelado del régimen dinámico. implementación en c++. 9º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), Aug 2009.
- [SM10a] L. Simón and J. M. Monzón. Identificación y ajuste paramétrico de una máquina trifásica de inducción magnética usando algoritmos genéticos. *Información tecnológica*, 21:105 114, Aug 2010.
- [SM10b] L. Simón and J. M. Monzón. Modelado del régimen dinámico y análisis de sensibilidad de una máquina trifásica de inducción magnética. *Información tecnológica*, 21:97 104, Feb 2010.
- [SM11] L. Simón and J. M. Monzón. Parametric identification of a three-phase machine with genetic algorithms. In *Computational Methods for the Innovative Design of Electrical Devices*, pages 167–184. Springer, 2011.
- [Urs03] R. K. Ursem. Models for evolutionary algorithms and their applications in system identification and control optimization. BRICS, 2003.

- [VLHB04] C. Von Lücken, A. Hermosilla, and B. Barán. Algoritmos evolutivos para optimización multiobjetivo: Un estudio comparativo en un ambiente paralelo asíncrono. In X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, 2004.
- [Wal96] M. Wall. Galib: A c++ library of genetic algorithm components. *Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology*, 87:54, 1996.
- [Wal00] M. Wall. Galib. A C++ Library for Genetic Algorithm Components. Massachusetts Institute of Tech, 2000.
- [Yam02] K. Yamazaki. An efficient procedure to calculate equivalent circuit parameter of induction motor using 3-d nonlinear time-stepping finite-element method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):1281–1284, 2002.

# Capítulo 10

# Conclusiones y Líneas Futuras de Trabajo.

,			
_	1	•	
In	$\sim$	10	$\sim$
			-
	•		$\sim$

1	0.1. Conclusiones	211
1	0.2. Líneas futuras de investigación	213

#### 10.1. Conclusiones.

En esta tesis se ha implementado mediante programación, el planteamiento de las ecuaciones de campo que se hace desde la FF para el análisis y diseño de un modelo de máquina de inducción magnética. A los modelos planteados, se le han acoplado modelos circuitales aportándose técnicas específicas para su resolución.

La bibliografía consultada indica una ausencia de herramientas informáticas de discretización basadas en la FF.

Uno de los principios característicos más importantes en la FF en su planteamiento, es que no se aplican ecuaciones diferenciales, ni ecuaciones integrales, ni ecuaciones de campo. En vez de ellas, en la FF se utilizan ecuaciones topológicas y constitutivas donde las magnitudes son globales.

La relación existente entre los elementos topológicos han contribuido a un conocimiento a priori del número de incógnitas, según sea la formulación que se utilice.

El estudio se ha realizado en diferentes etapas, utilizando el MNM para la solución de los modelos circuitales y como método numérico del conjunto, el CM.

Se ha planteado un problema electromagnético de corrientes inducidas en 2D, que incluyen ecuaciones circuitales de los modelos de conductor sólido y filiforme. Utilizando el MNM, se han definido nuevos conjuntos de elementos para el análisis circuital de ambos modelos.

También se ha planteado un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D, utilizando el CM.

Se han evaluado las densidades de corriente superficial y volumétrica, y para garantizar la consistencia de los problemas, se ha implementado un método puramente circuital para forzar la continuidad.

Como aportación de esta tesis en el estudio de una máquina eléctrica de inducción magnética, los resultados obtenidos de la implentación que se ha hecho de la FF con el CM, se han comprobado y validado mediante el FEM. Los estudios realizados se han hecho sobre un modelo basado en una sección bidimensional longitudinal de la máquina, con simetría plana, lo que ha permitido reducir el coste computacional.

Se han desarrollado una serie de experiencias en el conjunto mixto continuo-circuital, con excitación con corriente y con tensión. Estas experiencias se han ejecutado en un modelo lineal, en una situación con roturas en barras y en la fuente, y en un modelo no lineal de la sección de la máquina. Los resultados de todas las experiencias obtenidos mediante la FF y el CM, se han comparado y validado con los obtenidos aplicando el FEM, convergiendo los mismos.

De forma complementaria, se ha ajustado utilizando algoritmos genéticos, un modelo paramétrico con diferentes geometrías del rotor. El método utilizado para la identificación, es un análisis en frecuencia del modelo por elementos finitos y del modelo circuital. Y el método utilizado de optimización, los algoritmos genéticos evolutivos.

### 10.2. Líneas futuras de investigación.

La formulación finita en los análisis realizados en esta tesis, pueden ser ampliados en futuros desarrollos e investigaciones.

Una línea futura consiste en el desarrollo de nuevas ecuaciones constitutivas que contemplen singularidades en las propiedades físicas.

Se propone la implementación del método de la celda aplicando potenciales eléctricos, en lugar de sus duales magnéticos. De esta forma se reducirá el número de incógnitas.

Otra línea futura posible sería la deducción de las ecuaciones constitutivas térmicas para el estudio simultáneo de análisis electromagnéticos y térmicos aplicando el CM.

Finalmente, se propone el estudio de las homologías y cohomologías absolutas y relativas aplicadas a problemas electromagnéticos, para generalizar la incorporación en 3D de ecuaciones circuitales.

# Anexo A

# Publicaciones

### Acople del Método Nodal Modificado y el Método de los Elementos Finitos. Implementación en lenguaje scilab y C++

Monzón Verona, J.M.<sup>(1)</sup>, Santana Martín F.J.<sup>(1)</sup>, Simón Rodríguez L.<sup>(1)</sup>

(1)Universidad de Las Palmas de Gran Canaria Campus Universitario de Tafira Las Palmas de Gran Canaria jmonzon@die.ulpgc.es

#### Resumen

Se pretende con este trabajo relacionar las ecuaciones circuitales de parámetros concentrados con la técnica bien conocida del método de los elementos finitos, mediante una variación del método nodal modificado. Consiguiendo en una sola matriz ensamblar el comportamiento continuo de las ecuaciones de campo discretizadas con las ecuaciones puramente circuitales. Las ecuaciones se implementan en el lenguaje de programación scilab y C++. Posteriormente se exponen varios ejemplos de máquinas eléctricas.

Palabras clave: Mnm, fem, máquinas, eléctricas.

#### 1. Introducción

Existen en la actualidad diversos programas y librerías en C++ que estén especializadas en el método de los elementos finitos (Deal II, FreeFEM, expde, etc) y en métodos de análisis de circuitos (pspice, electric,etc), otros programas de tipo comercial (Cosmos, Ansys, Quicfield, etc). Ninguno de ellos trabaja simultáneamente con las dos técnicas de análisis. Es conveniente para ello desarrollar un método que contemple al mismo tiempo las dos herramientas, para poder así trabajar simultáneamente con modelos distribuidos y concentrados. Existen diversas referencias que utilizan ecuaciones circuitales utilizando métodos nodales puros o circuitales puros [2,4,5], asi como equivalentes de Thevenin o Norton [1], pero los estudios que utilizan técnicas avanzadas de análisis son escasos [3]. Se propone en este trabajo utilizar una variación del método nodal modificado MNM, conjuntamente con el método de los elementos finitos (FEM) y su implementación en el lenguaje de programación Scilab y C+++.

#### 2. Variación del método nodal modificado

La idea fundamental está en modificar el MNM introduciendo un nuevo conjunto de forma que se separen los elementos en cuatro conjuntos disjuntos entre sí. En un primer grupo se incluyen aquellos elementos que pueden ser expresados en forma de admitancias, el segundo conjunto por aquellos elementos no tienen representación en forma de admitancia o se requiere su intensidad, el tercer conjunto se incluyen las fuentes independientes de intensidad y por último un conjunto de elementos que incluyen tensiones e intensidades que nos sirvan de nexo de unión con el método de los elementos finitos (FEM). Esto resulta clave para eliminar todas aquellas incógnitas circuitales que no interesen y al mismo tiempo poder representar cualquier tipo de elemento lineal, cosa

#### The Finite Element Method For Parametric Identification Of A Three-Phase **Induction Machine With Genetic Algorithms**

Leopoldo Simón y José M. Monzón

Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Las Palmas de Gran Canaria Campus de Tafira Baja, 35017 Las Palmas (España)

Tel.:+34 928 452888, fax:+34 928 451874, e-mail: lsimon@pas.ulpgc.es, jmonzon@die.ulpgc.es

#### 1. Introduction.

In this paper a three-phase magnetic induction motor squirrel-cage is analyzed with the Finite Element Method (FEM). Five variations of the rotor geometry designs are analysed. The analysis has been made with simulations of static configurations. For each geometry an identification of the parametric model has been obtained. To the optimization of the parameters, genetic algorithms (GA) have been used as a robust optimization method. An induction machine with a moving rotor can be modeled using a relatively simple circuit model (Fig. 1). The dynamic behavior of the machine has been deduced simulations of mechanically through configurations. The purpose of the analysis is to identify the parameters in the circuital model. The circuit model can then be used in a wide variety of conditions, including the simulation of transient conditions [1]. Although circuit parameters can often be approximated by closed-form expressions in explicit terms, the identification of these parameters via FEM analysis will validate the approximations and simplifications that inevitably have to be made in the derivation of analytical design formulas [2]. The purpose of this paper is the parametric identification with FEM of five rotor geometry designs and the optimal adjustments of them using GA [3].

**Keywords:** Finite Element Method, Parametric Identification, Genetic Algorithms, Induction Machine.

#### 2. Induction Machine Model

The circuit model (Fig. 1) represents a phase of the machine at steady state with a constant electrical frequency and a constant mechanical speed. In this model, the entire leakage is lumped on the stator side in the inductance L<sub>1</sub> [1],[3]. The dependency of the inductance on the slip frequency provides a way to identify motor parameters. These results, the circuital model and the FEM analysis, will provide a profile of the parametric induction machine. A frequency analysis is applied, allowing identification of a circuital model and

continuous model (FEM) using different static configurations at different frequencies. The result is the flux per phase evolution and electromagnetic torque at different slip frequencies identifying the parameters M, mutual inductance,  $L_1$  leakage inductance and  $\tau$  the rotor time constant of the induction motor [2].

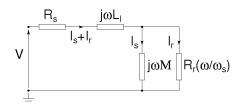


Fig. 1. Simple steady state per phase circuit model.

The adjustment and optimization for these parameters (M,  $L_1$  and  $\tau$  ), has been made with genetic evolutionary algorithms applied to obtain optimal values within a compromise that minimizes the objective function [3]. The objective function is the real part and imaginary part of inductance as a sliding frequency dependent function, that is closely related to the parameters M,  $L_1$  and  $\tau$ .

#### 3. Results.

The operator values used in GA correspond to: 50 population size, 200 number of generations, 0.01 mutation probability, and 0.6 the crossover probability. Table 1, show the adjustment between the analytical results of the parametric model and those results obtained by the FEM for different types of rotor geometries analyzed. Results for the rotor geometry type 2 of an induction machine adjusted by GA are shown in Fig. 2a. and Fig. 2b.

#### 4. Conclusions.

The parametric model of the five rotor geometries have been adjusted with the FEM continuous model. The curves torque-speed of the different types of geometry

# ISEF 2009 - XIV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering Arras, France, September 10-12, 2009

# PARAMETRIC IDENTIFICATION OF A THREE-PHASE INDUCTION MACHINE WITH GENETIC ALGORITHMS.

#### L. Simón and J. M. Monzón

Electric Engineering Department, ULPGC, Spain – lsimon@pas.ulpgc.es, jmonzon@die.ulpgc.es

<u>Abstract</u> - In this paper a three-phase magnetic induction motor squirrel-cage is analyzed with the Finite Element Method (FEM). Five variations of the rotor geometry design are analyzed. The analysis has been made with simulations of static configurations. For each geometry an identification of the parametric model has been obtained. For the optimization of the parameters, Genetic Algorithms (GA) have been used as a robust optimization method.

#### **Introduction**

Computational tools have allowed to carry out numerical techniques that were once unattainable. The simulation models of equivalent circuit models, based on their equilibrium equations and the discrete modeling methods, like FEM, are well known [1]-[5]. However, these numerical techniques have been applied only with the emergence of these powerful computational tools. The identification of the induction machine and its control are important in the modeling process prior to manufacture. Also, its optimization is necessary because the existing industrial processes require specific designs. The main contribution of this paper is the parametric identification of a three-phase magnetic induction motor, with five rotor geometry designs (Fig. 1). The parameters of the proposed circuit model of the motor, are adjusted applying Genetic Algorithms to each geometry. The adjustment is done, minimizing the square error of the results obtained with the continuous FEM model, for all the different geometries [5]-[7]. The FEM is an approximation method, to resolve continuous problems [1],[2],[8]. Its approach is based on transforming a continuous object, in an approximate discrete model. This transformation is known as a discretization of the model. The knowledge of what is inside the body of this model, is obtained by interpolation of known values at the nodes. It is therefore an approximation of the values of function, from the knowledge of a specific and finite number of points. Parallel to the technological evolution that has allowed the design of powerful electronic tools for calculation, the algorithms have evolved in complexity and abstraction, to solve many scientific problems. Genetic Algorithms are a proof of it [9]-[12]. Once again, a natural process, as the selection and evolution of individuals from a population, has been applied to the scientific world to observe the evolution of the systems and observe the trend, starting from a certain initial condition. They apply the rules of the nature. The individuals of a population exchange information, through the evolutionary operators. There are three main genetic operators: selection, crossover and mutation. By the selection, the individuals are chosen from the population, according to the value of the adaptation function, to undergo the future action with the other operators. The crossover operator, is responsible for exchanging components of the individuals selected, to produce new solutions, taking care of the transfer by inheritance of the characteristics of the best individuals from one generation to the next. The mutation, is used as an operator which aims to explore at random, the new portions of the search space by introducing new genetic material in the search for solutions. The major advantage of these algorithms in comparison with other optimization methods, is that they are able to locate an absolute extreme of the function, rather than a local extreme, and that the initial estimate does not have to be close to the actual values. Moreover, the Genetic Algorithms are working directly over the function and do not require the use of its derivative, or any other auxiliary function. All this methodology applied to the study of induction machines, allows a new viewpoint and increases the knowledge of induction machines. The finite element program used is the Finite Element Method Magnetics (FEMM). It is a highly versatile free

# Identificación Paramétrica y Análisis de Sensibilidad de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética. Modelado del Régimen Dinámico. Implementación en C++.

#### Leopoldo Simón y José Miguel M. Verona

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Islas Canarias, España. E-mail: Isimon@pas.ulpqc.es

#### RESUMEN

En este artículo se plantea y desarrolla un análisis teórico de una máquina de inducción magnética trifásica, donde se hace una identificación paramétrica de la misma así como su modelado a partir de su circuito equivalente. En el planteamiento se ha hecho un modelado singular de la parte mecánica, así como de la máquina en su conjunto. Las ecuaciones obtenidas se han resuelto y se han planteado en variables de estado, haciendo posible que las ecuaciones diferenciales puedan ser expresadas de forma que sus primeras derivadas se encuentren despejadas, llegándose a un método unificado para el estudio de sistemas para su análisis y simulación. Mediante unos programas desarrollados en C++, se ha hecho un completo análisis circuital de sensibilidad entre el modelo permanente y el modelo dinámico, que ha permitido observar y estudiar la influencia e interrelación de sus parámetros. Ello permitirá un ajuste paramétrico óptimo, con aplicaciones diversas, por ejemplo como paso previo para el diseño de un regulador para su control.

#### INTRODUCCIÓN

Las máquinas de inducción presentan un difícil problema de control. Esto es debido principalmente a que el modelo dinámico del sistema no es lineal, a que las intensidades en el rotor no son medibles, y al calentamiento resistivo, que hace variar el valor de las resistencias rotóricas considerablemente con su correspondiente efecto en la dinámica del sistema. Se da la circunstancia en la que se desea hacer in-situ, una auditoría o evaluación de motores existentes en una industria, con el fin de conocer su rendimiento y minimizar costes; más aún, existe una situación de diseño previo a la construcción de un motor de inducción, donde es necesario el conocimiento de sus parámetros, para evaluarlos y ajustarlos a las especificaciones de construcción que se demandan. También, en lo que respecta al control, se hace necesario tener un modelo paramétrico en bucle que sea observable, y que ayude en los procesos de diseño a la optimización de los dispositivos controladores. Por lo tanto, conocer los parámetros que permitan la identificación de las máquinas, y como estos influyen entre sí, es una tarea que se plantea hoy como una necesidad para su correcto cálculo, control y evaluación.

#### **DESARROLLO TEÓRICO**

Para la identificación paramétrica de la máquina de inducción, se ha establecido un modelo circuital equivalente a partir de las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + L^s p & 0 & M^{sr} p & 0 \\ 0 & R^s + L^s p & 0 & M^{sr} p \\ M^{sr} p & nM^{sr} \omega^r & R^r + L^r p & nL^r \omega^r \\ -nM^{sr} \omega^r & M^{sr} p & -nL^r \omega^r & R^r + L^r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^t \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix}$$

$$T^r = (Jp + D)\omega^r + nM^{sr} (i_d^s i_q^r - i_q^s i_d^r)$$
(1)

Para la conversión de las tres fases del motor de inducción trifásico en componentes más sencillas d-q-0, se han utilizado las transformaciones de Park, ya que utilizan magnitudes reales. Los problemas que se presentan en las máquinas reales, requieren una solución que corresponde al régimen estacionario. Clásicamente, para las máquinas utilizadas en los sistemas de control, se aplica la

# Identificación Paramétrica de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética, con Algoritmos Genéticos.

#### Leopoldo Simón y José M. Monzón

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Islas Canarias, España. E-mail: <a href="mailto:lsimon@pas.ulpqc.es">lsimon@pas.ulpqc.es</a>

#### **RESUMEN**

El propósito de este artículo es mostrar los resultados de los análisis realizados mediante el método de los elementos finitos (MEF) de un motor trifásico de inducción magnética, al cual se le han aplicado diferentes geometrías en el diseño del rotor (Fig. 1). Estas variaciones geométricas del rotor crean un perfil estructural y electromagnético diferente para cada tipo de geometría. Para estudiar el rotor en movimiento, se procede con un análisis en frecuencia del modelo que en definitiva, permitirá simular la evolución del sistema, tanto del modelo circuital como del modelo continuo por elementos finitos. Los parámetros identificativos deducidos desde el MEF, se ajustarán mediante algoritmos genéticos evolutivos (AG). De esta forma, los parámetros en el modelo circuital quedarán identificados para cada geometría objeto de estudio. En los resultados, también se hace una comprobación del par, como validación del modelo entre los resultados analíticos del modelo circuital y los obtenidos mediante el MEF, comprobando y verificando la exactitud del método (Fig. 5).

#### INTRODUCCIÓN

La herramienta informática ha permitido llevar a cabo técnicas numéricas que antaño eran irrealizables, como son la simulación de modelos circuitales equivalentes basados en sus ecuaciones de equilibrio (Fig. 2), y métodos de modelado discreto como el de elementos finitos, conocidos desde hace bastante tiempo, pero sólo aplicables a partir de la aparición de estas poderosas herramientas de cómputo. No solo es interesante la identificación y el control en las máquinas de inducción, ya sea para auditorías o modelado constructivo previo, sino que también es necesaria su optimización ante la variedad de procesos industriales existentes, que particularizan distintos diseños de las mismas. La aportación de este artículo está en el ajuste por AG de los parámetros del modelo circuital (Meeker D., 2002; Mirafzal B. et al., 2007)) de un motor trifásico de inducción magnética, con diferentes geometrías en el diseño del rotor (Fig. 1), minimizando el error cuadrático de los resultados obtenidos con el modelo continuo MEF, para las distintas geometrías. El MEF, es un método de aproximación de problemas continuos (Belmans R. et al., 1990; Tandom S.C., 1982). Su planteamiento se basa en la transformación de un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. Esta transformación es denominada como discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. Es por tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos. Paralelamente a la evolución tecnológica que ha permitido el diseño de potentes herramientas electrónicas de cálculo, han evolucionado en complejidad y abstracción los algoritmos para resolución de multitud de problemas científicos. Los algoritmos genéticos son una prueba de ello (Lücken Martínez C.D., 2003; Rasmus K.U., 2003). Una vez más, un proceso natural como la selección y la evolución de los individuos en una población, ha sido aplicado al campo científico para hacer evolucionar sistemas y observar su tendencia, a partir de ciertas condiciones iniciales. Los individuos en las poblaciones intercambian información por medio de operadores evolutivos. Existen tres operadores genéticos principales: la selección, el cruzamiento y la mutación. Mediante la selección, los individuos son escogidos de la población de acuerdo al valor de su función de adaptación, para someterse a la acción futura de otros operadores. El operador de cruzamiento se encargará de intercambiar los componentes de los individuos seleccionados para producir nuevas soluciones, encargándose de la transferencia por herencia de las características de los mejores individuos de una generación a la siguiente. La mutación es utilizada como un operador cuyo propósito es la exploración aleatoria de nuevas porciones del espacio de búsqueda, introduciendo nuevo material genético en la búsqueda de soluciones. La ventaja importante de estos algoritmos sobre otros métodos de optimización, es que son capaces de encontrar un extremo de la función global o absoluto, en lugar de uno local, y que la estimación inicial no tiene que estar cerca de

### Modelado del Régimen Dinámico y Análisis de Sensibilidad de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética

#### Leopoldo Simón y José M. Monzón

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Islas Canarias-España (e-mail: Isimon@pas.ulpgc.es)

Recibido Oct. 29, 2009; Aceptado Ene. 19, 2010; Versión Final recibida Feb. 12, 2010

#### Resumen

En este artículo se presenta un análisis teórico de una máquina de inducción magnética trifásica, que incluye una identificación paramétrica a partir de su circuito equivalente. En el planteamiento se ha hecho un modelado singular de la parte mecánica en el mismo circuito equivalente, así como de la máquina en su conjunto. Las ecuaciones obtenidas se han planteado en variables de estado, haciendo posible que las ecuaciones diferenciales puedan ser expresadas de forma que sus primeras derivadas se encuentren despejadas, llegándose a un método unificado para su análisis y simulación numérica. Mediante unos programas desarrollados en C++, se ha hecho un completo análisis de sensibilidad para el modelo permanente y el modelo dinámico. Esto ha permitido observar y estudiar la influencia e interrelación de sus parámetros.

Palabras clave: identificación paramétrica, circuito equivalente, variables de estado, análisis de sensibilidad

# Dynamic Modeling and Sensitivity Analysis of a Magnetic Three-Phase Induction Machine

#### Abstract

In this paper a theoretical analysis of magnetic three-phase induction machine is presented, including an identification parameter from its equivalent circuit. The approach has become an outstanding model for the mechanical part in the same equivalent circuit, and the machine as a whole. The equations obtained have been raised as state variables. Then, the differential equations can be expressed in function of the first derivative, obtaining a unified method for the simulation and numerical analysis. Through programs developed in C++, a complete sensitivity analysis for the steady state and dynamic models was developed. This allowed to observe and to study the influence and relationship between these parameters.

Keywords: identification parameter, equivalent circuit, state variables, sensitivity analysis

#### Identificación y Ajuste Paramétrico de una Máquina Trifásica de Inducción Magnética usando Algoritmos Genéticos

#### Leopoldo Simón y José M. Monzón

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Islas Canarias-España (e-mail: Isimon@pas.ulpgc.es)

Recibido Oct. 29, 2009; Aceptado Ene. 18, 2010; Versión Final recibida Feb. 12, 2010

#### Resumen

En este artículo se analiza mediante el método de los elementos finitos un motor trifásico de inducción magnética, al cual se le han aplicado diferentes geometrías de barras en el rotor. Estas variaciones geométricas del rotor crean un perfil electromagnético diferente para cada tipo de geometría. Para estudiar el rotor en movimiento, se procede con un análisis en frecuencia del modelo que permitirá simular la evolución de la máquina eléctrica, tanto del modelo circuital como del modelo continuo por elementos finitos. Los parámetros identificativos deducidos del método de los elementos finitos, se ajustaron mediante algoritmos genéticos evolutivos. De esta forma, los parámetros en el modelo circuital quedan identificados para cada geometría objeto de estudio. Se hace también una comprobación del par como validación del modelo, comprobando y verificando la exactitud del método.

Palabras clave: elementos finitos, análisis en frecuencia, parámetros identificativos, algoritmos genéticos

### Identification and Parametric Adjustment of a Three-Phase Induction Machine with Genetic Algorithms

#### Abstract

In this paper the finite element method is applied to the analysis of a three-phase magnetic induction motor squirrel-cage. Different geometries have been applied in the design of the rotor. These geometric variations of the rotor create an electromagnetic profile for each type of geometry. To study the rotor motion, a frequency analysis of the model has been done. The identifying parameters deduced from the finite element method, are adjusted by evolutionary genetic algorithms. Thus, the parameters in the circuit model were identified for each geometry under consideration. A check of the torque was done to validate the model, verifying the accuracy of the method.

Keywords: finite element, frequency analysis, identifying parameters, genetic algorithms

## Chapter 9

## Parametric Identification of a Three-Phase Machine with Genetic Algorithms

L. Simón and J.M. Monzón

Electric Engineering Department, ULPGC, Spain lsimon@pas.ulpgc.es, jmonzon@die.ulpgc.es

**Abstract.** In this chapter a three-phase magnetic induction motor squirrel-cage is analyzed with the Finite Element Method (FEM). Five variations of the rotor geometry design are analyzed. The analysis has been made with simulations of static configurations. For each geometry an identification of the parametric model has been obtained. For the optimization of the parameters, Genetic Algorithms (GA) have been used as a robust optimization method.

#### 9.1 Introduction

Computational tools have allowed to carry out numerical techniques that were once unattainable. The simulation of equivalent circuit models, based on their equilibrium equations and the discrete modeling methods, like FEM, are well known [5, 13, 22]. However, these numerical techniques have been applied only with the emergence of these powerful computational tools. The identification of the induction machine and its control are important in the modeling process prior to manufacture [1, 9, 18, 19]. Also, its optimization is necessary because the existing industrial processes require specific designs [10, 11, 18].

The main contribution of this paper is the parametric identification of a three-phase magnetic induction motor, with five rotor geometry designs (Fig. 9.1). The parameters of the proposed circuit model of the motor, are adjusted applying Genetic Algorithms to each geometry [3, 6, 8]. The adjustment is done, minimizing the square error of the results obtained with the continuous FEM model, for all the different geometries [4, 15, 19].

The FEM is an approximation method, to resolve continuous problems [2, 14, 20, 22]. Its approach is based on transforming a continuous object, in an approximate discrete model. This transformation is known as a discretization of the model. The knowledge of what is inside the body of this model, is obtained by interpolation of known values at the nodes. It is therefore an approximation of the values of function, from the knowledge of a specific and finite number of points [7, 17, 21].

Las Palmas de Gran Canaria (Spain), 13th to 15th April, 2010

# Cell Method and Modified Nodal Method in Eddy Current Electromagnetic Problems

L. Simón and J.M. Monzón

Department of Electrical Engineering University of Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (Spain)

Phone/Fax number:+0034 928 452888/451874, e-mail: lsimon@pas.ulpgc.es, jmonzon@die.ulpgc.es

**Abstract.** This paper present an approximation of an electromagnetic eddy current problem in 2D coupled with circuital equations, using the Finite Formulation of Electromagnetics Fields and the modified nodal method. The definition equations of the two conductor models (filiform and solid types) are deducted with this formulation. The analysis is performed at steady state and transient state. To the transient state, a classical scheme of time discretization is used with the implicit Runge-Kutta method for two states. As validation method have been compared results between Finite Element Method and Finite Formulation of Electromagnetics Fields.

#### **Key words**

Finite Formulation, Modified Nodal Method, Transient State, Implicit Euler Method.

#### 1. Introduction

There are several references that use the circuital equations using modified nodal method (MNM) and finite element method (FEM) [1], [2], [3].

In this paper is used a variation of the modified nodal method (MNM) and the finite formulation of electromagnetics fields (FFEF) applied to the Maxwell's equations. With this procedure is possible to assemble the continuous behavior of the discretized field equations, with the circuital equations in a single matrix.

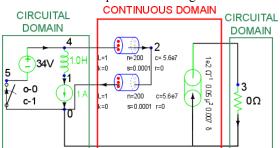


Fig. 1. Mixed-models representation.

The matrix equations are implemented with the Scilab, a scientific software package for numerical computations.

To the continuous domain discretization is used the Gmsh program, that is an automatic 3D finite element mesh generator, with pre- and post-processing facilities [4]. In this paper is developed a method that uses both tools, the MNM and FFEF. This allows the simultaneous analysis of the distributed and concentrated models as shown in Fig. 1.

#### 2. Finite Formulation

The finite formulation of electromagnetics fields (FFEF) is based on the use of scalar global variables [5], obtained by integrating field variables on a double system of meshes, strictly connected by relations of duality.

Global variables are distinguished in two types, the configuration variables (CV) associated to the primal mesh and the source variables (SV), associated to the dual one. CV involved in the magnetostatic problems are magnetic fluxes  $\varphi$  on primal faces and line integral a of magnetic vector potential on primal edges. The considered SV are magnetomotive forces F on dual edges.

The proposed solution relies on the portioning of the magnetic domain in a dual system of barycentric hexahedral meshes but the same theoretical scheme can be applied to unstructured meshes [6]. The topological magnetostatic equations are expressed according to Tonti formulation [5].

#### 3. Variation of the MNM

The fundamental idea is to modify the MNM introducing two new sets respect to this method, so that the elements are separated into five disjoint sets between them Fig. 2. In a first group  $A_1$ , those elements that can be expressed as admittances are included. In a second group  $A_2$ , are included those elements that can not be represented as admittance or a current value is required. The third group  $A_3$ , the independent current sources are included. In a fourth group  $A_4$ , the so called 'solid conductor model' elements are modeled. At this set are includes the voltages

#### **Computational Geometry applied to Finite Formulation.**

Simón Rodríguez L.; González Domínguez P.; Monzón Verona J.M.

Department of Electrical Engineering, University of Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (Spain). Phone/Fax number: +0034 928 452888/451874 e-mail: <a href="mailto:lsimon@pas.ulpgc.es">lsimon@pas.ulpgc.es</a>, <a href="mailto:pgo.es">pgonzalez@die.ulpgc.es</a>, <a href="mailto:jmon@die.ulpgc.es">jmonzon@die.ulpgc.es</a>,

<u>Abstract</u> – In this paper the basic elements of the computational geometry and topology associated with the finite formulation are exhibited. The topological elements are related themselves by the incidences, and give place to a set of topological matrices so called G, C, and D and his respective dual ones  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{C}$ , and  $\tilde{D}$ . In each matrix there is represented a directed graph formed by the pairs of elements that constitute it. Using Euler-Poincarè formula, it will be possible to quantify the relations between the different elements. But especially for very dense mesh, where the number of equations is quite high and it become necessary to have any tool that determines quantitatively these relations. An asymptotic approximation of the above mentioned formula is appeared, which makes this quantification possible providing information about the number of equations and the number of unknowns.

#### 1 Introduction.

In physical theories, a big underlying geometric structure exists. Geometry is the mother tongue of numerous current physical and mathematics theories [11]. The elements of a topological network and their relations are defined in this work. The complex cell is a basic topological tool that determines the notions of orientation, duality and numbers of incidence, by means of a set of topological primal and dual matrices [5, 12]. The complex cells are going to represent the named oriented graphs or directed graphs [9]. Graph Theory has played a fundamental role in the discovery of structural properties in the electrical circuits. This is because they are a pictographic representation of the circuits and they capture all his structural characteristics. In the circuital matrices will be reflected the dual nature of the circuits and the cut-sets, by means of the tree and the fundamental loop matrices and fundamental cut-set matrices. To find these circuital matrices an implementation of the algorithm of Welsh [8] is used. The Euler-Poincarè expressions are going to determine the quantitative relations that exist between the topologic elements. This quantification allows know the relation between the number of equations and the number of unknowns in certain problems. In the meshes, this quantification corresponds to the Euler-Poincarè formula and his characteristic. The quantification depends of the topological objet genus. In very dense meshes, it is possible to obtain an empirical relation between the number of elements and the nodes elements. This allows a previous knowledge of the equations number and unknowns number. A program written in C ++ has been developed to obtain incidence matrices. That is the base of finite formulation. The free software Gmsh is used as mesher, Gmsh includes meshes generator, a CAD motor and postprocessor [7].

#### ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering Funchal, Madeira, September 1-3, 2011

#### Global Equation of Cell Method and Modified Nodal Method of Electromagnetic and Circuital Problems

Monzón Verona J.M.; Simón Rodríguez L.; González Domínguez P.

Department of Electrical Engineering, University of Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (Spain). Phone/Fax number: +0034 928 452888/451874 e-mail: <u>imonzon@die.ulpgc.es</u>, lsimon@pas.ulpgc.es, <u>pgonzalez@die.ulpgc.es</u>

<u>Abstract</u> – This paper present an approximation of an electromagnetic eddy current problem coupled with circuital equations, using Cell Method (CM) and the Modified Nodal Method (MNM) of circuit theory. The definition equations of the two conductor models (filiform and solid types) are deducted with this formulation. The analysis is performed at steady state and transient state. To the transient state, a classical scheme of time discretization is used with the Theta's method. As validation method have been compared results between Finite Element Method and Finite Formulation of Electromagnetic Fields.

#### 1 Introduction.

In the technical literature there are several references that use the circuital equations using (MNM) and finite element method (FEM) [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. In this paper is used a variation of the (MNM) and the finite formulation of electromagnetic fields [8] applied to the Maxwell's equations. With this procedure is possible to assemble the continuous behavior of the discretized field equations, with the circuital equations in a single matrix. The matrix equations are implemented with the Scilab, a scientific software package for numerical computations.

To the continuous domain discretization is used the Gmsh program, that is an automatic 3D finite element mesh generator, with pre and post-processing facilities [9]. In this paper is developed a method that uses both tools, the MNM and FFEF. This allows the simultaneous analysis of the distributed and concentrated models.

All existing numerical methods for the solution of the field equation have, in one way or another, a differential formulation as their starting point. A discrete formulation is then obtained by means of the many discretization methods, such as Finite Difference Methods, Finite Element Method, Boundary Element Method, etc. As an alternative, most of the researchers reformulate field laws in finite form so that an algebraic system of equations is directly written to solve the field problem, avoiding the use of the discretization process applied to a differential equation. This approach is the Finite Formulation and the corresponding numerical method is known as the (CM) [10], [11], [12], [13].

The (FFEF) is based on the use of scalar global variables [8], obtained by integrating field variables on a double system of meshes, strictly connected by relations of duality. Global variables are distinguished in two types, the configuration variables (CV) associated to the primal mesh and the source variables (SV), associated to the dual one. CV involved in the magnetostatic problems are magnetic fluxes f on primal faces and line integral a of magnetic vector potential on primal edges. The considered SV are magnetomotive forces *F* on dual edges.

# The Fundamental Loop Matrix in Eddy Current Problem with Finite Formulation

#### Leopoldo Simón Rodríguez, José Miguel Monzón Verona

Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Campus Universitario de Tafira, 35017 Las Palmas, España lsimon@pas.ulpqc.es, jmonzon@die.ulpqc.es

#### Abstract

In this work we have discretized the partial differential equations of an eddy current problem using the finite formulation. The contribution of this paper is to force the condition of continuity of current through a purely circuital method. The method relies on the fundamental loop matrix and in a tree of a linear graph in the domain of the currents. To obtain the tree, has been used the Welsh's algorithm. The current density has been calculated in the centroids of the areas of the triangles and in the midpoints of the dual lines of the edges of the primal mesh.

**Keywords**: Finite Formulation, PDEs, Fundamental Loop Matrix, Linear Graph

#### 1. Introduction

Geometry plays a fundamental role in the discretization of the continuous field equations - PDE -. As discretization method has been proposed finite formulation. In this formulation, the standard operators are gradient, curl and divergence are the equivalent to discrete matrices G, C and D [1][2]. These arrays have a topological nature definition, since they correspond to the incidences between the geometric elements involved in the discretization of the PDE.

As a part of the definition of the topological structure and its relationship with physical quantities, we have followed the classification of Tonti and his diagrams [3][4]. Tonti classifies electromagnetic quantities in source variables, configuration variables and energy variables.

Moreover, in the finite formulation this classification is associated with a pair of intertwined complex cells, the primal and the dual barycentric (Fig.1). Mutual interconnections of the primary cell K describe the incidence matrix G between

## The Fundamental Loop Matrix B in the Cell Method. Application to an Electromagnetic Eddy Current in 3D

Leopoldo Simón Rodríguez, José Miguel Monzón Verona Universidad of Las Palmas de Gran Canaria

#### Abstract

In this paper we have discretized the partial differential equations of an electromagnetic eddy current problem in 3D using the cell method. We have obtained results for the magnetic field and the induced currentsfor linear, surface and volumetric current excitations. The errorobtained is less than 0.15% when we compare with the finite element method. The contribution of this paper is to force the condition of continuity of superficial and volumetric current density through a purely circuital method. The method relies on the fundamental loop matrix B defined in a tree of a linear graph in the domain of the current sourse  $\Omega_s$ . To obtain the tree, we have been used the Welsh's algorithm. The superficial current density has been evaluated in the barycenter of the areas of the triangles and in the midpoints of the dual lines. The condition of continuity has been analyzed in cuts, specifics zones and a nodal balance to determinate what is the best evaluation of the currents. olumetric current density is evaluated on the centroid of the tetrahedra and the centroids of the dual faces observing also an improvement in the node balance.

Keywords: Finite Integration Technique, Cell Method, Eddy Current, PDE

#### 1. Introduction

Nowadays the design and analysis of electric machines is associated to powerful numerical tools. Numerical methods for the solution of an electromagnetic eddy current problem in 3D applied to the analysis of electrical machines, have an integral or differential formulation as their starting point. A discrete formulation can then be obtained by many methods of discretization, such as the Finite Element Method (FEM) [1], Finite Difference Method

# 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

## La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874 e-mail: leopoldo.simon@ulpgc.es, pablo.gonzalez@ulpgc.es, josemiguel.monzon@ulpgc, mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

<u>Resumen</u>— En este trabajo se discretizan las ecuaciones en derivadas parciales de un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D utilizando el método de la celda (CM). Se han calculado los resultados del campo magnético y corrientes inducidas para corrientes de excitación lineales, superficiales y volumétricas.

El error obtenido es menor de 0,15% cuando se compara con el método de los elementos finitos (FEM). La contribución de este trabajo está en forzar la condición de la continuidad de las corrientes superficiales y volumétricas de densidad de corriente, a través de un método puramente circuital. El método se basa en la matriz fundamental de bucle B, definido en un árbol de un grafo lineal en el dominio de las fuentes de corriente. Para obtener el árbol se utiliza el algoritmo de Welsh. La densidad de corriente superficial se evalúa en el baricentro de los triángulos y en los puntos medios de las líneas duales. La condición de continuidad se analiza en algunos cortes del dominio. Se hace un balance nodal para determinar la mejor evaluación de las corrientes en los nudos. La densidad de corriente volumétrica se evalúa en el centroide de los tetraedros y en los centroides de las caras duales.

## 1 Introducción.

Hoy en día, el diseño y el análisis de máquinas eléctricas se asocian a las herramientas numéricas de cálculo. Los métodos numéricos para la solución de un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D aplicadas al análisis de las máquinas eléctricas, tiene una formulación integral o diferencial como punto de partida. La formulación discreta se puede obtener entonces por muchos métodos de discretización, tales como el método de los elementos finitos (FEM), el método de las diferencia finitas (FDM), el método de los elementos del contorno (BEM), entre otros. Como alternativa, es posible formular las leyes de campo en forma finita de modo que, un sistema de ecuaciones algebraicas puede ser escrito directamente para resolver el problema de campo, evitando de esa forma el uso del proceso de discretización aplicada a una ecuación integral o diferencial. Este enfoque es el que se hace en la formulación finita (FF) y el método numérico correspondiente se conoce como el método de la celda (CM).

La geometría y la topología desempeñan un papel fundamental en la discretización de las ecuaciones de campo en derivadas parciales (PDE). Los operadores estándar gradiente, rotacional y divergencia son el equivalente en la FF a la matrices G, C and D. Estas matrices tienen una definición topológica natural, ya que corresponden a las incidencias entre los elementos geométricos involucrados en la discretización de la PDE. Para la definición de las cantidades físicas y la estructura topológica se ha seguido la clasificación de Tonti y sus diagramas. Tonti clasifica las cantidades electromagnéticas en variables de fuente, variables de configuración y variables

# 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

## El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874 e-mail: leopoldo.simon@ulpgc.es, pablo.gonzalez@ulpgc.es, josemiguel.monzon@ulpgc, mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

<u>Resumen</u>— El análisis de máquinas eléctricas mediante el método de los elementos finitos es bien conocido. Una de las aportaciones de este trabajo es la comprobación de la formulación finita aplicada en el estudio de máquinas eléctricas trifásicas de inducción magnética.

Los estudios realizados se han hecho sobre un modelo basado en una sección bidimensional de la máquina Junto al modelo discreto se han incorporado ecuaciones circuitales, particularmente de la fuente de alimentación. En un primer conjunto de experiencias, el sistema discreto se analiza imponiendo las corrientes de fase como fuente.

## 1 Introducción.

Se trabaja con una sección transversal de un prototipo de máquina eléctrica. En las hipótesis que se plantean se presupone una máquina recta, sin efecto skew.

De forma general, el conjunto será tratado como un gran dominio tridimensional, cuyos elementos discretos en el mallado serán tetraedros. La sección, por su diseño, tiene simetría plana, lo que permite un planteamiento singular de las variables magnéticas. Dado que el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  y el vector potencial magnético  $\vec{A}$  tienen el mismo sentido y son perpendiculares a la sección transversal, sus componentes magnéticas vectoriales sólo tienen valor en el eje Z, es decir, la circulación en las aristas de  $\vec{A}$  viene dada por la integral de línea  $a = \int \vec{A} \cdot \vec{dl}$ , donde sus componentes vienen dadas como  $\vec{A}(\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z)$ , siendo sus componentes  $\vec{A}_x = 0$  y  $\vec{A}_y = 0$ .

El valor del vector potencial magnético proyectado en las aristas de los triángulos de la superficie es cero, y donde único tiene valor es en los nudos, de tal forma que en las aristas del prisma (proyección de los nudos) que se forma por simetría, adquieren el valor del potencial magnético.

Es decir, las corrientes son perpendiculares y las incógnitas son las proyecciones en los nudos de las aristas proyectadas en ellos. En virtud de ello, el mallado que se utiliza es prismático por su correspondencia con la ortogonalidad de los vectores magnéticos y la simetría plana de la sección. El número de variables libres está determinada por el número de ramas del árbol, y el número de ramas donde el vector  $\vec{A}=0$  determina el número de incógnitas. El rango de la matriz del conjunto de ecuaciones del sistema es rango=número de ecuaciones -1. La matriz del conjunto de ecuaciones del sistema es singular por lo que se debe aplicar alguna condición de unicidad. La condición de unicidad se impone dándole un valor conocido a alguna de las incógnitas, es decir, asignando un valor a uno de los nudos. De esta forma el número de ecuaciones -1.

Como procedimiento general, se asigna un valor cero a uno de los nudos. Con respecto a las matrices de incidencia, en este caso la matriz G = C. El flujo magnético asociado a las caras del

# 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

## EL MÉTODO DE LA CELDA APLICADO AL ESTUDIO DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN MOTORES DE INDUCCIÓN

González Domínguez P. I., Simón Rodríguez L., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria 35017 – Tafira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874 e-mail: pablo.gonzalez@ulpgc.es, leopoldo.simon@ulpgc.es, josemiguel.monzon@ulpgc , mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

<u>Resumen</u>–El principal objetivo de este trabajo es estudiar una máquina eléctrica de inducción, también conocida como máquina eléctrica asíncrona, desde el punto de vista electromagnético y térmico mediante la aplicación del método de la celda.

La validación de los resultados obtenidos se hará comparando dichos resultados con los obtenidos sobre la misma máquina pero utilizando el método de los elementos finitos a partir de un software comercial de reconocido prestigio tal como Opera-3d, Getdp, etcétera.

El método de la celda (MC), o cell method (CM), ha sido aplicado al estudio del electromagnetismo, más en el ámbito de la Física que en el ámbito de la Ingeniería. En la bibliografía consultada hay unos pocos trabajos dedicados el estudio de corrientes parásitas (eddy currents) en máquinas eléctricas. Y, prácticamente nulos, en el estudio termodinámico de máquinas eléctricas aplicando el MC.

#### 1 Introducción.

A continuación se hará un resumen de las principales características del MC, comparándolos con otros métodos numéricos conocidos. El MC, después de analizar las estructuras comunes que poseen muchas teorías físicas, nace con objeto de formular directamente las ecuaciones de campo en su forma topológica. Consiste en una discretización del espacio-tiempo mediante dos complejos de celdas: la celda primal y la celda dual. Se distinguen una serie de variables: variables globales, de fuente, de configuración y de energía. Las variables están orientadas. Las variables pertenecientes al complejo primal están orientadas internamente. Las variables pertenecientes al complejo dual están orientadas externamente.

Las variables globales son continuas a través de espacios constituidos por diversos materiales. Por el contario, en la formulación diferencial, las variables de campo no son continuas para espacios compuestos de materiales heterogéneos. Esto dará lugar a que se tenga que recurrir a diversos artificios matemáticos para garantizar la continuidad y, por lo tanto, su derivabilidad.

Las variables globales se pueden utilizar directamente en la formulación finita. Por el contario, en la formulación diferencial son indispensables las funciones de campo. Las variables globales dependen del espacio y el tiempo, mientras que las variables de campo dependen de un punto y de un instante de tiempo.

Las variables de fuente describen el origen (fuente) del campo. Cualquier vinculación, tanto algebraica como diferencial, con este tipo de variables se hace sin la intervención de constantes físicas.

Las variables de configuración son las que describen la configuración del campo, sus potenciales y todas las variables que se pueden enlazar mediante operaciones algebraicas o diferenciales sin la

Valencia, Spain, September 10-12, 2015

## THERMAL CONSTITUTIVE MATRIX APPLIED TO ASYNCHRONOUS ELECTRICAL MACHINE USING THE CELL METHOD

P. González Domínguez (1); J. M. Monzón Verona (1); L. Simón Rodríguez, (1); S. García-Alonso (2)

University of Las Palmas de Gran Canaria

(1) Electrical Engineering Dept. and (2) Electronic and Automatic Dept.

35017 – Tafira, Las Palmas (Spain).

e-mail: pablo.gonzalez@ ulpgc.es; josemiguel.monzon@ulpgc.es; leopoldo.simon@ulpgc.es; santiago.garciaalonso@ulpgc.es

<u>Abstract</u> – In this work, we demonstrate the equivalence of two constitutive equations used in Fourier heat transmission problem, based on the method of the Cell Method. To obtain this constitutive equation, two different methodologies are used. Its results will be applied to the study of asynchronous electric machines in transient state in 3D.

### Introduction

Electrical machines generate heat. This heat is due to the Joule effect, the magnetic hysteresis of the cores, the eddy currents and to mechanical friction of the moving parts.

There is a direct relationship between the heat generated by the Joule effect and the currents that pass through the conductors. Likewise, the variation of the electromagnetic field in the cores of the machines will produce induced currents (eddy currents). The same magnetic field changes will produce cyclical magnetic hysteresis in the cores. Any moving part will produce mechanical friction. These phenomena give rise to the generation of heat that follows the Fourier heat transmission law in dynamic regime.

### **Development and Results**

Fourier heat transmission law in dynamic regime applying the Finite Formulation proposed by Tonti [1] is:

$$U[\tilde{V}, t_n] - U[\tilde{V}, t_{n-1}] - U[\partial \tilde{V}, \tau_n] = w[\tilde{V}, \tau_n] \quad (1)$$

To obtain the numerical resolution of expression (1) the Cell Method is used. Our interest is the study of the heat generated by asynchronous electric machines. The literature on implementation of the Cell Method to the study of the heat generated by the electrical machines is very low or insignificant.

Alotto [2] and Bullo [3] and [4] have been consulted. These authors have studied the Fourier heat transmission equation using the Cell method, in the following way:

# Anexo B

Ecuaciones constitutivas magnéticas

# Ecuación magnética. Funciones de Whitney de orden 2.

Las ecuaciones constitutivas parten de las expresiones:

En forma diferencial: 
$$\vec{H} = \nu \vec{B}$$
 ó  $\vec{B} = \mu \vec{H}$   
En forma finita:  $F = M_{\nu} \phi$  ó  $\phi = M_{\mu} F$  (B.1)

$$\vec{B} = \vec{W}_{s_1} \times \phi_1 + \vec{W}_{s_2} \times \phi_2 + \vec{W}_{s_3} \times \phi_3 + \vec{W}_{s_4} \times \phi_4 \tag{B.2}$$

donde  $\phi_{i=1,\dots,4}$  son los flujos asociados a las caras del primario de un tetraedro, cumpliendo el teorema de Gauss del campo magnético:  $D \cdot \phi = 0$ . Para un tetraedro,  $D_{(v,i)} \cdot \phi_i = D_i \left[ s_1(+1) \ s_2(+1) \ s_3(+1) \ s_4(+1) \right]$  si la orientación de las caras es hacia fuera.

$$\vec{W}_{s_i}(p) \cdot \vec{s}_j = \nu_{ij}$$
; si  $p \in s_i$ ; siendo 1 para  $i = j$  y 0 para  $i \neq j$ .

Las funciones cara de todas las caras se deducen en función de las orientaciones de las mismas.

Para la cara  $s_1$  se tiene las orientaciones (2, 3, 4), (3, 4, 2), (3, 2, 3), para cada (i, j, k).  $\vec{W}_{s_1} = 2 \cdot \left[ W_{p_2} \nabla \vec{W}_{p_3} \times \nabla \vec{W}_{p_4} + W_{p_3} \nabla \vec{W}_{p_4} \times \nabla \vec{W}_{p_2} + W_{p_4} \nabla \vec{W}_{p_2} \times \nabla \vec{W}_{p_3} \right]$ 

Para la cara 
$$s_2$$
 se tiene las orientaciones  $(1, 4, 3)$ ,  $(4, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 4)$ , para cada  $(i, j, k)$ .  

$$\vec{W}_{s_2} = 2 \cdot \left[ W_{p_1} \nabla \vec{W}_{p_4} \times \nabla \vec{W}_{p_3} + W_{p_4} \nabla \vec{W}_{p_3} \times \nabla \vec{W}_{p_1} + W_{p_3} \nabla \vec{W}_{p_1} \times \nabla \vec{W}_{p_4} \right]$$

Para la cara  $s_3$  se tiene las orientaciones (1, 2, 4), (2, 4, 1), (4, 1, 2), para cada (i, j, k).  $\vec{W}_{s_3} = 2 \cdot \left[ W_{p_1} \nabla \vec{W}_{p_2} \times \nabla \vec{W}_{p_4} + W_{p_2} \nabla \vec{W}_{p_4} \times \nabla \vec{W}_{p_1} + W_{p_4} \nabla \vec{W}_{p_1} \times \nabla \vec{W}_{p_2} \right]$ 

Para la cara  $s_4$  se tiene las orientaciones (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3), para cada (i,j,k).  $\vec{W}_{s_4} = 2 \cdot \left[ W_{p_1} \nabla \vec{W}_{p_3} \times \nabla \vec{W}_{p_2} + W_{p_3} \nabla \vec{W}_{p_2} \times \nabla \vec{W}_{p_1} + W_{p_2} \nabla \vec{W}_{p_1} \times \nabla \vec{W}_{p_3} \right]$  siendo

$$W_{p_1} = \frac{a_{t_1} + b_{t_1}x + c_{t_1}y + d_{t_1}z}{6v}$$

donde v es el volumen del elemento y donde para (2,3,4)

$$a_{t_1} = \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$b_{t_1} = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$c_{t_1} = -det \begin{bmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$d_{t_1} = -det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$W_{p_2} = \frac{a_{t_2} + b_{t_2}x + c_{t_2}y + d_{t_2}z}{6v}$$

para (1,3,4)

$$a_{t_2} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$b_{t_2} = -det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$c_{t_2} = -det \begin{bmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{t_2} = -det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$W_{p_3} = \frac{a_{t_3} + b_{t_3}x + c_{t_3}y + d_{t_3}z}{6v}$$

para (1,2,4)

$$a_{t_3} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$b_{t_3} = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$c_{t_3} = -det \begin{bmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$d_{t_3} = -det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$W_{p_4} = \frac{a_{t_4} + b_{t_4}x + c_{t_4}y + d_{t_4}z}{6v}$$

para (1,2,3)

$$a_{t_4} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$b_{t_4} = -det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$c_{t_4} = -det \begin{bmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$d_{t_4} = -det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

у

$$\nabla \vec{W}_{p_1} = \frac{1}{6v} \left[ b_{t_1}, c_{t_1}, d_{t_1} \right]; correspondientes a los (i, j, k)$$

$$\nabla \vec{W}_{p_2} = \frac{1}{6v} \left[ b_{t_2}, c_{t_2}, d_{t_2} \right]; correspondientes a los (i, j, k)$$

$$\nabla \vec{W}_{p_3} = \frac{1}{6v} [b_{t_3}, c_{t_3}, d_{t_3}]; correspondientes a los (i, j, k)$$

$$\nabla \vec{W}_{p_4} = \frac{1}{6v} \left[ b_{t_4}, c_{t_4}, d_{t_4} \right]; \ correspondientes \ a \ los \ (i, j, k)$$

La función cara se puede simplificar para el tetraedro de referencia y se obtienen las funciones lado

para (2,3,4) se reduce a

$$\vec{W}_{s_1} = \frac{1}{3v} \left( 1W_{p_2} \vec{\tilde{l}}_1 + 1W_{p_3} \vec{\tilde{l}}_3 + 1W_{p_4} \vec{\tilde{l}}_4 \right)$$

para (1,4,3) se reduce a

$$\vec{W}_{s_2} = \frac{1}{3v} \left( -1W_{p_1}\vec{\tilde{l}}_1 + 1W_{p_4}\vec{\tilde{l}}_5 + 1W_{p_3}\vec{\tilde{l}}_2 \right)$$

para (1,2,4) se reduce a

$$\vec{W}_{s_3} = \frac{1}{3v} \left( -1W_{p_1}\vec{\tilde{l}}_3 - 1W_{p_2}\vec{\tilde{l}}_2 + 1W_{p_4}\vec{\tilde{l}}_6 \right)$$

para (1,3,2) se reduce a

$$\vec{W}_{s_4} = \frac{1}{3v} \left( -1W_{p_1}\vec{\tilde{l}}_4 - 1W_{p_3}\vec{\tilde{l}}_6 - 1W_{p_2}\vec{\tilde{l}}_5 \right)$$

Dada la matriz local  $C^{(e)}$  obtenida de la matriz global C

$$C_{i,p}^{(e)} = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(s \times l)}$$

Y dada la matriz local  $D^{(e)}$  obtenida de la matriz global D

$$D_{v,i}^{(e)} = [11111]_{(v \times s)}$$

En definitiva, queda

$$\vec{B} = \frac{1}{3v} \left( \phi_1 \vec{\tilde{l}}_4 + \phi_2 \vec{\tilde{l}}_5 + \phi_3 \vec{\tilde{l}}_6 \right)$$

que depende del volumen y determina que dentro del tetraedro  $\vec{B}$  es constante.

Si ahora se evalua las funciones  $W_s$  en el baricentro de los tetraedros, las funciones nodales  $W_{p,i}(v) = 1/4$ .

La función queda de la siguiente forma

$$\vec{W}_{f_1} = \frac{1}{12v} \left( \vec{\tilde{l}}_1 + \vec{\tilde{l}}_3 + \vec{\tilde{l}}_4 \right)$$

$$\vec{W}_{f_2} = \frac{1}{12v} \left( -\vec{\tilde{l}}_1 + \vec{\tilde{l}}_5 + \vec{\tilde{l}}_2 \right)$$

$$\vec{W}_{f_3} = \frac{1}{12v} \left( -\vec{\tilde{l}}_3 - \vec{\tilde{l}}_2 + \vec{\tilde{l}}_6 \right)$$

$$\vec{W}_{f_4} = \frac{1}{12v} \left( -\vec{\tilde{l}}_4 - \vec{\tilde{l}}_6 - \vec{\tilde{l}}_5 \right)$$

determinándose la expresión final

$$\begin{bmatrix} (\tilde{F}_{m})_{1} \\ (\tilde{F}_{m})_{2} \\ (\tilde{F}_{m})_{3} \\ (\tilde{F}_{m})_{4} \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{\nu^{(e)}}{v} \begin{bmatrix} \vec{l}_{1} \cdot \vec{l}_{1} & \vec{l}_{1} \cdot \vec{l}_{2} & \vec{l}_{1} \cdot \vec{l}_{3} & \vec{l}_{1} \cdot \vec{l}_{4} \\ \vec{l}_{2} \cdot \vec{l}_{1} & \vec{l}_{2} \cdot \vec{l}_{2} & \vec{l}_{2} \cdot \vec{l}_{3} & \vec{l}_{2} \cdot \vec{l}_{4} \\ \vec{l}_{3} \cdot \vec{l}_{1} & \vec{l}_{3} \cdot \vec{l}_{2} & \vec{l}_{3} \cdot \vec{l}_{3} & \vec{l}_{3} \cdot \vec{l}_{4} \\ \vec{l}_{4} \cdot \vec{l}_{1} & \vec{l}_{4} \cdot \vec{l}_{2} & \vec{l}_{4} \cdot \vec{l}_{3} & \vec{l}_{4} \cdot \vec{l}_{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1} \\ \Phi_{2} \\ \Phi_{3} \\ \Phi_{4} \end{bmatrix}^{(e)}$$

que es la matriz simétrica y singular  $M_{\nu}^{(e)}$ , donde  $\nu^{(e)} = \frac{1}{\mu^{(e)}}$  en la celda y donde  $\vec{l}_j$  son las aristas duales a las caras  $s_i$ .

Pero  $C^T M_{\nu} C$  es una matriz de rigidez y siempre es simétrica independientemente del punto de evaluación de las funciones  $W_{s_i}$  dentro del tetraedro.

Los elementos de la matriz local  $(C^T)^{(e)}M_{\nu}^{(e)}C^{(e)}$  son desarrollados sin el coeficiente  $\frac{\nu^{(e)}}{v}$  de la siguiente manera, para propósitos computacionales,

$$A_{(1,1)} = \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 - 2\vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,2)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,3)} = -\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,3)} = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_4 - \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,4)} = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,5)} = -\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(1,6)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(2,1)} = \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_1 - \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_1 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(2,2)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1 - 2\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(2,3)} = -\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(2,4)} = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_1 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(2,6)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_1 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(3,1)} = A_{(1,3)}$$

$$A_{(3,2)} = A_{(2,3)}$$

$$A_{(3,3)} = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_2 - \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(3,6)} = -\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_4 + \vec{l}_4 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(3,6)} = -\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_4 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_4$$

$$A_{(4,1)} = A_{(1,4)}$$

$$A_{(4,1)} = A_{(1,4)}$$

$$A_{(4,2)} = A_{(2,4)}$$

$$A_{(4,3)} = A_{(3,4)}$$

$$A_{(4,3)} = A_{(3,4)}$$

$$A_{(4,4)} = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3$$

$$A_{(4,6)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3$$

$$A_{(4,6)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 - \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3$$

$$A_{(5,1)} = A_{(1,5)}$$

$$A_{(5,2)} = A_{(2,5)}$$

$$A_{(5,3)} = A_{(3,5)}$$

$$A_{(5,4)} = A_{(4,5)}$$

$$A_{(5,5)} = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1 - 2\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 + \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3$$

$$A_{(5,6)} = -\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_1 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 - \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3$$

$$A_{(6,1)} = A_{(1,6)}$$

$$A_{(6,2)} = A_{(2,6)}$$

$$A_{(6,3)} = A_{(3,6)}$$

$$A_{(6,4)} = A_{(4,6)}$$

$$A_{(6,5)} = A_{(5,6)}$$

$$A_{(6,5)} = A_{(5,6)}$$

Como se puede observar, esta matriz  $(C^T)^{(e)} M_{\nu}^{(e)} C^{(e)}$  es simétrica.

# Anexo C

Ecuaciones constitutivas eléctricas

## Ecuación eléctrica. Matriz constitutiva de Ohm.

Las ecucuaciones eléctricas están constituidas mediante las funciones vectoriales de Whitney de grado 1.

Cálculo de las aristas duales  $\tilde{l}$  en el baricentro.

a) Cálculo de las aristas duales  $\tilde{l}$ ,

$$\tilde{b}_{1} = (b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}) = \left(\frac{x_{2} + x_{3} + x_{4}}{3}, \frac{y_{2} + y_{3} + y_{4}}{3}, \frac{z_{2} + z_{3} + z_{4}}{3}\right) 
\tilde{b}_{2} = (b_{2x}, b_{2y}, b_{2z}) = \left(\frac{x_{1} + x_{3} + x_{4}}{3}, \frac{y_{1} + y_{3} + y_{4}}{3}, \frac{z_{1} + z_{3} + z_{4}}{3}\right) 
\tilde{b}_{3} = (b_{3x}, b_{3y}, b_{3z}) = \left(\frac{x_{1} + x_{2} + x_{4}}{3}, \frac{y_{1} + y_{2} + y_{4}}{3}, \frac{z_{1} + z_{2} + z_{4}}{3}\right) 
\tilde{b}_{4} = (b_{4x}, b_{4y}, b_{4z}) = \left(\frac{x_{1} + x_{2} + x_{3}}{3}, \frac{y_{1} + y_{2} + y_{3}}{3}, \frac{z_{1} + z_{2} + z_{3}}{3}\right)$$

$$\tilde{p} = (p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right)$$

$$\tilde{l}_1 = \left(\tilde{l}_{1x}, \tilde{l}_{1y}, \tilde{l}_{1z}\right) = (b_{1x} + p_x, b_{1y} - p_y, b_{1z} - p_z)$$

$$\tilde{l}_2 = \left(\tilde{l}_{2x}, \tilde{l}_{2y}, \tilde{l}_{2z}\right) = (b_{2x} + p_x, b_{2y} - p_y, b_{2z} - p_z)$$

$$\tilde{l}_3 = \left(\tilde{l}_{3x}, \tilde{l}_{3y}, \tilde{l}_{3z}\right) = (b_{3x} + p_x, b_{3y} - p_y, b_{3z} - p_z)$$

$$\tilde{l}_4 = \left(\tilde{l}_{4x}, \tilde{l}_{4y}, \tilde{l}_{4z}\right) = (b_{4x} + p_x, b_{4y} - p_y, b_{4z} - p_z)$$

b) Productos escalares necesarios para el cálculo de la matriz  $M_{i,j}$ 

$$\tilde{l}_i \cdot \tilde{l}_j = \left(\tilde{l}_{ix}, \tilde{l}_{iy}, \tilde{l}_{iz}\right) \cdot \left(\tilde{l}_{jx}, \tilde{l}_{jy}, \tilde{l}_{jz}\right) = \left(\tilde{l}_{ix} \cdot \tilde{l}_{jx} + \tilde{l}_{iy} \cdot \tilde{l}_{jy} + \tilde{l}_{iz} \cdot \tilde{l}_{jz}\right)$$

$$\begin{split} \tilde{s}_1 &= (\tilde{s}_{1x}, \tilde{s}_{1y}, \tilde{s}_{1z}) = \frac{1}{2} \tilde{l}_3 \vec{pc}_1 + \frac{1}{2} \vec{pc}_1 \tilde{l}_4 \\ \tilde{c}_1 &= (c_{1x}, c_{1y}, c_{1z}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \\ \tilde{c}_2 &= (c_{2x}, c_{2y}, c_{2z}) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right) \\ \tilde{c}_3 &= (c_{3x}, c_{3y}, c_{3z}) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}\right) \\ \tilde{c}_4 &= (c_{4x}, c_{4y}, c_{4z}) = \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2}, \frac{z_1 + z_4}{2}\right) \\ \tilde{c}_5 &= (c_{5x}, c_{5y}, c_{5z}) = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}, \frac{z_2 + z_4}{2}\right) \\ \tilde{c}_6 &= (c_{6x}, c_{6y}, c_{6z}) = \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2}\right) \\ \vec{pc}_1 &= \tilde{h}_1 = (h_{1x}, h_{1y}, h_{1z}) = (c_{1x} - p_x, c_{1y} - p_y, c_{1z} - p_z) \\ \vec{pc}_2 &= \tilde{h}_2 = (h_{2x}, h_{2y}, h_{2z}) = (c_{2x} - p_x, c_{2y} - p_y, c_{2z} - p_z) \\ \vec{pc}_3 &= \tilde{h}_3 = (h_{3x}, h_{3y}, h_{3z}) = (c_{3x} - p_x, c_{3y} - p_y, c_{3z} - p_z) \\ \vec{pc}_4 &= \tilde{h}_4 = (h_{4x}, h_{4y}, h_{4z}) = (c_{4x} - p_x, c_{4y} - p_y, c_{4z} - p_z) \\ \vec{pc}_5 &= \tilde{h}_5 = (h_{5x}, h_{5y}, h_{5z}) = (c_{5x} - p_x, c_{5y} - p_y, c_{5z} - p_z) \\ \vec{pc}_6 &= \tilde{h}_6 = (h_{6x}, h_{6y}, h_{6z}) = (c_{6x} - p_x, c_{6y} - p_y, c_{6z} - p_z) \\ \end{cases}$$

$$\tilde{s}_{1} = (\tilde{s}_{1x}, \tilde{s}_{1y}, \tilde{s}_{1z}) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{3x} & \tilde{l}_{3y} & \tilde{l}_{3z} \\ h_{1x} & h_{1y} & h_{1z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{1x} & h_{1y} & h_{1z} \\ \tilde{l}_{4x} & \tilde{l}_{4y} & \tilde{l}_{4z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$(\tilde{s}_{1x})^{a} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3y} h_{1z} - \tilde{l}_{3z} h_{1y} \right)$$

$$(\tilde{s}_{1y})^{a} = -\frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3x} h_{1z} - \tilde{l}_{3z} h_{1x} \right)$$

$$(\tilde{s}_{1z})^{a} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3x} h_{1y} - \tilde{l}_{3y} h_{1x} \right)$$

$$(\tilde{s}_{1z})^{b} = \frac{1}{2} \left( h_{1y} \tilde{l}_{4z} - h_{1z} \tilde{l}_{4y} \right)$$

$$(\tilde{s}_{1y})^{b} = -\frac{1}{2} \left( h_{1x} \tilde{l}_{4z} - h_{1z} \tilde{l}_{4x} \right)$$

$$(\tilde{s}_{1z})^{b} = \frac{1}{2} \left( h_{1x} \tilde{l}_{4y} - h_{1y} \tilde{l}_{4x} \right)$$

concluyendo que

$$\tilde{s}_{1x} = (\tilde{s}_{1x})^a + (\tilde{s}_{1x})^b$$

$$\tilde{s}_{1y} = (\tilde{s}_{1y})^a + (\tilde{s}_{1y})^b$$

$$\tilde{s}_{1z} = (\tilde{s}_{1z})^a + (\tilde{s}_{1z})^b$$

ahora se sigue con  $\tilde{s}_2$ 

$$\begin{split} \tilde{s}_2 &= \left(\tilde{s}_{2x}, \tilde{s}_{2y}, \tilde{s}_{2z}\right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\tilde{l}_1 \times \vec{h_2}\right) + \frac{1}{2} \left(\vec{h_2} \times \tilde{l}_4\right) = \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{1x} & \tilde{l}_{1y} & \tilde{l}_{1z} \\ h_{2x} & h_{2y} & h_{2z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{2x} & h_{2y} & h_{2z} \\ \tilde{l}_{4x} & \tilde{l}_{4y} & \tilde{l}_{4z} \end{bmatrix}; \\ \tilde{s}_{2x} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1y}h_{2z} - \tilde{l}_{1z}h_{2y}\right) + \frac{1}{2} \left(h_{2y}\tilde{l}_{4z} - h_{2z}\tilde{l}_{4y}\right) \\ \tilde{s}_{2y} &= -\frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1x}h_{2z} - \tilde{l}_{1z}h_{2x}\right) - \frac{1}{2} \left(h_{2x}\tilde{l}_{4z} - h_{2z}\tilde{l}_{4x}\right) \\ \tilde{s}_{2z} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1x}h_{2y} - \tilde{l}_{1y}h_{2x}\right) + \frac{1}{2} \left(h_{2x}\tilde{l}_{4y} - h_{2y}\tilde{l}_{4x}\right) \end{split}$$

ahora se sigue con  $\tilde{s}_3$ 

$$\tilde{s}_{3} = (\tilde{s}_{3x}, \tilde{s}_{3y}, \tilde{s}_{3z}) = \frac{1}{2} (\tilde{l}_{4} \times \vec{h}_{3}) + \frac{1}{2} (\vec{h}_{3} \times \tilde{l}_{2}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{4x} & \tilde{l}_{4y} & \tilde{l}_{4z} \\ h_{3x} & h_{3y} & h_{3z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{3x} & h_{3y} & h_{3z} \\ \tilde{l}_{2x} & \tilde{l}_{2y} & \tilde{l}_{2z} \end{bmatrix};$$

$$\begin{split} \tilde{s}_{3x} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{4y} h_{3z} - \tilde{l}_{4z} h_{3y} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{3y} \tilde{l}_{2z} - h_{3z} \tilde{l}_{2y} \right) \\ \tilde{s}_{3y} &= -\frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{4x} h_{3z} - \tilde{l}_{4z} h_{3x} \right) - \frac{1}{2} \left( h_{3x} \tilde{l}_{2z} - h_{3z} \tilde{l}_{2x} \right) \\ \tilde{s}_{3z} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{4x} h_{3y} - \tilde{l}_{4y} h_{3x} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{3x} \tilde{l}_{2y} - h_{3y} \tilde{l}_{2x} \right) \end{split}$$

ahora se sigue con  $\tilde{s}_4$ 

$$\tilde{s}_{4} = (\tilde{s}_{4x}, \tilde{s}_{4y}, \tilde{s}_{4z}) = \frac{1}{2} (\tilde{l}_{2} \times \vec{h}_{4}) + \frac{1}{2} (\vec{h}_{4} \times \tilde{l}_{3}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{2x} & \tilde{l}_{2y} & \tilde{l}_{2z} \\ h_{4x} & h_{4y} & h_{4z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{4x} & h_{4y} & h_{4z} \\ \tilde{l}_{3x} & \tilde{l}_{3y} & \tilde{l}_{3z} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{s}_{4x} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{2y} h_{4z} - \tilde{l}_{2z} h_{4y} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{4y} \tilde{l}_{3z} - h_{4z} \tilde{l}_{3y} \right)$$

$$\tilde{s}_{4y} = -\frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{2x} h_{4z} - \tilde{l}_{2z} h_{4x} \right) - \frac{1}{2} \left( h_{4x} \tilde{l}_{3z} - h_{4z} \tilde{l}_{3x} \right)$$

$$\tilde{s}_{4z} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{2x} h_{4y} - \tilde{l}_{2y} h_{4x} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{4x} \tilde{l}_{3y} - h_{4y} \tilde{l}_{3x} \right)$$

ahora se sigue con  $\tilde{s}_5$ 

$$\tilde{s}_{5} = (\tilde{s}_{5x}, \tilde{s}_{5y}, \tilde{s}_{5z}) = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3} \times \vec{h}_{5} \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{h}_{5} \times \tilde{l}_{1} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{3x} & \tilde{l}_{3y} & \tilde{l}_{3z} \\ h_{5x} & h_{5y} & h_{5z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{5x} & h_{5y} & h_{5z} \\ \tilde{l}_{1x} & \tilde{l}_{1y} & \tilde{l}_{1z} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{s}_{5x} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3y} h_{5z} - \tilde{l}_{3z} h_{5y} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{5y} \tilde{l}_{1z} - h_{5z} \tilde{l}_{1y} \right)$$

$$\tilde{s}_{5y} = -\frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3x} h_{5z} - \tilde{l}_{3z} h_{5x} \right) - \frac{1}{2} \left( h_{5x} \tilde{l}_{1z} - h_{5z} \tilde{l}_{1x} \right)$$

$$\tilde{s}_{5z} = \frac{1}{2} \left( \tilde{l}_{3x} h_{5y} - \tilde{l}_{3y} h_{5x} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{5x} \tilde{l}_{1y} - h_{5y} \tilde{l}_{1x} \right)$$

y por último se sigue con  $\tilde{s}_6$ 

$$\begin{split} \tilde{s}_6 &= \left(\tilde{s}_{6x}, \tilde{s}_{6y}, \tilde{s}_{6z}\right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\tilde{l}_1 \times \vec{h_6}\right) + \frac{1}{2} \left(\vec{h_6} \times \tilde{l}_2\right) = \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \tilde{l}_{1x} & \tilde{l}_{1y} & \tilde{l}_{1z} \\ h_{6x} & h_{6y} & h_{6z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h_{6x} & h_{6y} & h_{6z} \\ \tilde{l}_{2x} & \tilde{l}_{2y} & \tilde{l}_{2z} \end{bmatrix}; \\ \tilde{s}_{6x} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1y}h_{6z} - \tilde{l}_{1z}h_{6y}\right) + \frac{1}{2} \left(h_{6y}\tilde{l}_{2z} - h_{6z}\tilde{l}_{2y}\right) \\ \tilde{s}_{6y} &= -\frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1x}h_{6z} - \tilde{l}_{1z}h_{6x}\right) - \frac{1}{2} \left(h_{6x}\tilde{l}_{2z} - h_{6z}\tilde{l}_{2x}\right) \\ \tilde{s}_{6z} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{l}_{1x}h_{6y} - \tilde{l}_{1y}h_{6x}\right) + \frac{1}{2} \left(h_{6x}\tilde{l}_{2y} - h_{6y}\tilde{l}_{2x}\right) \end{split}$$

Como

$$M_{\sigma_{i,j}}^{(e)} = \frac{\sigma}{v} \left( \tilde{s}_i \cdot \tilde{s}_j \right) \ para \ i, j \in 1:6$$

que para propósitos computacionales, se ha desarrollado

$$-(G^T)^{(e)}\mathcal{M}_{\sigma}^{(e)}G^{(e)}$$

$$\mathcal{M}_{\sigma}^{(e)}G^{(e)}$$
$$jw(G^{T})^{(e)}\mathcal{M}_{\sigma}^{(e)}$$

hay que obtener la matriz  $G^{(e)}$ y su traspuesta  $(G^T)^{(e)}$ 

$$G^{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 4)}$$

entonces

$$-(G^T)^{(e)} M^e_{\sigma_{ij}} G^{(e)} = \frac{-\sigma^{(e)}}{v^{(e)}} H^e_{ij}$$

 $\tilde{s}_i$  es el vector área dual a las aristas del primal  $l_i$ .

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^{(e)}}{v^{(e)}} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_6 \\ \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_2 \cdot \tilde{s}_6 \\ \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_3 \cdot \tilde{s}_6 \\ \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_4 \cdot \tilde{s}_6 \\ \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_5 \cdot \tilde{s}_6 \\ \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_1 & \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_2 & \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_3 & \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_4 & \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_5 & \tilde{s}_6 \cdot \tilde{s}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} H_{(1,1)} &= (s_1 \cdot s_1 + s_1 \cdot s_3 + s_1 \cdot s_4) + (s_3 \cdot s_1 + s_3 \cdot s_3 + s_3 \cdot s_4) + (s_4 \cdot s_1 + s_4 \cdot s_3 + s_4 \cdot s_4) \\ H_{(1,2)} &= (-s_1 \cdot s_1 + s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_5) + (-s_3 \cdot s_1 + s_3 \cdot s_2 + s_3 \cdot s_5) + (-s_4 \cdot s_1 + s_4 \cdot s_2 + s_4 \cdot s_5) \\ H_{(1,3)} &= (s_1 \cdot s_2 - s_1 \cdot s_3 + s_1 \cdot s_6) + (-s_3 \cdot s_2 - s_3 \cdot s_3 + s_3 \cdot s_6) + (-s_4 \cdot s_2 - s_4 \cdot s_3 + s_4 \cdot s_6) \\ H_{(1,4)} &= (-s_1 \cdot s_4 - s_1 \cdot s_5 - s_1 \cdot s_6) + (-s_3 \cdot s_4 - s_3 \cdot s_5 - s_3 \cdot s_6) + (-s_4 \cdot s_4 1 - s_4 \cdot s_5 - s_4 \cdot s_6) \\ H_{(2,1)} &= H_{(1,2)} \\ H_{(2,2)} &= (s_1 \cdot s_1 - s_1 \cdot s_2 - s_1 \cdot s_5) + (-s_2 \cdot s_1 + s_2 \cdot s_2 + s_2 \cdot s_5) + (s_5 \cdot s_1 + s_5 \cdot s_2 + s_5 \cdot s_5) \\ H_{(2,3)} &= (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 - s_1 \cdot s_6) + (-s_2 \cdot s_2 - s_2 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_6) + (-s_5 \cdot s_2 - s_5 \cdot s_3 + s_5 \cdot s_6) \\ H_{(2,4)} &= (s_1 \cdot s_4 + s_1 \cdot s_5 + s_1 \cdot s_6) - (s_2 \cdot s_4 + s_2 \cdot s_5 + s_2 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) \\ H_{(3,1)} &= H_{(1,3)} \\ H_{(3,2)} &= H_{(2,3)} \\ H_{(3,3)} &= (s_2 \cdot s_2 + s_2 \cdot s_3 - s_2 \cdot s_6) + (s_3 \cdot s_4 + s_3 \cdot s_5 + s_3 \cdot s_6) - (s_6 \cdot s_2 + s_6 \cdot s_3 - s_6 \cdot s_6) \\ H_{(3,4)} &= (s_1 \cdot s_4 + s_2 \cdot s_5 + s_2 \cdot s_6) + (s_3 \cdot s_4 + s_3 \cdot s_5 + s_3 \cdot s_6) - (s_6 \cdot s_1 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,1)} &= H_{(1,4)} \\ H_{(4,2)} &= H_{(2,4)} \\ H_{(4,2)} &= H_{(2,4)} \\ H_{(4,3)} &= H_{(3,4)} \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) + (s_6 \cdot s_4 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) + (s_6 \cdot s_4 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) + (s_6 \cdot s_4 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) + (s_6 \cdot s_4 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 + s_5 \cdot s_6) + (s_6 \cdot s_4 + s_6 \cdot s_5 + s_6 \cdot s_6) \\ H_{(4,4)} &= (s_4 \cdot s_4 + s_4 \cdot s_5 + s_4 \cdot s_6) + (s_5 \cdot s_4 + s_5 \cdot s_5 +$$

Sistema por elemento

$$\begin{bmatrix} C_{l\times s}^T(M_{\nu})_{s\times s}C_{s\times l} + \frac{d}{dt}(M_{\sigma})_{l\times l} & \frac{d}{dt}(M_{\sigma})_{l\times l}G_{l\times p} \\ -\frac{d}{dt}G_{p\times l}^T(M_{\sigma})_{l\times l} & -\frac{d}{dt}G_{p\times l}^T(M_{\sigma})_{l\times l}G_{l\times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l\times 1} \\ \chi_{p\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{l\times 1} \\ 0_{p\times 1} \end{bmatrix}$$

# Anexo D

Modelo paramétrico del motor de inducción en régimen dinámico

# Modelo paramétrico del motor de inducción en régimen dinámico.

La identificación paramétrica de la máquina de inducción, se hace partiendo de las ecuaciones (D.1) y (D.2). Se ha utilizado la transformación de Park para la conversión de las tres fases del motor de inducción en componentes más sencillas d-q-0, ya que utilizan magnitudes reales contrariamente a la transformación de Ku, que trabaja en el dominio complejo.

$$\begin{bmatrix} \nu_{ds} \\ \nu_{qs} \\ \nu_{dr} \\ \nu_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & 0 & M_{sr} p & 0 \\ 0 & R_s + L_s p & 0 & M_{sr} p \\ M_{sr} p & n M_{sr} \omega_r & R_r + L_r p & n L_r \omega_r \\ -n M_{sr} \omega_r & M_{sr} p & n L_r \omega_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix}$$
(D.1)

$$T_r = (Jp + D)\omega_r + nM_{sr}(I_{ds}I_{qr} - I_{qs}I_{dr})$$
(D.2)

Del modelo planteado de la máquina de inducción, se obtiene el circuito equivalente representado en la figura D.1, del cual se deducirán todas las variables de estado.

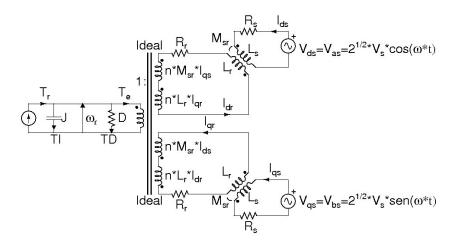


Figura D.1: Circuito equivalente de la máquina de inducción.

Estas variables son, al ser un circuito tiempo invariante, las intensidades de las bobinas y las tensiones de los condensadores, o sea  $x(t) = (I_{ds}, I_{dr}, I_{qr}, I_{qs}, \omega_r)$ , respectivamente. Si el circuito fuera tiempo variante, las variables de estado serían los flujos en las bobinas y las cargas en los condensadores. De igual forma, el vector  $u(t) = (\nu_{ds}, \nu_{qs}, T_r)$ , se corresponde con las fuentes independientes de tensión e intensidad del circuito de la figura D.1.

Las excitaciones del circuito equivalente, están formadas por las fuentes de tensión en la parte eléctrica y la fuente de intensidad en la parte mecánica. Ambas partes están separadas por un transformador ideal.

La parte mecánica se ha modelado de forma singular, mediante un circuito equivalente. Como elementos en paralelo se han modelado el momento de inercia J, como un condensador y el coeficiente angular de fricción viscosa D, como una conductancia. El par resistente aplicado, se modela mediante una excitación formada por una fuente de intensidad de valor  $T_r$ , la velocidad angular del rotor como una tensión aplicada  $\omega_r$  y el par de origen eléctrico  $T_e$ .

El modelado de la parte eléctrica está constituido por la resistencias de los devanados del estátor  $R_s$  y del rotor  $R_r$ , la autoinducción de los mismos como  $L_s$  y  $L_r$ , la inducción mutua entre estátor y rotor  $M_{sr}$ , las intensidades tanto del eje directo  $I_{ds}$ ,  $I_{dr}$  como en cuadratura  $I_{qs}$ ,  $I_{qr}$ , y en el estátor, las fuentes de tensión como excitaciones en ambos ejes  $V_{ds}$  y  $V_{qs}$ , siendon el número de pares de polos.

Del modelo de la máquina de inducción y de su circuito equivalente, y de las ecuaciones correspondientes para los devanados directos y en cuadratura del estátor y del rotor, se han planteado las ecuaciones de equilibrio para la parte eléctrica (D.3) y para la parte mecánica (D.4).

Se han obtenido las derivadas primeras en las ecuaciones diferenciales no lineales y agrupados los términos, se plantean las variables de estado en forma matricial quedando según las expresiones (D.3) y (D.4). Al ser un circuito tiempo invariante, estas se corresponden con las intensidades en las bobinas y las tensiones en los condensadores.

En las ecuaciones de equilibrio deducidas, aparece también como variable el ángulo de rotación mecánico  $\theta$ , que aunque no es variable de estado, su función estará presente en la transformación inversa o equivalente con el modelo trifásico.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{s}L_{r} - M_{sr}^{2}} \begin{bmatrix} nL_{r}R_{s} & -nM_{sr}^{2}\omega_{r} & -M_{sr}R_{r} & -M_{sr}L_{r}\omega_{r} \\ nM_{sr}^{2}\omega_{r} & L_{r}R_{s} & nM_{sr}L_{r} & -M_{sr}R_{r} \\ -M_{sr}R_{r} & nL_{s}M_{sr}\omega_{r} & L_{s}R_{r} & nL_{s}L_{r}\omega_{r} \\ -nL_{s}M_{sr}\omega_{r} & -M_{sr}R_{r} & -nL_{s}L_{r}\omega_{r} & L_{s}R_{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{1}{L_{s}L_{r} - M_{sr}^{2}} \begin{bmatrix} L_{r} & 0 \\ 0 & L_{r} \\ -M_{sr} & 0 \\ 0 & -M_{sr} \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}D\omega_r - \frac{1}{J}nM_{sr}\left(I_{ds}I_{qr} - I_{qs}I_{dr}\right) \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} T_r \tag{D.4}$$

El sistema general (D.3) y (D.4) responde a un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE) y viene referenciado por

$$A\dot{y}(t) + By(t) = b(t) \tag{D.5}$$

donde A y B son matrices de coeficientes, b es el vector del segundo miembro, y(t) es el vector desconocido, t es el tiempo y el punto es la derivada respecto del tiempo. A y B pueden depender de y(t) en el caso de sistemas no lineales, por ejemplo B depende de las incógnitas en el sistema de ecuaciones (D.7). La solución numérica del sistema (D.5) requiere una discretización del tiempo. Un esquema simple viene dado por (D.6)

$$A\frac{y_{n+1}y_n}{\Delta t} + B(\alpha y_{n+1} + (1-\alpha)y_n) = \alpha b_{n-1}(1+\alpha)b_n$$
 (D.6)

Los índices n y n+1 se refieren a cantidades en el tiempo  $t_n$  y  $t_{n+1}=t_n+\Delta t$  respectivamente. Las diferentes opciones del parámetro  $\alpha$  se obtienen por métodos clásicos ( $\alpha=1$ , es implícito (hacia atrás) de Euler,  $\alpha=0$  es explícito (hacia adelante) de Euler,  $\alpha=1/2$  es Crank-Nicholson,  $\alpha=2/3$  es Galerkin).

El sistema general viene dado por una ecuación diferencial ordinaria (ODE) que es un

caso especial de las DAE, donde la matriz A es la unidad. Si  $k = \frac{1}{L_s L_r - M_{sr}^2}$ , las matrices de coeficientes planteadas en el sistema general (D.5) quedan determinadas de la siguiente forma en (D.7):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = k \begin{bmatrix} nL_{r}R_{s} & -nM_{sr}^{2}\omega_{r} & -M_{sr}R_{r} & -M_{sr}L_{r}\omega_{r} & 0 \\ nM_{sr}^{2}\omega_{r} & L_{r}R_{s} & nM_{sr}L_{r} & -M_{sr}R_{r} & 0 \\ -M_{sr}R_{r} & nL_{s}M_{sr}\omega_{r} & L_{s}R_{r} & nL_{s}L_{r}\omega_{r} & 0 \\ -nL_{s}M_{sr}\omega_{r} & -M_{sr}R_{r} & -nL_{s}L_{r}\omega_{r} & L_{s}R_{r} & 0 \\ \frac{1}{k}\frac{1}{J}nM_{sr}I_{qr} & -\frac{1}{k}\frac{1}{J}nM_{sr}I_{dr} & 0 & 0 & \frac{1}{k}\frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

$$b = k \begin{bmatrix} L_{r} & 0 & 0 \\ 0 & L_{r} & 0 \\ -M_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k}\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{ds}(t) \\ \nu_{qs}(t) \\ T_{r}(t) \end{bmatrix}$$

$$CD.7$$

# Bibliografía General

- [A+87] A. Arkkio et al. Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations. Helsinki University of Technology, 1987.
- [ABK<sup>+</sup>06] G. Arians, T. Bauer, C. Kaehler, W. Mai, C. Monzel, D. van Riesen, and C. Schlensok. imoose, 2006.
- [AFR10] P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto. Multiphysics problems via the cell method: the role of tonti diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2959–2962, 2010.
- [AP04] P. Alotto and I. Perugia. Matrix Properties of a Vector Potential Cell Method for Magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40:1045–1048, 2004.
- [Ara02] R. Araneo. Numerical solution of transient electromagnetic scattering problems using the novel time-domain cell method. volume 1, pages 291–296 vol.1, Aug. 2002.
- [BC94] R. E. Bank and T. F. Chan. A composite step bi-conjugate gradient algorithm for nonsymmetric linear systems. *Numerical Algorithms*, 7(1):1–16, 1994.
- [BCL07] A. Boglietti, A. Cavagnino, and M. Lazzari. Experimental high-frequency parameter identification of ac electrical motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 43(1):23–29, 2007.

- [BDD+92] M. Bartsch, M. Dehler, M. Dohlus, F. Ebeling, P. Hahne, R. Klatt, F. Krawczyk, M. Marx, Z. Min, T. Pröpper, D. Schmitt, P. Schütt, B. Steffen, B. Wagner, T. Weiland, S. G. Wipf, and H. Wolter. Solution of maxwell's equations. Computer Physics Communications, 73(1-3):22-39, 1992.
- [BFG90] R. Belmans, R. D. Findlay, and W. Geysen. A circuit approach to finite element analysis of a double squirrel cage induction motor. *Energy Conversion*, *IEEE Transactions on*, 5(4):719–724, 1990.
- [BK00] A. Bossavit and L. Kettunen. Yee-like schemes on staggered cellular grids: A synthesis between fit and fem approaches. *Magnetics, IEEE Transactions* on, 36(4):861–867, 2000.
- [Bos88a] A. Bossavit. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education Reviews, IEE Proceedings A*, 135(8):493–500, Nov 1988.
- [Bos88b] A. Bossavit. Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 135(8):493–500, 1988.
- [Bos90] A. Bossavit. Solving maxwell equations in a closed cavity, and the question of 'spurious modes'. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 26(2):702–705, Mar 1990.
- [Bos98a] A. Bossavit. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements. Academic Press, 1998.
- [Bos98b] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism. *Journal of Japanese Society of applied electromagnetics and mechanics*, 6:17–28, 1998.
- [Bos99] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry: Building a finite-dimensional "maxwell's house" (1): Network equations. *Journal of Ja-*

- panese Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, 7(2):150–159, 1999.
- [Bra64] F. H. Branin, Jr. D-c and transient analysis of networks using a digital computer. In *Proceedings of the SHARE Design Automation Workshop*, DAC '64, pages 4.1–4.23, New York, NY, USA, 1964. ACM.
- [Bra66] F. H. Branin. The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus. In *Symposium on generalized networks*, pages 453–491, 1966.
- [Bry61] P. R. Bryant. The algebra and topology of electrical networks. *Proceedings* of the IEE-Part C: Monographs, 108(13):215–229, 1961.
- [ÇA06] M. Çunkaş and R. Akkaya. Design optimization of induction motor by genetic algorithm and comparison with existing motor. -, 2006.
- [ÇAB07] M. Çunkaş, R. Akkaya, and O. Bilgin. Cost optimization of submersible motors using a genetic algorithm and a finite element method. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(3-4):223–232, 2007.
- [CF04] E. Cardelli and A. Faba. FEM analysis of thin cracks in metallic plates.

  International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, (19):503–507, 2004.
- [CFRG08] A. Canova, F. Freschi, M. Repetto, and G. Gruosso. Coupling of finite formulation with integral techniques. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(1):37–46, 2008.
- [CFS<sup>+</sup>05] E. Cardelli, A. Faba, R. Specogna, A. Tamburrino, F. Trevisan, and S. Ventre. Analysis methodologies and experimental benchmarks for eddy current testing. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(5):1380 1383, May 2005.

- [Chu75] L. O. Chua. Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques, volume 1. 1975.
- [CL<sup>+</sup>07] C. C. M. Cunha, R. O. C. Lyra, et al. Detection of rotor faults in torque controlled induction motor drives. In *Power Electronics and Applications*, 2007 European Conference on, pages 1–10. IEEE, 2007.
- [Cle05] M. Clemens. Large systems of equations in a discrete electromagnetism: formulations and numerical algorithms. *IEE Proceedings Science Measurement and Technology*, 152(2):50–72, 2005.
- [CMP04] L. Codecasa, V. Minerva, and M. Politi. Use of barycentric dual grids for the solution of frequency domain problems by fit. *IEEE transactions on magnetics*, 40(2):1414–1419, 2004.
- [CNC00] M. C. Costa, S. L. Nabeta, and J. R. Cardoso. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with fem in the simulation of a universal motor. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 36(4):1431–1434, Jul 2000.
- [Cou83] J. L. Coulomb. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 19(6):2514–2519, 1983.
- [CST07] L. Codecasa, R. Specogna, and F. Trevisan. Symmetric positive-definite constitutive matrices for discrete eddy-current problems. *IEEE transactions on magnetics*, 43(2):510–515, 2007.
- [CT06] L. Codecasa and F. Trevisan. Piecewise uniform bases and energetic approach for discrete constitutive matrices in electromagnetic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(4):548–565, 2006.
- [CW99] M. Clemens and T. Weiland. Transient eddy-current calculation with the fi-method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 35(3):1163 –1166, may 1999.

- [CW01a] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations. *International Computing Society newsletter*, 8:S. 13–20, January 2001.
- [CW01b] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32(32):65–87, 2001.
- [DDWBF97] D. Dolinar, R. De Weerdt, R. Belmans, and E.M. Freeman. Calculation of two-axis induction motor model parameters using finite elements. *Energy Conversion*, *IEEE Transactions on*, 12(2):133–142, Jun 1997.
- [DFRR09] C. Delprete, F. Freschi, M. Repetto, and C. Rosso. Thermo-mechanical analysis using a multiphysics approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 181(1):012095, 2009.
- [DG13] P. Dular and C. Geuzaine. Getdp reference manual: the documentation for getdp, a general environment for the treatment of discrete problems, 2013.
- [DGGL99] P. Dular, C. Geuzaine, A. Genon, and W. Legros. An evolutive software environment for teaching finite element methods in electromagnetism. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1682–1685, may 1999.
- [DKT08] M. Desbrun, E. Kanso, and Y. Tong. Discrete differential forms for computational modeling. In ACM SIGGRAPH ASIA 2008 courses, SIGGRAPH Asia '08, pages 15:1–15:17, New York, NY, USA, 2008. ACM.
- [DST06] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Coupling between circuits and a- $\chi$  discrete geometric approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1043 –1046, apr 2006.
- [DST08] P. Dular, R. Specogna, and F. Trevisan. Constitutive Matrices Using Hexahedra in a Discrete Approach for Eddy Currents. *IEEE Trans. on Magnetics*, 44:694–697, 2008.

- [DZ09] F. Duan and R. Zivanovic. Induction motor fault diagnostics using global optimization algorithm. In *Power Engineering Conference*, 2009. AUPEC 2009. Australasian Universities, pages 1–5. IEEE, 2009.
- [Ent12] Scilab Enterprises. Scilab: Free and open source software for numerical computation. Scilab Enterprises, Orsay, France, 2012. http://www.scilab.org/.
- [Fer13] E. Ferretti. The cell method: an enriched description of physics starting from the algebraic formulation. *CMC: Computers, Materials & Continua*, 36(1):49–71, 2013.
- [FGR08] F. Freschi, L. Giaccone, and M. Repetto. Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism. *COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(6):1343–1357, 2008.
- [Fie04] Vector Fields. Opera-3d reference manual. Vector Fields Limited, England, 2004.
- [FLAB11] R. Fiser, H. Lavric, V. Ambrozic, and M. Bugeza. Diagnostic system for on-line detection of rotor faults in induction motor drives. In *Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics & Drives (SDEMPED), 2011 IEEE International Symposium on*, pages 77–83. IEEE, 2011.
- [FNOM93] K. Fujiwara, T. Nakata, N. Okamoto, and K. Muramatsu. Method for determining relaxation factor for modified newton-raphson method. Magnetics, IEEE Transactions on, 29(2):1962–1965, Mar 1993.
- [FT97] F. R. Feito and J. C. Torres. Inclusion test for general polyhedra. *Computers & Graphics*, 21(1):23–30, 1997.
- [GAK13] K. N. Gyftakis, D. K. Athanasopoulos, and J. Kappatou. Evaluation of different broken bar fault diagnostic means in double-cage induction motors with fem. In *Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and*

- Drives (SDEMPED), 2013 9th IEEE International Symposium on, pages 36–42. IEEE, 2013.
- [GB11] A. Gillette and C. Bajaj. Dual formulations of mixed finite element methods with applications. *Computer-Aided Design*, 43(10):1213–1221, 2011.
- [Geu08] C. Geuzaine. GetDP: a general finite-element solver for the de Rham complex. In PAMM Volume 7 Issue 1. Special Issue: Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich 2007, volume 7, pages 1010603–1010604. Wiley, 2008.
- [GMSGA15] P. I. González, J. M. Monzón, L. Simón, and S. García-Alonso. Thermal constitutive matrix applied to asynchronous electrical machine using the cell method. ISEF 2015 - XVII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, 2015.
- [GMSM15] P. I. González, J. M. Monzón, L. Simón, and M. Martínez. El método de la celda aplicado al estudio de campos electromagnéticos y transferencia de calor en motores de inducción. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [GR08] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. An introduction to geometrical modelling and mesh generation with Gmsh. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Nov 2008.
- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [Hal94] W. S. Hall. Boundary Element Method. Springer, 1994.
- [HB10] M. Heshmatzadeh and G. E. Bridges. Finite formulation for modeling guided wave structures embedded in a lossy half-space. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 11(3):146–156, 2010.

- [HM04] F. Hirtenfelder and J. Mollet. Phased Array Simulations using Finite Integration Technique. *JINA Conference*, November 2004.
- [HRB75] C. W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan. The modified nodal approach to network analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 22(6):504–509, 1975.
- [Ida96] N. Ida. Verification of computational electromagnetic programs. International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields, 9:159–165, 1996.
- [JWP96] B. Jiang, J. Wu, and L. A. Povinelli. The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *Journal of Computational Physics*, 125(1):104 123, 1996.
- [KLMDP08] J. Korecki, Y. Le Menach, J-P. Ducreux, and F. Piriou. Numerical solutions in primal and dual meshes of magnetostatic problems solved with the finite integration technique. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(1):47–55, 2008.
- [KMP97] G. B. Kliman, J. G. Mazereeuw, and S. C. Patel. Sensorless approach to on-line motor diagnostics. In *Cement Industry Technical Conference*. 1997. XXXIX Conference Record., 1997 IEEE/PCA, pages 135–140. IEEE, 1997.
- [Knu01] P. M. Knupp. Algebraic mesh metrics. SIAM J.SCI. COMPUT., 23(1):193– 218, 2001.
- [KPSB+97] P. Kuo-Peng, N. Sadowski, J. P. A. Bastes, R. Carlson, N. J. Batistela, and M. Lajoie-Mazenc. A general method for coupling static converters with electromagnetic structures. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 33(2):2004 –2009, Mar 1997.

- [KSTZ01] H. Kanayama, R. Shioya, D. Tagami, and H. Zheng. A numerical procedure for 3-d nonlinear magnetostatic problems using the magnetic vector potential. Theoretical and Applied Mechanics, 50:411–418, 2001.
- [LHK<sup>+</sup>90] R. Luebbers, F. P. Hunsberger, K. S. Kunz, R. B. Standler, and M. Schneider. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 32(3):222–227, 1990.
- [LYL07a] R. Liu, D. Yan, and W. Li. Computation technology of finite formulation method on electromagnetic field in electrical machines. In *Electrical Machines and Systems*, 2007. ICEMS. International Conference on, pages 1380–1384. IEEE, 2007.
- [LYL07b] R. Liu, D. Yan, and W. Li. Finite formulation computation technology for 2d eddy current field. In *Electrical Machines and Systems, 2007. ICEMS. International Conference on*, pages 1376–1379. IEEE, 2007.
- [Man] ANSYS Manual. Ansys inc., 2013, release 11.0 documentation for ansys workbench. *Analysis Settings (10 March 2013)*.
- [Mar99] René Marklein. The finite integration technique as a general tool to compute acoustic, electromagnetic, elastodynamic, and coupled wave fields. *Review of radio science*, 2002:201–244, 1999.
- [Mar01a] M. Marrone. Computational aspects of the cell method in electrodynamics. In F. L. Teixeira, editor, *Geometric Methods in Computational Electromagnetics*, *PIER 32*, pages 317–356. EMW Publishing, Cambridge, Mass., 2001.
- [Mar01b] M. Marrone. Convergence and stability of the cell method with non symmetric constitutive matrices. In *Proc. Computing Conf.*, volume 4, pages 16–17, 2001.

- [Mar02] M. Marrone. The equivalence between cell method, fdtd and fem. In *IEE Fourth International Conference on Computation in Electromagnetics*, pages 8–11, 2002.
- [Mar04a] M. Marrone. A new consistent way to build symmetric constitutive matrices on general 2-d grids, 2004.
- [Mar04b] M. Marrone. Properties of Constitutive Matrices for Electrostatic and Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. on Magnetic*, 40:1516–1520, 2004.
- [MBC+07] A. Murli, V. Boccia, L. Carracciuolo, L. DAmore, G. Laccetti, and M. Lapegna. Monitoring and Migration of a PETSc-based Parallel Application for Medical Imaging in a Grid computing PSE. Grid-Based Problem Solving Environments, pages 421–432, 2007.
- [Mee02] D. Meeker. Induction motor example. IEEE, Los Alamitos, 2002.
- [Mee09] D. Meeker. Femm 4.2. User's Manual, Virginia, 2009.
- [Mee12] D. C. Meeker. An improved continuum skin and proximity effect model for hexagonally packed wires. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(18):4635–4644, 2012.
- [Mee13] David Meeker. Improvised open boundary conditions for magnetic finite elements. *IEEE Trans. Magn*, 49(11):5243–5247, 2013.
- [Mee14] David C Meeker. Improvised asymptotic boundary conditions for electrostatic finite elements. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(6):1–9, 2014.
- [MFF02] M. Marrone, A. M. F. Frasson, and H. E. H. Figueroa. A novel numerical approach for electromagnetic scattering: The cell method. In *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2002. IEEE, volume 1, pages 160–163. IEEE, 2002.
- [Mil97] V. Milenkovic. Shortest path geometric rounding. *Algorithmica*, 27:2000, 1997.

- [MREHF02] M. Marrone, V. Rodriguez-Esquerre, and H. Hernandez-Figueroa. Novel numerical method for the analysis of 2d photonic crystals: the cell method. *Optics express*, 10(22):1299–1304, 2002.
- [MSG11] J. M. Monzón, L. Simón, and P. González. Global equation of cell method and modified nodal method of electromagnetic and circuital problems. In ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, 2011.
- [MSS07] J. M. Monzón, F. Santana, and L. Simón. Acople del método nodal modificado y el método de los elementos finitos. implementación en lenguaje scilab y c++. XCLEEE X Conference in Electrical Engineering, Aug 2007.
- [MST09] B. Mirafzal, G.L. Skibinski, and R.M. Tallam. Determination of parameters in the universal induction motor model. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 45(1):142–151, Jan 2009.
- [Mul94] COMSOL Multiphysics. Comsol. Inc., Burlington, MA, www. comsol. com, 1994.
- [Mur94] G. Mur. Edge elements, their advantages and their disadvantages. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 30(5):3552–3557, Sep 1994.
- [MVea10] J. M. Monzon Verona et al. ElectroQuasistatic Analysis of an Electrostatic Induction Micromotor Using the Cell Method. Sensors, 10(10):9102–9117, 2010.
- [NPP04] J. Nerg, J. Pyrhonen, and J. Partanen. Finite element modeling of the magnetizing inductance of an induction motor as a function of torque. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 40(4):2047–2049, 2004.
- [OO95] J. O'Dwyer and T. O'Donnell. Choosing the relaxation parameter for the solution of nonlinear magnetic field problems by the newton-raphson method.

  \*Magnetics, IEEE Transactions on, 31(3):1484–1487, May 1995.

- [Ope10] OpenFOAM. Openfoam documentation user guide, Oct 2010. http://openfoam.com/docs/user/.
- [PCU02] T. Phumiphak and C. Chat-Uthai. Estimation of induction motor parameters based on field test coupled with genetic algorithm. In *Power System Technology*, 2002. Proceedings. PowerCon 2002. International Conference on, volume 2, pages 1199–1203. IEEE, 2002.
- [PR90] L. Pichon and A. Razek. Force calculation in axisymmetric induction devices using a hybrid fem-bem technique. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 26(2):1050–1053, Mar 1990.
- [PS78] F. P. Preparata and M. I. Shamos. Computational Geometry: An Introduction. Springer-Verlag, 1978.
- [PS05] J. Peiró and S. Sherwin. Finite difference, finite element and finite volume methods for partial differential equations. In *Handbook of materials modeling*, pages 2415–2446. Springer, 2005.
- [Rep07a] M. Repetto. Discrete constitutive matrices. 2007.
- [Rep07b] M. Repetto. Two dimensional quasi-static magnetic analysis. 2007.
- [RFV76] K. Reichert, H. Freundl, and W. Vogt. The calculation of forces and torques within numerical magnetic field calculation methods. In *Proc. Compumag*, volume 76, pages 64–74. Springer, 1976.
- [RT03] M. Repetto and F. Trevisan. 3-d magnetostatic with the finite formulation.

  \*Magnetics, IEEE Transactions on, 39(3):1135–1138, May 2003.
- [RT04] M. Repetto and F. Trevisan. Global formulation of 3D magnetostatics using flux and gauged potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):755–772, 2004.
- [Sal95] S. J. Salon. Finite element analysis of electrical machines, volume 101. Kluwer academic publishers Boston, 1995.

- [Sch06] M. Schäfer. Computational engineering: introduction to numerical methods. Springer, 2006.
- [SF96] P. P. Silvester and R. L. Ferrari. Finite elements for electrical engineers. Cambridge university press, 1996.
- [SGM11] L. Simón, P. González, and J. M. Monzón. Computational geometry applied to finite formulation. XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Sep 2011.
- [Sha05] L. F. Shampine. Error estimation and control for odes. *Journal of Scientific Computing*, 25(1):3–16, 2005.
- [SLLMC92] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, and J. Cros. Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement.

  \*Magnetics, IEEE Transactions on, 28(2):1410–1413, 1992.
- [SM] L. Simón and J. M. Monzón. El método de los elementos finitos para la identificación paramétrica de una máquina trifásica de inducción magnética, con algoritmos genéticos.
- [SM09] L. Simón and J. M. Monzón. Identificación paramétrica y análisis de sensibilidad de una máquina trifásica de inducción magnética. modelado del régimen dinámico. implementación en c++. 9º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos), Aug 2009.
- [SM10a] L. Simón and J. M. Monzón. Identificación y ajuste paramétrico de una máquina trifásica de inducción magnética usando algoritmos genéticos. *Información tecnológica*, 21:105 114, Aug 2010.
- [SM10b] L. Simón and J. M. Monzón. Modelado del régimen dinámico y análisis de sensibilidad de una máquina trifásica de inducción magnética. *Información* tecnológica, 21:97 – 104, Feb 2010.

- [SM11a] L. Simón and J. M. Monzón. Cell method and modified nodal method in eddy current electromagnetic problems. *Renewable Energies and Power Quality*, pages 1497–1516, 2011.
- [SM11b] L. Simón and J. M. Monzón. Parametric identification of a three-phase machine with genetic algorithms. In *Computational Methods for the Innovative Design of Electrical Devices*, pages 167–184. Springer, 2011.
- [SM12] L. Simón and J. M. Monzón. The fundamental loop matrix in eddy current problem with the finite formulation. MASCOT&ISGG 2012 International Workshops, Aug 2012.
- [SMM15a] L. Simón, J. M. Monzón, and M. Martínez. El método de la celda aplicado al análisis de fallos en una máquina de inducción magnética. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [SMM15b] L. Simón, J. M. Monzón, and M. Martínez. La matriz fundamental de bucles b en el método de la celda. aplicación a un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3d. CAIP 2015, 12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos, 2015.
- [SP90] M. N. O. Sadiku and A. F. Peterson. A comparison of numerical methods for computing electromagnetic fields. In *Southeastcon'90. Proceedings.*, *IEEE*, pages 42–47. IEEE, 1990.
- [SSW02] R. Schuhmann, P. Schmidt, and T. Weiland. A new whitney-based material operator for the finite-integration technique on triangular grids. *Magnetics*, *IEEE Transactions on*, 38(2):409–412, 2002.
- [ST85] E. G. Strangas and K. Theis. Shaded pole motor design and evaluation using coupled field and circuit equations. *Magnetics, IEEE Transactions* on, 21(5):1880–1882, Sep 1985.

- [ST98] D. E. Schwarz and C. Tischendorf. Structural analysis for electric circuits and consequences for mna. 1998.
- [ST05] R. Specogna and F. Trevisan. Discrete constitutive equations in A- $\chi$  geometric eddy-current formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(4):1259–1263, april 2005.
- [Str85] E. G. Strangas. Coupling the circuit equations to the non-linear time dependent field solution in inverter driven induction motors. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 21(6):2408–2411, Nov 1985.
- [Str93] G. Strang. The Fundamental Theorem of Linear Algebra. The American Mathematical Monthly, 100(9):848–855, 1993.
- [SW01] R. Schuhmann and T. Weiland. Conservation of Discrete Energy and Related Laws in the Finite Integration Technique, volume 32, pages 301–316. EMW Publishing, Cambridge, MA, 2001.
- [TF01] W. T. Thomson and M. Fenger. Current signature analysis to detect induction motor faults. *Industry Applications Magazine*, *IEEE*, 7(4):26–34, Jul 2001.
- [Tie88] M. D. Tiemann. User's guide to gnu c++. Free Software Foundation, 1000, 1988.
- [TK04] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of discrete approaches to solving magnetostatic problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):361–365, March 2004.
- [TK06] F. Trevisan and L. Kettunen. Geometric interpretation of finite-dimensional eddy-current formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13):1888–1908, 2006.
- [Ton76] E. Tonti. The reason for analogies between physical theories. Applied Mathematical Modelling, 1(1):37–50, 1976.

- [Ton95] E. Tonti. On the Geometrical Structure of the Electromagnetism. Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures. for the 80th Birthday of A. Lichnerowicz; G. Ferrarese: Pitagora Editrice, pages 281–308, 1995.
- [Ton01a] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation for the Wave Equation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(4):1355–1382, 2001.
- [Ton01b] E. Tonti. A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method. CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2(2):237–258, 2001.
- [Ton01c] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. Geometric Methods in Computational Electromagnetics PIER 32, 32(2):1–44, 2001.
- [Ton02a] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):333 –336, mar 2002.
- [Ton02b] E. Tonti. Finite formulation on unstructured grids. In Computation in Electromagnetics, 2002. CEM 2002. The Fourth International Conference on (Ref. No. 2002/063), page 2 pp., april 2002.
- [Ton13] E. Tonti. The mathematical structure of classical and relativistic physics.  $Birkh\alpha user\ Basel,\ 2013.$
- [Ton14] Enzo Tonti. Why starting from differential equations for computational physics? Journal of Computational Physics, 257:1260–1290, 2014.
- [Tre02a] F. Trevisan. The Cell method for the analysis of 3D static and quasi-static magnetic fields. *Elsevier Preprint*, 2002.
- [Tre02b] F. Trevisan. Plane Magnetic Field Analysis with the Finite Formulation. Dec 2002.
- [Tre04] F. Trevisan. 3-d eddy current analysis with the cell method for NDE problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 40(2):1314–1317, 2004.
- [TS05] F. Trevisan and R. Specogna. Geometric derivation of discrete constitutive equations for eddy-current problems. 2005.

- [TVMG99] F. Tourkhani, P. Viarouge, T. A. Meynard, and R. Gagnon. A new approach to simplify the steady-state computation problem of a power converter. In *Power Electronics Specialists Conference*, 1999. PESC 99. 30th Annual IEEE, 1999.
- [TZ10] E. Tonti and F. Zarantonello. Algebraic formulation of elastodynamics: the cell method. Computer Modeling in Engineering & Sciences(CMES), 64(1):37–70, 2010.
- [Urs03] R. K. Ursem. Models for evolutionary algorithms and their applications in system identification and control optimization. BRICS, 2003.
- [VLA<sup>+</sup>11] H. VuXuan, D. Lahaye, S. O. Ani, H. Polinder, and J. A. Ferreira. Effect of design parameters on electromagnetic torque of pm machines with concentrated windings using nonlinear dynamic fem. In *Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, 2011 IEEE International, pages 383–388. IEEE, 2011.
- [VLHB04] C. Von Lücken, A. Hermosilla, and B. Barán. Algoritmos evolutivos para optimización multiobjetivo: Un estudio comparativo en un ambiente paralelo asíncrono. In X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, 2004.
- [Wal96] M. Wall. Galib: A c++ library of genetic algorithm components. *Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology*, 87:54, 1996.
- [Wal00] M. Wall. Galib. A C++ Library for Genetic Algorithm Components. Massachusetts Institute of Tech, 2000.
- [Wal05] John B Walsh. Finite element methods for parabolic stochastic pde's. *Potential Analysis*, 23(1):1–43, 2005.
- [Wei84a] T. Weiland. On the numerical solution of maxwell's equations and applications in the field of accelerator physics. Technical report, Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg (Germany, FR), 1984.

- [Wei84b] T. Weiland. On the unique numerical solution of maxwellian eigenvalue problems in three dimensions. Technical report, Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg (Germany, FR), 1984.
- [Wei90] T. Weiland. Solving maxwell's equations in 3d and 2d by means of mafia. In *Proc. of the Conf. on Computer Codes and the Linear Accelerator Community*, LA-11857-C, 1990.
- [Wei96] T. Weiland. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, 1996.
- [Wil85] P. R. Wilson. Euler formulas and geometric modeling. Computer Graphics and Applications, IEEE, 5(8):24–36, 1985.
- [WPFH94] M.-F. Wong, O. Picon, and V. Fouad Hanna. The impact of whitney forms on computational electromagnetics. In Antennas and Propagation Society International Symposium, 1994. AP-S. Digest, volume 3, pages 2076–2079 vol.3, June 1994.
- [Y<sup>+</sup>66] K. S. Yee et al. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag*, 14(3):302–307, 1966.
- [Yam02] K. Yamazaki. An efficient procedure to calculate equivalent circuit parameter of induction motor using 3-d nonlinear time-stepping finite-element method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):1281–1284, 2002.
- [ZLO77] O. C. Zienkiewicz, J. Lyness, and D. Owen. Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential—a finite element solution. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 13(5):1649–1656, Sep 1977.