UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECIALES

TESIS DOCTORAL

EL SISTEMA NUMÉRICO D EN LA FORMACIÓN DEL MAESTRO. ESTUDIO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

María Dolores Moreno Martel

Las Palmas de Gran Canaria, 2013

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECIALES

D JOSE LUIS CORREA SANTANA, SECRETARIO DEL DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECIALES DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA,

CERTIFICA,

Que el Consejo de Departamento celebrado el día 15 de mayo de 2013, tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada "*El sistema numérico D en la Formación del maestro. Estudio de un programa de formación*", presentada por la doctoranda Dña. Mª Dolores Moreno Martel y dirigida por los Doctores D. Martín Manuel Socas Robayna y D. Victor Manuel Hernández Suárez.

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Artº 8.2 del *Reglamento para la elaboración, tribunal, defensa y evaluación de Tesis Doctorales* de esta Universidad, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a veintisiete de junio de dos mil trece.

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Didácticas Especiales

t +34 928 451 770
f +34 928 452 778
secretaria@dde.ulpgc.es
www.ulpgc.es
C / Santa Juana de Arco, nº 1
Campus del Obelisco
35004 Las Palmas de Gran Canaria

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECIALES

PROGRAMA DE DOCTORADO: FORMACIÓN DEL PROFESORADO

TESIS DOCTORAL

EL SISTEMA NUMÉRICO D EN LA FORMACIÓN DEL MAESTRO. ESTUDIO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

Tesis Doctoral presentada por Doña María Dolores Moreno Martel

Dirigida por los Doctores D. Martín Manuel Socas Robayna y D. Víctor Manuel Hernández Suárez

Los Doctores **La Doctoranda**

Las Palmas de Gran Canaria, a 26 de septiembre de 2013

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECIALES

TESIS DOCTORAL

EL SISTEMA NUMÉRICO D EN LA FORMACIÓN DEL MAESTRO. ESTUDIO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

María Dolores Moreno Martel

Las Palmas de Gran Canaria, 2013

Don Martín Manuel Socas Robayna y Don Víctor Manuel Hernández Suárez, Doctores por la Universidad de La Laguna (ULL)

ACREDITAN

Que la presente Memoria, titulada **El sistema numérico D en la formación del maestro. Estudio de un programa de formación**, ha sido realizada bajo la dirección de los que suscriben, por la Licenciada María Dolores Moreno Martel, en el Departamento de Didácticas Especiales de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctora.

Que esta Memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su presentación en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Y para que así conste, a los efectos oportunos, firmamos la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a 26 de septiembre de 2013.

Los Directores

A mis padres y hermanas

AGRADECIMIENTOS

Deseo reconocer mi gratitud a las siguientes personas. A D. Martín Socas Robayna por su exquisita dirección, sus conocimientos y labor investigativa en Didáctica de las Matemáticas y que sin su guía este trabajo no hubiera visto la luz. A D. Víctor Hernández Suárez por su magnífica dirección, ayuda y positivismo, lo que ha hecho posible la culminación de esta memoria. A Dña. Celia Ríos Villar por su perseverancia y empuje para que, la que suscribe, iniciase la labor investigativa que ha hecho posible la realización de este trabajo. A todos los compañeros del área de Didáctica de las Matemáticas por contribuir a la realización de esta investigación con su actividad docente. A mis hermanas, Lourdes y Olga, por comprender mis ausencias.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL

Esta Memoria se dedica a la descripción de una investigación acerca del comportamiento de estudiantes para maestros y para profesores de Matemáticas de Secundaria, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas. En ella se presenta, de forma fundamental y en relación con los números, en particular con los números decimales, sus diferentes aspectos –operaciones, estructuras, representaciones, problemas y razonamientos– en relación a la Competencia Matemática Formal (CMF). Asimismo, se presenta el diseño y puesta en práctica de un experimento de enseñanza con el que se intenta diagnosticar y remediar algunos de los errores que se han detectado en la enseñanza y aprendizaje de los números decimales y en relación con los otros conjuntos numéricos.

Las fracciones decimales o números decimales se han convertido, en los últimos años, en protagonistas de todos los cálculos, en calculadoras, en ordenadores, etc. En este comienzo del siglo XXI, la Bolsa de Nueva York, se olvida de los quebrados y acoge a los decimales; abandona las cotizaciones en fracciones binarias de dólar para acogerse a las fracciones decimales. Sin embargo, hemos observado que su tratamiento en el ámbito escolar no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés de este cálculo con calculadoras y ordenadores sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

El tratamiento de los sistemas numéricos en el Sistema Educativo Español es como sigue: naturales, fracciones, decimales y enteros en Primaria y naturales, enteros, decimales y fracciones en Secundaria Obligatoria; se deja para el Bachillerato el número real y el complejo, dependiendo del tipo de Bachillerato.

El análisis de las propuestas curriculares y de los libros de texto de la Educación Secundaria pone de manifiesto que, en la mayor parte de ellos, se identifica al conjunto de los números decimales con el de los números reales. Esta identificación incorrecta tiene, al menos, dos referencias significativas: Courant y Robbins (1971) y Grupo Zero (1978).

En el primer libro, se da como definición general, que dado un punto P de la recta que no esté representado por una fracción decimal "con un número finito n de cifras", está representado por la *fracción decimal infinita*, $z,a_1a_2a_3...$, si para cualquier valor de n el punto P está situado en el intervalo de longitud 10^{-n}, con origen en el punto $z,a_1a_2a_3...a_n$, definición que permite establecer una correspondencia entre los puntos de la recta numérica y todas las "fracciones decimales finitas o infinitas". Ello origina una nueva interpretación: un "número" es una fracción decimal finita o infinita. Los decimales infinitos que no representan números racionales serán llamados números irracionales. Indican los autores que hasta mediados del siglo XIX estas consideraciones eran aceptadas como satisfactorias para el sistema de los racionales y de los irracionales, sistema designado con el nombre de *continuo numérico*. Señalan que el desarrollo de la Geometría Analítica y del Cálculo Diferencial e Integral, se hace sin riesgo con este concepto de número y que es durante la crisis de los principios del Análisis Matemático, cuando se abre paso la idea de que el concepto de número irracional requería un análisis más preciso. Más adelante, precisan la definición provisional anterior, formulando la siguiente: *el continuo numérico, o sistema de números reales es la totalidad de los decimales infinitos. Los números racionales son los decimales periódicos; los números irracionales son los decimales no-periódicos.*

Esta organización es adaptada en el texto del Grupo Zero (1978): *"La medida y el número",* y ésta es también una referencia significativa, ya que tiene cierta influencia en los desarrollos curriculares de los sistemas numéricos en España. De esta manera, al igual que Courant y Robbins, adoptan esta posición y proponen didácticamente identificar el conjunto de todos los números decimales, con el conjunto de los números reales, y recuerdan como importante la necesidad de considerar a los números enteros como un número decimal de período 0.

Sin embargo y con relación a los conocimientos de los alumnos, encontramos que muchos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)]. Manifiestan que los números que les resultan más conocidos son los naturales, las fracciones y los decimales y menos los irracionales y los negativos. Muestran gran confusión con la terminología: enteros, fracciones, decimales, racionales, irracionales, etc. Presentan grandes dificultades cuando intentan relacionar los números en los distintos sistemas numéricos. Robinet observó que los números reales, para una buena parte de los alumnos, son números que pertenecen a cualquiera de los conjuntos *N, Z, D* y *Q*, y algunos números como $\sqrt{2}\ \ y\ \ \sqrt{3}$; diferenciando, a menudo, los números de *R* por su escritura y no por sus propiedades numéricas.

Posteriormente Socas (2001), en el ámbito de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, durante los cursos 1993 al 1997, realizó un estudio con 67 alumnos de 5.º curso de Ciencias Matemáticas, en la ULL, especialidad de Matemática Fundamental, sobre la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de expresarlos. Se encontraron, salvo pequeñas diferencias no significativas, dos tendencias en relación con los números decimales. La primera, se caracteriza por identificar el "número decimal como sinónimo de número real" (85%). La segunda, aunque minoritaria en este grupo de alumnos (15%), es también significativa, y se caracteriza por identificar el "número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas". Se observaron, también, en las respuestas al cuestionario que se propuso, situaciones en las que los números racionales son identificados por su escritura fraccionaria, es decir, el número racional se identifica como el cociente de dos números enteros. Tienen, en definitiva, estos alumnos de sólida formación matemática, la tendencia a identificar el número en su dimensión conceptual por su representación semiótica.

Los Decimales han constituido y constituyen, en la actualidad, un campo de investigación significativo, como muestran diferentes Proyectos de Investigación, entre ellos, el Proyecto *Rational Number Proyect (RNP)* (1979-2003), o los trabajos de diferentes autores como Brousseau (1985) y discípulos, así como los de Steinle y Stace (2004, 2006).

Nos planteamos, en este trabajo, investigar en un primer momento, cómo se comportan en estas situaciones otros grupos de alumnos, caracterizados por tener una formación matemática distinta, en particular estudiantes para maestros y para profesores de Secundaria. En un segundo momento, pretendemos diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza, con futuros maestros de Primaria, que ofrece una propuesta de organización de los Sistemas Numéricos, distinta a la relatada anteriormente, en la Educación Obligatoria y en la formación de maestros. La propuesta se hace a partir de las Fracciones decimales o Números decimales y de los sistemas de escritura decimal y fraccionaria en el siguiente sentido:

a) Los números reales pueden ser:

1) Números racionales: Admiten una escritura fraccionaria y una escritura decimal finita o infinita periódica.

2) Números irracionales: Admiten una escritura decimal infinita no periódica, y no admiten una escritura fraccionaria.

b) Los números racionales pueden ser:

1) Fracciones decimales o Números decimales: Admiten escritura decimal finita.

2) Fracciones no decimales: Admiten una escritura decimal infinita periódica.

c) Los números decimales o fracciones decimales pueden ser:

1) Números enteros.

2) Números no enteros.

d) Los Números enteros pueden ser:

1) Números naturales.

2) Números enteros negativos.

Se pretende con ello, además, diagnosticar y remediar los errores observados en la enseñanza y el aprendizaje de los Sistemas Numéricos.

Este trabajo se ha desarrollado bajo la denominación de: "El sistema numérico D en la formación del maestro. Estudio de un programa de formación". Está organizado en tres estudios, a saber: Estudio exploratorio, Estudio experimental y Estudio definitivo.

En el CAPÍTULO 1, presentamos el desarrollo y delimitación del problema de investigación.

Comenzamos con la exposición de los decimales como campo de investigación. Seguimos con el estudio del estatus matemático de los números decimales desde las perspectivas histórica y epistemológica. A continuación tratamos los decimales desde la perspectiva curricular. Ofrecemos una amplia revisión de antecedentes (artículos y libros) relacionados con investigaciones en el tema de los decimales, en especial las que tienen relación con la investigación que hemos realizado. Finalmente, delimitamos el problema de investigación.

En el CAPÍTULO 2, abordamos los objetivos de investigación, el marco conceptual y la metodología.

En este capítulo tratamos en primer lugar las preguntas, objetivos y conjeturas de la investigación llevada a cabo. Seguidamente se abordará el marco conceptual y la metodología.

Se describen los elementos del marco conceptual:

- Competencia Matemática Formal y Competencia Cognitiva, desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).
- Relación entre el conocimiento matemático y didáctico de este enfoque (ELOS) con el conocimiento matemático para enseñar (MKT).
- Conocimientos de los futuros profesores de Matemáticas.

- Asignaturas de contenido matemático y didáctico que cursan los alumnos participantes en la investigación.

Además, se abordan de forma general las investigaciones de diseño, que constituyen la fundamentación del experimento de enseñanza realizado en la investigación. Se finaliza con los aspectos que caracterizan la evaluación de los estudios.

En el CAPÍTULO 3, se trata el Estudio exploratorio con estudiantes para maestros.

Comenzamos con el planteamiento del problema de investigación. Se especifica la metodología aplicada y se describen las fases del experimento en las que se tendrán en cuenta el diseño y administración del cuestionario (Cuestionario C1). En este apartado, también, se añade un análisis de los contenidos matemáticos del cuestionario elaborado que nos servirá para la evaluación de los resultados.

Se concluye con la presentación de los resultados obtenidos y con las consideraciones finales que se formulan.

En el CAPÍTULO 4, se presenta el Estudio experimental con estudiantes para profesores de Secundaria y para maestros.

Se tratan, por un lado, los elementos comunes a las dos situaciones: el planteamiento del problema con sus preguntas de investigación, objetivos y conjeturas, la metodología aplicada y el análisis de contenido matemático del cuestionario (Cuestionario C2). Por otra parte, se describen y se analizan los resultados obtenidos con la implementación del instrumento de evaluación a cada grupo. Finalmente, se realiza una discusión de los resultados y se hacen consideraciones finales.

En el CAPÍTULO 5, se aborda el Estudio definitivo con estudiantes para maestros.

Se expone el diseño y puesta en práctica de un experimento de enseñanza guiado por conjeturas. Se comienza con la presentación de la metodología aplicada que abarca, inicialmente, la exposición de los objetivos, cuya explicación se ha abordado en el Capítulo 2, y de la conjetura planteada. Se presenta la muestra elegida para el estudio y se describen las fases del experimento y los instrumentos de recogida de datos. Se distinguen tres fases: diagnóstico, retroalimentación y revisión. Seguidamente, se exponen los resultados obtenidos en las fases de diagnóstico y revisión y se lleva a cabo una comparación de ellos. Del mismo modo, se presentan los resultados obtenidos de los Informes de los alumnos.

Se realiza una discusión de los resultados obtenidos en las fases de diagnóstico y revisión. Se estudian las respuestas del cuestionario (Cuestionario C2) y las de las entrevistas audiograbadas, realizadas en ambas fases. Para ello, se interpretan los datos obtenidos haciendo uso de nuestro Marco Conceptual (Capítulo 2) y se comparan con los obtenidos en investigaciones similares (Antecedentes).

Finalizamos, con la exposición de las conclusiones con respecto a los objetivos y conjetura planteada.

En el CAPÍTULO 6, se hace la comparación y discusión de los resultados de los estudios.

Se presentan, en primer lugar, los resultados obtenidos en los tres estudios realizados: exploratorio, experimental y definitivo. En este proceso, se tienen en cuenta las preguntas de los cuestionarios utilizados en la investigación (Cuestionario C1 y Cuestionario C2) con el mismo tipo de análisis del contenido matemático. En segundo lugar, se comparan y discuten dichos resultados.

En el CAPÍTULO 7, se exponen las conclusiones generales de nuestro trabajo, así como las cuestiones abiertas que se esperan abordar en posteriores investigaciones.

Finalizamos la presentación de esta memoria con las referencias bibliográficas utilizadas en la misma.

Completa la Memoria un anexo, en formato digital, en el que se recogen los cuestionarios, las transcripciones de las entrevistas audiograbadas, los instrumentos de análisis y los datos de las distintas pruebas.

En esta Introducción general se referencian los siguientes artículos y comunicaciones en Congresos nacionales e internacionales, que forman parte de las producciones en relación con este trabajo:

- “Respuestas del alumnado de Magisterio a un cuestionario sobre números decimales”. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación matemática*, VI (2004), pp. 253-275.
- “Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas”. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación matemática*, VIII, (2007), pp. 251-272.
- “Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre el concepto de número decimal”. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación matemática*, X, (2009), pp. 179-221.

- “Sistemas numéricos y Sistemas de representación. Problemas de enseñanza y aprendizaje”. XIII Evento Internacional “MATECOMPU´2011”, III Congreso Internacional “ALAMMI´2011”. Universidad de Ciencias Pedagógicas “JUAN MARINELLO”. Cuba (2011).

Este trabajo de Tesis Doctoral ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación del Plan Nacional de Investigación (Plan I+D+I), del Ministerio de Ciencia e Innovación, de referencia EDU2011-29324. La autora forma parte del Proyecto de Investigación del citado Proyecto.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a tratar el planteamiento y delimitación del problema de investigación.

Comenzamos con la presentación de los decimales como campo de investigación en la que se recogen los trabajos de investigación más significativos, que se han desarrollado durante varios años como por ejemplo las investigaciones del Proyecto Rational Number Proyect (RNP) (1979-2003), Brousseau (1985) o los trabajos de Steinle y Stace (2004, 2006).

Abordamos el estatus matemático de los números decimales desde las perspectivas histórica y epistemológica. Realizamos un recorrido histórico de los números decimales, desde que no son considerados objeto de estudio hasta que se convierten en un objeto matemático ligado al concepto de número real. Tratamos algunas construcciones formales del concepto de número decimal y estudiamos la relación del concepto con las representaciones de los números.

Tratamos también los decimales desde la perspectiva curricular. Se analizan de forma especial la organización curricular de los sistemas numéricos y el papel que se le asigna a los decimales en los programas oficiales.

Ofrecemos una amplia revisión de los antecedentes relacionados con investigaciones en el tema de los decimales, en especial las que tienen relación con la investigación que hemos realizado.

Finalmente, delimitamos el problema de investigación y mostramos de forma concreta, sus objetivos.

1.2 LOS NÚMEROS DECIMALES COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN

Muchas son las investigaciones que se han desarrollado y se siguen planteando sobre la enseñanza y el aprendizaje de los campos numéricos, en especial el de los números decimales. Estas investigaciones se han orientado en distintas direcciones: dificultades y errores en su aprendizaje, orientaciones curriculares, propuestas didácticas, etc. En la elección de los referentes más significativos, que exponemos a continuación, coincidimos con Konic (2011).

En los años setenta Guy Brousseau, elabora una teoría con la que se aspira al estatus de ciencia para la Didáctica de las Matemáticas y que exige que las situaciones de aprendizaje de los conceptos matemáticos sean experimentadas y puedan reproducirse en condiciones semejantes. Para ello ha sido necesario identificar los elementos que determinan el significado de las acciones del maestro y de los alumnos, y las condiciones del aprendizaje (Centeno, 1988). En este sentido, dedicó gran parte de sus investigaciones a los números racionales. En lo que respecta a nuestro trabajo, consideramos el estudio de conflictos y obstáculos en los números decimales. Hace la distinción de dos grandes grupos de obstáculos sucesivos:

1. El grupo de los obstáculos originados por la persistencia del empleo de las propiedades y de las representaciones específicas de los números naturales en circunstancias en las que, sin embargo, está muy claro que no se deben rechazar.
2. El grupo de obstáculos originados por la persistencia del empleo de las situaciones particulares diferentes que son signos de concepciones distintas, mientras que una homogeneización sería posible y necesaria.

Este segundo grupo aparece como una consecuencia de los efectos del primero sobre el aprendizaje.

Guy Brousseau realizó, también, junto a Nadine Brousseau (1985), experiencias de enseñanza aplicando un material elaborado para la enseñanza de los racionales y los decimales. Estas experiencias se ajustaban al programa nacional francés. Posteriormente, se ha obtenido una serie de trabajos de investigación fundamentados en esta teoría (Douady y Perrin, 1990; Bolón, 1997).

Asimismo, existen otros grupos de investigación a nivel internacional que se dedican a estudiar los números, sus propiedades y de forma especial las dificultades que se obtienen de estudios con alumnos de distintos niveles educativos, con estudiantes para profesor o con profesores en ejercicio. En este orden de cosas, destacamos el grupo denominado Rational Number Project (RNP). Fue fundado por la National Science Foundation en 1979, en la universidad de Minnesota. Es un proyecto en el que se ha estudiado la comprensión en los alumnos del concepto de número racional y la formación permanente del maestro en este tópico. Sus principales investigadores son Cramer, Harel, Lesh y Post (1979-2003). Describen el papel que desempeñan varios sistemas de representación en la adquisición y uso de este concepto. Abordan los conceptos de fracción, decimal, razón, división, mediación y operador. Elaboran varias lecciones fundamentadas en una variedad de teorías que pueden fomentar un desarrollo adecuado de esta noción. Han publicado más de 90 artículos, capítulos en libros, varios libros y otras publicaciones del proyecto.

En el año 2006 crean un módulo para ampliar el RNP con lecciones para los grados medios y complementaron trabajos previos incluyendo: operaciones con fracciones, significado y operaciones de decimales y porcentajes. Para apoyar la implementación de este módulo propusieron poner en práctica un taller en línea, para profesores.

Steinle, Stace y Chambers (2006), reúnen en un formato de CD una serie de trabajos relacionados con los números decimales. Incluye estudios de casos, guías de enseñanza, test de diagnóstico, materiales de ayuda para el profesor, artículos de investigaciones, etc. Los estudios se centran en el valor de posición. Consideran que las dificultades en la interpretación de la notación decimal son el origen de los problemas que surgen en las operaciones aritméticas con números decimales, en el redondeo, en el trabajo con cifras significativas y en cuestiones de sentido de las Matemáticas. Igualmente, se destaca el trabajo de tesis doctoral referido a la notación decimal llevado a cabo por Steinle (2004).

1.3 LOS NÚMEROS DECIMALES DESDE LA PERSPECTIVA HISTÓRICA

Para el desarrollo de este apartado hemos tomado de referencia los trabajos de Centeno (1988) y Socas (2001, 2002).

Durante siglos los números decimales han servido para medir y representar cantidades, sin ser vistos ni como objeto de estudio ni como útil aplicable a la resolución de problemas. Esta perspectiva tiene interés a partir del siglo IX cuando Al-Khwarizmi unifica el cálculo de los naturales con el de las razones geométricas e introduce la numeración decimal.

Sin embargo, el redescubrimiento de los números decimales se produjo en el siglo XVI. La transformación social que tiene lugar en dicho siglo y en el siguiente, con el consiguiente auge del comercio, de la navegación, de los repartos de tierra, todo lo cual requería realizar abundantes cálculos, favoreció el citado redescubrimiento.

En la primera mitad de este siglo aparece una gran cantidad de libros de álgebra especialmente de origen germánico y en uno de ellos, cuya autoría es debida a Rudolff y editado en 1525, se muestra el carácter particular que tiene la división por la unidad seguida de ceros y se señala una notación eficiente; así por ejemplo, se indica que si se divide 652 por 10, da 65/2, etc. Durante algún tiempo este autor fue considerado el padre de las fracciones decimales y de su notación moderna, pero estudios posteriores ponen de manifiesto que Rudolff no conocía la importancia y la generalidad de este método y que las cifras separadas no eran décimas, centésimas,…sino el resto de la división.

Los protagonistas de la extensión de los números decimales en Occidente fueron el francés Francois Viéte (1540-1603) en su obra *Canon mathematicus seu ad triangula,* y el belga Simon Stevin (1548-1620) con su obra *La Disme (La Décima)*, primer libro de la historia que trata únicamente de los números decimales. Para Stevin, *La Disme*, era una especie de Aritmética que permite efectuar todas las operaciones utilizando solamente números enteros. En ella, explica cómo se pueden hacer las cuatro operaciones básicas con números decimales, si bien indica que el único problema consiste en elegir bien, al final de la operación, la parte entera. También señala que en su Obra no hay ningún número "roto", es decir, no aparece ninguna fracción.

En 1616, en la traducción de una obra del escocés John Napier (1550-1617), las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria. Napier propuso un punto o una coma como signo de separación decimal: el punto se consagró en los países anglosajones, pero en muchos otros países europeos, como por ejemplo España, se continúa utilizando la coma decimal.

Sin embargo, el reconocimiento matemático de los números decimales no se dará hasta que los números reales sean plenamente aceptados como objetos matemáticos. En este orden de cosas, podemos comentar que hasta mediados del siglo XIX el concepto aceptado de número real era el caracterizado por el "procedimiento decimal". A continuación haremos un breve comentario sobre este procedimiento.

Se sabe, tal y como apunta Socas (2002), que para representar en la recta un conjunto denso, no es necesario considerar todos los números racionales, basta, por ejemplo, tomar los números decimales (números racionales cuyo denominador es una potencia de 10). Asimismo, ninguna fracción irreducible cuyo denominador contenga otros factores primos diferentes del 2 y del 5 puede ser fracción decimal y, por lo tanto no es un número decimal. Así, por ejemplo:

$$3/11 = 0{,}272727272727\ldots,$$

lo que significa que 3/11 está entre 0 y 1, entre 2 y 3 décimas, entre 27 y 28 centésimas, etc., es decir, podemos aproximar 3/11, por defecto y por exceso, mediante números decimales, tanto como queramos, de manera que los números decimales determinan una sucesión de intervalos encajados cuyas amplitudes sucesivas 1, 1/10, 1/100, 1/1000,…, acota el error cometido por la aproximación al número decimal respectivo. De igual manera, por ejemplo, la solución de la ecuación $x^2=2$, en su escritura decimal conduce a una expresión decimal indefinida, que se puede representar por una sucesión de intervalos encajados, de extremos números decimales y de amplitudes sucesivas 1, 1/10, 1/100, 1/1000,…, tan pequeñas como se quiera y que no puede determinar un número racional. Todo esto sugiere, la siguiente definición de número como una expresión decimal indefinida, pudiéndose considerar la fracción decimal como caso particular de expresión de período cero o 9 (1,2000000…= 1, 19999999… admitiendo, que estas dos expresiones representan al mismo número), entonces los números racionales serán caracterizados por las expresiones decimales indefinidas periódicas y los números irracionales por las expresiones decimales indefinidas no periódicas.

Este procedimiento también es de adjunción, es decir añade al conjunto numérico del sistema inicial nuevos números que se introducen a través de su escritura. De esta manera, a partir de los números naturales y por adjunción se construyen los números reales a través de la escritura decimal. Así, podemos definir un número real positivo a una expresión de la forma: k, $x_1x_2x_3…x_n…$, donde k es un número natural y $x_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, para todos los valores de n. Además se admite que las expresiones 0,199999… y 0,20000…, representan el mismo número.

Por otra parte, la revisión crítica de los principios y fundamentos de las Matemáticas y el desarrollo de la Geometría analítica y el Cálculo Infinitesimal condujeron a un análisis más preciso del concepto de número real. Este trabajo fue realizado por varios matemáticos: Weierstrass, en el año 1869, Dedekind, en el año 1872, Cantor, en el año 1872, etc.

En este sentido Socas (2002) señala que el número decimal tiene como objeto de saber matemático su significado último relacionado con el número real, y sostiene que:

> *Un número decimal es un número real y no puede entenderse el número decimal si no se entiende el número real.*

Este razonamiento se sigue aplicando en la actualidad en el sistema educativo. Al respecto son significativas las palabras de Dhombres y otros (1987):

> *Pedagógicamente se tendería a pensar que esta representación es la que mejor se adapta a la enseñanza secundaria, porque reproduce mejor la idea intuitiva de medida, y porque aclara las verdaderas dificultades: la no existencia de una escritura decimal única para cada número y la existencia de un número real inverso de un decimal cualquiera.*

Podemos concluir que en la historia de los números decimales se observan distintas etapas, que van desde que estos no son considerados objeto de estudio hasta que aparecen ligados al concepto de número real. En la siguiente tabla mostramos las distintas etapas históricas del número decimal en correspondencia con el significado atribuido en cada una. Estos datos han sido tomados de Centeno (1988).

ETAPAS	SIGNIFICADO
Durante siglos ha funcionado de forma implícita para medir y representar cantidades	No son considerados objeto de estudio ni como instrumento de aplicación a la resolución de problemas
Los trabajos de Al-Khwarizmi: Unificación del cálculo de los naturales con el de las razones geométricas e introducción de la numeración decimal	Aparece como instrumento matemático de aproximación de racionales y radicales
Con Al-Uglidisi, su primer inventor, el decimal se utiliza conscientemente; se le reconoce y se le nombra, pero no se le trata como objeto de estudio	El decimal se utiliza conscientemente; se le reconoce y se le nombra, pero no se le trata como objeto de estudio
Al-Kashi, su segundo inventor, lo reconoce como un descubrimiento matemático, pero no existe todavía una teoría que fije su definición, sus propiedades y su posición epistemológica	Es todavía la traducción del sistema sexagesimal de los astrónomos a uno más cómodo para los cálculos
Con Stevin, se convierten en un objeto matemático que puede ser enseñado y utilizado en aplicaciones prácticas	Se convierte en un objeto matemático que puede ser enseñado y utilizado en aplicaciones prácticas
Hay que esperar a que los reales sean considerados objetos matemáticos para que estos adquieran el estatus matemático	El concepto de número decimal ligado al de número real

Tabla 1.1: El número decimal objeto de saber

1.4 LOS NÚMEROS DECIMALES COMO SISTEMA NUMÉRICO

Se entiende por sistema numérico (Socas, 2001), al desarrollo del objeto número (natural, entero, decimal, racional, algebraico, real y complejo) en conexión mediante diferentes ampliaciones o extensiones, y presentado manteniendo una unidad basada en la noción de estructura.

En cuanto a la construcción de los números decimales nos encontramos con dos tipos: las construcciones directas y la construcción pasando por la de los números racionales.

En las construcciones directas, los decimales se obtienen por extensión de los números enteros.

Así, una manera de llevar a cabo la construcción de los números decimales consiste en hallar las soluciones de la ecuación: $10^n \cdot x = a;\ a \in Z \ \ y \ \ n \in N$. Para ello se define en $Z \times N$ la relación de equivalencia:

$$(a,n)\ R\ (b,m) \ \Leftrightarrow \ a \cdot 10^m = b \cdot 10^n,$$

cada clase de equivalencia define un número decimal. En el conjunto de los números decimales, D, se definen las operaciones de adición y multiplicación ($(a,n)+(b,m)=(a\cdot 10^m + b\cdot 10^n,\ n+m)\ y\ (a,n)\times(b,m)=(a\cdot b,\ m\cdot n)$), compatibles con la relación anterior, y una relación de orden ($(a,n)\leq(b,m)\Leftrightarrow a\cdot 10^m \leq b\cdot 10^n$). Las operaciones definidas prolongan las operaciones en N. Asimismo, estas operaciones junto con las propiedades confieren a D una estructura de anillo conmutativo, unitario íntegro y totalmente ordenado.

De esta manera, se dota al objeto "Número Decimal" de un estatus de sistema numérico.

Otra forma de plantear la construcción de D es resolviendo el problema de que la división de enteros no es siempre posible. Nos construimos un conjunto en el que la división decimal como reparto en varias fases, igualitario y exacto sea posible para todo par de enteros (a, b), de forma que el cociente a/b tenga sentido como división decimal exacta.

En las construcciones pasando por Q, una vez definida la estructura de Q, cuerpo abeliano, se limita a tomar un subconjunto de sus elementos caracterizados de la siguiente manera: los decimales son los racionales que pueden escribirse en forma de fracción decimal.

1.5 LOS NÚMEROS DECIMALES Y LAS REPRESENTACIONES

Como ya hemos mencionado, una manera de aproximarse a D es considerar el problema de la inversibilidad de la multiplicación en el conjunto de los números enteros. La ecuación bx=a, para números enteros arbitrarios a y b, cuya solución recibe el nombre de cociente y se escribe $\frac{a}{b}$, no es siempre resoluble en Z, al no efectuarse siempre tal división. Se plantea por ello completar este conjunto. De esta manera, tal y como apunta Socas (2002) surgen dos cuestiones de especial interés: una, relativa a garantizar que la ecuación bx=a sea resoluble en todos los casos, excepto $b\neq 0$; y otra, relacionada con garantizar que el resultado pueda ser expresado en el mismo sistema de numeración utilizado para los números naturales y enteros, o, en una extensión natural del mismo, donde $\frac{a}{b}$ sea el signo de la operación división, es decir, un proceso que tiene lugar, y no el proceso y el resultado a la vez.

En relación con la primera cuestión se construye Q, el conjunto de los números racionales, a partir de la relación de equivalencia siguiente definida en ZxZ^{*}:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 \; b_2 = b_1 \; a_2$$

De esta manera Q queda caracterizado como un cuerpo arquimediano numerable donde no se cumple el teorema del extremo superior. Con ello, la división es siempre posible en Q.

Con respecto a la segunda cuestión, b debe ser una potencia de 10 y la ecuación tiene siempre solución en el sistema de representación decimal. Así, el conjunto de los números decimales, D, queda determinado al definir en ZxN, la siguiente relación binaria:

$(a_1, \, n_1) \; R \; (a_2, \, n_2) \Leftrightarrow a_1 \; 10^{n_2} = a_2 \; 10^{n_1}$, donde la clase del par $(a, \, n)$ se escribe $\left[\frac{a}{10^n}\right]$.

El número decimal o fracción decimal que se obtiene de la solución de una ecuación del tipo bx=a, con $b = 10^n$, se entiende, desde el punto de vista de la división entera, como un reparto igualitario y exacto en varias fases de determinados números enteros. Esto se puede conseguir con la división entera entre el numerador y el denominador dividiendo sucesivamente los restos multiplicados por diez. Por ejemplo:

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 3 + \frac{10}{40} = 3 + \frac{1}{10}\left(\frac{10}{4}\right) = 3 + \frac{1}{10}\left(2 + \frac{2}{4}\right) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{20}{40}\right) =$$
$$= 3 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 3{,}25$$

Según Socas (2001), las fracciones decimales se caracterizan por ese reparto igualitario y exacto en varias fases de determinados números enteros, y que viene expresado por la ecuación de reparto siguiente:

$$\frac{a}{b} = c\left[\frac{1}{10}\right] + \left(\frac{10a - bc}{b}\right)\left[\frac{1}{10}\right], \; con \;\; bc \leq 10a < b(c+1)$$

Con respecto al orden definido en D, es denso en sí mismo, es decir, entre dos números decimales siempre hay otro número decimal, en consecuencia infinitos. Esto constituye una ganancia útil desde el punto de vista conceptual y didáctico, al conseguirse un conjunto denso en sí mismo previo al de los racionales.

Se sabe que las extensiones por cocientes proporcionan conjuntos que tienen una gran dificultad para ser representados en la recta numérica. Sin embargo, esta problemática se mejora con la extensión considerada, que conserva el orden denso, la recta decimal. Otras nociones como medida y reparto adquieren con estas cantidades numéricas su verdadero sentido práctico.

Por otra parte, la palabra "decimal", tiene un significado intrínseco referido a la naturaleza de este conjunto numérico, además de referirse a representaciones específicas dentro de los sistemas de numeración o de los sistemas de medidas.

Los números naturales, enteros, racionales o reales se expresan con la escritura decimal por la cual se tiende a denominar número decimal a cualquier número expresado con esta notación. En el lenguaje habitual se acostumbra a confundir número decimal con una escritura con coma (Socas 2001, 2002). Esto forma parte de un uso poco apropiado del lenguaje en el que se confunde el objeto matemático con su nombre y representación. En algunas ocasiones este abuso del lenguaje es necesario para simplificar el discurso matemático en la escuela, pero el maestro y el alumno deben ser conscientes de tal confusión.

1.6 LOS NÚMEROS DECIMALES DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR

La enseñanza y aprendizaje de los números constituye un dilatado proceso que tiene lugar a lo largo de toda la enseñanza no universitaria. Se inicia con los números naturales y se finaliza con la introducción de los números reales y complejos en el Bachillerato.

Por un lado, se sabe que muchos alumnos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)], y a pesar de que manifiestan que los números que conocen son los naturales, los fraccionarios y los decimales, omitiendo los irracionales y los negativos, muestran gran confusión con la terminología. Asimismo, se detectan dificultades cuando intentan relacionar los números en los distintos sistemas numéricos.

En el desarrollo de los sistemas numéricos surge el conjunto D de los números decimales, en el que el objeto número decimal es caracterizado erróneamente y en el que la representación decimal de los diferentes números es identificada como número decimal. En Socas (2001) se expone un estudio realizado en el ámbito de la Formación del Profesorado, en el que se analiza la confusión entre el objeto número decimal y la representación semiótica de los diferentes números en la escritura decimal. Se observan dos grupos de respuestas que denomina: A y B. En A, se identifica el número decimal como sinónimo de número real. En B, se caracteriza al número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma. Estas dos tendencias se dan con frecuencias distintas en el grupo que se estudia. La tendencia A es mayoritaria (85%) y la B, minoritaria (15%).

Por otro lado, en el análisis de los números decimales y reales, desde una perspectiva curricular, nos encontramos en el libro de Courant y Robbins (1971) la definición siguiente:

> *el continuo numérico, o sistema de números reales es la totalidad de los decimales infinitos. Los números racionales son los decimales periódicos; los números irracionales son los decimales no-periódicos.*

Esta organización es recogida por muchos textos escolares de Matemáticas para alumnos de Secundaria. En este sentido recordamos el texto del Grupo Zero (1978) como ejemplo significativo de este planteamiento: identificar al conjunto de todos los decimales, como el conjunto de los números reales. En la Figura 1.1 recogemos la clasificación de los números reales que proponen para uso en el contexto escolar, tomado de Socas (2001).

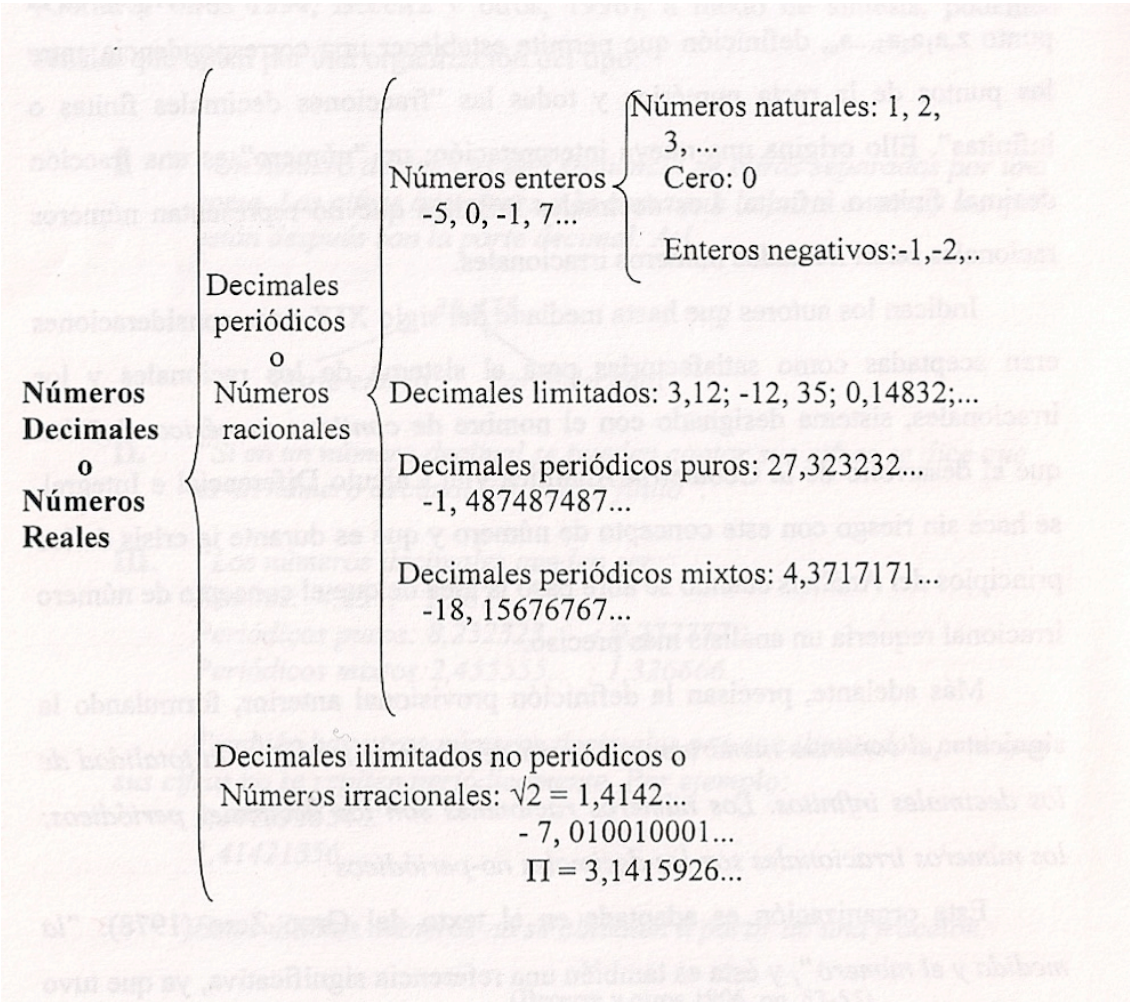


Figura 1.1: Una clasificación de los números reales en el contexto escolar

En la actualidad la propuesta de contenidos, relativos al tema que estamos tratando, que propone la LOE en el Real Decreto 1513/2006 para la Educación Primaria, se estructura de la siguiente manera:

- Números naturales (Primer ciclo).
- Números naturales y fracciones (Segundo ciclo).
- Números enteros, decimales y fracciones (Tercer ciclo).

Los contenidos del tercer ciclo se desglosan en los siguientes:

- Números decimales, valor de posición y equivalencias. Uso de los números decimales en la vida cotidiana.
- Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica.
- Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencias entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Del mismo modo, se menciona que es importante valorar no solo los conocimientos procedimentales sino también los conceptuales.

> *Es importante resaltar que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también, y principalmente, actuar con confianza ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea pertinente e identificar las relaciones básicas entre ellos.* (pp. 43095/43096).

Con respecto a los criterios de evaluación, en el punto 3 tenemos: Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. A este criterio se añade el siguiente comentario:

> *Con este criterio se pretende comprobar la utilización de los diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, y la capacidad de identificarlos y utilizarlos como operadores en la interpretación y resolución de problemas.* (p. 43101).

En cuanto a la Educación Secundaria Obligatoria mostramos en la Tabla 1.2 la propuesta que se hace en el Real Decreto 1631/2006, en la que se detallan los contenidos del Bloque *Números* para los cuatro años de esta etapa. Se puede observar que se sigue aplicando la clasificación clásica de los decimales en exactos y otros (*transformación de fracciones en decimales y viceversa).*

CONTENIDOS DEL BLOQUE: "NÚMEROS"	
PRIMER CURSO	1. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Números primos. Aplicaciones de la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas. 2. Operaciones con números naturales. Potencias de diez para representar números grandes. Redondeo. Estimación de operaciones con números naturales mediante el redondeo. 3. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Fracción generatriz de un decimal exacto. Ordenación de fracciones y decimales exactos. 4. Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales. Significado y usos de las operaciones con números enteros. 5. Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en la que intervenga la proporcionalidad directa. 6. Porcentajes. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. Aplicaciones a la resolución de problemas de la relación de porcentajes muy sencillos con la fracción y el decimal exacto correspondiente. 7. Elaboración y utilización de estrategias personales para el cálculo mental, para el

	cálculo aproximado y con calculadoras. 8. Uso de la calculadora para realizar y verificar operaciones, para reflexionar sobre conceptos y para descubrir propiedades.
SEGUNDO CURSO	1. Significado, uso y representación en la recta de los números enteros. Operaciones elementales. Potencias con exponente natural. Operaciones con potencias. Utilización de la notación científica para representar números grandes. 2. Raíces cuadradas exactas. Estimación de raíces cuadradas. Uso de la calculadora. 3. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. 4. Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Resolución de problemas cotidianos en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. 5. Utilización de los números para contar, medir, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes en diferentes contextos, eligiendo la notación y la forma de cálculo (mental, escrita o con calculadora) más adecuada para cada caso. 6. Uso de la calculadora para realizar y verificar operaciones, evaluar expresiones, reflexionar sobre conceptos y descubrir propiedades.
TERCER CURSO	1.Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Fracción generatriz de números decimales. Comparación de números racionales. Representación en la recta numérica. 2. La fracción como operador, como decimal y como porcentaje. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada. 3. Potencias de exponente entero. Significado y uso. Notación científica para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.
CUARTO CURSO (OPCIÓN A)	1. Resolución de problemas utilizando toda clase de números, eligiendo la notación, precisión y método de cálculo más adecuado en cada caso. 2. Número irracional. Significado y uso en distintos contextos. Representación de números en la recta numérica. Intervalos. 3. Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto. 4. Uso de la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.
CUARTO CURSO (OPCIÓN B)	1. Números irracionales. Interpretación y uso de los números reales eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical. 2. Representación de números en la recta numérica. Intervalos. Diferentes formas de expresar un intervalo. 3. Expresión de raíces en forma de potencia. Simplificación de expresiones irracionales sencillas. 4. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones para realizar cálculos con potencias de exponente entero y fraccionario y radicales sencillos. Resolución de problemas en los que intervengan toda clase de números y en todas sus expresiones. 5. Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica.

Tabla 1.2: Contenidos del Bloque "Números"

En cuanto a los criterios de evaluación nos los presentan distribuidos por cursos y bloques de contenidos. A continuación, detallamos los correspondientes al Bloque: *Números*:

- Utilizar números naturales y enteros y fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.
- Evaluar el uso de diferentes estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes, así como la habilidad para aplicar esos cálculos a una amplia variedad de contextos.
- Utilizar los distintos tipos de números y operaciones junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias.

1.7 ANTECEDENTES

La revisión de antecedentes se ha realizado consultando artículos en revistas especializadas en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, manuales, libros y tesis doctorales (Steinle, 2004, Konic, 2011).

Hemos organizado los antecedentes de investigación de forma cronológica y resaltando los dos grandes temas que van a ocupar esta investigación, a saber:

- Estudios sobre los problemas de comprensión de los sistemas numéricos, en general, y de los decimales, en particular, en términos de dificultades, obstáculos y errores. En cuanto a las poblaciones con las que se realizan los estudios, están compuestas por alumnos de primaria, secundaria, estudiantes para profesores o profesores en activo.
- Estudios sobre el conocimiento matemático de los profesores de Educación Primaria y Educación Secundaria, en general, y del conocimiento sobre los sistemas numéricos, en particular.

A continuación mostramos la revisión realizada, siguiendo la organización planteada.

- Estudios sobre problemas de comprensión de los sistemas numéricos, en general, y de los decimales, en particular, en términos de dificultades, obstáculos y errores.

Bernander y Clement (1985), presentan un catálogo sobre patrones de errores en aritmética y álgebra. Para ello realizaron observaciones de clases de instructores y tutores en cursos de la Universidad de Massachusetts, investigaciones previas de instructores y tutores y entrevistas clínicas centradas en conceptos algebraicos elementales de los estudiantes y sobre habilidades para resolver problemas. Entre los conceptos estudiados se halla un ítem sobre los decimales en el que se describen los siguientes tipos de errores:

ERRORES SOBRE NOTACIÓN	Se invierte el Sistema Decimal: - Las centésimas son más grandes que las décimas (0,03>0,3).
	Errores en el reconocimiento de decimales equivalentes: - Añadir ceros al final del número cambia su valor (0,2>0,20).
ERRORES EN OPERACIONES CON DECIMALES	Convertir el número en un decimal: - Dada un conjunto de números decimales y números enteros, los alumnos pondrán una coma delante del número entero: Por ejemplo, transformar esta suma, 0,3 + 4,6 + 12, en 0,3 + 4,6 + 0,12.
	Dificultades en el reconocimiento de decimales y números enteros como términos en una ecuación: - Por ejemplo, dificultad en reconocer que en la ecuación (3 + x = 0,8) hay que sustraer 3 de 8 décimas.

Tabla 1.3: Errores en situaciones problemáticas de decimales

Robinet (1986) realizó un estudio con alumnos de 17-18 años y del primer año universitario, sobre números reales. Observó que los números reales, para una buena parte de los alumnos pertenecen a cualquiera de los conjuntos N, Z, D y Q y también algunos números como √2 y √3; diferenciando, a menudo, los números de R por su escritura y no por sus propiedades numéricas.

Uno de los documentos importantes en los que se estudia el tópico de los decimales en los años ochenta en nuestro país es el libro de Julia Centeno (1988): *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?*

Presenta un trabajo de síntesis sobre las aportaciones que se pueden extraer de diferentes investigaciones en este campo, realizadas en este periodo de tiempo. Destacamos la tercera parte de este libro que trata el problema de la organización de la enseñanza de los números decimales, y en la que le dedica un apartado a las dificultades, errores, conflictos y obstáculos. En este sentido, se describe una clasificación de errores, que cometen los escolares al trabajar con los decimales, obtenidos de los resultados de trabajos como los de Carpenter (1981) y Brown (1981). Así, tenemos:

a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.
b) Errores relacionados con el cero.
c) Errores relacionados con el orden entre decimales.
d) Errores relacionados con las operaciones.

Asimismo, se hace hincapié en la importancia de agrupar los errores para identificar niveles de comprensión, con la finalidad de poder diagnosticar el grado de conocimiento que tiene cada alumno y su manera de progresar. Para ello, se ejemplifica con el estudio realizado por el equipo CSMS (Brown, op.cit) en el que se estudia conocimientos sobre "lugar de posición y números decimales" de escolares ingleses de once a quince años. Se administraron unos cuestionarios en los que se preguntaban por los tópicos que figuran en la mayor parte de los currículos de este nivel y de los resultados se obtuvieron seis niveles de comprensión:

a) Nivel 1: valor posicional de números enteros mayores que 1000.
b) Nivel 2: decimales, décimas.
c) Nivel 3: decimales, centésimas, milésimas.
d) Nivel 4: decimales, relación con los lugares a la izquierda.
e) Nivel 5: relaciones más complejas de lugar.
f) Nivel 6: decimales como resultados de una división. Número infinito de decimales.

El procedimiento de obtención de los niveles consiste en agrupar los alumnos por el nivel de facilidad que manifiestan en sus respuestas. El nivel de facilidad se determina por el porcentaje de respuestas correctas o incorrectas según edades.

Las conclusiones obtenidas en este trabajo, tal y como apunta Centeno (op.cit), se recogen en los tres puntos siguientes:

1. El 50% de los alumnos de quince años tiene un conocimiento razonable, pero no completo, de los decimales, sin embargo, el 50% restante tiene lagunas considerables, lo que no significa que estos alumnos no sean capaces de utilizar correctamente los números decimales en situaciones concretas y familiares, como son la medida y las monedas.

2. Se han encontrado todos los niveles de comprensión en cada uno de los grupos de 12, 13, 14 y 15 años, aunque en proporciones diferentes de año en año.
3. Se da una particular dificultad en la comprensión de la centésima, y ello les hace pensar que muchos alumnos necesitan modelos visuales de décimas, centésimas, etc., para comprenderlas en un sentido correcto. Esto conduce a estos autores a proponer el uso de los bloques multibase de Dienes o papel cuadriculado.

También, se tratan las nociones de dificultad, conflicto, obstáculo. Para esta última se hace una exposición de la ideas de Brousseau (1976), al respecto. En este sentido, se comenta que este autor hace la distinción de dos grandes grupos de obstáculos sucesivos en los números decimales, ya mencionados en el apartado 1.2 de este capítulo, y que se refiere a un primer grupo de los obstáculos originados por la persistencia del empleo de las propiedades y de las representaciones específicas de los números naturales. Y a un segundo grupo de obstáculos, originados por la persistencia del empleo de las situaciones particulares diferentes que son signos de concepciones distintas. El segundo grupo aparece como una consecuencia de los efectos del primero, sobre el aprendizaje.

En Centeno, encontramos también ejemplos de situaciones de estudio de los decimales, diseñadas y experimentadas por Brousseau. En este sentido, destacamos las investigaciones realizadas en la década de los 70 por Guy y Nadine Brousseau sobre la enseñanza de los racionales en la escolaridad obligatoria (Brousseau y Brousseau, 1987; Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004). Estas experiencias están basadas en la Teoría de Situaciones en la cual se enfatiza la construcción del conocimiento por los propios alumnos, esto es, siguiendo principios socio-constructivistas sobre el aprendizaje matemático.

Bonotto (1992) muestra los resultados de un test sobre fracciones y números decimales administrado a alumnos de distintos niveles educativos. El estudio se centra en el orden y muestra cómo el conocimiento de los naturales es una ayuda y un obstáculo para el aprendizaje, cómo se presentan grandes dificultades en el paso de la fracción al número decimal y cómo el conocimiento de las fracciones y los decimales pueden entrar en conflicto.

Mariotti, Sainati Nello y Sciolis Marino (1995), examinan las habilidades de los estudiantes (Intermediate to High Secondary School); sostienen que estos generalmente creen que los diferentes conjuntos numéricos son disjuntos y que la escritura determina la naturaleza del número.

Fischbein, Jehiam y Cohen (1995) comentan, en un estudio sobre el análisis de la presencia de obstáculos (dificultades en aceptar la existencia de cantidades inconmensurables y que el conjunto de los irracionales aunque es denso no cubre todos los puntos de un intervalo) sobre los irracionales en estudiantes de Secundaria y futuros maestros, que estos manifiestan un desconocimiento cuando se les pide clasificar varios números (racionales, irracionales y reales).

En Romero (1996), se muestran los resultados de parte de una investigación cualitativa sobre esquemas conceptuales y percepciones de propiedades relativas al continuo. Dicha investigación se lleva a cabo con estudiantes de 3. º de BUP. Se elabora un cuestionario para obtener información al respecto y se apoya para ello en la experiencia de Robinet (op.cit).

A cada alumno encuestado se le pide que clasifique los siguientes números, Figura 1.2, y que especifique los criterios empleados.

$$9,\quad 217\quad 735\quad -3\quad \frac{3}{4}\quad \frac{2}{7}\quad 0{,}75\quad 6.325\quad 3.1416$$
$$5.3 \times 10^4\quad 0.1919\ldots\quad 2.9999\ldots\quad -\frac{5}{4}\quad -7.75$$
$$-4.3333\ldots\quad \sqrt{2}\quad 1.1010010001000\ldots\quad 1.23456\ldots\quad \pi\quad \sqrt{-4}$$

Figura 1.2: Pregunta del cuestionario, en Romero(1996)

El estudio de las respuestas a esta pregunta se centra en un análisis exhaustivo de los siguientes puntos:

a) ¿Cuáles y cuántos grupos de números se hicieron y de qué tipo?
b) ¿Cuáles fueron los criterios de clasificación usados?
c) ¿Cómo se clasificó cada uno de los números propuestos?
d) ¿Qué sucede con las parejas ocultas (3/4 y 0,75 o 3,1416 y π, etc.)?

Con respecto a los criterios de clasificación, Romero (op.cit) encuentra que para estos individuos la característica más significativa de los números no enteros es su forma de escritura.

> *Así, pues, números con escrituras diferentes resultan ser números de especies distintas. El resultado de las "parejas ocultas" reafirma todavía más esta conclusión: los números 9 y 735 aparecieron 116 veces asociados, mientras que 9 y $5{,}3 \cdot 10^4$ se asociaron en 49 casos, y 9 y 2,9999… tan solo en 4. Pero, si sucede que estos números están ligados a algún uso específico (3,1416 y π), entonces se les consideran "iguales".*

Artigue (1995, 1998), comenta que para los estudiantes las relaciones existentes entre los conjuntos numéricos no están claras. Los números reales comprenden diferentes números (los enteros, las fracciones, los decimales, los números que expresan radicales y otros como π) los cuales se confunden en la asociación entre número real y número decimal. En cuanto a la representación de los números reales en la recta, comenta que en Castella (1996) se recoge que si bien son capaces de aceptar *a priori* la correspondencia entre R y ésta, sin embargo, no están convencidos, por ejemplo, que tal o cual número preciso se puede representar en la recta.

Castro (2001), trata el tema de los decimales y distingue los siguientes contextos: medida, división entera, aproximación, porcentajes, calculadora y ordenadores, notación científica y didáctico (*servir de puente entre los racionales, relativamente concretos, y los números reales, más abstractos*). Asimismo, se manifiesta la diversidad de enfoques de su enseñanza y describe algunos de ellos tomados de Centeno. Estudia distintas representaciones del concepto. Analiza errores y dificultades de algunos aspectos del tópico (véase Tabla 1.5). Describe la existencia de la familia de decimales (decimales finitos y periódicos) y explica la relación de estos con los racionales (*los racionales se representan por decimales finitos o periódicos y todos los decimales finitos y los periódicos son números racionales*)

	ERRORES Y DIFICULTADES
CONCEPTO Y REPRESENTACIÓN	• La notación fraccionaria es más comprensible en los estadios iniciales que la forma decimal • Los decimales interpretados como "áreas" y como "línea numérica" ofrecen una dificultad similar (Brown (1981)). A los niños les resulta más fácil manejar décimas que décimas y centésimas combinadas • Los números naturales son un obstáculo para el aprendizaje de los decimales: el número decimal es interpretado como una pareja de números naturales • Muchos errores son originados por falta de conocimiento del sistema de numeración decimal: la parte decimal se interpreta como un número natural, errores en la lectura y escritura de los números y errores relacionados con el cero (ignorarlo o considerar que tiene valor a la derecha: 1,27 distinto de 1,270)
ORDEN Y OPERACIONES	• Se considera que la parte decimal es un número natural y se decide que el número mayor es el que tiene mayor número de cifras decimales • La propiedad de densidad de los decimales es una dificultad para los niños (para algunos entre 1,23 y 1,24 no hay ningún número) • Los decimales constituyen un tipo de números que con sus operaciones requieren un nivel madurativo más alto que de los demás sistemas numéricos y operacionales. Su enseñanza se suele anticipar, antes de que el alumnado haya alcanzado un grado de madurez para su comprensión, debido a la estructura decimal de nuestro sistema de medidas • Los problemas de colocación de la coma al operar muestran el dominio conceptual del valor de posición de las cifras de los alumnos • Una dificultad importante de la suma y de la resta de decimales, expresados con notación decimal finita, es comprender que la correspondencia de los diversos órdenes de unidades es condición imprescindible en el algoritmo de estas operaciones • Otra fuente de error es la ausencia de coma en el resultado de la operación • Se da que el 80% de los errores se relacionan con la multiplicación y división, y solo ésta más del 50% • Los errores en la multiplicación y en la división están relacionados con el uso de la coma (colocación errónea, omisión, dificultades con los ceros para completar las cifras decimales) • Errores que se producen al operar por separado las partes enteras y decimales de los números implicados en la operación (0,70+0,40+0,20=0,130; 2,3x2,3 =4,9; 2,12:2=1,6) • Multiplicar por la unidad seguida de ceros es añadir ceros, tanto como acompañan a la unidad, a la derecha de la parte decimal o a la derecha de ambas partes • Concepciones inadecuadas sobre la multiplicación y la división: *Multiplicar es siempre aumentar y dividir es siempre disminuir*
FAMILIA DE DECIMALES	• Truncar el número para realizar la conversión de periódico a fracción • Los algoritmos de las operaciones con decimales tienen sus limitaciones cuando se trata de operar con decimales infinitos

Tabla 1.5: Errores y dificultades

Scaglia y Coriat (2003), realizan un estudio empírico destinado a caracterizar obstáculos epistemológicos (Bachelard) sobre la representación de números reales en la recta. Se lleva a cabo con alumnos de Bachillerato (16-17 años) y de 1. º de Licenciatura en Matemáticas (18 años en adelante). Se detectan dos conflictos cognitivos, a saber:

a) La dificultad para admitir el cierre de un proceso infinito sugerido por las infinitas cifras decimales de la escritura posicional de algunos números constructibles.
b) La falta de distinción en las argumentaciones de los alumnos entre el objeto ideal (punto geométrico) y el objeto físico (marca efectuada con el lápiz sobre el papel).

Consideran que la representación posicional infinita constituye un obstáculo epistemológico para aceptar el número como objeto matemático.

En Vourgias, Vourgia y Elia (2003), se describe una investigación sobre representaciones de los números decimales y sus transformaciones llevada a cabo con alumnos de 5. º y 6. º de la escuela primaria. Está fundamentada en el concepto de representación de Kaput (1987). El instrumento utilizado consta de cuatro partes y cada una de ellas consta de cuatro cuestiones. En la primera parte las cuestiones están expresadas en forma de diagramas y los estudiantes deben interpretar la conexión en forma simbólica y verbal. En la segunda se dan expresiones simbólicas y los niños deben interpretar la conexión en forma de diagramas y expresiones verbales. La tercera parte tiene preguntas expresadas verbalmente y deben ser interpretadas simbólicamente y en forma de diagramas. La última parte contiene una tarea expresada en forma verbal y los niños deben resolverla en forma simbólica o con un diagrama, como ellos prefieran. En ella se debe plantear y resolver una resta con números decimales.

Los resultados obtenidos en la investigación son los siguientes:

a) Hay una conexión no significativa en las respuestas sobre los diferentes tipos de representaciones.
b) La interpretación de las tareas de los niños del diagrama a la expresión simbólica y verbal presenta una gran dificultad.
c) El paso de la expresión simbólica a la expresión verbal y al diagrama, los alumnos lo encontraron difícil; la interpretación en diagrama no resulta nada fácil para ellos.

ZazKis y Sirotic (2004), abordan la comprensión que futuros profesores de nivel secundario tienen sobre los números irracionales. Se plantearon a 46 estudiantes las cuestiones siguientes:

1. *Considera el número siguiente 0.12122122212… (hay un número infinito de dígitos donde la cantidad de dos entre los unos, crece de a uno). ¿Es este un número racional o irracional? ¿Cómo lo conoces?*
2. *Considera 58/83. Llamemos a este número M. Realizando la división, la calculadora muestra 0.63855421687. ¿Es M un número racional o irracional? Explica.*

La fundamentación teórica en la que se basan es la distinción entre representaciones transparentes y representaciones opacas.

De los 46 participantes, 16 fueron sometidos, de forma voluntaria, a entrevistas clínicas con la finalidad de aclarar las respuestas. Se observó, con respecto al primer ítem, que en general responden bien, pero justifican mal la irracionalidad haciendo alusión a un patrón común. Con respecto a la segunda cuestión, en general, responden que un número es racional o irracional dependiendo de su escritura. La respuesta proviene de la incapacidad de ver el período en la calculadora.

Consideran que la relación entre la estructura de la representación y la repetición decimal es solo aparente, ya que no reconocen en la estructura fraccionaria el tipo de número que se trata. Muchas veces se confunde patrón con repetición. Observan que los resultados sugieren que, por lo general, los alumnos no suelen basarse en la transparencia de la representación para clasificar un número como racional o irracional.

En resumen, se obtiene que para un número significativo de estudiantes las definiciones de número racional e irracional no forman parte de sus conocimientos.

Estos autores recomiendan que en la práctica docente se ponga énfasis sobre las representaciones y conclusiones que pueden derivarse de su consideración.

Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004), examinan la comprensión del concepto de número decimal en niños de 12 años. Se basan en el modelo que Janvier (1987) propone para la comprensión de un concepto matemático, reconocimiento y relación entre representaciones. Se desarrolló en tres fases en las que se implementan tres cuestionarios (A, B y C). En el primero (A) se aborda el reconocimiento y representación del concepto de número decimal. En el segundo (B), se estudia la adición de números decimales y en el tercero (C), la resolución de problemas con decimales.

En cuanto a los resultados obtenidos manifiestan que el porcentaje de éxito ha sido bajo en el reconocimiento de ítems y en la traducción entre ellos, lo que muestra que las representaciones de números decimales no se hallan desarrolladas de manera suficiente y no son conscientes con un todo integrado. Se hallaron porcentajes altos de éxito en la representación de números decimales en la recta, en segmentos y especialmente en cuadrículas. Estos éxitos son atribuidos a la instrucción en la que habitualmente se enfatiza la representación aislada. En cuanto al tipo de traducciones se observó que presentaba menor dificultad el cambio de representación de la recta a la expresión simbólica que la inversa. Con respecto al rendimiento en las diferentes tareas se observaron problemas en el reconocimiento de las actividades de adición. Estos son atribuidos a que las tareas requerían una serie de traducciones de representaciones previas a la operación. En la resolución de problemas no encontraron diferencias significativas entre los alumnos que resolvieron los problemas libremente de los que lo hicieron utilizando la recta numérica. Finalmente, estos autores manifiestan que los estudiantes no han desarrollado una estructura cognitiva unificada concerniente al concepto de número decimal. Más aún, se demuestra que no hay coordinación entre reconocimiento, representación y traducción entre representaciones en los números decimales.

En Merenluoto (2004) se exponen los resultados de un estudio piloto llevado a cabo con 47 estudiantes finlandeses de la escuela secundaria en los grados 7-9. Se tratan aspectos de tipo cognitivo-motivacional en relación al tema de las fracciones y números decimales. En una primera fase los alumnos contestaron un cuestionario sobre cómo han aprendido las Matemáticas enseñadas en la escuela, su auto-eficacia, seguridad y tolerancia en problemas matemáticos difíciles. En una segunda fase debían completar 26 cuestiones sobre el concepto de número racional, clasificación de números, identificación de distintas representaciones de números, la densidad de los números en la recta y cálculos básicos.

Se observó que la mayoría de los problemas se encontraron con los números racionales. Los estudiantes tenían la tendencia a realizar transferencias incorrectas de los números naturales a los racionales. Los mayores problemas se hallaron con los números decimales y especialmente en el manejo de fracciones.

Los resultados obtenidos evidencian que en la enseñanza para el cambio conceptual es esencial considerar la distancia cognitiva entre los conocimientos previos de los alumnos y el nuevo contenido que tienen que aprender.

Porcel y Ramírez (2004) recogen parte de los resultados de una prueba de diagnóstico inicial sobre conocimientos matemáticos de los alumnos que ingresan en

2001 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, de la Universidad Nacional del Nordeste (FACENA-UNNE) de Argentina. Se incluyó, entre otras, una actividad, tal y como se muestra en la Figura 1.3, para observar la identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos: N, Z, Q, I o R .

Dada la siguiente tabla, coloca una cruz en él o los casilleros correspondientes a todos los conjuntos numéricos a los cuales pertenece cada uno de los números dados:

	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-2	$\sqrt{2}$	-1,5	$-\sqrt{49}$
N (Naturales)							
Z (Enteros)							
Q (Racionales)							
I (Irracionales)							
R (Reales)							

Figura 1.3: Situación problemática

La investigación se llevo a cabo con una muestra de 778 alumnos y se concluyó a este respecto que:

a) *Hay mayor desconocimiento acerca de Q, I y R que acerca de N y Z.*
b) *Se advierten deficiencias sustanciales de conocimientos acerca de Q y de I, confusión de Q con I, marcada confusión de I con Q y escaso nivel de conocimientos sobre R.*
c) *Hay mayores dificultades en la identificación como racionales de naturales y enteros que de fraccionarios, y aparecen como nociones prácticamente equivalentes las de "racional" y "fraccionario".*
d) *Las diferentes representaciones semióticas aparecen como un obstáculo para la identificación correcta de los números, en coincidencia con lo que ya hemos mencionado en el análisis por columnas.*
e) *Los resultados obtenidos sobre la conexión entre las nociones "racional ≅ fraccionario", "racional ≅ radical", "irracional ≅ radical" estarían dando cuenta de la incidencia de las distintas representaciones semióticas de los números, en coincidencia con los estudios en los que se señala la confusión Objeto/representación y representación/ definición (Socas Robayna, M. (2001); Pinto, M. Y Tall, D. (1996)) y en alguna medida corroboran lo que ya habíamos expuesto en tal sentido en el análisis por columnas.*

Gairín (2003-2004) hace un estudio con estudiantes de 2. º curso de la Diplomatura de Maestro en la Especialidad de Educación Primaria que en su primera parte trata sobre sus conocimientos relativos a los números racionales positivos. Busca las respuestas a las preguntas: ¿cuáles son las características de los conocimientos que utilizan? y ¿qué dificultades de comprensión se detectan en las producciones de los maestros en formación?

En cuanto a las características observa seis:

1. *Los estudiantes para Maestro tienen un significado casi exclusivo de la fracción como relación parte-todo; además, este significado se asocia a un modelo físico.*
2. *La notación decimal se reconoce exclusivamente con significado numérico, no se asocia a cantidades de magnitud ni se sustenta en el uso de modelos.*
3. *La relación entre las notaciones fraccionaria y decimal se establece de forma exclusiva mediante procesos algorítmicos.*
4. *Las relaciones de orden entre fracciones no se justifican en modelos, simplemente se utilizan técnicas de cálculo.*
5. *Solamente la tercera parte de los estudiantes establece relaciones de orden entre números decimales aplicando el principio del valor posicional.*
6. *Los estudiantes para Maestro no admiten la densidad respecto del orden de los racionales; la topología del conjunto de los racionales es la misma que la de los naturales.*

En este sentido, se da que casi la totalidad de los estudiantes no consideran a los enteros como racionales. Además, un 21% aplica el orden de los naturales a los enteros: el siguiente de -2 es -3.

Por otro lado, se interesa por aquellos fenómenos de comprensión que reflejan limitaciones, dificultades y errores que aparecen cuando los alumnos resuelven tareas relacionadas con el currículum de Educación Primaria. Se distinguen ocho fenómenos:

1. *El conocimiento de las fracciones es un conocimiento inestable.*
2. *Las ideas están fuertemente influenciadas por la percepción visual.*
3. *Se tiende a sustituir los conceptos por alguna de las técnicas asociadas.*
4. *Los conocimientos de los estudiantes sobre números racionales suelen estar limitados al uso de reglas.*
5. *La descontextualización de la medida obstaculiza la resolución de problemas.*
6. *El orden entre expresiones decimales está fuertemente influenciado por el orden entre números naturales.*
7. *En el cálculo con números periódicos se crean algoritmos a partir de los que conocen de los naturales y de los decimales.*
8. *Los números periódicos dificultan la formulación de situaciones problemáticas coherentes.*

También, se pone de relieve que el origen de muchas de estas dificultades de comprensión se encuentra en un proceso educativo que le dio prioridad al conocimiento de las fracciones como relación parte – todo.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004) realizan un estudio empírico relativo a la comprensión de propiedades algebraicas de los números racionales con estudiantes (16 alumnos de 15 años aproximadamente) de noveno grado de la escuela elemental. La investigación se aborda desde la perspectiva del cambio conceptual. De forma concreta se muestra que los conocimientos previos sobre los números naturales, en particular la noción de discretitud, limitan en los estudiantes la comprensión de la densidad.

El cuestionario, que se implementó de forma individual, estaba constituido por dos ítems sobre propiedades algebraicas de los números reales, cuatro sobre densidad y cinco sobre cuestiones preliminares, con el propósito de facilitar algunas cuestiones previas.

Los resultados del estudio, relativos a la densidad, mostraron que la tarea de determinar el número de racionales entre otros dos dados presentaba una gran dificultad para estos alumnos, y que el desarrollo del concepto de densidad es un proceso gradual. Esta última conclusión constituye uno de los dos supuestos que sostenían estas autoras en el marco teórico. Elaboran 5 categorías de respuestas que corresponden a distintos niveles de comprensión, de las respuestas más ingenuas a las más sofisticadas. Estas categorías son: discretitud ingenua (9 estudiantes), discretitud avanzada (2 estudiantes), discretitud densidad (4 estudiantes), densidad ingenua (1 estudiante) y densidad sofisticada (0 estudiantes). El segundo supuesto que se sostenía, el carácter discreto de los números naturales limita la comprensión de la estructura de los racionales, se observa en las dos primeras categorías. Los estudiantes de la tercera categoría no responden del mismo modo cuando los números decimales tiene el mismo número de dígitos que cuando son distintos. En la categoría, densidad ingenua, el alumnado presentaba que ya había desaparecido el carácter discreto, pero la densidad solo era reconocida dentro de un tipo de representación (fraccionaria o decimal).

Se recomienda en este estudio crear entornos de aprendizaje en los que los alumnos puedan expresar y elaborar sus argumentos para que los educadores sean conscientes de sus creencias. Esto conlleva una reorganización de las estructuras de los conocimientos previos, en la que no se pueden esperar resultados inmediatos, incluso después de un cuidadoso diseño de instrucción.

Steinle (2004) realiza un estudio longitudinal en el que se analiza la comprensión de la notación decimal con cerca de 3000 estudiantes australianos. En este trabajo se hace una revisión de investigaciones similares llevadas a cabo en el período de 1980-1990. En la Tabla 1.6, tomada de Steinle se recopilan y resumen algunos datos importantes (tanto por ciento de aciertos en las tareas y por edades) que nos aportan estas investigaciones. En ella se pone de manifiesto que los errores que se cometen al comparar números decimales son persistentes y que siguen cierta lógica.

Tabla: Estudios longitudinales llevados a cabo entre 1980 y 1990

Investigador y detalles de la tarea	Edad aproximada de los estudiantes					
(Ordenar una lista, seleccionar el menor, seleccionar el mayor)	11	12	13	14	15	15+
Brown (1981) CSMS						
1) Mayor 0,75 0,8		57	65	69	75	
2) Mayor 4,06 4,5		66	72	83	80	
Carpenter et al. (1981) NAEP2						
1) Mayor 0,23 1,9			81			
2) Mayor 1,15 1,36			79			
3) Mayor 0,036 0,19 0,195 0,2			46			
Grossman (1983)						
1) Menor 0,07 0,075 0,08 0,3 1,003						29
2) Menor 0,004 0,03001 0,05 0,1 1,0003						31
Foxman et al. (1985) APU						
1) Ordenar 0,07 0,1 0,23	23					
2) Ordenar 0,1 0,3 0,6 0,7	75					
3) Menor 0,125 0,25 0,375 0,5	17					
4) Mayor 0,075 0,089 0,09 0,1					82	
5) Menor 0,075 0,089 0,09 0,1					47	
6) Mayor 0,125 0,25 0,375 0,5 0,625					61	
7) Menor 0,125 0,25 0,375 0,5 0,625					37	
8) Menor 0,125 0,25 0,3753 0,5 0,625					43	
Hiebert y Wearne (1986)						
Mayor 0,09 0,1814 0,3 0,385	0				43	
Kouba et al. (1989) NAEP4						
Mayor 0,058 0,36 0,375 0,4		50*				
Putt (1995)						
Ordenar 0,060 0,0666 0,6 0,606 0,66						51
Brekker (1996)						
1) Mayor 3,521 3,6 3,75	20		64		88	
2) Mayor 0,649 0,7 0,87	22		62		83	
3) Menor 0,125 0,25 0,3753 0,5 0,625	16		55		79	
Fuglestad (1998)						
Ordenar 0,25 0,375 0,5 0,62	20	35	62			
TIMSS-R (1999)						
Menor 0,125 0,25 0,375 0,5 0,625			46			

* Aproximadamente

Tabla 1.6: Steinle (2004)

En este sentido, Steinle observa dos comportamientos (L y S), entre otros:

a) L: El número que tiene más cifras decimales después de la coma es el mayor de los dados.

b) S: El número que tiene menos cifras decimales después de la coma, es el mayor de los dados.

Estos comportamientos también son observados en estudios anteriores, como se recoge en la tabla anterior. Así, el 40% de los entrevistados por Crossman (1983) elige que el menor de una lista de decimales es el que tiene más cifras decimales después de la coma. Putt (1995) encuentra que el 36% escoge al 0,6 como el mayor de la serie siguiente: 0,060; 0,0666; 0,6; 0,606 y 0,66.

Estas tendencias en las respuestas de los alumnos originan errores que persisten con la edad.

Asimismo, observó distintas formas de pensar que conducían a estos comportamientos. Entre ellas tenemos:

a) Se ignora la coma en las escrituras decimales (1,34 se trata como 134).
b) Fijan su atención en los numeradores de las fracciones y ordenan, por ejemplo, la serie de decimales, como sigue: 0,1; 0,04; 0,008; 0,20 y 0,034.
c) Se considera que presentar en la escritura un cero o más después de la coma, hace más pequeño al número.
d) Si se comparan dos escrituras decimales, se considera relevante el número de cifras que presentan las partes decimales respectivas, se elige como mayor el que más cifras tiene (4,63 > 4,8 o 4,03 > 4,3).
e) Se aplican razonamientos relacionados con el orden entre los distintos tipos de unidades (como 70 décimas es mayor que 7, entonces 0,70 > 0,7).
f) Se da un pensamiento denominado *pensamiento reversible*: la parte decimal representa números enteros, pero escritos en el orden inverso (0,123 se lee como 1 decena, 2 centenas y tres millares).
g) Se utiliza un pensamiento denominado *pensamiento recíproco* que consiste en considerar a/b igual a a,b.
h) Se confunden los decimales con los números negativos. Este pensamiento es denotado *Pensamiento negativo* por esta investigadora.
i) Fijan su atención en el denominador de la fracción y consideran, por ejemplo, que 0,2 > 0,25 porque las décimas son mayores que las centésimas.
j) Utilizan el orden que se define entre las distintas unidades del Sistema de Numeración Decimal para construir una especie de recta numérica. Las unidades que están a la izquierda (decenas, centenas, millares…) de las unidades son mayores que ésta. Las que están a la derecha (décimas,

centésimas, milésimas…) son menores que ésta. Por otra lado se considera que, los números, con parte decimal formada por una sola cifra, están a la derecha de las unidades, con dos cifras, a la derecha de estos, y así sucesivamente. De esta manera se explica por qué 0,6 es menor que 0 para algunos alumnos.

Restrepo y Torres (2006), realizan un estudio cualitativo sobre las concepciones de número natural en los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y Ciencias de la Computación en la Universidad de La Salle de Bogotá. Se obtiene que los alumnos tienen por concepciones de los números naturales: *los números naturales como la representación de una cantidad y los números naturales como un campo*. En este último caso estos son concebidos como objetos en sí mismos, sin que esto pueda interpretarse como un saber matemático propiamente establecido.

Ramírez y Porcel (2006) analiza los errores que un grupo de 776 alumnos, que ingresan a la universidad (FACENA-UNNE) de Argentina, cometen al responder a la siguiente pregunta:

Representa en la recta real los números: -2, 3/2, -3/4 y $\sqrt{2}$.

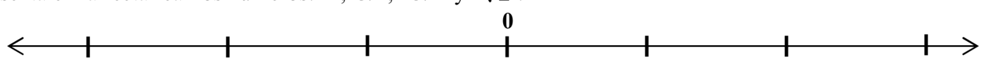


Figura 1.6: Tarea planteada

Se concluye que los errores cometidos (véase Tabla 1.7) en la pregunta muestran deficiencias y en muchos casos, ausencia de conocimientos sobre la representación de números reales, en particular, de números fraccionarios y radicales.

Número	Error
-2	a) Confusión con el -1 (2,6%) b) Confusión con el 2 (2,6%)
3/2 -3/4	a) Se vincula el numerador del número fraccionario que se va a representar con el valor que determina la distancia al cero del punto con que se lo habrá de representar en la recta. Por ejemplo, 3/2 se sitúa cerca del tres. b) El 10,8% ubica a 3/2 en el intervalo $(0,\ 1]$.
$\sqrt{2}$	a) El 15% lo marca en el 1 y en el 2 (confunden su ubicación con la de dos números enteros) b) El 7,7% lo ubica en el intervalo (0, ½). Error que tal vez podría deberse a que al realizar la representación solo se considera la parte decimal de su notación decimal (1,4142…)
En cuanto el error denominado "representación en espejo" lo presenta el 6,8% de la muestra. Este error consiste en invertir la representación de un número respecto del cero. De esta manera se sitúan números	

positivos a la izquierda del cero, y negativos, a la derecha. Si se hace con todos los números se denomina *espejo total* (2,8%) y, si se hace solo con algunos, *espejo parcial* (4%)

Tabla 1.7: Errores en la representación de números en la recta

En un estudio llevado a cabo por Sirotic y Zazkis (2007) con profesores de secundaria en prácticas, relativo a los números irracionales (como $\sqrt{5}$) y su representación en la recta, se observa la confusión entre estos números y su representación decimal.

Konic (2011) en su tesis doctoral presenta una investigación en la que se plantea un problema relativo a la evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales. La investigación se fundamenta principalmente en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007). Consta de dos partes, una teórica, que consiste en la justificación y elaboración de un modelo didáctico, y otra empírica. Esta última incluye la construcción de un cuestionario de evaluación para implementarlo con futuros profesores de enseñanza primaria, y un estudio de evaluación como resultado de su puesta en práctica. Se desarrolla en tres estudios, a saber:

1. Un estudio exploratorio sobre conocimientos del contenido de los decimales en estudiantes para profesor para la enseñanza primaria.
2. Elaboración de un instrumento para evaluar los conocimientos didácticos sobre números decimales, de futuros profesores para la enseñanza primaria.
3. Evaluación de significados personales de futuros profesores sobre números decimales.

De los resultados obtenidos destacamos:

a) Con respecto a la concepción de número decimal la mayoría de los estudiantes expresa número decimal como "número con coma". Se obtienen otras concepciones pero, tal y como se comenta, son únicas en cada sujeto y por tanto el significado personal otorgado al número decimal es parcial.
b) Se observan dificultades en la identificación y representación en la recta de números expresados en forma de fracción. Por ejemplo, la unidad se divide siempre en 10 y/o no se hace de forma adecuada. También encuentra problemas para vincular representaciones equivalentes de las que no lo son ($\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$ o $\frac{10}{3}$ y $\frac{33}{10}$).

c) En la evaluación del carácter decimal en cuatro números racionales (1,345678; $0,\overline{45}$; $4,10\overline{9}$ *y* 3), se pone en juego la elección por la representación decimal con coma y que la denomina la concepción polinómica del número.
d) En la exploración de las relaciones que se establecen entre número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número, se infiere que las definiciones de número racional e irracional no están presentes en los conocimientos manifestados. Destaca la ausencia de relación entre los conceptos de número decimal, racional y entero.
e) Se observa que las propiedades conocidas para los números naturales originan importantes significados erróneos en los otros campos numéricos, en particular para la densidad de los números decimales.
f) Se corrobora que solo el reconocimiento y la resolución correcta de un algoritmo no implica un significado completo de la operación.

- Estudios sobre el conocimiento matemático de los profesores de Educación Primaria y Educación Secundaria, en general, y del conocimiento sobre los sistemas numéricos, en particular.

Llinares y Sánchez (1988), abordan el tópico de las fracciones en los aspectos de enseñanza y aprendizaje. Se tratan las creencias sobre las fracciones, el papel de las fracciones en el currículum, Las diferentes interpretaciones de este concepto (Kieren (1976), Behr y otros (1983) y Dickson y otros (1984)), la relación parte – todo, las operaciones y sus algoritmos y errores y estimación.

En relación con los errores, se comenta que los alumnos tienden a ver las fracciones como un conjunto de dos números naturales separados por una raya. Como consecuencia de ello, tratan de utilizar sus conocimientos sobre los números naturales, en especial las reglas de cálculo y algoritmos, extrapolándolos a las fracciones. Esta influencia del conocimiento de los naturales se manifiesta en otros aspectos como la dificultad en reconocer que el producto en la multiplicación de fracciones no siempre es mayor que cualquiera de ellas.

Dickson y otros (1991) dedican un capítulo al aprendizaje de las fracciones, decimales y porcentajes. Se comenta que una de las dificultades que presentan la enseñanza y el aprendizaje de este tópico es la multitud de significados, tales como:

a) Subárea de una región predefinida.
b) Una comparación entre un subconjunto de un conjunto de objetos discretos y el conjunto entero.
c) Un punto de una recta graduada.
d) El resultado de la operación de dividir.
e) Un forma de comparar los tamaños de dos conjuntos de objetos o de dos medidas.

En este caso se ha omitido la totalidad de significados abstractos y la relación dada está inspirada en las que proponen Kieren (1976), Novillis (1976) y Lesh y otros (1980).

Se señala que la noción espacial de partes de un todo es la que resulta de más fácil comprensión a los niños.

Con respecto a las fracciones como puntos en una recta graduada se apunta que esta interpretación no incorpora que éstas puedan ser concebidas como una parte de un objeto concreto o como parte de un conjunto de objetos, sino que la reduce a un número abstracto. Su comprensión no es alcanzada hasta bien entradas las edades de la enseñanza secundaria.

En la interpretación de la fracción como resultado de la división menciona el estudio del proyecto: *Conceptos en Ciencias y Matemáticas en Secundaria* (CMSM), recogido en Hart (1980, 1981), en el que se obtiene que solo un tercio de los alumnos de los dos primeros años de secundaria se han percatado de que cualquier entero puede ser dividido entre otro (no nulo) dando un resultado exacto y expresable mediante una fracción.

En relación con el significado de las fracciones como comparación de los tamaños de dos conjuntos o de dos medidas, se destaca que en estas situaciones no existe una unidad natural o un todo como en los otros y que existen estudios que respaldan [Novillis (1976), Piaget y otros (1968), Karplus y otros (1977) y Hart (1980)] la idea de que esta interpretación se desarrolla más tarde que las de área y conjunto.

Behr, Cramer, Post, y Lesh han estudiado desde 1978 la comprensión en los alumnos de la escuela elemental del concepto de número racional. Describen el papel que desempeñan varios sistemas de representación en la adquisición y uso de este concepto. Elaboran varias lecciones fundamentadas en una variedad de teorías que pueden fomentar un desarrollo adecuado de esta noción. Se puede encontrar una información más detallada de estas lecciones en la página Web del Rational Number Project (RNP): http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject/.

Behr, Harel, Post y Lesh (1992) describen algunos aspectos de los números racionales desde dos perspectivas: las Matemáticas de la cantidad y el número racional como elemento del campo conceptual de la multiplicación. Se comenta que Kieren (1976) fue el primero en introducir la idea de número racional como un concepto con distintos significados o constructos, cuya asimilación depende de la obtención de una comprensión de la confluencia de estos. Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se replantean estos significados y Nesher (1985), citado en Ohlsson (1987), en su análisis de los números racionales distingue entre los siguientes conceptos:

a) La fracción como la relación parte-todo.
b) El número racional como resultado de una división de dos números.
c) Razón.
d) Operador.
e) Probabilidad.

Kieren (1988), citado en este trabajo, señala que el desarrollo completo del número racional comprende cuatro significados:

a) Medida.
b) Cociente.
c) Razón.
d) Operador.

Vergnaud (1983) y Freudenthal (1983) están en esta misma línea. Asimismo se menciona que un elemento objeto de estudio, tal y como apuntan Rahim y Kieren (1987), es que estos constructos están separados.

Kieren (1993), citado en Chamorro y otros (2003), identifica cuatro formas de conocer los contenidos matemáticos relativos a los números racionales:

a) Conocimiento etnomatemático, que es el que poseen los estudiantes derivado de las situaciones en las que normalmente viven.

b) Conocimiento intuitivo, que supone el uso de los instrumentos cognitivos (mecanismos constructivos), representaciones y el uso informal del lenguaje.
c) Conocimiento técnico-simbólico, es el que resulta de trabajar con expresiones simbólicas los números racionales.
d) Conocimiento axiomático-deductivo, corresponde al conocimiento de la estructura matemática.

Llinares (2003) en Chamorro y otros (2003) señala que en Educación Primaria una característica importante de una manera de estudiar las formas de conocer los números racionales se encuentra en las relaciones que se pueden establecer entre los tres primeros tipos de conocimientos descritos por Kieren. Una característica de estas diferentes maneras de conocer es su carácter recursivo. Esto significa que los alumnos pueden utilizar ideas que proceden de diferentes maneras de conocer para justificar sus acciones. Este autor describe con ejemplos sobre los racionales el modelo recursivo de Kieren para la comprensión de las Matemáticas. Este modelo de comprensión es un proceso dinámico, en forma de espiral que conlleva envolverse en sí mismo para crecer y extenderse. Dicho modelo está integrado por ocho niveles de conocimiento o acciones eficientes, los cuales son: *haciendo, construyendo imágenes, teniendo imágenes, observando propiedades, formalizando, observando, estructurando e inventando.*

Pinto y Tall (1996), manifiestan con relación a los números racionales y en estudiantes para maestros, que las experiencias con fracciones y decimales en la escuela permiten la formación de concepciones inadecuadas (considerar a 22/7 irracional por la relación que se da entre 22/7 y π). La definición de número racional es raramente utilizada en las pruebas que se plantean, aunque eligen como número racional, entre otros, los que explícitamente vienen dados como razón de enteros.

En Socas (2001), se analiza el conjunto D de los números decimales (fracciones decimales) y como éste es caracterizado erróneamente dentro de los sistemas numéricos. El estudio de los diferentes significados erróneos que los estudiantes atribuyen al conjunto de los números decimales le permite formular una propuesta curricular de los sistemas numéricos, en la que D juega un papel relevante. En el contexto de la formación del profesorado de Educación Secundaria, durante los cursos 1993-97, se propuso la realización de una actividad en la que se pedía que señalaran qué números pertenecían a N, Z, D, Q, I o R, representados por determinadas expresiones semióticas, a 67 alumnos de 5. º curso de Ciencias Matemáticas, especialidad de Matemáticas Fundamental. La actividad se muestra en la Figura 1.4.

Actividad: Rellena los siguientes cuadros colocando un Sí o No, según que las siguientes expresiones representen o no, a un número que pertenezca a los conjuntos numéricos indicados.						
	N Naturales	Z Enteros	D Decimales	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
-3,9						
0						
¼						
$1+\sqrt{2}$						
2						
$(1+\sqrt{5})/2$						
10/5						
π						
-7/3						
0,666…						
π-5						
0,5						
$(\sqrt{2})^2$						
$3-\sqrt{3}$						
-1/3						
0,0011…						
-3						
1,48						
1,3555…						

Tabla 1.4: Situación problemática

Se observan dos grupos de respuestas que se denominan: A y B. En A, se identifica el número decimal como sinónimo de número real. En B, se caracteriza al número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma. Estas dos tendencias se dan con frecuencias distintas en el grupo que se estudia. La tendencia A es mayoritaria (85%) y la B, minoritaria (15%).

Asimismo, se observan situaciones en las que los números racionales son identificados por su escritura fraccionaria, es decir, como el cociente de dos números enteros.

Se da en estos alumnos, de sólida formación matemática, una tendencia que se caracteriza por identificar el número con su representación semiótica. Además añade:

> *Debemos añadir que la tendencia minoritaria en los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas se convierte en la tendencia mayoritaria en los alumnos del Centro Superior de Educación en la especialidad de Primaria, aunque la casuística es mucho mayor en este grupo de alumnos.*

Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin, y Bana (2001), investigan el Conocimiento del Contenido (CK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) sobre decimales en estudiantes para profesor de la escuela elemental. Se plantean las siguientes preguntas, las dos primeras relativas al CK, y las dos últimas al PCK.

- ¿Qué conocen los estudiantes para profesor sobre la numeración decimal?
- ¿Qué alcance tienen estos estudiantes sobre la sensibilidad de sus propias dificultades en la numeración decimal?
- ¿Qué piensan sobre las dificultades en la comparación decimal de los alumnos?
- ¿Cuáles son las características de las explicaciones de los estudiantes para profesor sobre las dificultades de los alumnos?

El tamaño de la muestra fue de 553 individuos de 4 universidades (A, B, C y D) en Australia y Nueva Zelanda. Se llevó a cabo con profesores en formación, aunque se incluyeron 25 profesores en prácticas que tenían, por lo tanto, cierta experiencia en el tema.

Se implementó un test de comparación en el que se pedía permutar el número mayor entre parejas de decimales. Se consideró como un indicador fiable y rápido sobre la comprensión de la numeración decimal. Para finalizar el test los estudiantes de las universidades A, B y C realizaron los ítems de comparación, en el que debían explicar por escrito las dificultades encontradas. Las razones que argumentan estas autoras sobre la utilización de este procedimiento son las siguientes:

- Investigar las ideas de los futuros profesores sobre el dominio de los niños del tema.
- Utilizarlo como un instrumento metodológico para identificar si los futuros profesores reconocen cuándo sus propias comprensiones son erróneas e incompletas.

En la obtención de los datos se presentaron algunas variaciones. Los estudiantes para profesor (EpP) de la universidad D no contestaron los ítems en los que se pedían explicaciones sobre las dificultades y, en otra universidad, se trabajaron en una sesión.

Los resultados son resumidos en recomendaciones para la formación del profesorado.

Resultados sobre el CK:

Se obtuvo que el 80% de los EpP se pueden considerar como expertos en numeración decimal. Sin embargo, se detectan dos dificultades:

- El 13% comete errores cuando compara un número decimal con el cero.
- Una pequeña proporción mostró el error que consiste en considerar como mayor el número que presenta menor número de cifras decimales entre dos dados ("corto es más grande").

De forma conjunta se aprecia que los errores indican que la mayoría de EpP no entiende la relación entre números decimales, números enteros, fracciones, cero y números negativos. El 57% de los futuros profesores manifestó que los niños podían tener dificultades con los ítems que ellos mismos contestaron mal, lo que indicó que una considerable proporción no sospechó de que había cometido errores. Este fue el caso de los que cometieron errores del tipo "corto es más grande".

Resultados sobre el PCK:

Estas autoras analizan los resultados siguiendo la perspectiva de Shulman (1986) acerca de cómo entienden los profesores las concepciones erróneas o no de los estudiantes. El análisis demostró que presentaban un alto grado de conciencia sobre las concepciones de "más largo es más grande", pero realmente bajo acerca de las concepciones erróneas sobre "más corto es más grande". También, se obtiene que 1 de cada 5 de EpP no tiene un conocimiento bien integrado sobre numeración decimal y esto supone el riesgo de transferir sus propios errores a los estudiantes.

A pesar de las grandes variaciones, dentro y entre universidades, de los conocimientos previos de los alumnos sobre los decimales, el estudio no permitió ligar los resultados con la enseñanza en cada universidad. No obstante, se identificaron áreas de dificultades comunes a todas las universidades. Estas investigadoras consideran que estas concepciones erróneas se dan porque hay un escaso conocimiento sobre los conceptos fundamentales de número. Sería interesante para la formación del profesorado potenciar una enseñanza que desarrollara una comprensión que conectara decimales, fracciones y enteros, incluyendo al cero.

Del mismo modo, recomiendan, dado el deficiente PCK detectado en el estudio, que se ponga más atención en los programas de formación en desarrollar este aspecto del conocimiento.

Asimismo, aconsejan esta metodología para los formadores de profesores como un primer paso para profundizar en la comprensión de las dificultades de los estudiantes con los decimales y en el desarrollo de propuestas para superarlas.

Lachance y Confrey (2002), en este trabajo se comentan los resultados obtenidos al llevar a cabo una instrucción sobre la notación decimal.

Estos autores opinan que la comprensión de los conceptos de razón y proporción permite que los alumnos puedan construir y relacionar fracciones, decimales y porcentajes. Observan que en los libros de texto los decimales y las fracciones están organizados en capítulos separados, sin conexión entre capítulos y los referentes usados en ellos también son distintos. Proponen un modelo alternativo para el desarrollo del conocimiento conceptual. En este se considera que la comprensión matemática surge de la interacción entre el contexto cultural, acciones físicas y lenguaje simbólico. Situaciones que tienen relación con la propuesta de Kieren (1993) y de Llinares (2003). Consideran que esta comprensión se da mejor cuando:

- El contexto de un problema crea una necesidad para una idea en la mente de los estudiantes;
- Las ideas matemáticas y los símbolos presentes en el problema pueden ser percibidos a través de uno o más sentidos;
- Los alumnos pueden elaborar y comunicar sus conocimientos a través de múltiples representaciones;
- Los conceptos surgen a través de la resolución de problemas y de interacciones en clase.

Estos autores aplican múltiples contextos y experiencias para conducir a los alumnos a una primera exploración y comprensión del concepto de razón para, posteriormente, utilizar esa comprensión para explorar los de fracción, decimal y porcentaje. El modelo alternativo coloca a la razón en una posición central.

La enseñanza de los decimales se impartió durante seis semanas y se plantearon situaciones problemáticas contextualizadas a grupos pequeños de alumnos. Se proponen tres problemas: El “problema de los pesos”, “los juegos olímpicos con decimales” y “el problema dominó”.

En el problema de los pesos se presentaba un sistema de pesos (palotes, círculos, rectángulos y manchas) de un país ficticio. Se les dio a los estudiantes escalas para investigar el sistema y para descubrir las equivalencias entre los pesos (1 círculo = 2 palotes, 3 círculos = 1 rectángulo, etc.). Además los alumnos debían crear una guía para turistas en la que se explicaba su funcionamiento. Los estudiantes crearon un sistema de notación para el sistema. El código más utilizado fue uno de cuatro dígitos: el primer dígito se correspondía con la forma más pesada, y así sucesivamente hasta la menos pesada. El valor de cada dígito indicaba la cantidad de esas formas.

Esto llevó al estudio de sistemas numéricos de bases (2, 4 y 6) distintas a la 10. A partir de este estudio se fue construyendo una comprensión más profunda del valor posicional. Todo ello, contribuyó a la exploración de la notación decimal.

En el problema de los "juegos olímpicos con decimales" se trabajaba la notación decimal en un contexto de medida. Se debía dar respuestas a las siguientes cuestiones:

a) Al lanzar una bola de algodón ¿hasta dónde puedes llegar?
b) Al arrojar un plato de papel ¿hasta dónde puedes llegar?
c) Al lanzar una moneda hacia la pared ¿qué tan cerca se puede llegar?
d) ¿Qué distancia se recorre después de dar tres saltos?

Se realizaba una estimación de los resultados y una comprobación de ésta, después de efectuar las medidas.

Los estudiantes trataron aspectos como medir en un sistema métrico, diferentes caminos para anotar cantidades y diferentes métodos de cálculo de las diferencias y totales, con las unidades.

En el "problema dominó" se proponía hacer cálculos con números decimales. Los resolutotes debían predecir cuánto tiempo le tomaría caer 281,581 fichas de dominó. Para resolver la cuestión los alumnos disponían de 100 fichas, de un cronómetro (medía hasta centésimas de segundos) y calculadora. Como el número dado no tiene divisores enteros tendrían que elaborar un modelo más complejo para hacer sus predicciones.

Los tres problemas favorecieron una mejor comprensión de los números decimales y de otros conceptos que surgieron en el trabajo.

Esta propuesta abarcó un proceso de investigación, haciéndose un análisis de forma cuantitativa y cualitativa. Se muestran partes de las discusiones que se produjeron en el desarrollo de las sesiones.

Estos autores concluyen que el camino que los alumnos siguieron para llegar a la comprensión de la notación decimal no se desarrolló desde pequeñas a grandes ideas. El desarrollo de un currículo lineal no permite ver el mejor camino para ayudar a los estudiantes a alcanzar la alfabetización matemática. En cuanto a los símbolos, manifiestan que si bien la conexión de símbolo con significado es esencial para la comprensión de las Matemáticas, el desarrollo de cada significado es fundamental para llegar a definiciones concretas para los símbolos.

Sirvent (2002), en su artículo *Períodos,* expresa su preocupación por el escaso dominio que tienen los alumnos, que finalizan la Educación Secundaria, de las operaciones en Z y en Q, a pesar de ser el bloque numérico más trabajado en este nivel. Asimismo, considera el especial desconocimiento de los alumnos acerca de los números irracionales, y como consecuencia desconocen la existencia de la expresión decimal no exacta. Si bien algunos alumnos recuerdan la definición de número irracional no son conscientes que expresiones como π, e y $\sqrt{2}$ son necesarias para expresar dichas cantidades como tales. Por ello, manifiesta la necesidad de prestar mayor atención a la relación entre la expresión decimal de un número racional y su expresión fraccionaria y evitar que la esta relación se convierta en un algoritmo, que se reduce a presionar una tecla de la calculadora, carente de contenido.

Chick (2003), realiza una investigación sobre aspectos relacionados con el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de profesor de Matemáticas. Los encuestados son futuros profesores de primaria y secundaria. Se plantean dos preguntas a los participantes, a saber:

a) Justificar el procedimiento de agregar un cero al final de un número entero cuando se realiza la multiplicación por diez.
b) Explicar la equivalencia entre 3/8 y 37,5%.

Los resultados obtenidos para la primera pregunta muestran que los futuros profesores presentan dificultades para explicar por qué la multiplicación por 10 puede hacerse añadiendo un cero al final del número entero. El 14% de los futuros profesores de secundaria contestaron correctamente, mientras que solo el 8% de los futuros maestros lo lograron. Muchas justificaciones estaban fundamentadas en la técnica del desplazamiento de la coma, no se utilizaban argumentos basados en conceptos como múltiplo, factor o aumento.

Los resultados de la segunda cuestión se analizaron teniendo en cuenta el número de justificaciones presentadas y el número de correctas. Se contabilizó en ambos grupos que un porcentaje de los estudiantes (76% para secundaria y 65% para primaria) dieron 1, 2 o 3 explicaciones y cada una de ellas correctas en cada caso. Una de las diferencias entre los grupos es que los futuros maestros utilizaban representaciones gráficas para justificar la equivalencia. Sin embargo, los de secundaria aplicaron una variedad de estrategias de cálculo, en especial cuando no se recordada el algoritmo estándar. También, se encontraron respuestas correctas, con justificaciones incorrectas o ambiguas.

En conclusión, se observa, en lo referente a la primera cuestión, poca fluidez en el lenguaje del valor posicional, lo que muestra un empeoramiento del uso apropiado del lenguaje. La aplicación de procedimientos de cálculo pone en evidencia que para estos alumnos el procedimiento es en sí mismo una justificación, pero probablemente sin comprender la esencia de lo que subyace en él.

Los resultados de la segunda pregunta fueron mejores, aunque el número de modelos de que disponen estos alumnos, es reducido.

Cid, Godino y Batanero (2004) desarrollan el tema de los números decimales para maestros, atendiendo tanto a los aspectos matemáticos como a los didácticos. Se consideran como números decimales a las fracciones decimales y se hace la distinción entre número y escritura decimal.

Ruiz (2004) realiza una propuesta de enseñanza de los números decimales para la escuela primaria y para la secundaria. Está fundamentada en las investigaciones sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas. Propone una progresión del aprendizaje que es recogida en dos esquemas el primero de Brousseau (1987) y el segundo de Douady-Perrin (1990).

A partir de estos esquemas se plantean situaciones didácticas con la finalidad de construir los números decimales. Estas situaciones didácticas son:

a) Situación generadora de razones y proporciones: se construye el concepto de fracción como "fraccionamiento de la unidad".
b) Situación que permite construir la concepción de fracción como operador: Graduar una cantidad de longitud y aplicación para ubicar fracciones y expresiones decimales; Aplicación del orden y la densidad de decimales positivos; y situaciones para invertir los conocimientos anteriores y anticipar relaciones entre fracciones decimales y escritura decimal.

En el trabajo se añaden además actividades sobre propiedades topológicas de las características siguientes:

a) Situar un número decimal entre los dos naturales más próximos.
b) Situar una fracción entre dos naturales consecutivos.
c) Comparar dos números decimales.

d) Intercalar un número decimal entre otros dos.
e) Graduación de longitudes.

Bonotto (2006), trata una experiencia de enseñanza basada en una secuencia de actividades con las que trabaja la comprensión de algunos aspectos de la estructura de los números decimales en la escuela elemental. Las actividades están relacionadas con situaciones de la vida diaria (listas de precios de menús de restaurantes). La autora valora que los profesores conozcan la cultura numérica de sus alumnos fuera de la escuela para darles la oportunidad de desarrollar conocimiento matemático nuevo. Asimismo, destaca el potencial de las Matemáticas como herramienta crítica para interpretar y comprender la realidad o la sociedad en general. Utiliza la noción de "modelización emergente" para referirse a una modelización distinta de la tradicional y en la que se requiere que el estudiante disponga de algunos modelos matemáticos y herramientas para matematizar. En este modelo las actividades constituyen un vehículo para el desarrollo de los conceptos matemáticos.

Brousseau, Brousseau y Warfield (2007) comentan una experiencia sobre la enseñanza de números decimales y racionales realizada por Brousseau y Nadine Brousseau en Francia (en la escuela "Jules Michelet") y fundamentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Se trata de un manual constituido por 65 lecciones secuenciadas e impartidas por docentes de la escuela mencionada con alumnos de cuarto grado. Participaron más de 750 alumnos en un período de quince años. En este trabajo se introducen los decimales con un significado conveniente para ordenar los números racionales y operar con ellos.

Consideran que racionales y decimales son dos respuestas diferentes al problema de encontrar números que aproximan las medidas de cantidades continuas.

Asimismo, se describen algunas cuestiones esenciales tales como:

a) No se limitan a estudiar los aspectos tradicionales de las fracciones. Se aborda el orden de un conjunto y la topología de los racionales y decimales.
b) Se enseñan primero los racionales, para poder descubrir los beneficios de los números decimales. Se tratan relaciones entre las tres estructuras (naturales, racionales y decimales) para, posteriormente, desarrollar la evolución de la relación entre ellas.

c) Los racionales son presentados por lo general en forma de fracción, sin embargo, éstas no siempre son concebidas en sus distintas interpretaciones (las fracciones como medida, como aplicaciones lineales o como razón) como conceptos matemáticos distintos. Se propone enseñar los dos primeros conceptos distinguiéndolos y de manera sucesiva. En cambio, las razones permanecerán por mucho tiempo como relaciones entre números naturales o razones entre dos números naturales. Proponen que la identificación formal de estas relaciones con los racionales debe hacerse después del estudio de las fracciones como aplicaciones lineales.

En Ávila (2008) se analizan los conocimientos y creencias sobre los números decimales de un grupo de 25 docentes de educación primaria en México, de edades comprendidas entre los 26 y 42 años. En este caso nos limitamos a mostrar los resultados relativos a los conocimientos. Para recabar información se les formularon dos preguntas, a saber: ¿qué son los números decimales? y ¿qué relación hay entre los decimales y las fracciones?.

En cuanto a las respuestas mayoritarias en la primera pregunta se señalan dos. Por un lado, se reconoce que los números decimales son fracciones, pero no se especifica su carácter decimal y, por otro, se identifica número decimal con número con coma.

> *... un sector de los entrevistados comparte la idea de que los decimales son fracciones, aunque no se incluye el elemento que los caracteriza: el denominador potencia de 10.*
>
> *Otro grupo importante en número expresa la idea de que los decimales son números con punto, centrándose así en una de sus representaciones.* (Ávila, op.cit)

En cuanto a la segunda pregunta, encuentra respuestas que van desde expresar conocimientos difusos del tema hasta considerar que dicha relación consiste en una equivalencia de dos formas de representación de una cantidad.

También, se manifiesta que es más importante dedicar más tiempo a la enseñanza de las fracciones que a los decimales. Se tiene la creencia de que la enseñanza de los decimales es más fácil que la de las fracciones, al centrarla posiblemente en la escritura decimal.

> *Se ven aquí dos cuestiones: la menor importancia (en comparación con las fracciones) otorgada a los decimales que prevalece entre los docentes y, por otra parte, la centralización en la representación decimal de estos números. Esto sin duda está relacionado con las concepciones sobre los decimales que circulan entre los profesores. La consideración de su naturaleza racional es poco frecuente* (Ávila, op.cit).

Cramer, Wyberg y Leavitt (2009) se proponen una organización de la enseñanza en la que se valora el papel que desempeña el profesor en el aprendizaje de los alumnos y el trabajo cooperativo por parte de estos. Se fomenta el debate de ideas y el uso de recursos manipulativos o modelos gráficos para representar fracciones o decimales.

Se presenta un módulo de lecciones organizadas en cuatro partes, de acuerdo con la concepción establecida anteriormente. Cada lección se inicia con una primera sesión, de 10 a 15 minutos de duración, cuya finalidad es la revisión de ideas obtenidas en el desarrollo de lecciones anteriores. Se continúa con una sesión de introducción dirigida a todo el grupo y se sigue con discusiones en pequeños grupos. Se finaliza con una sesión de conclusiones de lo discutido y una actividad a modo de cierre de la lección. El módulo también contiene un apartado de actividades extraescolares para afianzar las ideas.

En las actividades que se proponen se utilizan múltiples modelos para desarrollar el significado de los números decimales. Se trabaja con la cuadrícula de 10x10 y la recta numérica para propiciar ideas de orden y equivalencia.

Los decimales se introducen haciendo uso de la cuadrícula de 10x10 y de la recta numérica. Posteriormente, se retoma el estudio de la adición y sustracción de fracciones usando la recta numérica. La razón de este hecho es que sostienen que la comprensión de los alumnos del modelo recta numérica es más fácil con decimales que con fracciones.

En cuanto a los objetivos que se plantean tenemos:

a) Uso de las cuadrículas de 10x10, para desarrollar el significado de los números decimales basados en las fracciones y en la idea de valor posicional.
b) Desarrollo de estrategias de orden basadas en imágenes mentales sobre modelos concretos, para valorar el tamaño relativo de los decimales.
c) Uso de las cuadrículas de 10x10 para la comprensión de la equivalencia decimal.
d) Representación de decimales, y de sumas y restas de decimales en la recta numérica.

e) Utilización de un modelo que consiste en tres cuadrículas de 10x10 para cada término de las operaciones adición y sustracción de decimales, respectivamente.
f) Resolver problemas de adición y sustracción de decimales de forma simbólica, y juzgar la razonabilidad de los resultados usando la estimación.

En cuanto a los conocimientos que proponen los podemos desglosar y secuenciar de la siguiente manera:

a) Los alumnos deben crear un modelo para los decimales usando cuadrículas de 10x10, para mostrar décimas y centésimas. Éstas deben estar expresadas en palabras, fracciones y decimales.
b) Deben desarrollar una comprensión de las milésimas y comenzar a ver las equivalencias entre décimas, centésimas y milésimas. Elaborar estrategias de orden para identificar el tamaño de dos decimales y encontrar un decimal entre dos dados.
c) Estimar sumas y diferencias usando imágenes mentales sobre cuadrículas de 10x10. Desarrollar estrategias para sumar y restar decimales.
d) Encontrar respuestas exactas a la suma y resta de decimales usando el cálculo mental. Revisión de orden y equivalencia, y práctica de adición y sustracción en la resolución de problemas contextualizados. Uso de la regla de medir, como modelo para los decimales, para conectarlo con el modelo de la recta numérica.

1.6 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El estudio sobre los sistemas numéricos en general y los números decimales en particular ha constituido y constituye un problema de investigación en Educación Matemática, que como hemos analizado en el apartado anterior, ocupa diversos temas de investigación. Estos temas tratan desde los problemas de comprensión de los sistemas numéricos hasta los estudios sobre el conocimiento numérico de los estudiantes para profesores. En nuestro trabajo tomamos en consideración ambos aspectos y nos centramos en la enseñanza y aprendizaje de los números decimales en los que identificamos dos problemas. Por un lado, la confusión del objeto decimal con la representación decimal, y por otro, la existencia de una organización curricular de los sistemas numéricos, que propicia la identificación de número decimal con número real

(Socas, 2001). En tal caso, nos cuestionamos en qué medida están presentes estos problemas en los alumnos futuros profesores y cómo podemos remediarlos.

Para ello, nos planteamos un trabajo inicial consistente en un estudio exploratorio que tiene como finalidad obtener una visión global de los conocimientos que tienen los alumnos, estudiantes para profesores de Matemáticas, sobre los números decimales. Para posteriormente, realizar un segundo trabajo que constituye un estudio experimental con los objetivos siguientes:

a) Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. Se trata de determinar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) y su relación con los decimales.
b) Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.
c) Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

En este trabajo los alumnos se enfrentan a actividades relacionadas con las estructuras: N, Z, D, Q, I y R; y procesos, en especial la sustitución formal (conversiones entre las representaciones decimal, fraccionaria y la recta numérica).

Finalmente, llevamos a cabo un último estudio que tiene como finalidad fundamental la siguiente: diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos. Desarrollamos la organización curricular de los sistemas numéricos propuesta por Socas (2001), que se presenta en la Figura 1.8. Esta propuesta intenta esclarecer la organización de los sistemas numéricos, en la que los números decimales son considerados con entidad propia.

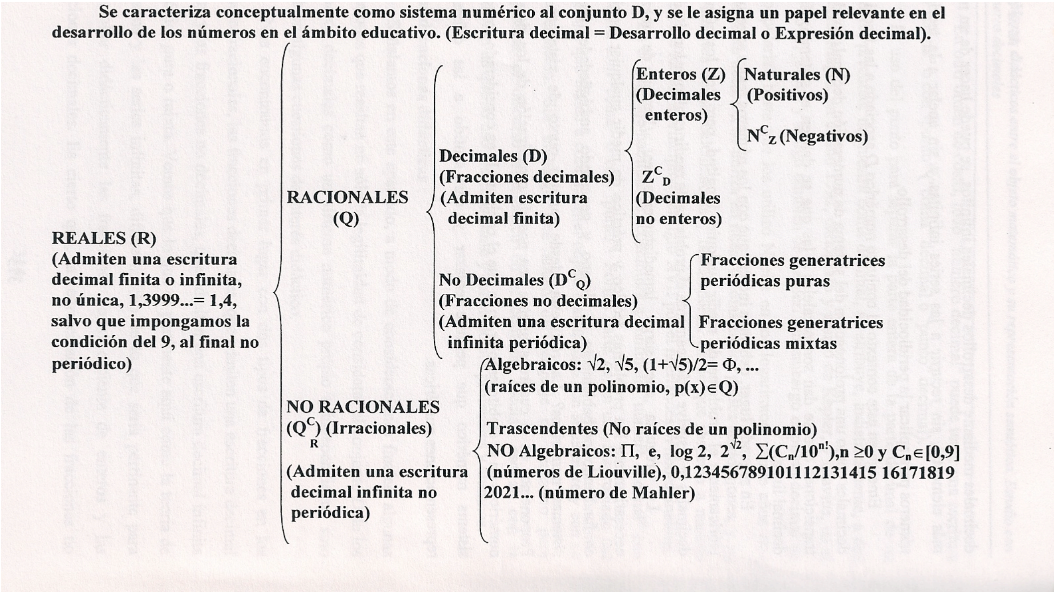


Figura 1.8: Organización de los sistemas numéricos, Socas (2001)

En el diseño de nuestro experimento nos planteamos también conseguir que el alumnado conozca una teoría, articulada en las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje (Socas, 1997), que le sirva de guía en su labor docente futura.

En resumen, limitamos el problema de investigación al estudio con estudiantes para profesores de Matemáticas en relación con la comprensión de los números decimales. Abordamos una propuesta de enseñanza que permite explicitar a estos alumnos toda la fenomenología asociada a estos números y al sistema de escritura decimal, que facilita recursos y herramientas sobre el conocimiento matemático para enseñar estos números.

En el siguiente capítulo se formularán las preguntas, objetivos y conjetura de la investigación.

CAPÍTULO 2. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN. MARCO CONCEPTUAL Y METODOLÓGICO

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo tratamos en primer lugar las preguntas, objetivos y conjetura de la investigación llevada a cabo. Seguidamente se abordan los marcos conceptuales y metodológicos.

En el apartado de preguntas, objetivos y conjeturas se realizará una explicación de cada uno de estos términos que está fundamentada en el planteamiento del problema de investigación presentado en el Capítulo1.

A continuación se realiza una descripción del marco conceptual y se analizan los aspectos del Enfoque lógico Semiótico (ELOS) que aplicamos en este estudio: La Competencia Matemática Formal (CMF), la Competencia Cognitiva (CC) y la relación entre el conocimiento matemático y didáctico de este enfoque con el Conocimiento Matemático para enseñar (MKT). Igualmente, se presenta una revisión de estudios realizados sobre el conocimiento matemático que tienen los futuros profesores de Matemáticas y una descripción de las asignaturas que cursan los alumnos participantes en la investigación.

Finalmente, se lleva a cabo una descripción del marco metodológico dicho y se abordan de forma general las investigaciones de diseño, que constituyen la fundamentación del experimento de enseñanza realizado en la investigación. Se finaliza este capítulo con los aspectos que caracterizan la evaluación de los estudios realizados.

2.2 PREGUNTAS, OBJETIVOS Y CONJETURA DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de los números decimales se inicia desde los primeros años de escolaridad. Se comienza por el conjunto de los números naturales y éste se va ampliando hasta incorporar el conjunto de los números racionales decimales.

A lo largo de este proceso de enseñanza y aprendizaje, el papel de las representaciones externas es clave para la formación del concepto de número decimal. Es sabido que la interiorización de estas representaciones contribuye al desarrollo de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos. Por lo general, las ideas vienen expresadas mediante varios sistemas de representación. Cada uno de ellos le proporciona una caracterización distinta, es decir, destaca algunas propiedades de la noción representada y dificulta la comprensión de otras. En este orden de cosas, Duval (1993, 1995) indica que la comprensión de un concepto matemático está relacionada con el dominio de la coordinación entre sus sistemas de representación. Asimismo, algunas veces se identifica el concepto con una de sus representaciones. Este hecho se pone de manifiesto en la siguiente definición de número decimal:

El número 423,587 es un número decimal. Se compone de dos partes: la entera, a la izquierda de la coma, y la decimal, a la derecha de la coma (Vizmanos, J. y otros, 2000, p. 85).

Por otro lado, el análisis de los libros de texto de la Educación Secundaria Obligatoria pone de manifiesto que en la mayor parte de ellos se iguala el conjunto de los números decimales con el de los números reales:

Hay tres tipos de números decimales.
Exactos: tienen un número finito de cifras decimales.
Periódicos. Tienen infinitas cifras decimales periódicas.
Un arco encima de algunas cifras indica que éstas se repiten periódicamente. $0{,}8\overline{2} = 0{,}82222...$
No exactos y no periódicos: tienen infinitas cifras decimales no periódicas (Colera y otros, 1996, p. 76).

Por todo ello, tal y como señala Socas (2002):

la enseñanza – aprendizaje en torno a los diferentes sistemas numéricos tiene en el conjunto D de los números decimales (fracciones decimales), un conjunto que emerge de manera confusa dentro de los sistemas numéricos.

Con la finalidad de analizar sobre la problemática de los números decimales nos planteamos inicialmente preguntas:

a) ¿Qué competencias tienen nuestros alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado (ULPGC) en relación con los números decimales?
b) ¿Qué significados le atribuyen a cada sistema numérico y, en particular, al de los decimales?
c) ¿Cómo relacionan los distintos sistemas numéricos: N, Z, D, Q, I y R?
d) ¿Qué papel desempeña la notación decimal en las relaciones entre los conjuntos numéricos y en la representación de números reales en la recta?

Interesa en este estudio analizar qué conocimientos de los números decimales poseen los futuros maestros respecto a aspectos conceptuales y procedimentales relevantes para la enseñanza y el aprendizaje de este tópico. Se trata de obtener una visión general de la situación. En tal sentido, nos proponemos los siguientes objetivos:

Primero: Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.

En trabajos realizados con anterioridad, [Robinet (1986), Fischbein (1994), Socas (2001)], se pone de manifiesto que muchos alumnos terminan los estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números y que éstas no se aclaran de forma correcta en los estudios universitarios. De esta manera, y en relación con el concepto de número decimal, se ha observado (Socas, 2001), que alumnos con una fuerte preparación matemática, identifican número decimal con número real unos y, otros, con número expresado en notación decimal con coma, aunque esta segunda situación es menos frecuente que la primera. Queremos conocer cómo los alumnos que han finalizado la Educación Secundaria caracterizan el número decimal y cómo relacionan los distintos conjuntos numéricos: N, Z, D, Q, I y R. Por ello, pretendemos:

Segundo: Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. En definitiva, encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) desde los decimales.

Tercero: Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.

En la representación de números reales en la recta confluyen distintas representaciones (decimal, fraccionaria y radical, fundamentalmente), que se relacionan mediante las conversiones entre ellas, y distintos métodos de representación relacionados con las estructuras (número racional o irracional). Consideramos fundamental analizar cómo el futuro maestro gestiona el proceso de representar números reales en la recta, expresados en distintas notaciones. Por ello, nos proponemos:

Cuarto: Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

La organización de los sistemas numéricos que de forma tradicional se ha propuesto en los currículos propone una clasificación de los números reales en la que el criterio de clasificación está sujeto a la representación decimal y que ocasiona la identificación incorrecta de número decimal con número real, tal y como hemos mencionado con anterioridad. Pensamos que es necesario apostar por una organización de los sistemas numéricos en el ámbito escolar en la que el conjunto D sea considerado como un sistema numérico que permita enlazar y dar sentido a los diferentes números y representaciones numéricas. De esta manera, los decimales serán caracterizados como los números que pueden ser expresados mediante fracciones decimales; de igual modo que los racionales se caracterizan como los que pueden ser expresados en forma de fracción. Los irracionales se presentan como los números que no pueden ser expresados en forma de fracción. Con respecto al otro sistema de representación utilizado, el Sistema de Numeración Decimal Ampliado, los decimales son expresados con notación decimal limitada e ilimitada periódica con período nueve o cero. Los racionales se representan con notación decimal limitada o ilimitada periódica y, los irracionales, con notación decimal ilimitada no periódica. Por ello, nos planteamos:

Quinto: Diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

Las respuestas a las preguntas de investigación y la obtención de los objetivos planteados lo hacemos partiendo de los siguientes supuestos que formulamos como conjeturas.

La primera se basa en la idea de que, por un lado, los alumnos, futuros maestros de Primaria, muestran grandes dificultades cuando se enfrentan a actividades numéricas donde se pone en juego más el pensamiento estructural y procesual que el operacional. De esta manera, seleccionan los números decimales, entre otros números, o los relacionan con otros sistemas numéricos, teniendo en cuenta más su escritura decimal que su estructura. También, en las situaciones en las que se representan números en la recta numérica la conversión a la notación decimal es una estrategia mayoritaria. En este sentido, consideramos que una organización diferente, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos, puede favorecer un cambio en las concepciones de los alumnos del sistema numérico de los decimales.

Por otro lado, los alumnos con un nivel alto en formación matemática caracterizan el conjunto de los números decimales de forma errónea dentro de los sistemas numéricos. Sin embargo, se presentará como tendencia mayoritaria identificar número decimal con número real. De esta manera, y con respecto a la representación de números reales en la recta numérica, consideramos que el procedimiento más utilizado es aplicar el sentido operacional del número expresado en la escritura decimal.

2.3 MARCO CONCEPTUAL

A efectos de diseñar y caracterizar los diferentes elementos del marco conceptual que pasamos a describir. Debemos señalar brevemente que la investigación realizada está compuesta por tres estudios que son analizados en los capítulos sucesivos:

1. Estudio exploratorio.
2. Estudio experimental.
3. Estudio definitivo.

Que serán presentados metodológicamente en el apartado siguiente, ahora conviene indicar que en el Estudio exploratorio, nos planteamos un trabajo que consiste en una primera exploración cuya finalidad es analizar la problemática de los números decimales y sus distintas representaciones y sus relaciones con otros sistemas numéricos, en los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de la Especialidad de Maestro de Educación Infantil en el año 2004, de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC).

En el Estudio experimental, llevado a cabo en los años 2006 y 2007, partimos del mismo tema relativo a los decimales, pero lo limitamos profundizando en el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representarlo.

En el Estudio definitivo, realizado en el año 2008, principalmente se abordan también el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representación antes y después de la puesta en práctica de un experimento de enseñanza guiado por conjeturas, diseñado para este fin.

El marco conceptual de la investigación está constituido, pues, por los marcos conceptuales de los estudios correspondientes. En este caso presentamos los aspectos determinantes que son elementos de la configuración del marco conceptual:

a) La Competencia Matemática Formal (CMF).
b) La Competencia Cognitiva (CC).
c) La Relación entre el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) y el Conocimiento Matemático para Enseñar (MKT).
d) Las asignaturas donde se realizan los estudios: Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica (DPMD), Didáctica de las Matemáticas I (DMI) y Matemáticas y su Didáctica (MD).
e) Los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de Matemáticas (maestros o profesores de Secundaria) (CMFM o CMFPS)

Estos aspectos se distribuyen de la forma siguiente en los marcos conceptuales correspondientes. Por un lado, los marcos conceptuales correspondientes de los estudios tienen en común el abordar las Competencias Matemática Formal y Cognitiva, la relación entre ELOS y MKT y los conocimientos matemáticos de los futuros profesores (CMFM o CMFPS). Por otro lado, se diferencian, no solo en las muestras y en los cursos, sino también en las asignaturas en las que se desarrollan. Para el Estudio exploratorio, tenemos la asignatura Desarrollo del pensamiento Matemático y su Didáctica (DPMD) de ULPGC; para el Estudio experimental las asignaturas son Didáctica de la Matemática I (DMI) de la Universidad de La Laguna (ULL) y Matemáticas y su Didáctica (MD) de ULPGC; y para el Estudio definitivo, Matemáticas y su Didáctica (MD) de ULPGC.

Por todo ello, en el esquema siguiente podemos representar el marco conceptual de la investigación, Figura 2.1.

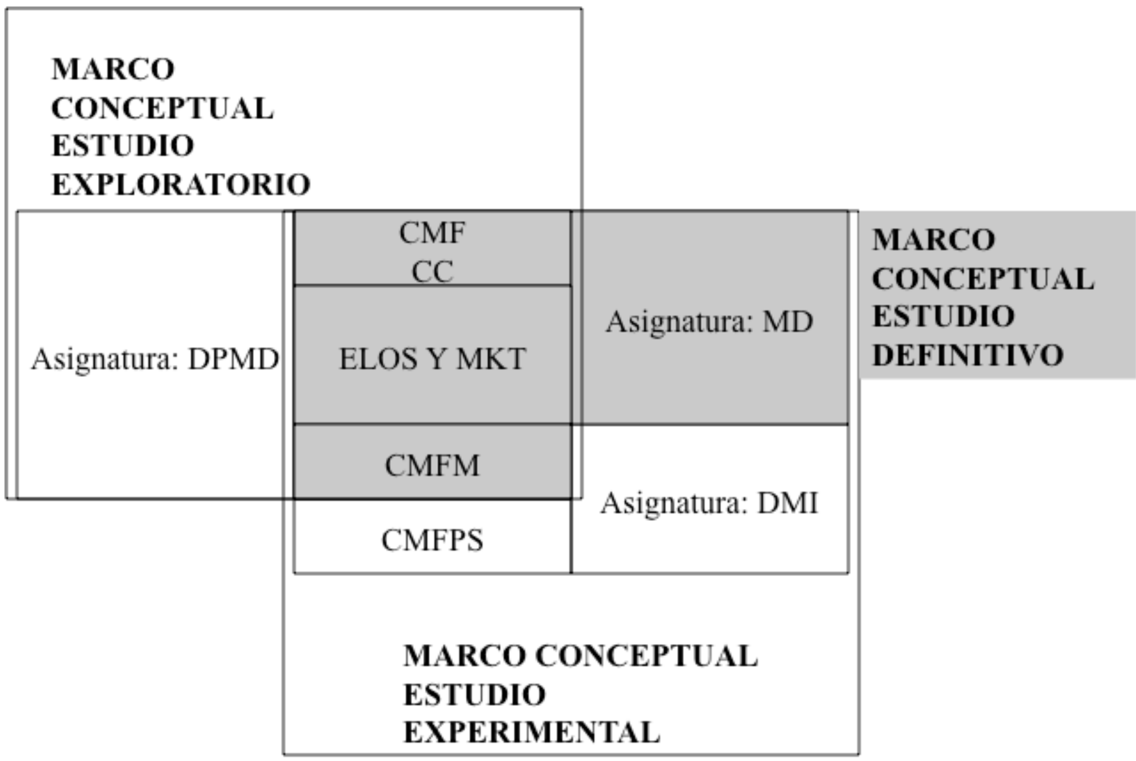


Figura 2.1: Esquema del Marco Conceptual

A continuación, se estudian los aspectos del marco conceptual mencionados anteriormente.

2.3.1 La Competencia Matemática Formal

En Educación Matemática se identifican y se separan, a efectos teóricos, una serie de campos diferenciados que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente: conocimiento matemático, aprendizajes, enseñanza, procesos de enseñanza-aprendizaje, etc. Esta separación se observa en la mayor parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática que tienen un sesgo hacia lo epistemológico, cognitivo o pedagógico. En este sentido Socas (2011) señala:

> *… No parece ésta una propuesta acertada ya que se encuentran estrechamente relacionados entre sí, pero aún más, no parece razonable entender los problemas o fenómenos de enseñanza/aprendizaje de la Matemática desde estos análisis parciales; el análisis lógico semiótico nos ofrece una propuesta integradora y nos define las relaciones principales a determinar en las diferentes situaciones problemáticas para entender estos fenómenos y actuar en consecuencia.*

Antes de abordar la Competencia Matemática Formal, haremos una breve referencia del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) que Socas (2012) lo define de la manera siguiente:

> *Es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis).*

Para abordar esta propuesta se toma como referencia los aspectos lógicos y Semióticos la Fenomenología de Pierce (1987). De esta manera, si se pretende estudiar cualquier fenómeno (situación problemática) se analizará a partir de un contexto determinado y mediante tres referentes organizados como primero, segundo y tercero. En este análisis tienen lugar nociones primarias de naturaleza epistemológica que son descritas en términos de semiosis, así se define la función semiótica primaria o básica la que viene determinada por los referentes signo, objeto y significado (Socas, 2001), Figura 2.2.

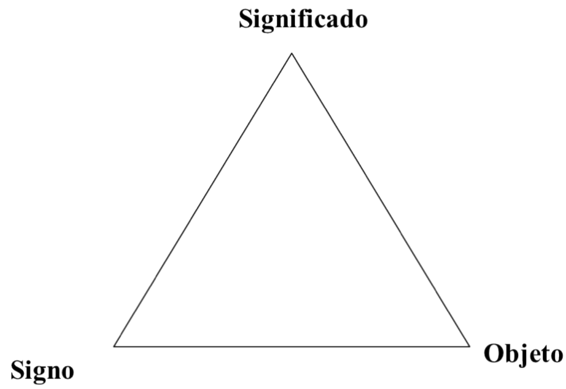


Figura 2.2: Referentes de la función semiótica

En este sentido la noción de *representación semiótica* queda determinada por esos referentes: signo, objeto y significado, y caracterizada como un Signo que:

1. Tiene ciertos caracteres que le son propios (contexto)
2. Establece una relación diádica con el significado
3. Establece una relación triádica con el significado a través del objeto, esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado (Hernández, Noda; Palarea y Socas 2004, p. 171).

Con respecto al Sistema Educativo, el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) toma como punto de partida el “Microsistema educativo”, constituido, por una parte, por tres elementos básicos: Profesor, Alumno y Disciplina. Y por otra, por dos componentes: La Sociocultural y la Institución escolar. La Didáctica de la Matemática analiza fundamentalmente el funcionamiento del microsistema educativo y de él deriva el espacio sistémico que podemos caracterizar como Didáctico y que constituye el primer Sistema Didáctico de la Matemática (Socas, 2012).

El microsistema educativo se representa mediante la relación triangular siguiente, Figura 2.3.

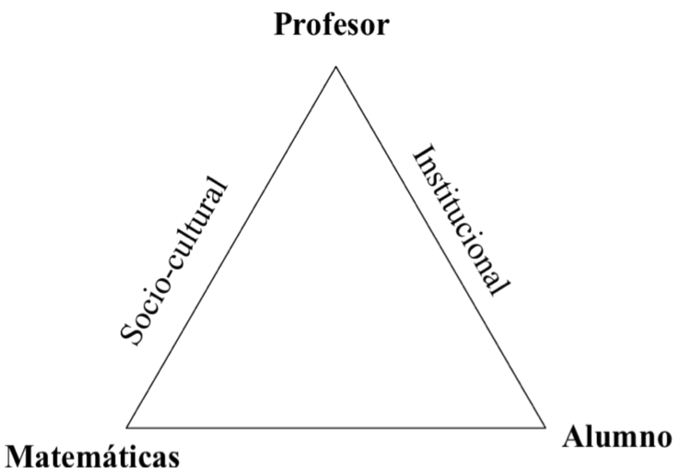


Figura 2.3: Semiosis del Microsistema Educativo

El conocimiento matemático, alumnos, profesores y sus tres relaciones didácticas esenciales quedan contextualizados por las componentes sociocultural e institucional. Las tres relaciones didácticas esenciales que se distinguen son las siguientes:

a) Relación 1: Entre el conocimiento matemático y el alumno, que denomina: “Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual”.
b) Relación 2: Entre el conocimiento matemático y el profesor, que se denomina: “Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar”.
c) Relación 3: Entre el conocimiento matemático y el profesor a través del alumno, que denomina: “Interacciones”.

De esta manera, los tres elementos y las tres relaciones esenciales determinan el proceso de enseñanza-aprendizaje contextualizado en las componentes del triángulo didáctico.

Uno de los conceptos tratados por Socas (2011) relacionados con el microsistema y macrosistema educativos es el Sistema Didáctico fundamental de la Didáctica de la Matemática, sistema constituido por dos planos diferenciados. Uno de ellos, el microsistema educativo, que verifica el proceso de matematización de la cultura, está regido por los currículos oficiales, se lleva a cabo en las instituciones escolares; en él participan profesores y alumnos y debe ser considerado desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática como un todo holístico. Está inmerso en dos escenarios, el escenario institucional, en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, y el escenario sociocultural, donde se refleja el conocimiento matemático objeto de enseñanza-aprendizaje. En el otro plano, el macrosistema educativo, se sitúa la reflexión y el análisis del plano anterior. En este sentido, Socas (2011) señala:

> *Cuando esta reflexión y análisis se realiza con la pretensión de crear conocimiento científico estamos hablando de la disciplina Didáctica de la Matemática y de un conocimiento que denominamos didáctico matemático*.

Por ello, el estudio del microsistema educativo conlleva conocer sus componentes, sus tres elementos y sus relaciones esenciales. En este sentido, destacamos el conocimiento matemático curricular y las tres relaciones esenciales que caracterizan, de forma respectiva, a los modelos de competencia: matemático formal, cognitivo y de enseñanza. A continuación, daremos las definiciones de dichos modelos de competencia según Socas (2011).

> *El modelo de competencia formal se caracteriza por los aspectos conceptuales y fenomenológicos de los contenidos matemáticos curriculares implicados en la situación problemática a tratar, es decir, explicita tanto la organización lógico-formal de los objetos implicados (conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan) como el conjunto de situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógica-formal de los objetos matemáticos implicados.*
>
> *El modelo de competencia cognitivo retoma los aspectos anteriores (modelo formal), y además se refiere a las funciones cognitivas específicas de los objetos tratados y a los aspectos estructurales del aprendizaje, es decir, simula los procesos cognitivos implicados en la ejecución de un usuario ideal del campo conceptual analizado.*
>
> *El modelo de competencia de enseñanza, retoma igualmente los aspectos anteriores (modelo cognitivo) y se refiere, además, a las acciones, a los procesos de comunicación, a los mediadores, a las situaciones, a los contextos, etc. que se dan en la enseñanza.*

Estos tres modelos conforman los referentes que describe la Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo (Socas, 2001, 2007 y 2010). De forma esquemática se expresa de la manera siguiente, Figura 2.4.

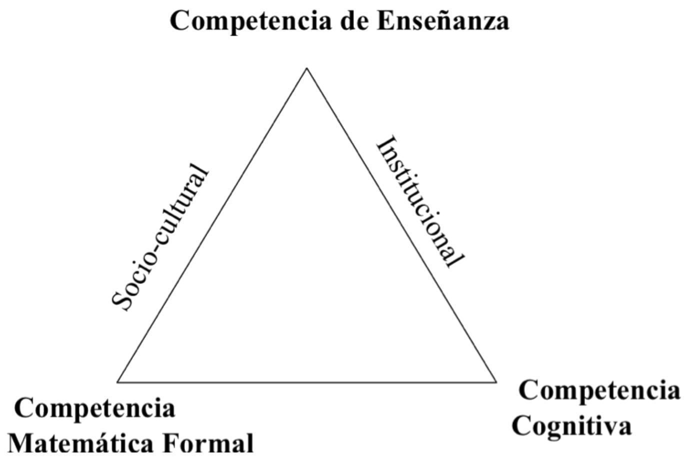


Figura 2.4: Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo

A continuación, abordaremos la Competencia Matemática Formal para el Álgebra y los sistemas numéricos.

A efectos de establecer el modelo de Competencia Matemática Formal para los campos numérico, algebraico y analítico mostramos la posición adoptada desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) sobre la cultura Matemática, la naturaleza de los objetos matemáticos y el papel del lenguaje matemático en la Matemática.

En Socas (2012) se describe su posición sobre la cultura matemática en la que define además términos como modelización, campos conceptuales, objetos matemáticos y sistema de signos.

> *La cultura Matemática es considerada como una disciplina multiforme, que emerge y se desarrolla como una Actividad Humana de Resolución de Problemas. Los problemas tienen una característica común "la búsqueda de regularidades o patrones" y el problema Matemático por excelencia es la "modelización". La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios para expresar los comportamientos regulares o patrones y este conjunto de regularidades o patrones se organiza en "campos conceptuales". Los elementos de estos campos conceptuales son "los objetos matemáticos". Estos objetos se "encarnan", es decir se hacen observables y ostensibles mediante el sistema de signos.*

Los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados están estrechamente relacionados. Dichas relaciones se expresan mediante la "Semiosis" o Modelo de Competencia que describe la fenomenología asociada a los objetos matemáticos con respecto a los signos y significados (Figura 2.2).

Por otro lado y con relación a la complejidad de los objetos del Álgebra se puede observar cómo ésta opera en dos niveles: semántico y sintáctico. En el nivel semántico, los signos algebraicos son dados con un significado claro y preciso. En el nivel sintáctico, los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado. Socas (2010) aplica esta dualidad a los objetos de las Matemáticas:

> *Es decir, en general, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos integrantes de los objetos de la Matemática.*

Este autor considera necesario caracterizar esta dualidad operacional/conceptual en el Álgebra, o sea, relacionar los signos con los objetos algebraicos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada de formas diferentes por autores tales como: Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Socas (2001), etc.

Socas (2010) hace referencia a los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), en los que esta dualidad se desarrolla bajo las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. Se menciona que estos autores explicitan de forma sencilla la convivencia en Matemáticas de los dos tipos de conocimiento. Se dan las definiciones, las características diferentes de cada uno de ellos y las relaciones entre los dos tipos de conocimiento.

En cuanto a las definiciones tenemos:

a) El conocimiento conceptual se caracteriza como un conocimiento rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado.

b) El conocimiento procedimental, se construye en dos partes: una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las Matemáticas y otra, consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información: una que consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos y, otra, en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

En relación con las características diferentes de cada uno de ellos, se manifiesta, por una parte, que el conocimiento conceptual es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna; se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado y, por otra, el conocimiento procedimental, es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas; se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

De las relaciones que establecen entre los dos tipos de conocimiento destacamos:

a) El conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que:
   - los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan,
   - se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas,
   - los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente pues, dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

b) El conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, ya que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos promover los conceptos.

La dualidad operacional-conceptual en el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001), se analiza en términos de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado. Esquemáticamente se representa así en la Figura 2.5.

<table>
<tr><td colspan="3">SIGNO</td><td>OBJETO</td><td>SIGNIFICADO
(conceptual)</td><td>← PLANO DENOTATIVO</td></tr>
<tr><td>SIGNO</td><td>OBJETO</td><td>SIGNIFICADO
(procedimental)</td><td></td><td></td><td>← PLANO CONNOTATIVO</td></tr>
</table>

Figura 2.5: Plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado

El punto de partida es la posición de Pierce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está relacionado con tres instancias separables analíticamente: representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que le conecta con el objeto); objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e interpretante (es signo para algún pensamiento que lo interpreta).

La tríada de Pierce se expresa en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) mediante la tríada: signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta tríada en los dos planos de la función semiótica es la finalidad para determinar conceptualmente el papel de los objetos y los signos en el lenguaje algebraico y una forma de expresar la dualidad operacional-conceptual. En este enfoque la dualidad se determina separando el significado en dos: significado conceptual y procedimental, y modelizando tales relaciones mediante el trapecio formado por los dos triángulos, signo-objeto-significado (conceptual) y signo-objeto-significado (procedimental), de la forma siguiente (Figura 2.6):

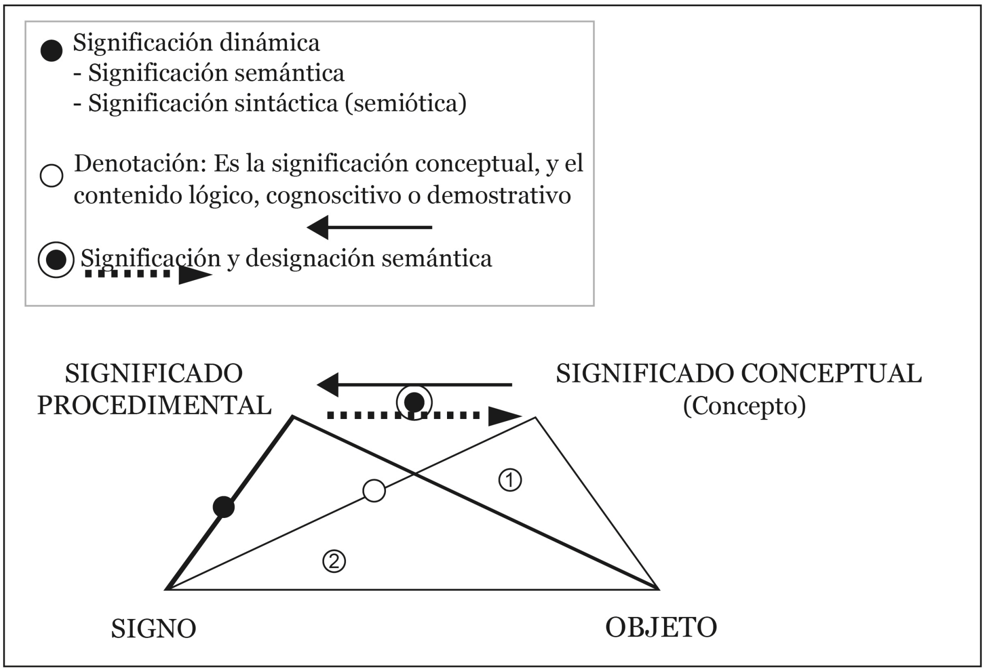


Figura 2.6: Representación de la dualidad operacional-conceptual en el enfoque ELOS

En este esquema se modelizan las diferentes relaciones que caracterizan la dualidad operacional/conceptual, en las que podemos identificar las descritas en relación al conocimiento conceptual y procedimental desarrollado en Hiebert y Lefevre (1986).

La primera es la relación entre el signo y el conocimiento conceptual, que se denomina "denotación" del signo y se caracteriza como la significación conceptual. La segunda, es la relación entre el signo y el significado procedimental que se denomina "significación dinámica" y está caracterizada por las dos clases de información que engloba el conocimiento procedimental y que se llaman "significación semántica" y "significación sintáctica", respectivamente. La tercera es la relación entre el significado conceptual y el procedimental. Las restantes relaciones las considera cuestiones abiertas, por ejemplo: La relación signo-objeto o las relaciones objeto-significado conceptual o procedimental.

La Competencia Matemática Formal toma en consideración a la Matemática como una Disciplina Científica, que tiene unas características y un orden lógico propio, y muestra la organización formal de su campo conceptual en relación con los conceptos, fenómenos y funciones implicados. Además, estos se organizan desde la perspectiva lógica semiótica que se ha considerado. Analiza la Competencia Matemática Formal para los campos conceptuales: Números, Álgebra y Análisis, haciendo énfasis en los contenidos matemáticos del currículo no universitario.

La Competencia Matemática Formal para los campos conceptuales mencionados queda caracterizada por la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje (expresivo y descriptivo) y los argumentos. El esquema atribuido al campo conceptual es el siguiente (Figura 2.7):

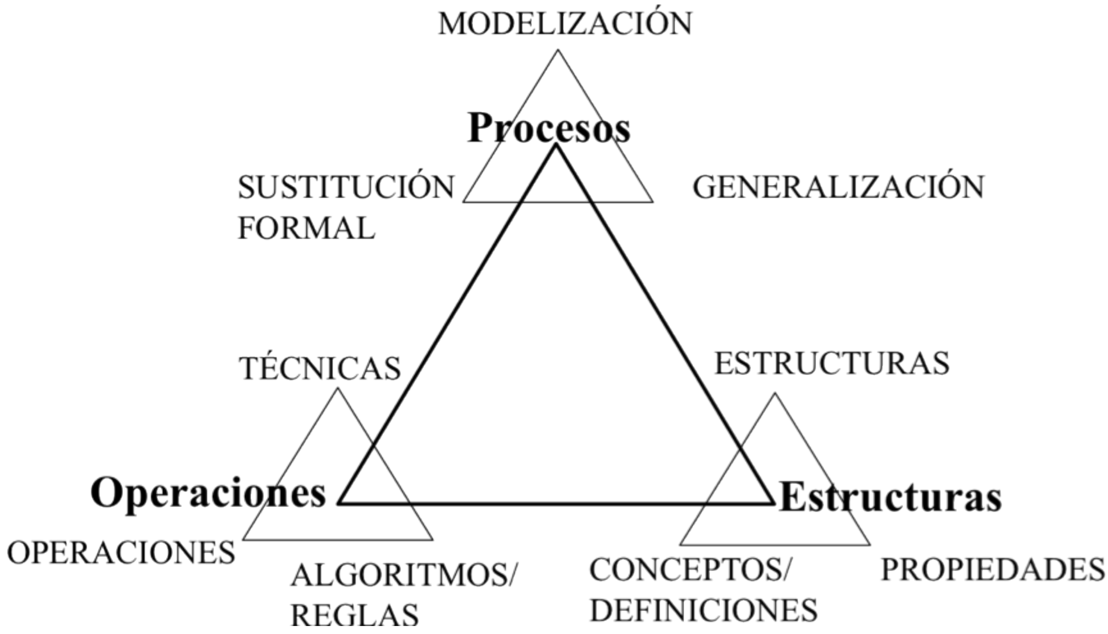


Figura 2.7: Semiosis general del campo conceptual

Se describe la dualidad de los objetos matemáticos (el estatus operacional, de carácter dinámico, los objetos son vistos como un procedimiento; y el estatus conceptual, de carácter estático, los objetos son vistos como una entidad conceptual) en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo tratado. De esta manera, se caracterizan: las operaciones, por la semiosis que describe el significado procedimental; las estructuras, por la semiosis que describe el significado conceptual, y los procesos, por las relaciones que tienen lugar entre el significado procedimental y conceptual. Los procesos se caracterizan por la semiosis que genera los tres referentes matemáticos denominados: sustitución formal, generalización y modelización, procesos que son constitutivos de la disciplina matemática.

Conviene señalar que el esquema de la Figura 2.7 expresa la tres relaciones fundamentales de toda semiosis, en este caso: operaciones y procesos, operaciones y estructuras y operaciones y procesos a través de las estructuras. En la que cada componente de la semiosis general está caracterizada por otros tres referentes que describen una nueva semiosis. La componente Operaciones queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente Estructuras por: conceptos (definiciones), propiedades y estructuras; y la componente Procesos por: sustituciones formales, generalización y modelización.

La organización de los campos conceptuales mencionados está contextualizada en las situaciones problemáticas que se abordan en el campo conceptual, en el Lenguaje

(Representaciones) y Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática.

La contextualización del campo conceptual se expresa de forma esquematizada de la forma siguiente (Figura 2.8):

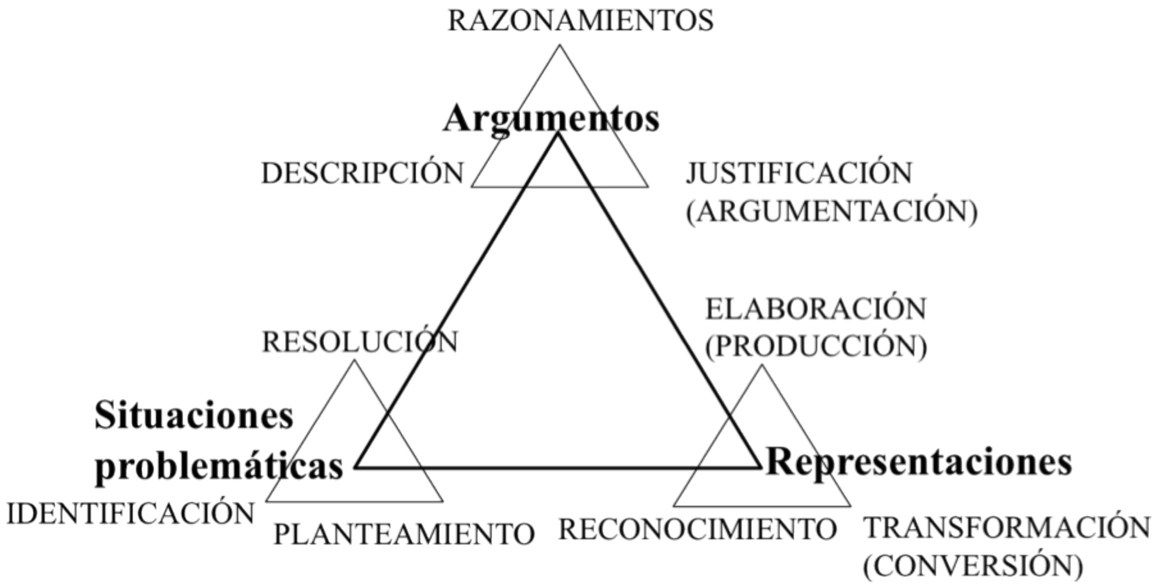


Figura 2.8:Semiosis de la contextualización del campo conceptual

Del mismo modo, los tres componentes del contexto (Situaciones problemáticas, Representaciones y Argumentos) quedan determinados por las respectivas semiosis. En el caso de las Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución; en Representaciones: reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción); y en Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

Este modelo es un instrumento de gran utilidad, por ejemplo, para analizar significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional, currículo, libros de texto mediante la elaboración de un mapa de los contenidos tratados. Véase el ejemplo que se adjunta en la Figura 2.9, del análisis del tema de Fracciones y Decimales de 1ºESO, tomado de Socas (2010).

FRACCIONES Y DECIMALES (1º ESO)

PROCESOS

Sustitución formal

- Cambio de representación decimal a fraccionaria y viceversa
- Representación en la recta numérica
- Representación discreta y continua

Generalización

- Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica
- Fracción decimal y sistema de numeración decimal ampliado

Modelización

- Situaciones problemáticas que involucren números fraccionarios y decimales (porcentajes de cantidades...)

OPERACIONES

- Operaciones aditivas
- Operaciones multiplicativas
- Ordenar fracciones y decimales

Algoritmos

- Reducir fracciones a común denominador
- Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador
- Multiplicar y dividir decimales y fracciones

Técnicas

- Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica
- Representación en la recta de los números racionales

Fracciones y Decimales (Currículo)

- Fracciones y decimales en entornos cotidianos
- Diferentes significados y usos de las fracciones
- Fracciones equivalentes
- Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente
- Fracción generatriz de un decimal exacto
- Ordenación de fracciones y decimales exactos
- Porcentajes
- Cálculo mental y escrito

ESTRUCTURAS

- Fracción como parte de la unidad (parte-todo)
- Numerador y denominador
- Fracción como medida, cociente, razón, y operador
- Fracciones equivalentes
- Fracciones irreducibles
- Fracción y número racional
- Fracción decimal y no decimal
- Fracción decimal y número decimal
- Expresión decimal

Figura 2.9: Ejemplo de mapa de contenidos matemáticos del tema de fracciones y decimales de 1º ESO

El mapa de los contenidos matemáticos considerado se completa explicitando el contexto en el que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual en el nivel temático considerado. Así, para el caso del ejemplo (Figura 2.9), las situaciones problemáticas, las representaciones y los razonamientos implicados en el tratamiento de las fracciones y decimales de 1. º de la ESO, quedan explicitados en la Figura 2.10.

Escrituras y razonamientos: fracciones y números decimales

ESCRITURAS (representaciones)

- Escritura fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta
- Representación digital (fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta)
- Representaciones analógicas discretas y continuas (colecciones, recta numérica y áreas)

RAZONAMIENTOS

- Esquemas: partes-todo, operativos (+, x) y (-,/), y semánticos
- Usos de la fracción: parte-todo, cociente, razón, medida, operador y porcentaje
- Sentido numérico (estimación: fraccionaria, decimal y porcentajes)
- Agrupar y desagrupar en el sistema de numeración decimal ampliado
- Deductivos: Esquemas e Inclusión numérica
- Inductivos (relaciones de igualdad)

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

- Situaciones de parte-todo, de unión de partes, de transformación (operador), de comparación, de partición de un todo
- Situaciones de partición y reparto
- Situaciones de medida
- Situaciones de representaciones y cambios
- Situaciones de porcentajes de cantidades discretas y continuas

Figura 2.10: Contexto

Este modelo sobre la Competencia Formal es también utilizado en las situaciones en las que se pretende analizar los contenidos matemáticos de una tarea matemática y se explicita mediante los objetos del campo conceptual en términos de las operaciones, estructuras y procesos implicados, así como, el contexto en el que se desarrolla la tarea. Además de explicitar los contenidos matemáticos de la tarea, estos se pueden situar en relación con los Estadios de Desarrollo del Objeto Matemático (EDOM) que son: semiótico, estructural o autónomo (Véase la Competencia Cognitiva, representada en el esquema de la Figura 2.12).

Se puede realizar el análisis del contenido para cada una de las tareas mediante un diagrama de doble entrada, que se recoge en la Tabla 2.1.

Estadios de Desarrollo / Dominios de actividad matemática desde la competencia formal	Ámbitos	Semiótico	Estructural	Autónomo
Sistemas de Representación (SR)	- Reconoce - Transforma (Conversión) - Elabora (Produce)			
Situación Problema	- Identifica - Plantea - Resuelve			
Razonamientos	- Describe - Justifica (argumenta) - Razona			
Operaciones	- Operaciones - Algoritmos (Reglas) - Técnicas			
Estructuras	- Conceptos (Definiciones) - Propiedades - Estructuras			
Procesos	- Sustitución Formal - Generalización - Modelización			

Tabla 2.1: Tabla para el análisis del contenido matemático

2.3.2 Competencia Cognitiva

El Modelo de Competencia Cognitivo (MCC) desde el enfoque Lógico Semiótico (ELOS), que constituye parte del marco conceptual de nuestro trabajo, describe la competencia del sujeto en relación a los objetos matemáticos de un determinado nivel temático.

Esta competencia, tal y como se ha comentado con anterioridad, se define y analiza tomando como referencia la Fenomenología de Peirce (1987), como ya hemos mencionado anteriormente, en la que el punto de partida de su teoría es la noción de Signo que lo define de la siguiente manera:

> *Un Signo o Representamen es algo que representa algo para alguien en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o, quizás aún más desarrollado. A este signo creado, yo lo llamo el Interpretante del primer signo. El Signo está en lugar de algo, su Objeto. Representa a este objeto no en todos sus aspectos, pero con referencia a una idea que he llamado Fundamento del Representamen (Pierce, 1987).*

Así, se contempla en su teoría la Semiosis o Función semiótica que viene caracterizada por la relación triádica: Representamen (signo), objeto e Interpretante (significado) que fue recogida en la Figura 2.2.

Como hemos indicado con anterioridad, el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), toma en consideración estas ideas que son adaptadas para analizar y comprender, planificar y gestionar, las situaciones problemáticas o fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática. En el caso de la competencia cognitiva está caracterizada por la tríada, tal y como se expresará posteriormente en la Figura 2.12: el Significado que tiene el objeto del campo conceptual y que éste se explicita mediante sus sistemas de representación, los Niveles de Comprensión del objeto, estadios de desarrollo cognitivo, y las Dificultades y Errores en el aprendizaje del objeto matemático.

Dado el interés del Modelo de Competencia cognitivo a continuación haremos una descripción de estos elementos haciendo hincapié en las dificultades y errores.

El Significado de los objetos del campo conceptual está determinado por el Modelo de Competencia Formal (MCF) que describe tanto el campo conceptual del objeto, como sus funciones y su fenomenología en el nivel temático en que estamos tratando el objeto matemático, en el caso que nos ocupa lo hemos analizado para el sistema numérico de los decimales. En este caso, el Modelo de Competencia Formal considera los tres aspectos de los números decimales: el funcional, el fenomenológico y el conceptual, que organiza, como hemos visto en la Figura 2.9 y Figura 2.10, y describe, en esta situación, al considerar el conocimiento matemático curricular de los números decimales en 1ºESO, el significado institucional que se atribuyen a los mismos en este nivel temático.

De esta manera, la primera componente del Modelo de Competencia cognitivo, los sistemas de representación, quedan caracterizados por la semiosis: Situado (signos que dependen del contexto), Analógico (signos de tipo gráfico) y Digital (signos alfanuméricos).

La segunda componente la constituye los Niveles de Comprensión que se caracterizan por los estadios de desarrollo cognitivo Semiótico, Estructural y Autónomo, de los sistemas de representación de los objetos matemáticos.

En efecto, los objetos matemáticos se comunican mediante sistemas de representación semióticos (SRS). Existen diferentes tipos de representación que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, pero manifestamos que la preocupación de los matemáticos y profesores de que el alumnado confunda los objetos matemáticos con las representaciones conlleva la elección de sistemas formales frente a otros más visuales o caracterizados como representaciones más intuitivas.

El dominio de un SRS formal es más una meta que un camino, en el que aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan hasta producir competencia en el uso de éste. ELOS opta por la organización de estos estadios mencionada en el párrafo anterior y que desarrollamos a continuación.

El estadio Semiótico es aquél en el que el alumno aprende y usa los signos nuevos con los significados que les suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él. El estadio Estructural se reconoce cuando el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, sin embargo, aparecen en este estadio dificultades cognitivas para el alumnado, ya que determinados comportamientos de los signos no pueden ser explicados en términos del sistema antiguo. En estos casos se recurre a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado. El estadio Autónomo es aquél en el que los signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior.

En cuanto a las dificultades y errores, que es la tercera componente de la semiosis denominada Modelo de Competencia Cognitivo, se considera que el aprendizaje de las Matemáticas crea muchas dificultades a los alumnos y que son de naturaleza distinta y que se pueden estudiar desde varios puntos de vista, según se ponga énfasis en el desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza. En Socas (1997) las dificultades se agrupan en cinco grandes categorías asociadas a:

1. la complejidad de los objetos de las matemáticas.
2. los procesos de pensamiento matemático.
3. los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
4. los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

A continuación realizamos una reflexión más detallada de cada una de estas categorías.

En relación con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos consideramos que estos se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, en el que los objetos son vistos como un proceso, y el conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como entidad conceptual. Estos dos aspectos del objeto ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

Asimismo, la comunicación de los objetos matemáticos se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. En este sentido, ponemos de manifiesto que los aspectos del lenguaje de las Matemáticas que difieren de la lengua común, son los que hacen referencia al lenguaje de los signos, y que son fuente de confusión en muchos alumnos. Esto está relacionado también con la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos que es entendida como un proceso de abstracción caracterizado por diferentes etapas (estudiadas en párrafos anteriores: semiótico, estructural autónomo).

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las Matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo. Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte normal de la construcción del conocimiento matemático.

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas tienen que ver con la institución escolar, con el currículo y con los métodos de enseñanza de la misma.

Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos se relacionan con los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos, por el modo característico de razonamiento y por tareas que los alumnos son capaces de hacer.

Por último, con relación a las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales, sabemos que muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia las Matemáticas. La naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas, son aspectos que influyen en esa aversión.

Las dificultades se concretan en la práctica en obstáculos. Parece necesario realizar un comentario sobre esta noción.

El concepto obstáculo lo introdujo por primera vez el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. El traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de la Matemática es objeto continuo de debate, ya que plantea dificultades descritas, entre otros, por Brousseau (1983) o Sierpinska (1985).

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. Tiene un dominio de eficacia. El alumnado lo aplica para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando éste se utiliza fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio se presenta falso. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber y aún así después de haber notado su inexactitud, continúa presentándose esporádicamente.

En este marco descrito en Socas (1997), se consideran que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden organizarse del siguiente modo: la presencia de obstáculos cognitivos, didácticos y epistemológicos y cuyas relaciones se representa gráficamente de la siguiente manera, tal y como se recoge en la Figura 2.11:

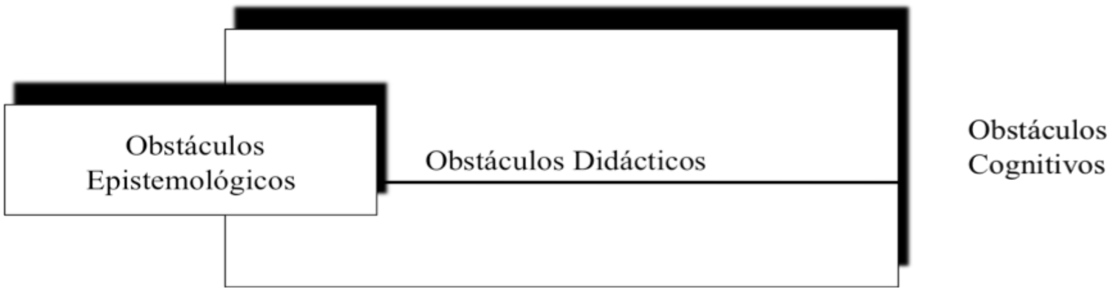


Figura 2.11: Organización de los obstáculos

Los obstáculos cognitivos, se producen en la adquisición de nuevos esquemas conceptuales por parte del alumnado. Los didácticos, se derivan de organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar. Los obstáculos epistemológicos son los que tienen lugar en el desarrollo del pensamiento matemático.

La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos (véase representación gráfica), se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial, por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar; el análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy.

Este modelo de competencia cognitivo nos facilita el estudio de los errores dentro del análisis de los significados que los estudiantes atribuyen al objeto matemático. El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática se afronta bajo la consideración de que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual, ha de responder a las preguntas que él mismo se ha formulado. En ningún caso el nuevo conocimiento se añade al antiguo, al contrario, le crea un conflicto al alumno, porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido. Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de la falta de conocimiento o del despiste.

La tercera componente de la semiosis, que describe el Modelo de Competencia Cognitivo del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), es el de las dificultades y errores y del significado que los alumnos tienen de los objetos tratados, en la que el error es considerado desde tres perspectivas diferentes: afectividad, ausencia de sentido y obstáculo. Estos tres elementos se organizan a su vez en semiosis distintas: la afectividad en, emociones, actitudes y creencias; la ausencia de sentido en, semiótico, estructural y autónomo; y los obstáculos en, epistemológico, didáctico y cognitivo, que permiten hacer análisis más finos del error.

En Socas (1997) se apunta que los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales son de naturaleza diversa: falta de concentración (excesiva confianza), distracciones debidas a la presencia de palabras clave o de rasgos perceptuales, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, actitud negativa hacia las Matemáticas, etc.

Asimismo, los que tienen su origen en ausencia de sentido, se originan en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación semiótico, estructural y autónomo.

Finalmente, los que tienen su origen en un obstáculo son consecuencia del propio desarrollo del pensamiento matemático, de organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar o de adquisiciones de nuevos esquemas conceptuales por parte del alumnado.

En resumen, en este marco de referencia, el Modelo de Competencia Cognitivo se representa mediante el esquema siguiente, que se recoge en la Figura 2.12.

Figura 2.12: Modelo de Competencia Cognitivo

La evaluación y el diagnóstico de los errores de los alumnos juegan un papel importante en la labor del docente, ya que este conocimiento puede promover un mejor aprendizaje del alumnado.

El análisis de los errores tiene un doble interés. De una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; se debe insistir en aquellos aspectos que generan más dificultades. De otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de estos.

Las estrategias de prevención tienen como objetivos evitar o minimizar los obstáculos para que puedan ser superados, dotar de sentido a los objetos y al pensamiento matemático y crear un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia las Matemáticas.

Las estrategias de remedio vienen determinadas por el diagnóstico inicial del error y por el posicionamiento del profesor. Así, el docente que se sitúa en el paradigma cognitivo considera que el error lo ha construido el alumno, y es, por tanto, una estructura cognitiva del dominio de éste. La estrategia de remedio pasa porque el estudiante modifique esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta, para ello, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflicto y haga tambalear dicha estructura.

2.3.3 Conocimientos matemáticos de los futuros profesores de Matemáticas

Aballe (2000) realiza un estudio sobre el nivel de conocimiento matemático de futuros maestros de Primaria. Administró un cuestionario compuesto de actividades (académicas o realistas) con contenido matemático básico (espacial, magnitudinal, numérico, etc.) a 216 estudiantes del primer ciclo, matriculados en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz. Las edades están comprendidas entre los 18 y 25 años.

Los resultados indican que se manifiestan importantes lagunas, en una proporción no despreciable de ellos. Destacamos los datos relativos a las cuestiones relacionadas con operar con decimales y fracciones y con ordenar decimales. En el primer caso, el problema se encuentra con el lugar de la coma; en el segundo, los errores tienen que ver con algún método deficiente (p.ej. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}$ o $\frac{3}{4}$ x $\frac{7}{4}=\frac{3x7}{4}$) y, en el tercero, ordenando decimales se hallan los siguientes errores:

a) El 37% no reconoce la igualdad: 0,370 = 0,37. Entre estos la mayoría responde que 0,370 es mayor que 0,37.

b) El 4% ordena la serie dada de la siguiente forma: 0, 1987 < 0,370 < 0,038 < 0,37 < 0,5. Se toma el número tras la coma como tal cual.
c) Otro 4%: 0, 1987 < 0,038 < 0,037 < (o =) 0,37 < 0,5; considera que un número con diezmilésimas ha de ser menor que otro que solo tiene milésimas, y así sucesivamente.
d) Un 3% expresa: 0, 038 < 0,370 < (o =) 0,37 < 0,1987 < 0,5.

Por lo general, se concluye que las principales deficiencias se engloban en dos grupos relacionados con:

a) La construcción de los conceptos matemáticos.
b) Las herramientas matemáticas de aplicación; problemática metodológica. Por ejemplo: uso de fórmulas o algoritmos ciegos frente a razonamientos o estimaciones.

Los conocimientos matemáticos de los alumnos de primero de la Especialidad de Maestro han sido analizados en varios estudios entre los que destacamos: Palarea y otros (2001) y Hernández y otros (2003). En estos trabajos la prueba se ha diseñado teniendo en cuenta cinco áreas, que se corresponden con los siguientes bloques de contenidos: Números y Operaciones (Competencia en la utilización de números y operaciones. Manejo de la proporcionalidad), Medida (Competencia en la utilización de procedimientos y sistemas de medida convencionales. Estimación y cálculo de longitudes, superficies y volúmenes), Geometría (Capacidad espacial. Reconocimiento de los movimientos en el plano), Análisis de datos, estadística y probabilidad (Capacidad para interpretar y representar conjuntos de datos e informaciones estadísticas. Capacidad de predecir resultados probabilísticos. Reconocimiento de códigos) y Álgebra (Capacidad para comprender y utilizar el lenguaje algebraico). Las cuestiones están diseñadas no solo para que se puedan analizar conocimientos y destrezas sino para detectar habilidades para aplicar procedimientos y resolver problemas.

Los resultados obtenidos se organizan en torno a las siguientes variables: actitud hacia las Matemáticas, estudios precedentes, modalidad de estudios y universidad de procedencia, además se analizan los errores más significativos cometidos por el alumnado.

Los alumnos procedentes de COU o Bachillerato LOGSE han realizado las modalidades de Ciencias: 16%; Ciencias Sociales: 25%; Lingüístico: 13% y Arte: 0.5%, habiendo obtenido en la Selectividad o PAU las puntuaciones siguientes COU (6.2), Bachillerato LOGSE (6.1) y Formación Profesional (7.4).

Sus puntuaciones en Matemáticas en los niveles de Primaria (aprobados, 22%; notables, 45%; sobresalientes 30%) y Secundaria Obligatoria (aprobados, 33%; notables, 44%; sobresalientes, 20%) son superiores a las obtenidas en el Bachillerato (aprobados, 65%; notables, 22%; sobresalientes, 4%).

De estos alumnos, un 46% expresa tener una actitud buena hacia las Matemáticas, mientras un 6% muestra una actitud muy buena, un 6% negativa y un 42% baja. Podemos considerar que se trata de una muestra bastante heterogénea.

El porcentaje de "aciertos por bloque" es: en Números y operaciones, 42%; en Medida, 48%; en Geometría, 59%; en Análisis de datos, estadística y probabilidad, 74% y en Álgebra, 57%. En relación con los "estudios precedentes", hay, en general, bastante similitud entre los resultados de los alumnos de COU y Bachillerato, en contra de la opinión de que estos últimos están peor preparados. En relación con el análisis por "modalidad de estudios", se observa, en algunas cuestiones, que los alumnos de Ciencias obtienen mejores resultados, pero no son especialmente significativos.

Estos resultados muestran enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios de Magisterio en conocimientos básicos de Matemáticas, pero sobre todo llama especialmente la atención el escaso éxito en aquellas cuestiones en las que los alumnos no necesitan realizar cálculos, sino realizar estimaciones o aplicar el sentido común, por ejemplo, en problemas en los que sobra o falta algún dato, pero no se encuentran diferencias significativas respecto a estos conocimientos básicos y a los errores que cometen, según procedencia o modalidad.

Todo ello lleva al grupo de trabajo a pensar en la posibilidad de desarrollar programas de Matemáticas para la formación de Maestros, comunes a todas las especialidades, que deben partir de una realidad que es análoga e independiente de la procedencia de los mismos. El trabajo pretende elaborar una base de conocimiento didáctico - matemático, útil para la investigación y para el análisis de políticas educativas que tienen que ver con la formación de estos profesores.

Nortes Checa y otros (2003) llevan a cabo una investigación en la que se analiza la evolución de las respuestas dadas a un cuestionario de 30 preguntas, encontradas en un trabajo anterior (Hernández, Noda, Paralea y Socas, 2001) sobre los conocimientos matemáticos de maestros en formación a nivel nacional, con alumnos de la Universidad de Murcia. La muestra se compone de 240 alumnos de 2. º y 3. º de las diplomaturas de maestros. Se consideraron como variables de corte la edad, género y especialidad la titulación. Se han encontrado diferencias significativas por género a favor de los alumnos varones. Las diferencias por edad no son significativas y sin embargo sí lo son por especialidades (los resultados más bajos en 2º de la Especialidad de Francés) en el bloque de Geometría y en el de Análisis de datos, estadística y probabilidad. Los resultados obtenidos por bloques de contenidos fueron los siguientes:

a) En Números y Operaciones, de las seis cuestiones planteadas solo en cuatro aparecen las respuestas bien por encima del 50%, se alcanza el 66,9% de aciertos en las correspondiente a proporcionalidad y estimación.
b) En Medida, se formularon 6 cuestiones siendo los resultados mejores que en el bloque anterior, en 8 de ellos el resultado de respuestas bien superó el 50%, alcanzando el 83,4% en el caso de superficies equivalentes.
c) En Geometría, las cinco preguntas obtienen respuestas correctas en más del 50% de los casos, llegando al 77,7% en la cuestión de capacidad espacial.
d) En Análisis de datos, Estadística y Probabilidad, se obtiene un porcentaje de respuestas bien que supera el 50% en todas las cuestiones. Se alcanza casi el 99% en la interpretación de un gráfico estadístico.
e) En Álgebra, de 5 cuestiones solo tres alcanzan porcentajes por debajo del 50%. La puntuación más baja la obtiene un ítem de sustitución con el 33,9%.

Los resultados globales por bloques de contenidos son superiores en este estudio a los obtenidos en el estudio nacional (Hernández, Noda, Palarea y Socas, opt. cit), teniendo a su vez menor dispersión.

En Hernández y otros (2008) se estudian los resultados de alumnos de la Facultad de Educación de la Universidad de la Laguna resolviendo problemas que ponen en juego procesos de generalización y modelización.

En este estudio se analiza cómo el conocimiento operacional subyace, de forma mayoritaria, en la resolución de las actividades propuestas, muchas veces, sin éxito. Esto pone de manifiesto que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional puede estar originando dificultades y obstáculos al alumnado en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de problemas más asociados a un pensamiento estructural o procesual. Además, todo ello propicia dificultades en la consecución de las competencias matemáticas.

En Socas y otros (2009), se presenta un nuevo estudio con alumnos de la especialidad de Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna, sobre el predominio del desarrollo del pensamiento operacional en la enseñanza de las Matemáticas y sus posibles consecuencias. A partir del análisis de una colección de tareas y actividades resueltas por los alumnos, muchas veces, sin éxito, se pone de manifiesto cómo es el pensamiento operacional el que subyace, mayoritariamente, en la resolución de las mismas. Estos resultados vuelven a poner de manifiesto como el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional, puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, y como este pensamiento operacional crea dificultades en la consecución de ciertos aspectos de la competencia matemática.

2.3.4 Conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) y su relación con el Conocimiento Matemático para enseñar (MKT)

Ball, Hill y Bass (2005), ya describían el conocimiento matemático para enseñar del siguiente modo:

> *Se trata de una clase de conocimiento profesional de las matemáticas distinta de la requerida por otras profesiones que utilizan las matemáticas de manera intensiva, tales como ingeniería, física, contabilidad, o la carpintería.*

En la conceptualización del Conocimento Matemático para enseñar (MKT), Schilling y Hill (2007) reflexionan y consideran que:

> *los profesores no solo necesitan realizar cálculos básicos por sí mismo, también necesitan proveer a los estudiantes de explicaciones de por qué se trabaja con ciertos procedimientos, diagnosticar errores en los procedimientos de los estudiantes, comprender procedimientos correctos no estándares.*

Hill, Ball y Schilling (2008), definen el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) como el que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.

Clasifican el conocimiento puesto en juego por el profesor en dos clases: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido; y distinguen a su vez seis categorías, tal y como se muestra en la tabla siguiente.

<table>
<tr><td colspan="2">CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO</td><td colspan="2">CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO</td></tr>
<tr><td>Conocimiento común del contenido (CCK)</td><td rowspan="2">Conocimiento especializado del contenido (SCK)</td><td>Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)</td><td rowspan="2">Conocimiento del currículo</td></tr>
<tr><td>Conocimiento en el Horizonte Matemático</td><td>Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)</td></tr>
</table>

Tabla 2.2: Conocimiento matemático para enseñar

Para abordar el conocimiento del contenido consideran tres categorías. Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático.

Para el conocimiento pedagógico del contenido, establecen otras tres categorías, a saber: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo.

El Conocimiento común del contenido (CCK) es descrito por estos autores de la forma siguiente:

> *El conocimiento que es usado en el trabajo de la enseñanza, en las formas comunes con las que es usada en muchas otras profesiones u ocupaciones que también utilizan las matemáticas.*

El Conocimiento Especializado (SCK) se define como:

> *El conocimiento matemático que permite a los profesores participar particularmente en tareas de enseñanza, incluyendo cómo representar con precisión las ideas matemáticas, dar explicaciones matemáticas para reglas comunes y procedimientos, y examinar y comprender métodos de solución, no usuales, a los problemas.*

Estos investigadores consideran también, cuando hablan del Conocimiento Matemático en el Horizonte, que el conocimiento del contenido debe apoyarse en una visión más amplia de los mismos, de tal forma que le permita al profesor proyectarlos hacia otros niveles educativos.

También, en cuanto al Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) lo centralizan en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden un contenido particular.

La relación que establecemos con las categorías anteriores y la herramienta teórica que nos proporciona ELOS, tal y como la hemos descrito en apartados anteriores de este capítulo, es la siguiente:

CCK, SCK y Conocimiento del Currículo son tratados en la Competencia Matemática Formal (CMF), que proporciona una organización del conocimiento matemático y que nos permite analizar los contenidos que se dan en una situación problemática, y en los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM).
KCS se corresponde con la Competencia Cognitiva (CC) y, finalmente, KCT con la Competencia de Enseñanza (CE).

Conviene recordar, también, como se describió en el apartado 2.3.1, las tres actividades básicas que debe desarrollar todo profesor en relación con las Matemáticas en el microsistema educativo, según ELOS: Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual, adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar e interacciones.

Estas consideraciones permiten establecer la relación entre las actividades básicas de todo profesor de Matemáticas, los conocimientos implicados y las herramientas teóricas y técnicas necesarias, como se recoge en la Tabla 2.3.

ACTIVIDADES BÁSICAS ELOS	CONOCIMIENTOS MKT	HERRAMIENTA TEÓRICAS-TÉCNICAS
Adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar	CCK	Análisis de contenido: - CMF - EDOM
	SCK	
	Conocimiento curricular	
Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual	KCS	CC (Competencia cognitiva)
Interacciones	KCT	CE (Competencia de enseñanza)

Tabla 2.3: Relación de ELOS con MKT

En ELOS, a diferencia del MKT, la Competencia Matemática formal, la Competencia Cognitiva y la Competencia de enseñanza están descritas y relacionadas mediante las diferentes semiosis.

2.3.5 Asignaturas que cursan los alumnos de la investigación

Presentamos en este epígrafe los proyectos docentes de las asignaturas que cursan los alumnos de la investigación: Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica, Didáctica de la Matemática I y Matemática y su Didáctica. En este último caso, se añade la adaptación realizada para el Estudio definitivo. En este sentido, queremos matizar que los proyectos docentes de las asignaturas de la ULPGC presentan la misma estructura.

2.3.5.1 *Proyecto Docente de la Asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica*

El Proyecto Docente de la Asignatura Desarrollo del pensamiento Matemático y su Didáctica. Este Proyecto contiene información relativa a los siguientes aspectos: Descripción de la Asignatura, temario, objetivos, metodología y evaluación.

A continuación presentamos el desarrollo de los puntos anteriores.

Descripción de la asignatura:

En cuanto a la descripción de la Asignatura comentamos que se imparte en el primer año de la Especialidad de Maestro de Educación Infantil y es una asignatura anual, de tipo troncal y de nueve créditos, cinco teóricos y cuatro prácticos.

En esta asignatura se tratan contenidos matemáticos y didácticos necesarios en la formación del maestro para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la etapa infantil.

Temario:

Los contenidos se han presentado en unidades de aprendizaje que presentan conexiones entre ellas y que se procurará mostrarlas al impartir las clases. Las unidades están constituidas por apartados relacionados y en los que no hay uniformidad en su extensión. Por ello, cabe destacar de que estos no están pensados para ser impartidos en un tiempo homogéneo. Además, atendiendo a las necesidades del curso, el Programa podría sufrir algunos cambios siempre que no se altere lo sustancial de éste.

En general, abarca el estudio de los bloques temáticos: Currículo de Infantil y Primaria, Desarrollo del pensamiento Lógico-Matemático en esta etapa, Números y Operaciones, Magnitudes y Geometría. En los bloques anteriores se presentan los aspectos didácticos correspondientes, hemos de mencionar que en el relativo a los Números y Operaciones se hace hincapié en la enseñanza y aprendizaje del sistema numérico de los números naturales, después de presentar una visión global del resto.

La siguiente tabla (Tabla 2.4) contiene las unidades de aprendizaje que componen el Temario.

	UNIDADES DE APRENDIZAJE
1	El currículo de la Educación Infantil y el de Primaria
2	Desarrollo del Pensamiento Lógico-Matemático en la Etapa Infantil
3	Sistemas Numéricos. Números Naturales y Operaciones.
4	Enseñanza y aprendizaje de los Números Naturales y de las Operaciones Aritméticas
5	Las Magnitudes y su Didáctica
6	Iniciación a la Geometría
7	Materiales y Recursos Didácticos

Tabla 2.4: Unidades de aprendizaje de la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica

Objetivos:

- Reconocer el papel de las Matemáticas en el desarrollo del pensamiento de los alumnos, al mejorar su razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción y capacidad para valorar conclusiones.
- Reconocer la utilidad práctica y social de las Matemáticas.
- Comprender que las Matemáticas constituyen un importante hilo conductor dentro del Sistema Escolar.
- Conocer las características del pensamiento matemático, de su lenguaje y de los objetos matemáticos.
- Comprender los fines de la enseñanza de las Matemáticas y el sentido de éstas en la Enseñanza Obligatoria.
- Conocer los factores que inciden en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y las tendencias actuales en la Educación Matemática.
- Conocer y desarrollar técnicas docentes y de aprendizaje de las Matemáticas.
- Conocer los contenidos matemáticos y su didáctica en los niveles de Educación Infantil y Primaria.

Metodología:

Las modalidades organizativas, formas distintas de organizar y llevar a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje, que se siguen son los siguientes:

- Clases teóricas.
- Clases prácticas.

- Trabajos en grupo o individuales.
- Tutorías.

- Clases teóricas

Se desarrollarán de forma expositiva, se fomentará la participación activa del alumnado y se hará uso de medios audiovisuales y otros recursos.

Se utilizarán fundamentalmente para:

1. Facilitar información.
2. Generar procesos de comprensión, a partir de los conocimientos previos que los alumnos tengan sobre los conceptos que constituyen el objeto de la enseñanza.
3. Estimular la motivación, mediante la justificación de la importancia de los contenidos, tanto desde la perspectiva matemática como didáctica.

Estas clases se llevarán a cabo de forma expositiva, pero propiciando la participación activa del alumnado al que se le planteará cuestiones relativamente sencillas cuyas soluciones se corresponden con los conocimientos que se pretenden alcanzar, es decir, en cierto modo se practicará el método heurístico. De esta manera, también se pretende conseguir la motivación de los alumnos y observar sus reacciones para adecuar, en consecuencia, la explicación al ritmo de asimilación del grupo.

Las clases teóricas se estructuran en tres partes: introducción, desarrollo y síntesis.

Con la introducción se tratará de disponer a los alumnos hacia el aprendizaje del tema. Comprende unos minutos de motivación en los que se procura que se interesen por su contenido.

En esta fase, se procura además, establecer un diálogo con los alumnos sobre el conocimiento que ellos poseen sobre el tema que se está tratando, para detectar errores y para hacernos una idea acerca del nivel de conocimiento que poseen. En otras ocasiones lo que se hace es realizar una prueba inicial y valorarla antes del desarrollo de los contenidos, para actuar en consecuencia.

A continuación, se indican los conocimientos previos requeridos para el seguimiento del tema, presentación de los objetivos de aprendizaje, y se muestran los contenidos de forma esquematizada. También se recomienda una bibliografía adecuada.

En el desarrollo se procura presentar los contenidos de forma ordenada, lógica, entretenida, dialogante, crítica e insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y se complementa con ejemplos sencillos, aplicaciones prácticas y ejercicios. El diagnóstico inicial (valoración de las respuestas al primer cuestionario) de los errores determina la estrategia de remedio que podemos seguir que consiste en hacer preguntas o proponer actividades que provoquen conflicto y haga tambalear la estructura cognitiva errónea.

Al final de cada parte del tema que tenga cierta entidad, o al final del propio tema, se hará una síntesis en la que se destacan las ideas principales, y se relacionan convenientemente los contenidos.

Se debe señalar la conveniencia de realizar en el transcurso de la exposición las reiteraciones que se consideren oportunas y de centrar la atención en los conceptos esenciales.

Por último, no debe olvidarse que estas clases se enriquecen notablemente con el empleo de medios audiovisuales, fundamentalmente el proyector de imágenes. A este respecto, se cree conveniente entregar previamente las diapositivas impresas, ya que, al disponer de ellas, el estudiante centra más su atención en intentar entender lo que se le presenta, en lugar de solo tomar apuntes.

- Las clases prácticas

Unas se dedicarán a la resolución de problemas y a la realización de actividades, mientras que otras, al trabajo con el material didáctico. Se realizarán en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas. Así pues, se distinguen fundamentalmente tres tipos:

1. Resolución de ejercicios y problemas.
2. Prácticas con materiales didácticos.
3. Prácticas de laboratorio.

Las primeras vienen a completar lo tratado en las clases teóricas. Se dedicarán a la resolución de problemas y ejercicios propuestos en aquellas, y al planteamiento y discusión de cuestiones abiertas. Estas prácticas se realizarán de forma individual o en pequeños grupos. En ambos casos, se sugiere a los alumnos anotar cada uno de los pasos dados en la resolución con la finalidad de llevar a cabo el examen de todo el proceso con posterioridad. Igualmente, se intentará poner en práctica el modelo de Miguel de Guzmán (2006) para la resolución de problemas.

Con el fin de promover la actividad investigadora, se presentarán no solo ejercicios de rutina, sino también aquéllos que propicien una actividad creadora, siempre, claro está, adecuados a la capacidad del alumnado.

Otro tipo de clases prácticas son las que se llevan a cabo en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas, encaminadas al conocimiento y manipulación de materiales didácticos.

Los materiales vienen determinados por la propia condición de la titulación. En las sesiones presenciales, para cada uno de los Bloques de contenido se realizarán prácticas con el material didáctico, que complementarán en todo momento la teoría. Así, por ejemplo, en el bloque de Numeración, trabajaremos con las Regletas de Cuisenaire, con los Bloques Multibásicos de Dienes, y con los ábacos, entre otros materiales. En el Bloque de Geometría, se trabajará fundamentalmente con los geoplanos, los tángrams y las formas espaciales desmontables.

Finalmente, las prácticas con ordenador tienen como objetivo afianzar los conocimientos adquiridos, mediante el uso de Internet como herramienta didáctica y programas informáticos relacionados con los temas de la asignatura. Además, se utilizarán documentos, artículos, libros electrónicos y una diversidad de software educativo disponible en Internet, relacionados con la Didáctica de las Matemáticas.

- Trabajos en grupos o individuales

El trabajo en grupos es considerado por muchos especialistas en educación de interés primordial para el aprendizaje en general y, por supuesto, para el aprendizaje de las Matemáticas, dada su coherencia con la naturaleza social y colectiva del trabajo científico.

Consisten en la elaboración de temas o proyectos relacionados con el Programa. Estos se complementan con los Trabajos individuales, que comprenden por lo general la lectura comentada de artículos sobre Didáctica de la Matemática, la realización de actividades y la resolución de problemas propuestos, así como la elaboración de materiales didácticos adecuados para su utilización en la Educación Primaria.

- Las tutorías

En el Plan de Organización Docente de nuestro Centro, el profesorado a tiempo completo tiene asignadas seis horas semanales como tiempo mínimo dedicado a tutorías.

Durante estas horas, los alumnos acuden a nuestras dependencias con el ánimo de que les sea resuelta cualquier cuestión relacionada con la asignatura. El hecho de que la mayoría de los alumnos utilicen las tutorías solo en los días anteriores a los exámenes desvirtúa totalmente la finalidad que deberían tener dentro de la enseñanza de la asignatura. Es evidente que la masificación de las clases influye negativamente en la vinculación entre el alumno y la asignatura y, en consecuencia, en su participación en las tutorías.

A pesar de todo, se puede conseguir una mayor utilización de las tutorías si, al hilo de los razonamientos (en demostraciones, problemas,....) se proponen ejercicios tales como completar algún paso de la demostración, o aplicar el teorema que se acaba de enunciar a la resolución de algún ejercicio muy relacionado con él. La experiencia demuestra que, si se consigue que los alumnos sigan la argumentación durante la clase, ello les dará valor para enfrentarse con el ejercicio propuesto con el fin de confirmar sus recientes conocimientos. La tutoría se convierte entonces en el medio más eficaz para comprobar que su resolución es correcta. En nuestra opinión, la clave del éxito de las tutorías reside en conseguir transmitir al alumno la necesidad de llevar la asignatura "al día".

Finalmente, se señala que toda metodología que se proponga no debe ser poco flexible y cerrada, sino todo lo contrario, por lo que podrá se modificada en función de la evaluación que alumnos y profesores realicen de los resultados obtenidos mediante su aplicación.

Evaluación:

En la actualidad, la evaluación se considera como un elemento del currículum que le proporciona validez y coherencia. La evaluación se hace más global y atiende a casi todos los aspectos que intervienen en el proceso educativo.

En nuestro caso, conscientes de la necesidad de no limitarse a la realización de unas pruebas escritas y de la importancia que debe adquirir la relación profesor-alumno en el proceso evaluador, se propone que éste se constituya de la forma siguiente:

Se realizarán algunas pruebas escritas, donde se plantearán cuestiones sobre conceptos elementales vistos en teoría y se propondrán problemas con un nivel de dificultad gradual, con los que se pueda apreciar el grado de asimilación de los conceptos por parte de los estudiantes. Las calificaciones obtenidas en estas pruebas se complementarán con las calificaciones de los trabajos en grupos e individuales.

En definitiva, para la obtención de la calificación final se sumarán las notas obtenidas en los dos apartados siguientes:

a) Pruebas escritas (hasta 7 puntos).
b) Participación activa del alumnado en clase, prácticas con el ordenador y trabajos individuales o en grupo (hasta 3 puntos).

Bibliografía:

La adquisición del conocimiento científico se puede realizar a través de dos vías esenciales: el proceso de investigación y las fuentes de información. Este punto se ocupa de la segunda vía.

Los profesores tenemos la responsabilidad de inculcar a los alumnos la necesidad de la actualización permanente, para lo cual resulta imprescindible el manejo de la bibliografía actual, no solo libros, sino también revistas especializadas, creando un sentido crítico hacia los mismos.

En la bibliografía de la guía didáctica se distinguen dos clases de textos:

- Los básicos, que tratan con claridad toda o la mayor parte de la asignatura (se indican los temas o bloque temáticos para los que se recomienda).
- Los complementarios, indicados por su utilidad en capítulos o partes específicas del programa y que proporcionan información adicional a los textos anteriores.

En cualquier caso, es necesario inculcar en el alumno la idea de que en la mayoría de los casos los apuntes de clase no son suficientes y que la bibliografía es un complemento necesario a las explicaciones del profesor.

Terminamos la presentación de la asignatura realizando un mapa de los conocimientos matemáticos curriculares de los números racionales e irracionales y su didáctica.

Los contenidos que forman parte de la unidad de aprendizaje (3): Sistemas Numéricos. Números Naturales y Operaciones. El análisis de los contenidos curriculares se hará a través del Mapa de contenidos descrito en (Socas, 2010), es decir, del campo conceptual numérico referido a los números racionales e irracionales de esta unidad. Este Mapa se completa explicitando el contexto en el que se desarrollan los objetos matemáticos.

Los contenidos relativos a los números racionales e irracionales se expresan en la Tabla 2.5.

LOS NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES Y SU DIDÁCTICA
1. Fracciones. Introducción histórica. Situaciones de uso 2. Equivalencia de fracciones. El número racional 3. Propiedades del número racional 4. Operaciones con fracciones y números racionales 5. Fracciones decimales. Números decimales 6. Los números irracionales 7. Orientaciones curriculares 8. Desarrollo cognitivo y aprendizaje del número racional 9. Situaciones y recursos para el aprendizaje del número racional

Tabla 2.5: Contenidos de la unidad de aprendizaje (3)

El Mapa de los contenidos del campo conceptual y el contexto es el siguiente, según se recoge en las tablas 2.6 y 2.7, respectivamente.

PROCESOS
Sustitución formal • Cambio de representación decimal a fraccionaria y viceversa • Representación en la recta numérica • Representación continua **Generalización** • Fracción generatriz de una expresión decimal periódica • Fracción decimal y sistema de numeración decimal ampliado **Modelización** • Situaciones problemáticas que involucran números decimales y fraccionarios

OPERACIONES	**NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES Y SU DIDÁCTICA (Contenidos matemáticos)**	**ESTRUCTURAS**
• Operaciones aditivas • Operaciones multiplicativas • Ordenar fracciones y decimales (fracciones) **Algoritmos** • Reducir fracciones a común denominador. • Sumar y restar fracciones con igual y distinto denominador • Sumar y restar decimales en escritura decimal. • Multiplicar y dividir fracciones • Multiplicar y dividir decimales en escritura decimal. **Técnicas** • Representación en la recta de números irracionales cuadráticos. • Cálculo de la fracción generatriz de un racional	• Fracciones. Situaciones de uso. • Equivalencia de fracciones. El número racional. • Operaciones con fracciones y números racionales. • Fracciones decimales. Números decimales. • Los números irracionales.	• Fracción como par ordenado de enteros, segunda componente no nula. • Fracción como parte –todo, cociente, medida, razón y transformación. • Fracciones equivalentes. Número racional. • Propiedades del número racional. • Propiedades de la ordenación de Q. • Densidad de Q. • Fracción decimal y no decimal. • Fracción decimal y número decimal. • Los decimales como subconjunto de Q. • Relaciones entre conjuntos numéricos. • Expresión decimal. • Expresión decimal infinita no periódica y número irracional. • I=R-Q • Números algebraicos y trascendentes. • $\sqrt{2},\ \pi,\ e\ y\ \phi$. • Notación radical. • Teorema de Pitágoras.

Tabla 2.6: Contenidos operacionales, estructurales y procesuales

Escrituras y razonamientos (Cuestionario 1)

ESCRITURAS (REPRESENTACIONES)

- Escritura fraccionaria, decimal, de radicales, mixta, símbolos especiales y expresiones algebraicas.
- Representaciones digitales: Escritura decimal, fraccionaria, de radicales, mixta, símbolos especiales y expresiones algebraicas
- Representaciones analógicas continuas (diagramas rectangulares, lineales y recta)

RAZONAMIENTOS

- Esquemas: Parte-todo, operativos ((+,x) y (-,/)) y semánticos.
- Usos de la fracción: Parte-todo, medida, cociente, razón y transformación.
- Deductivos: Esquemas e inclusión numérica
- Inductivos (Relaciones de igualdad)

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

- Situaciones de Parte-todo
- Situaciones de representaciones y cambios
- Situaciones de medida
- Situaciones de reparto
- Situaciones de razón
- Situaciones de transformación
- Situaciones descontextualizadas

Tabla 2.7: Contexto

2.3.5.2 *Proyecto Docente de la Asignatura Didáctica de las Matemáticas I*

En este apartado realizamos una presentación de la asignatura Didáctica de las Matemáticas I de forma análoga a la anterior: Descripción de la asignatura, objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Descripción de la asignatura:

Con esta asignatura se pretende que el estudiante de la Facultad de Matemáticas adquiera una visión global de la Didáctica de las Matemáticas que le facilite la organización de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en los centros de Secundaria. Así, nos proponemos que el futuro profesor sea capaz de desarrollar un análisis didáctico y un desarrollo curricular desde la perspectiva didáctica de los contenidos Matemáticos que deberán ser objeto de estudio por los alumnos del ciclo 12-16 años. Esta asignatura es optativa de 7,5 créditos y que se imparte en el primer cuatrimestre.

Objetivos y destrezas:

- Objetivos:

a) Apreciar cómo el análisis, la evolución y la construcción del conocimiento matemático incide en la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas.

b) Contextualizar el aprendizaje matemático según las teorías cognitivas que sirven de fundamento a la educación.

c) Identificar los factores socioculturales que influyen en la educación matemática.

d) Conocer los diferentes elementos que deben conformar un currículo de Matemáticas así como su papel en el currículo escolar.

e) Ser conscientes de la importancia que tiene basar la enseñanza de las Matemáticas en la resolución de problemas reales y en la interpretación de fenómenos cotidianos destacándose el papel de la Tecnología.

f) Ser capaces realizar y utilizar el análisis didáctico y la organización curricular del conocimiento matemático de la secundaria para seleccionar programas, reelaborar, analizar y evaluar los conocimientos y las competencias matemáticas.

- Destrezas:

a) Elaborar estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

b) Conocer e interpretar el decreto del curriculum de educación secundaria obligatoria y, la importancia que adquiere en el mismo, el desarrollo de competencias básicas en la educación secundaria.

c) Diseñar y gestionar programaciones de aulas por competencias en Matemáticas.

d) Elaborar y usar los distintos materiales curriculares así como ser capaces de seleccionarlos en base a criterios justificados.

e) Conocer los métodos e instrumentos básicos para la evaluación de los contenidos matemáticos de la secundaria.

Contenidos:

PARTE I: CARACTERÍSTICAS, ESTRUCTURA Y ORGANIZACIÓN DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.

TEMA 1: Estructura y naturaleza de las Matemáticas.

TEMA 2: Las Matemáticas y la Educación.

TEMA 3: Aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria.

TEMA 4: Competencias básicas en la Educación Secundaria Obligatoria.

TEMA 5: Las programaciones de aula de Matemáticas.

TEMA 6: Modelos de intervención en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

PARTE II: MATERIALES Y RECURSOS.

TEMA 7: La Resolución de Problemas.

TEMA 8: La Historia de las Matemáticas en su enseñanza.

TEMA 9: El material didáctico y las representaciones semióticas.

TEMA 10: Interdisciplinariedad y transversalidad en la enseñanza de las Matemáticas.

PARTE III: DIDÁCTICA ESPECÍFICA DE LAS MATEMÁTICAS DE LA E.S.O.

TEMA 11: Números y operaciones.

TEMA 12: El Lenguaje algebraico

TEMA 14: Medida, estimación y cálculo de magnitudes.

TEMA 15: Representación y organización del espacio.

TEMA 16: Interpretación, representación y tratamiento de la información.

TEMA 17: Tratamiento del azar.

Metodología:

Se combinará exposición teórica del conocimiento didáctico con trabajo práctico adecuado. Se elaborará de cada tema el conocimiento técnico necesario para el trabajo práctico Entre las tareas más comunes se procederá a:

- Analizar documentos.
- Realizar cuestionarios y elaborar informes.
- Analizar y estudiar secuencias de aprendizaje.
- Experimentar con materiales didácticos y curriculares relacionados, con los aspectos prácticos requerido por la disciplina. Los alumnos deberán, individualmente o por grupos, diseñar, desarrollar y evaluar una Programación de aula sobre uno de los contenidos de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria.

La Programación de aula será expuesta en clase para su defensa y discusión. Debido a las características esencialmente prácticas del curso, los alumnos deberán asistir obligatoriamente a las clases.

Evaluación:

- Prueba de conocimientos de los temas tratados: 40 %.
- Programación de aula y presentación: 20 %.
- Elaboración de cuestionarios e informes: 15 %
- Trabajo en grupo sobre un material didáctico 15 %
- Asistencia y participación: hasta 10 %.

2.3.5.3 *Proyecto Docente de la Asignatura Matemáticas y su Didáctica. Adaptación realizada para el desarrollo del Estudio Definitivo*

Hacemos ahora una presentación análoga a la del Proyecto Docente de la asignatura: Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica.

Presentamos la Guía Docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica de la carrera de Maestro Especialista en Educación Musical del curso 2008/09. Este programa se desarrolla en el segundo cuatrimestre del primer año de esta carrera.

Comenzamos resaltando que el objetivo fundamental de esta Guía es proporcionar al alumnado una formación básica sobre Matemáticas y su Didáctica, introduciendo las nociones necesarias para que éste eleve el nivel de conocimientos hasta unas condiciones idóneas que le permitan ejercer en un futuro como maestro y les sean útiles tanto desde un punto de vista formativo como profesional.

La Guía se ha estructurado en bloques temáticos que presentan conexiones entre ellos y que se procurará mostrarlas en la impartición de las clases. Los temas que conforman cada bloque están constituidos por apartados relacionados más o menos entre sí y en los que no hay uniformidad en su extensión. Por ello, cabe destacar de que estos no están pensados para ser impartidos en un tiempo homogéneo. Además, atendiendo a las necesidades del curso, el Programa podría sufrir algunos cambios siempre que no se altere lo sustancial de éste.

Contenidos:

La asignatura de Matemáticas y su Didáctica se ha organizado en nueve temas, estructurados en tres bloques temáticos, tal y como se muestra en el siguiente cuadro:

Bloque temáticos	Temas
I. Didáctica del número	1. Los números naturales y su Didáctica. Sistemas de Numeración 2. Análisis didáctico de los Números enteros 3. Didáctica de las fracciones y los Decimales 4. Materiales y Recursos Didácticos para la enseñanza - aprendizaje de la Numeración
II. Didáctica de la Medida y la Geometría	5. Didáctica de la Medida 6. Didáctica de la Geometría 7. Materiales y Recursos Didácticos para la enseñanza - aprendizaje de la Medida y la Geometría
III. Didáctica de la Estadística	8. Estadística Descriptiva 9. Materiales y Recursos didácticos para la enseñanza – aprendizaje de la Estadística

Tabla 2.8: Bloques temáticos de la asignatura Matemáticas y su Didáctica

Las unidades de aprendizajes, relativo a la investigación realizada, se vinculan con el Primer Bloque. Los temas se estructuran siguiendo la organización de los Sistemas Numéricos y el tratamiento de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas que se proponen en Socas (1997), tal y como se observa en la Tabla 2.9:

Bloque temáticos	Tema
I. Didáctica del número	1. Los números naturales y su Didáctica. Sistemas de Numeración 2. Análisis didáctico de los Números enteros 3. Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración 4. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

Tabla 2.9: Bloque: Números y operaciones

El tema de los Materiales y Recursos Didácticos para la enseñanza- aprendizaje de la Numeración se trata de forma particular, como apartados en los tres primeros temas del bloque.

Objetivos y competencias:

Los objetivos se han redactada desde el punto de vista del alumno, de modo que su formulación sea lo más detallada posible, precisa (evitando los términos innecesarios) y concreta (no usando verbos y adjetivos de significación vaga). Entre todos destacamos:

Objetivos	1.	Dominar los contenidos matemáticos de la Educación Primaria, tanto en sus aspectos conceptuales, como didácticos
	2.	Reconocer la utilidad práctica y social de las Matemáticas
	3.	Conocer los medios, materiales y recursos didácticos usuales en la enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas
	4.	Adquirir destrezas en el empleo de instrumentos, técnicas y material didáctico en esta área
	5.	Conocer las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas
	6.	Fomentar que los errores, más que indicadores del fracaso en Matemáticas, se pueden constituir en elementos que ayuden al maestro en la elaboración de estrategias de prevención y remedio
	7.	Impulsar los recursos informáticos y el uso de Internet como una herramienta didáctica
	8.	Reconocer el importante papel que representan los materiales didácticos, tanto reales como virtuales, en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas

Tabla 2.10: Objetivos

En relación con el término competencia, lo entendemos como la disposición en una persona de conocimiento o habilidades para realizar apropiadamente una actividad Short (1985). Las competencias que se contemplan en este Proyecto, que algunas de ellas se han tomado de los Libros Blancos de las distintas titulaciones (http://www.aneca.es/activin/activin_conver_LLBB.asp), se resumen en las siguientes:

1. Conocer un conjunto de contenidos matemáticos suficientemente amplio que le permita realizar con seguridad su función docente.
2. Conocer, interpretar y representar situaciones o problemas.
3. Utilizar estrategias de investigación, propuesta y resolución de problemas tanto en situaciones no escolares como escolares.

4. Usar y hacer usar a los alumnos los números y sus significados, ser capaz de medir y usar relaciones métricas, ser capaz de representar y usar formas y relaciones geométricas del plano y del espacio y ser capaz de analizar datos en situaciones diversas.
5. Reconocer las Matemáticas como instrumento de modelización de la realidad.
6. Saber utilizar programas informáticos generales y matemáticos y las tecnologías de la información para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
7. Conocer los procesos de simbolización matemática, de las representaciones inactivas a las simbólicas, pasando por las icónicas.
8. Aplicar el conocimiento previo de los errores, en el aprendizaje de un tópico matemático, en el diseño de una secuencia didáctica.
9. Averiguar las causas de sus errores, cometidos en actividades planteadas.
10. Diseñar secuencias didácticas de Matemáticas para Primaria.

Metodología:

Las modalidades organizativas, formas distintas de organizar y llevar a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje, que se siguen son los siguientes:

- Clases teóricas.
- Clases prácticas.
- Trabajos en grupo o individual.
- Tutorías.

- Las clases teóricas

Se desarrollarán de forma expositiva, se fomentará la participación activa del alumnado y se hará uso de medios audiovisuales.

Se utilizarán fundamentalmente para:

4. Facilitar información.
5. Generar procesos de comprensión, a partir de los conocimientos previos que los alumnos tengan sobre los conceptos que constituyen el objeto de la enseñanza.

6. Estimular la motivación, mediante la justificación de la importancia de los contenidos, tanto desde la perspectiva matemática como didáctica.

Estas clases se llevarán a cabo de forma expositiva, pero propiciando la participación activa del alumnado al que se le planteará cuestiones relativamente sencillas cuyas soluciones se corresponden con los conocimientos que se pretenden alcanzar, es decir, en cierto modo se practicará el método heurístico. De esta manera, también se pretende conseguir la motivación de los alumnos y observar sus reacciones para adecuar, en consecuencia, la explicación al ritmo de asimilación del grupo.

Las clases teóricas se estructuran en tres partes: introducción, desarrollo y síntesis.

Con la introducción se tratará de disponer a los alumnos hacia el aprendizaje del tema. Comprende unos minutos de motivación en los que se procura que se interesen por su contenido.

En esta fase, se procura además, establecer un diálogo con los alumnos sobre el conocimiento que ellos poseen sobre el tema que se está tratando, para detectar errores y para hacernos una idea acerca del nivel de conocimiento que poseen. En otras ocasiones lo que se hace es realizar una prueba inicial y valorarla antes del desarrollo de los contenidos, para actuar en consecuencia.

A continuación, se indican los conocimientos previos requeridos para el seguimiento del tema, presentación de los objetivos de aprendizaje, y se muestran los contenidos de forma esquematizada. También se recomienda una bibliografía adecuada.

En el desarrollo se procura presentar los contenidos de forma ordenada, lógica, entretenida, dialogante, crítica e insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y se complementa con ejemplos sencillos, aplicaciones prácticas y ejercicios. Asimismo, el diagnóstico inicial (valoración de la prueba inicial) de los errores determina la estrategia de remedio que podemos seguir que consiste en hacer preguntas o proponer actividades que provoquen conflicto y haga tambalear la estructura cognitiva errónea.

Al final de cada parte del tema que tenga cierta entidad, o al final del propio tema, se hará una síntesis en la que se destacan las ideas principales, y se relacionan convenientemente los contenidos.

Se debe señalar la conveniencia de realizar en el transcurso de la exposición las reiteraciones que se consideren oportunas y de centrar la atención en los conceptos esenciales.

Por último, no debe olvidarse que estas clases se enriquecen notablemente con el empleo de medios audiovisuales, fundamentalmente el proyector de imágenes. A este respecto, se cree conveniente entregar previamente las diapositivas impresas, ya que, al disponer de ellas, el educando centra más su atención en intentar entender lo que se le presenta, en lugar de solo tomar apuntes.

- Las clases prácticas

Unas se dedicarán a la resolución de problemas y a la realización de actividades, mientras que otras, al trabajo con el material didáctico. Se realizarán en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas. Así pues, se distinguen fundamentalmente tres tipos:

1. Resolución de ejercicios y problemas.
2. Prácticas con materiales didácticos.
3. Prácticas de laboratorio.

Las primeras vienen a completar lo tratado en las clases teóricas. Se dedicarán a la resolución de problemas y ejercicios propuestos en aquellas, y al planteamiento y discusión de cuestiones abiertas. Estas prácticas se realizarán de forma individual o en pequeños grupos. En ambos casos, se sugiere a los alumnos anotar cada uno de los pasos dados en la resolución con la finalidad de llevar a cabo el examen de todo el proceso con posterioridad. Asimismo, se intentará poner en práctica el modelo de Miguel de Guzmán (2006) para la resolución de problemas.

Con el fin de promover la actividad investigadora, se presentarán no solo ejercicios de rutina, sino también aquéllos que propicien una actividad creadora, siempre, claro está, adecuados a la capacidad del alumnado.

Otro tipo de clases prácticas son las que se llevan a cabo en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas, encaminadas al conocimiento y manipulación de materiales didácticos.

Los materiales vienen determinados por la propia condición de la titulación. En las sesiones presenciales, para cada uno de los Bloques de contenido se realizarán prácticas con el material didáctico, que complementarán en todo momento la teoría. Así, por ejemplo, en el bloque de Numeración, trabajaremos con las Regletas de Cuisenaire, con los Bloques Multibásicos de Dienes, y con los ábacos, entre otros materiales. En el Bloque de Geometría, se trabajará fundamentalmente con los geoplanos, los tángrams y las formas espaciales desmontables.

Finalmente, las prácticas con ordenador tienen como objetivo afianzar los conocimientos adquiridos, mediante el uso de Internet como herramienta didáctica y programas informáticos relacionados con los temas de la asignatura. Además, se utilizarán documentos, artículos, libros electrónicos y una diversidad de software educativo disponible en Internet, relacionados con la Didáctica de las Matemáticas.

- Trabajos en grupos o individuales

El trabajo en grupos es considerado por muchos especialistas en educación de interés primordial para el aprendizaje en general y, por supuesto, para el aprendizaje de las Matemáticas, dada su coherencia con la naturaleza social y colectiva del trabajo científico.

Consisten en la elaboración de temas o proyectos relacionados con el Programa. Estos se complementan con los Trabajos individuales, que comprenden por lo general la lectura comentada de artículos sobre Didáctica de la Matemática, la realización de actividades y la resolución de problemas propuestos, así como la elaboración de materiales didácticos adecuados para su utilización en la Educación Primaria.

En este curso se propone como trabajo individual, después del estudio del Bloque I, la realización de un informe relativo al análisis de los errores cometidos en la prueba inicial, practicada en el tema, *Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración,* y fundamentado en la teoría estudiada (Socas, op.cit). Para ello, se le proporciona al alumno un esquema donde se organizan las preguntas que éste debe formularse y cuyas respuestas se presentan por escrito, al final de curso: ¿Es correcta mi respuesta?, ¿qué error he cometido? y ¿cuál puede ser la causa?

- Las tutorías

En el Plan de Organización Docente de nuestro Centro, el profesorado a tiempo completo tiene asignadas seis horas semanales como tiempo mínimo dedicado a tutorías.

Durante estas horas, los alumnos acuden a nuestras dependencias con el ánimo de que les sea resuelta cualquier cuestión relacionada con la asignatura. El hecho de que la mayoría de los alumnos utilicen las tutorías solo en los días anteriores a los exámenes desvirtúa totalmente la finalidad que deberían tener dentro de la enseñanza de la asignatura. Es evidente que la masificación de las clases influye negativamente en la vinculación entre el alumno y la asignatura y, en consecuencia, en su participación en las tutorías.

A pesar de todo, se puede conseguir una mayor utilización de las tutorías si, al hilo de los razonamientos (en demostraciones, problemas,....) se proponen ejercicios tales como completar algún paso de la demostración, o aplicar el teorema que se acaba de enunciar a la resolución de algún ejercicio muy relacionado con él. La experiencia demuestra que, si se consigue que los alumnos sigan la argumentación durante la clase, ello les dará valor para enfrentarse con el ejercicio propuesto con el fin de confirmar sus recientes conocimientos. La tutoría se convierte entonces en el medio más eficaz para comprobar que su resolución es correcta. En nuestra opinión, la clave del éxito de las tutorías reside en conseguir transmitir al alumno la necesidad de llevar la asignatura “al día”.

Finalmente, se señala que toda metodología que se proponga no debe ser poco flexible y cerrada, sino todo lo contrario, por lo que podrá se modificada en función de la evaluación que alumnos y profesores realicen de los resultados obtenidos mediante su aplicación.

Evaluación:

En la actualidad, la evaluación se considera como un elemento del currículum que le proporciona validez y coherencia. La evaluación se hace más global y atiende a casi todos los aspectos que intervienen en el proceso educativo.

En estos momentos se habla fundamentalmente de los siguientes tipos de evaluación:

a) La evaluación inicial, permite hacerse una idea del nivel de conocimiento de los alumnos que comienzan el curso.
b) La evaluación formativa, se lleva a cabo durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje con la finalidad de reestructurarlo y reforzarlo. Sirve de retroalimentación, al informar al profesor sobre aquellos aspectos que presentan deficiencias, lo que permite a éste introducir o modificar aquellos elementos que considere oportunos. El error como un elemento más del proceso de aprendizaje pone de manifiesto las concepciones erróneas, la construcción defectuosa de conceptos o relaciones, o, simplemente, las lagunas de conocimiento; por tanto, da una información importantísima que permite llevar a cabo una reorientación de las actividades de aprendizaje con

el fin de que sean superadas. Para Socas (1997): *todo error puede ser el principio de un buen aprendizaje*.

c) La evaluación sumativa, se realiza al final del proceso y trata de medir el rendimiento del alumno, normalmente con el fin de asignarle una calificación. Sería el tipo de evaluación empleado en los exámenes parciales o finales que suelen realizarse en un curso académico.

En nuestro caso, conscientes de la necesidad de no limitarse a la realización de unas pruebas escritas y de la importancia que debe adquirir la relación profesor-alumno en el proceso evaluador, se propone que éste se constituya de la forma siguiente:

Se realizarán algunas pruebas escritas, donde se plantearán cuestiones sobre conceptos elementales vistos en teoría y se propondrán problemas con un nivel de dificultad gradual, con los que se pueda apreciar el grado de asimilación de los conceptos por parte de los estudiantes**.** Las calificaciones obtenidas en estas pruebas se complementarán con las calificaciones de los trabajos en grupos e individuales.

De la misma manera, Arnal-Arnal (1987) atribuyen a la evaluación cuatro funciones, que se tendrán en cuenta en este proceso:

a) Diagnóstico: propio de la evaluación inicial y a través de la que el profesor puede conocer, en parte, la realidad, posibilidades y limitaciones del alumno.
b) Función de control: se comprobará el logro de los objetivos.
c) Función pronóstico: a partir del conocimiento inicial del alumno, el profesor puede hacer pronósticos de modo técnico o intuitivo sobre lo que puede exigirse a un sujeto o a un grupo.
d) Función orientadora: aspecto que se apoya en el hecho de que todos y cada uno, en cuanto a personas, valemos y servimos para algo y es a la evaluación a quien corresponde descubrir en cada alumno posibilidades y estimular su desarrollo.

En definitiva, para la obtención de la calificación final se sumarán las notas obtenidas en los dos apartados siguientes:

c) Pruebas escritas (hasta 7 puntos).
d) Participación activa del alumnado en clase, prácticas con el ordenador y trabajos individuales o en grupo (hasta 3 puntos).

Organización docente de la asignatura y distribución de créditos ETCS:

A continuación se expone una distribución aproximada del tiempo disponible para tratar cada uno de los Bloques del programa.

De acuerdo con Plan de Estudios (del curso 2008-09), a la asignatura de Matemáticas y su Didáctica le corresponden un total de 4,5 créditos en el segundo cuatrimestre, lo cual se traduce en 45 horas de clase que se distribuyen en 15 semanas a razón de 3 horas de clase por semana.

La distribución del tiempo que se plantea a continuación se entiende que no es estricta, aunque sería ideal llevar a cabo el programa cumpliendo con los tiempos que se indican. Sin embargo, la experiencia docente muestra que cada curso es distinto: las necesidades y capacidades varían de uno a otro, por tanto, se debe ser flexible a la hora de interpretar los esquemas adjuntos.

- Créditos actuales (LRU): 4,5 (2 T + 2,5 P)
- Créditos ECTS: 4 Nº de horas de trabajo del alumno: 100

Hemos estimado una asignación de 25 horas/crédito ETCS, lo que supone un total de 100 horas de trabajo del alumno en el curso, equivalentes a 6,6 horas/semana en el cuatrimestre. La distribución en actividades de estas horas sería la siguiente:

a) 32 horas presenciales (con una reducción de hasta el 30% de la docencia presencial respecto a los 4,5 créditos LRU actuales).
b) 12 horas de clases teórico-prácticas en el Laboratorio de Matemáticas (1 hora/semana).
c) 12 horas teórico-prácticas en el Aula de Informática Docente (1 hora/semana).
d) 6 Horas de clases tuteladas.
e) 2 horas de evaluación.
f) 68 horas no presenciales, distribuidas como sigue:

- 15 horas para actividades tuteladas (Trabajos para exponer o entregar, Prácticas con materiales didácticos: 1 hora/semana).
- 53 horas de actividades independientes, que el alumno deberá realizar con el fin de alcanzar los objetivos y competencias de la asignatura (estudio de los contenidos teóricos y prácticos, actividades formativas relacionadas con la asignatura como asistencia a cursos, conferencias, jornadas, utilización del Campus Virtual ULPGC – Plataforma Educativa Moodle: 3,5 horas/semana).

Esquemáticamente se podría escribir:

Información ETCS
- Créditos ETCS: 4 Horas de trabajo del alumno: 100 Horas presenciales: 32 - Horas teóricas (HT): 12 - Horas prácticas (HP): 12 - Horas de clases tuteladas (HCT): 6 - Horas de evaluación: 2 Horas no presenciales: 68 - Trabajos tutelados (HTT): 15 - Actividad independiente (HAI): 63

Tabla 2.11: Distribución de horas presenciales y no presenciales

Organización Docente de la Asignatura					
Contenidos	**HT**	**HP**	**HCT**	**HTT**	**HAI**
Bloque II: Didáctica de la Medida y la Geometría.	4	4	2	5	18
Bloque I: Didáctica del Número	4	4	2	5	18
Bloque III: Didáctica de la Estadística	4	4	2	5	17

Tabla 2.12: Organización docente de la asignatura

Fuentes bibliográficas:

La adquisición del conocimiento científico se puede realizar a través de dos vías esenciales: el proceso de investigación y las fuentes de información. Este punto se ocupa de la segunda vía.

Se entiende que todo profesor universitario debe estar en contacto con la más reciente información bibliográfica, lo que le permitirá conocer la evolución continua de su materia y los nuevos planteamientos psicopedagógicos en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma.

Para Cuartero (1987): *Sólo desde el conocimiento de las novedades más relevantes que se van produciendo en nuestra ciencia, es factible (aunque sea condición necesaria pero no suficiente) llegar a transmitir a los alumnos que las Matemáticas no están acabadas en ningún sentido, sino que son un organismo vivo, en evolución constante, en un proceso continuo de creación y renovación*.

Los profesores tenemos la responsabilidad de inculcar a los alumnos la necesidad de la actualización permanente, para lo cual resulta imprescindible el manejo de la bibliografía actual, no solo libros, sino también revistas especializadas, creando un sentido crítico hacia los mismos.

En la bibliografía de la guía didáctica se distinguen dos clases de textos:

- Los básicos, que tratan con claridad toda o la mayor parte de la asignatura (se indican los temas o bloque temáticos para los que se recomienda).
- Los complementarios, indicados por su utilidad en capítulos o partes específicas del programa y que proporcionan información adicional a los textos anteriores.

En cualquier caso, es necesario inculcar en el alumno la idea de que en la mayoría de los casos los apuntes de clase no son suficientes y que la bibliografía es un complemento necesario a las explicaciones del profesor.

2.4 MARCO METODOLÓGICO

La investigación realizada es de tipo cualitativa y se ha desarrollado en tres momentos diferentes. Estos momentos se corresponden con los tres estudios que la componen: Estudio exploratorio (1), Estudio experimental (2) y Estudio definitivo (3).

A continuación tratamos de describir, de forma breve, los marcos metodológicos de los estudios planteados, ya que estos se abordarán de forma más detallada en los capítulos siguientes.

El primer momento consiste en la preparación e implementación del Estudio exploratorio que tiene como finalidad principal obtener una visión general de las destrezas y habilidades que de los decimales tienen los alumnos futuros maestros. Éste consiste en la realización del conjunto de tareas siguientes:

a) Diseño y análisis de los contenidos matemáticos de un cuestionario (C1) de 38 preguntas de varias opciones, con la herramienta que nos proporciona el Enfoque Lógico Semiótico.
b) Administración del cuestionario (C1) a un grupo de 36 alumnos del primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Infantil en el año 2004.
c) Obtención y análisis de los resultados.

El segundo momento se corresponde con la preparación e implementación del Estudio Experimental. En este trabajo partimos del mismo tema relativo a los decimales, pero lo limitamos profundizando en el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representarlo. En este sentido, atendemos a los siguientes aspectos:

a) Significado conceptual del número decimal.
b) Relaciones con otros conjuntos numéricos: N, Z, D, Q, I y R.
c) Representaciones: notación decimal, fraccionaria, la de los radicales y la recta numérica.

Este estudio se lleva a cabo con dos poblaciones distintas (8 y 38 alumnos, respectivamente), en cuanto al nivel de formación matemática, que definimos alto y medio, y en dos períodos diferentes, año 2006 y 2007, respectivamente. Consiste, en un primer momento, año 2006, en el diseño, administración y corrección de un nuevo cuestionario (C2), que consta de tres preguntas sobre estructuras y procesos, al grupo de alumnos con un nivel alto en formación matemática. En un segundo momento, año 2007, se administra y corrige el cuestionario (C2) a los alumnos con nivel medio en formación matemática. Todo esto ha contribuido también a la revisión del cuestionario y que nos sirvió de instrumento para la recogida de datos.

De igual manera que en el estudio exploratorio, para describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en las tareas que forman parte de los instrumentos construidos en este trabajo se aplicará la Competencia Matemática Formal.

El análisis de las dificultades y errores cometidos por el alumnado en estas tareas se llevará a cabo mediante la Competencia Cognitiva. Esto solo nos permitirá conjeturar sobre el origen de estos errores, al no disponer de entrevistas.

El tercer momento lo constituye la preparación y desarrollo del Estudio definitivo, llevado a cabo con un grupo de 28 alumnos futuros maestros de Primaria en el curso 2008-09. Este estudio es un experimento de enseñanza dirigido por conjeturas. De esta manera, en este caso se ha implementado un cuestionario (C2) y se ha desarrollado, en un programa de formación de Matemática, un experimento de enseñanza guiado por conjeturas y se han realizado entrevistas individuales e informes elaborados por los alumnos. Este momento (3. º) de la investigación se ha desarrollado en tres fases, a saber:

a) Fase de diagnóstico y discusión a priori, se administra un cuestionario (C2) se corrigen las pruebas y se seleccionan algunos alumnos que son entrevistados.

b) En la fase segunda, la retroalimentación se genera, especialmente, a partir de dos unidades de aprendizaje: “Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración” y “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas”. La primera, trata del estudio de los números y sus diferentes escrituras considerando como elemento organizativo “lo decimal” y “la numeración decimal”. De manera concreta para su elaboración nos apoyamos en una organización de “lo decimal” y “la numeración decimal” en el entorno escolar, en el que el conjunto de los números decimales es considerado como un sistema numérico que permite conectar y dar sentido a los diferentes números y la escritura decimal es una representación que debe ser diferenciada del número decimal y que permite establecer relaciones significativas con las otras representaciones o escrituras de los diferentes números. La segunda, “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas”, supone proporcionar al alumnado un conocimiento teórico, técnico y práctico que permita analizar y reflexionar sobre el objeto número y sus diferentes escrituras y cómo estas confusiones entre el objeto matemático y sus escrituras generan dificultades que a veces se convierten en obstáculos. La elaboración de esta unidad de aprendizaje constituye una adaptación para este alumnado del capítulo: *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria* de Socas (1997).

En definitiva, este conocimiento pretende proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas teóricas, técnicas y prácticas, que les sirvan para reflexionar sobre las causas de los errores que han cometido al contestar las preguntas del cuestionario.

c) En la tercera fase, de revisión y producción, se vuelve administrar el mismo cuestionario y de igual forma que al principio, se selecciona una muestra de alumnos para ser entrevistados (entrevistas finales o de la tercera fase que fueron también audiograbadas). Asimismo, en esta fase, se les pide a cada alumno una tarea concreta que denominamos, producción, en la que cada alumno presenta un informe escrito sobre sus dificultades, obstáculos y errores con los números y sus escrituras, en relación con las tres preguntas del cuestionario, y referidas a los resultados expresados en la primera prueba del cuestionario, que se les había devuelto fotocopiado.

Esto nos ha permitido observar la evolución y discusión de los resultados, mediante las diferentes actividades realizadas y documentos aportados en el experimento de enseñanza.

El análisis de las dificultades y errores cometidos por el alumnado en estas tareas se llevará a cabo mediante la Competencia Cognitiva.

En la siguiente tabla (Tabla 2.13) recogemos de forma resumida el marco metodológico de la investigación descrito con anterioridad.

<table>
<tr><th colspan="3">MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN</th></tr>
<tr><th colspan="3">MARCO METODOLÓGICO DEL ESTUDIO EXPLORATORIO</th></tr>
<tr><td>Población: Alumnos del año 2004 (36 alumnos)</td><td colspan="2">Fases:
- Diseño del Cuestionario (C1)
- Análisis del contenido matemático de C1
-Administración y corrección de C1.</td></tr>
<tr><th colspan="3">MARCO METODOLÓGICO DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL</th></tr>
<tr><td>Población:
Alumnos del año 2006 y alumnos del año 2007 (8 y 38 alumnos, respectivamente)</td><td colspan="2">Fases:
- Diseño del Cuestionario 2 (C2)
- Análisis del contenido matemático de C2
-Administración y corrección de C2
-Estudio de casos de alumnos del año 2006</td></tr>
<tr><th colspan="3">MARCO METODOLÓGICO DEL ESTUDIO DEFINITIVO</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Población: Alumnos del curso 2008-09 (28 alumnos)</td><td rowspan="3">FASE 1:
Diagnosis y discusión a priori</td><td>Administración del cuestionario C2</td></tr>
<tr><td>Discusión a priori</td></tr>
<tr><td>Corrección de pruebas y elección de alumnos para entrevistarlos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FASE 2:
Retroalimentación y discusión a posteriori</td><td>Puesta en práctica del Experimento de Enseñanza</td></tr>
<tr><td>Discusión a posteriori</td></tr>
<tr><td rowspan="3">FASE 3:
Revisión y Producción</td><td>Administración del cuestionario C2</td></tr>
<tr><td>Corrección de pruebas y elección de alumnos para entrevistarlos</td></tr>
<tr><td>Producción: Informe escrito</td></tr>
</table>

Tabla 2.13: Marco metodológico

2.4.1 la investigación de diseño

En este apartado consideramos en primer lugar, los aspectos generales de la investigación de diseño (2.4.2.1) y, en un segundo lugar, los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por conjeturas (2.4.2.2).

2.4.2.1 *Aspectos generales de la Investigación de Diseño*

El desarrollo de este punto lo hemos realizado tomando como referencia el trabajo de Molina (2006).

La investigación de diseño o investigación basada en diseño es una metodología de naturaleza principalmente cualitativa que ha sido aplicada y desarrollada en la investigación educativa. Está mostrando ser de utilidad en el campo de la Didáctica de la Matemática y las Ciencias (Kelly, 2003).

Surgen de un intenso interés por entender el pensamiento de los niños, y de la necesidad de producir teoría que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, permitiendo adaptar las condiciones de la enseñanza, para afectar la probabilidad de ciertos resultados o sucesos. Se busca proveer conocimiento sistemático y garantizado sobre el aprendizaje y producir teorías que guíen la toma de decisiones de enseñanza hacia la mejora del aprendizaje del alumno (Confrey, 2006).

Los estudios de diseño tienen sus raíces en las entrevistas clínicas, los experimentos de enseñanza rusos, la psicología de Piaget y en el constructivismo radical y social.

Parece ser que el uso de este término, investigación de diseño, es adjudicado en un principio a Collins (1992) y Brown (1992).

Collins (1992) distingue entre ciencias de lo artificial o de diseño y ciencias naturales o analíticas, haciendo hincapié en la importancia de tratar la educación como una ciencia de diseño, no como una ciencia analítica, para poder determinar cómo diferentes diseños de ambientes de aprendizaje contribuyen al aprendizaje, cooperación, motivación y demás variables dependientes del proceso enseñanza- aprendizaje (Collins y otros, 2004; Confrey, 2006). En este sentido, Collins hace las siguientes recomendaciones:

- Involucrar a los docentes como investigadores.
- Comparar innovaciones.
- Llevar a cabo valoraciones objetivas.
- Seleccionar innovaciones prometedoras.
- Involucrar competencia/habilidad multidisciplinar.
- Variar sistemáticamente.
- Realizar revisiones frecuentes.
- Evaluar el éxito utilizando criterios múltiples.

Brown (1992) describe los estudios de diseño como totalidades organizadas en torno a ambientes de trabajo que son estudiados, ideados para desarrollar teorías de aprendizaje y favorecer su diseminación. Recomienda a los investigadores que deben considerar las aulas y laboratorios como lugares donde pueden emerger avances teóricos.

Shavelson y Towne (2002), según cita Confrey, 2006, definen este tipo de estudios como:

> *Enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas (currículo, métodos enseñanza, applets informáticos) que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente*.

Estos autores clasifican esta metodología de investigación dentro de las investigaciones que pretenden responder a la pregunta ¿cómo y por qué está pasando algo?

DiSessa y Cobb (2004) describen estos estudios como intentos de entender y mejorar procesos educativos, que son iterativos y situados y están basados en teoría.

Confrey (2006) considera que estas investigaciones tratan de documentar que:

> *qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en la tarea, cómo interaccionan los alumnos y docentes, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción, mediante el estudio del trabajo de los alumnos, de grabaciones de videos y de evaluaciones de la clase.*

Kelly (2003) establece que la principal consideración de esta metodología es que el uso de métodos que conectan los procesos de actuación con los resultados tiene el poder de generar conocimiento de aplicación directa a la práctica. Se persigue comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje cuando el investigador actúa activamente como un educador, abordando simultánea e iterativamente los procesos científicos de descubrimiento, exploración, confirmación y diseminación.

El objetivo es producir conocimiento, apoyado por la evidencia, que guíe la toma de decisiones de la práctica educativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos. No se pretende prescribir prácticas de enseñanza sino, en términos de Confrey (2006), marcos explicativos acompañados de datos, evidencias y argumentos. Confrey entiende por *marcos explicativos* modelos de resultados probables, íntimamente conectados a sus teorías, tan potentes como su unión a evidencias, que proceden de múltiples interacciones en ambientes auténticos; tan rigurosos como la documentación y análisis que subyace a los aspectos anteriormente señalados y tan válidos como útiles sean para personas experimentadas en contextos similares. Concretamente, estos estudios son de gran utilidad para investigar el desarrollo de conocimiento en ambientes enriquecidos, en los que emergen ideas que difícilmente se desarrollan en ambientes naturales.

Los estudios de diseño son, por tanto, generadores, complejos, iterativos, multivariables, multiniveles, intervencionistas y orientados por la teoría y hacia la práctica (Cobb y otros, 2003; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003).

Asimismo, consideramos como características fundamentales de estos estudios las siguientes:

a) La complejidad de los ambientes de enseñanza provoca la necesidad de distinguir entre aquellos elementos que son objeto de estudio y aquellos que se consideran accidentales o condiciones del entorno (Barab y Squire, 2004; Cobb y otros, 2003).

b) Involucran múltiples variables, muchas de ellas no pueden ser controladas.

c) Se desarrollan en contextos de la vida real donde se produce algún tipo de aprendizaje. La multiplicidad de contextos en los que estos estudios pueden tener lugar es, junto con el tipo de personas involucradas, uno de los factores que ocasiona la existencia de muy diversos tipos de estudios de diseño. Entre ellos destacamos los experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura, de Confrey y Lachance (2000), que detallamos más adelante.

d) Intervienen diferentes tipos de participantes en su diseño, para utilizar diferentes experiencias en su producción y análisis. Siempre se encuentra el docente implicado en el proceso de investigación.

e) Las teorías que se desarrollan durante el proceso del experimento son específicas a un dominio de aprendizaje y explicativas de la actividad del diseño. Estos estudios no proveen de grandes teorías de aprendizaje, sino que tienen un alcance teórico intermedio. No obstante, estas teorías son esenciales para la mejora de la educación, entendida como un proceso generativo a largo plazo (Cobb y otros, 2003).

DiSessa y Cobb (2004) destacan la utilidad de estos estudios para el desarrollo de constructos teóricos útiles para detectar orden, regularidades y patrones, en los complejos contextos en los que se desarrollan.

f) Se caracterizan por un *refinamiento progresivo* ya que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia (Collins y otros, 2004). La investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño. Los investigadores que emplean esta metodología hacen, testan, y refinan conjeturas sobre la trayectoria de aprendizaje basándose en la evidencias que van obteniendo en el transcurso de la investigación, colaborando o actuando como docentes y recogiendo extensos registros sobre lo que los alumnos, los docentes y los investigadores aprenden a lo largo del proceso (Diseño Basado en Investigación Colectiva (DBRC), 2003).

g) El análisis y resultados de los estudios de diseño conlleva el análisis de múltiples aspectos del diseño así como el desarrollo de una descripción, que define el diseño en la práctica, a partir del análisis retrospectivo del proceso de investigación (Barab y Squire, 2004).

En cuanto a la evaluación comentamos que autores (Cobb y otros, 2001; Cobb y otros, 2003; Confrey, 2006; DBRC, 2003; Dede, 2004; Kelly, 2003, 2004; Shavelson y otros, 2003) consideran cuatro aspectos que deben ser estudiados: fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad.

La fiabilidad está relacionada con el grado en que las inferencias obtenidas del análisis retrospectivo sean razonables y estén justificadas, ya que, a partir de un conjunto de datos se pueden hacer análisis retrospectivos diferentes. La fiabilidad se mide teniendo en cuenta el grado en que se presentan:

a) Un análisis sistemático que involucra la refutación de conjeturas.
b) La utilización de criterios explícitos en las argumentaciones y afirmaciones finales de tal manera que permitan a otros investigadores controlar el análisis. Por ello, es necesario realizar una descripción de cada una de estas fases y que se fundamenten las inferencias realizadas.
c) Otros investigadores, no todos relacionados con el contexto en el que se tomaron los datos, que realicen una crítica del análisis.

La replicabilidad se refiere a que las variables del proceso de aprendizaje estudiado se puedan repetir potencialmente en otros contextos o situaciones. Por ello, deben diferenciarse de aquellas que son dependientes del contexto.

La capacidad de generalización no está relacionada con la representatividad de la muestra sino con la posibilidad de que otros utilicen los productos obtenidos en la investigación para promover aprendizajes en otros contextos. La capacidad de generalización depende del desarrollo de teorías de enseñanza específicas de un dominio y por esta razón se recomienda llevar a cabo varios estudios basados en el mismo diseño, pero adaptados a cada situación, lo que permite profundizar en las teorías describiendo regularidades comunes a las situaciones tratadas. En este sentido, Molina (2006) en su tesis doctoral comenta:

> *No se persigue obtener leyes universales e inmutables, sino crear modelos de modos probables de andamiaje que conducen a resultados de aprendizaje exitosos, por medio de teorías, materiales y enfoques instruccionales y resultados progresivos, que permiten guiar la enseñanza relativa a contenidos específicos. De este modo, estos estudios proveen información a los docentes, de utilidad para dar sentido a sus experiencias en la práctica. Son investigaciones similares a los estudios de casos y etnográficos, en tanto que buscan aportar detalles y especificidad de complejas interacciones prolongadas en el tiempo, más que establecer patrones representativos y generales*.

La utilidad se refiere a que los resultados obtenidos deben dejar claro lo que conlleva para la enseñanza. Este tipo de investigaciones reducen la desconexión que se da entre la investigación y la práctica. Se les permite a los docentes utilizar los resultados para adaptar, comprobar y modificar las secuencias de enseñanza en sus clases.

2.4.2.2 *Experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por conjeturas*

El estudio definitivo que se recoge en este informe es un experimento de enseñanza transformativo dirigido por conjeturas, en términos de Confrey y Lachance (op.cit).

Estos experimentos se llevan a cabo en el aula y están generalmente orientados a investigar nuevas estrategias de enseñanza o analizar diferentes enfoques para el tratamiento educativo de conceptos matemáticos, su característica fundamental es la conjetura que define y actúa de guía en el proceso investigativo.

El marco teórico que lo sustenta es el constructivismo y que se complementa desde una perspectiva sociocultural y una sensibilidad al pensamiento de los alumnos, al reconocerse que, mediante la atención al pensamiento del alumno, se pueden detectar relaciones, preguntas, representaciones, soluciones y, en general, posibilidades que se escapan en ocasiones a la visión de los expertos.

La investigación es en sí misma una intervención en el aula, aportando información directa de cómo llevar los resultados a la práctica.

En los siguientes puntos, que enumeramos a continuación, desarrollamos las características de este diseño, según Confrey y Lachance:

a) La conjetura y el marco teórico.

b) Desarrollo del experimento de enseñanza.
c) Recogida de datos y análisis.
d) Evaluación de la investigación.

Para ello, tomamos como guía el resumen que Molina (2006) hace de estas características.

La conjetura y el marco teórico

Los experimentos de este tipo se basan en una conjetura o inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes. Es revisada y elaborada a lo largo del proceso de investigación. No existen hipótesis que hay que probar sino que la conjetura es la guía de la investigación, existiendo, además, objetivos y preguntas de investigación a las que se pretende dar respuestas.

Confrey y Lachance explican que la conjetura no está fijada de antemano desde el principio de la investigación, sino que evoluciona constantemente a medida que la investigación progresa. En la conjetura se distinguen dos dimensiones: una de contenido matemático y otra pedagógica. Esta última dimensión orienta al investigador en cómo necesita ser organizada la clase para la enseñanza y qué tipos de actividades, herramientas y recursos son necesarios para trabajar el contenido en cuestión. De acuerdo con ella se van a elaborar los elementos de instrucción de la intervención, a saber: el currículo, la interacción en el aula, la enseñanza y la evaluación. La conjetura es una manera de reconceptualizar las estrategias con las que se abordan el contenido y la pedagogía de un conjunto de objetos matemáticos incluyendo, entre otros aspectos, cómo las Matemáticas deben ser organizadas, conceptualizadas o enseñadas para un fin educativo concreto.

La conjetura, para poder ser interpretada, debe estar situada en una teoría que la relacione con otros aspectos de la educación o de las Matemáticas. La teoría sirve para estructurar las actividades y la metodología en el experimento de enseñanza, ayuda a conectar las dos dimensiones de la conjetura, determina qué se cuenta como evidencia, e influye en la elaboración de las categorías de observación y en la interpretación de los datos. La teoría, así como la ideología de los investigadores, interacciona con la construcción y articulación de la conjetura, influenciando todos los componentes de la enseñanza diseñados para operativizar la conjetura.

Desarrollo del experimento de enseñanza

Debido al papel fundamental que desempeña la conjetura en el diseño es importante que se profundice, de forma previa al desarrollo del experimento, en su comprensión y definición. Para ello pueden realizarse estudios preliminares relativos a ciertos aspectos de la conjetura, si así se considera necesario. Los resultados de estos estudios deben incorporarse al plan general de diseño de la investigación. La obtención de productos de varias formas y estructuras, permite asegurar que la conjetura llegará a una diversidad de público que podrá contribuir a su desarrollo.

A continuación realizamos una descripción del papel en la intervención en el aula de cuatro elementos principales de la enseñanza: el currículo, la interacción en el aula, el docente y la evaluación.

Con respecto al currículo, la conjetura determina que contenidos se deben tratar durante la intervención en el aula así como tener en cuenta los que se han abordado en lo que ha transcurrido de curso. Esto supone, que en el caso en el que el docente y el investigador no sean la misma persona, obligar a mantener ciertos compromisos con el docente. El currículo no se diseña por completo desde un principio, ya que algunas decisiones relativas al experimento se tomarán teniendo en cuenta lo que ocurra en las intervenciones previas.

Las actividades deben ser diseñadas de forma flexible y abierta, para poder adaptarlas en función de las respuestas e innovaciones aportadas por los alumnos. La interacción del investigador con los alumnos permite profundizar en diversos aspectos del contenido, siempre observándolo desde la óptica de la conjetura. Los cambios en el currículo serán más significativos y mayores en número que los que se dan en la conjetura, ésta debe sufrir simples elaboraciones y refinamientos evolutivos.

El investigador deberá decidir cómo va a estructurarse la enseñanza teniendo en cuenta las dos dimensiones de la conjetura, nombradas con anterioridad. El tipo de actividades seleccionadas determinará, de alguna manera, el tipo de interacción esperada en el aula durante la intervención. La forma en la que se lleva a cabo las interacciones en el aula es decisiva para planificar los métodos de recogida de datos.

Con respecto al papel del docente es importante saber que éste viene caracterizado por la conjetura y por las actividades elegidas. Debe conocer la conjetura en profundidad, intervenir en el análisis preliminar y final de los datos y en la planificación de las sesiones. Constituye un miembro del equipo investigador.

Las actividades de evaluación del aprendizaje y progreso del alumnado deben comunicarse y ser consistentes con el contenido, la pedagogía, el marco teórico de la conjetura y con los otros componentes de la intervención. Los resultados de la evaluación no solo aportarán datos relacionados con el impacto de la intervención, sino informarán sobre el proceso de intervención. Esto guiará la evolución de la conjetura y del currículo. Confrey y Lachance aconsejan realizar diferentes tipos evaluaciones a lo largo de la investigación.

Recogida de datos y análisis

En este tipo de investigaciones deben utilizarse múltiples métodos de recogida de datos, tales como: grabar las sesiones de interacción en el aula en video y tomar notas, realizar evaluaciones individuales de los alumnos y tomar muestras de sus trabajos escritos, y anotar los pensamientos y reflexiones de los investigadores sobre la interacción.

En este diseño de investigación son necesarios dos tipos de análisis de datos, los cuales tienen lugar en momentos diferentes.

El primero es denominado análisis preliminar y continuo y se refiere al estudio de los datos después de cada intervención. Los resultados de este análisis guían la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones y contribuyen a facilitar la revisión y el desarrollo de la conjetura.

El segundo es denotado análisis final, en el que se estudian el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis permite construir un relato coherente de la evolución de la conjetura y del pensamiento de los alumnos a lo largo de la intervención. Asimismo, los métodos que se utilizarán dependerán de los usados para recoger los datos, los resultados del análisis preliminar y la conjetura en sí misma.

Evaluación de la investigación

Estos autores, Confrey y Lachance, consideran que por las características de este tipo de investigación no se pueden aplicar los estándares de calidad que se siguen en otras más tradicionales: validez interna, validez externa, fiabilidad y objetividad. Por ello, proponen como indicadores de la calidad de la investigación, la calidad de los procesos internos de la investigación y su impacto potencial en la práctica.

A continuación haremos una descripción de estos indicadores de calidad.

a) La calidad de los procesos internos

Se proponen como medidas para la evaluación el poder explicativo de la conjetura, la racionalidad de la reconstrucción de la historia del proceso de investigación y la fidelidad a la posición ideológica.

La calidad de la conjetura puede ser considerada como un asunto de validez aparente, juzgada por observadores externos. Al final del estudio, investigadores y docentes pueden evaluar la validez aparente de la conjetura elaborada, analizando su contenido, su camino de evolución, la pedagogía y el marco teórico.

La calidad del proceso puede analizarse evaluando la coherencia de la historia que describe la relación dialéctica entre la conjetura y los sucesos ocurridos en el aula. Debido a ello, es necesario aportar datos tanto preliminares como del análisis final.

La fidelidad del estudio a su posición ideológica puede ser juzgada a través de una audiencia externa que valore si los datos obtenidos del alumnado son suficientemente auténticos y extensos, para convencer al lector de las argumentaciones que se están realizando.

Del mismo modo, es importante que los datos sean creíbles, fiables y que se puedan confirmar. Para ello, los investigadores necesitarán demostrar que se ha reconstruido de forma correcta lo que los alumnos estaban experimentando. También deben describir con detalle las decisiones metodológicas y analíticas tomadas, y probar que los resultados proceden de los datos recogidos. Es importante presentar argumentos convincentes que confirmen los resultados de la investigación.

b) Valoración del impacto potencial

Supone evaluar el modo en que los resultados están conectados con un cambio alcanzable. Para ello, estos autores proponen los siguientes criterios:

- Viabilidad: Los productos de la investigación deben ser viables de aplicar y útiles en todas las aulas.
- Sostenibilidad: Los productos de calidad deberán resistir y mantener sus impactos durante un periodo considerable de tiempo. Esto solo podrá verificarse con el paso del tiempo, pero puede ser evaluado mediante comparación con otro tipo de productos.
- Naturaleza convincente: Los resultados y productos de la investigación deben convencer de la necesidad del cambio a los docentes afectados.
- Adaptabilidad: Los productos deben ser adaptables a multiplicidad de contextos.

- Capacidad generativa: La conjetura debe aportar a lo docentes un modo poderoso de volver a conceptualizar una variedad de sucesos, relaciones y prácticas.

Confrey y Lachance plantean que estos criterios son demasiado ambiciosos para un solo equipo de investigación. Sin embargo, consideran que conforme la investigación y la práctica se encuentren más integrada, los investigadores desarrollarán su capacidad de evaluar estos criterios de forma previa a la implementación de los estudios.

2.4.2 Evaluación

Por un lado, la evaluación del experimento de enseñanza se fundamenta en las características de la de este tipo de investigaciones, ampliamente tratadas en el apartado anterior.

Por otro lado, los resultados que se obtienen de las tareas planteadas a los alumnos, serán evaluados utilizando las herramientas de ELOS: el análisis de contenido matemático, según la Competencia Matemática Formal, y el análisis de los errores, siguiendo la Competencia Cognitiva.

La Competencia Matemática Formal (CMF) es un instrumento de gran utilidad, por ejemplo, para analizar significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional, currículo, libros de textos mediante la elaboración de un mapa de los contenidos tratados (véase la Competencia Matemática Formal).

La Competencia Cognitiva (CC) nos ofrece un instrumento para analizar el origen del error que es estudiado desde tres perspectivas diferentes: afectividad, ausencia de sentido y obstáculo (véase la Competencia Cognitiva).

Del mismo modo, para organizar y analizar la información utilizamos varios procedimientos de análisis: tablas, esquemas de análisis, redes sistémicas (Bliss, Monk, y Ogborn, 1983), transcripciones de las entrevistas, informes y triangulación de los datos.

CAPÍTULO 3. ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES PARA MAESTROS

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe el estudio exploratorio con estudiantes para maestro.

Se comienza con el problema de investigación, las preguntas que formulamos, los objetivos y conjeturas que planteamos.

Se especifica, a continuación, la metodología aplicada haciendo énfasis en los aspectos relativos a la población, a los instrumentos de recogida de datos y a la evaluación.

De la misma manera, describimos las fases del experimento en las que se tendrán en cuenta el diseño y administración del cuestionario (C1). En este apartado, también, se añade un análisis de los contenidos matemáticos del cuestionario.

Se finalizará con la presentación de los resultados obtenidos y con las consideraciones finales que formulamos.

Parte de los contenidos de este capítulo se recoge en el trabajo de Moreno, Socas y Hernández (2004).

3.2 PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVOS Y CONJETURA

Sabemos que muchos alumnos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)], y, éstas no se subsanan correctamente en los estudios universitarios. Especial interés para la Didáctica de la Matemática tiene la imagen mental que el profesor y el maestro adquieren sobre los Sistemas Numéricos en general y los números decimales en particular.

En el ámbito de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, (Socas, 2001) estudia a 67 alumnos de 5.º, curso de Ciencias Matemáticas, especialidad de Matemáticas Fundamental de la Universidad de la Laguna (ULL), durante los cursos 1993-97, mediante la realización de actividades en las que se pedían que señalaran qué números estaban representados por determinadas expresiones semióticas. Observa en estos alumnos dos tendencias en relación con los números decimales. La primera: “el número decimal como sinónimo de número real” (85%). La segunda: “el número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma” (15%).

Tomando como antecedente estos resultados en estos alumnos nos cuestionamos cómo responderán los alumnos que estudian para maestros en cuestiones análogas. Nos planteamos para ello un trabajo que consiste en una primera exploración cuya finalidad es analizar la problemática de los números decimales y sus distintas representaciones y sus relaciones con otros sistemas numéricos, en los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de ULPGC. Inicialmente nos hacemos las siguientes preguntas:

a) ¿Qué competencias tienen nuestros alumnos de la Facultad en relación con los números decimales?
b) ¿Qué imagen mental tienen del número decimal?
c) ¿Establecen correctamente las relaciones entre los diferentes Sistemas Numéricos: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$; $Q \cup I = R \quad y \quad Q \cap I = \emptyset$?

Por ello, nos planteamos el siguiente objetivo general:

a) Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.
b) Analizar qué significados conceptuales y procedimentales tienen los alumnos sobre los decimales y qué relaciones establecen entre los conjuntos numéricos.

Asimismo, conjeturamos que en estos alumnos se va a presentar con mayor frecuencia la segunda tendencia, encontrada en el trabajo de Socas (op.cit), en relación con los números decimales: “el número decimal como número expresado con una escritura con coma”.

3.3. METODOLOGÍA

Para describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en las tareas que forman parte de los instrumentos construidos en este trabajo, se aplicará el Modelo de Competencia Formal. Esto nos permite delimitar la validez de las cuestiones planteadas, anticipar conflictos potenciales en las respuestas de los alumnos y evaluar los significados personales de los alumnos.

El análisis de las dificultades y errores cometidos por el alumnado en estas tareas se llevará a cabo mediante el Modelo de Competencia Cognitivo. Esto solo permitirá conjeturar sobre el origen de estos errores, al no disponer de entrevistas.

La población fue 36 alumnos, correspondientes al primer curso de Maestros de la Especialidad de Educación Infantil, de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

En cuanto a las fases e instrumentos de recogida de datos, podemos decir que el estudio se plantea en una única fase de indagación inicial en el que se aplica un cuestionario como instrumento de recogida de datos.

3.4. FASES DEL EXPERIMENTO

El estudio se inicia con el diseño de un cuestionario del que se lleva a cabo un análisis de contenido matemático de cada pregunta, se prosigue con la administración de éste a la población elegida y se concluye una corrección y evaluación de los resultados.

3.4.1. Diseño, administración y corrección del cuestionario

Para recoger información que nos permita encontrar respuestas a las preguntas formuladas se elaboró un cuestionario (C1, Anexo 1) con 38 preguntas, la mayoría de respuestas múltiple. Se ha diseñado teniendo en cuenta tres aspectos de los números decimales: funcional, fenomenológico y conceptual, que organizan el modelo de competencia formal de los números decimales y describen el significado institucional que se atribuye a los mismos en este nivel temático.

En el aspecto funcional distinguimos el uso y la utilidad de los números decimales en diferentes contextos. En el aspecto fenomenológico distinguimos: el orden, la densidad, las representaciones, así como las relaciones con los otros números. En el aspecto conceptual consideramos los significados conceptual y procedimental de los números decimales.

A efectos prácticos se distribuyen en los siguientes ejes temáticos:

a) Significado conceptual de número decimal.
b) Significado procedimental: Operaciones con números decimales.
c) Orden en los números decimales.
d) Densidad de los números decimales.
e) Representaciones.
f) Relaciones con otros conjuntos numéricos.
g) Uso y utilidad de los números decimales.

Las cuestiones están diseñadas no solo para que se puedan estimar los conocimientos y destrezas, sino para detectar habilidades, para aplicar procedimientos y resolver problemas.

Las preguntas tienen su origen en los siguientes trabajos, a saber: Brown en Hart (1981), Centeno (1988), Socas (2001), así como actividades tomadas de libros de texto de Educación Secundaria y de elaboración propia.

Las tareas en su conjunto se relacionan con el primer objetivo, mientras que, fundamentalmente, las cuestiones número 13, 14, 18, 21, 22, 23, 24, 29, 31, 34 y 37, con el segundo objetivo.

El cuestionario se realizó en dos sesiones, en días distintos, de una hora cada una, en la primera semana de clases después de las vacaciones de Navidad del año 2004.

La corrección del cuestionario nos permitirá expresar el primer objetivo, estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales, en términos de competencias específicas que tienen los alumnos encuestados. Se considerarán tres niveles de competencias: alta, más del 75%, media entre el 25% y el 75%, y baja menos del 25%. El segundo objetivo, analizar qué significados conceptuales y procedimentales tienen los alumnos y qué relaciones establecen entre los conjuntos numéricos, será analizado en términos de dificultades y errores que tienen los alumnos.

3.4.2. Análisis del contenido matemático según la competencia matemática formal (CMF) del cuestionario C1

La Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos numérico, algebraico y analítico queda caracterizada, según Socas (2010) por la semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje y los argumentos, como se ha indicado en el capítulo 2. Brevemente, el campo conceptual y el contexto quedan esquematizados de la forma siguiente (Figura 3.1):

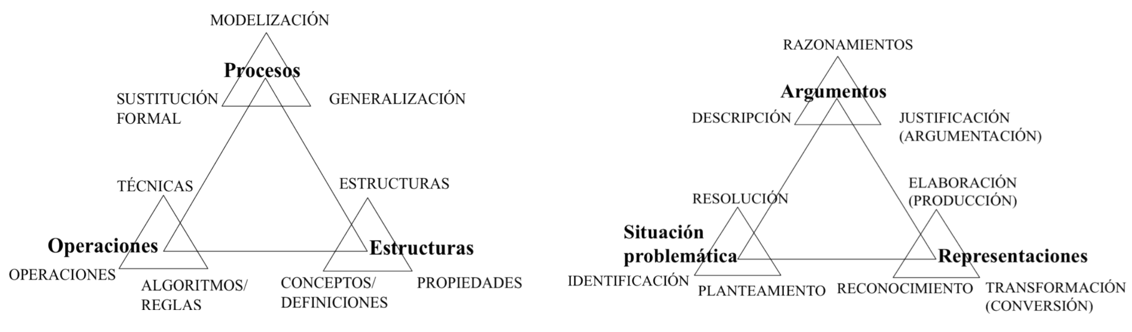


Figura 3.1: Esquema del campo conceptual y contexto

El primero de los esquemas expresa los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual desde la perspectiva formal y sus diferentes relaciones. Esto quiere decir que se describe la dualidad de los objetos matemáticos en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo que se estudia. Cada componente (operaciones, estructuras y procesos) a su vez está determinada por otras tres componentes que describen una nueva semiosis. La componente "Operaciones" queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente "Estructuras" por: conceptos (definiciones), propiedades y estructuras; y la componente "Procesos" por: sustituciones formales, generalización y modelización.

El segundo de los esquemas describe la contextualización del campo conceptual. Las componentes del contexto son: Situaciones problemáticas que se abordan en el campo conceptual, Lenguaje (Representaciones) y Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática. Del mismo modo, las tres componentes del contexto, quedan determinadas por las respectivas semiosis. Para las Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución; para las Representaciones (lenguaje): reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción); y para Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

Este modelo (CMF) se puede utilizar como instrumento para realizar análisis de significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional, currículo y libros de textos.

En este punto tomamos la CMF como instrumento para analizar los contenidos matemáticos de cada pregunta del Cuestionario C1, implementado en el Estudio Exploratorio que tratamos en este capítulo.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 1

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

1. Escribe:

a) Seis décimas 0,6

b) Tres centésimas ………..

c) Cuatro milésimas ………..

d) Treinta y siete milésimas ………..

e) Cuarenta centésimas ………...

Se pretende que el resolutor transforme una escritura decimal verbal en una escritura decimal simbólica. Por ello, como sistema de representación tenemos el de Numeración Decimal Ampliado. Los ámbitos son el reconocimiento, y la transformación. Al tratarse de una transformación dentro del sistema se da un proceso. En este proceso se ponen en juego las reglas de escritura del Sistema de Numeración Decimal Ampliado, que constituyen operaciones, y los conceptos de décima, centésima y milésima. Estos conceptos son objetos de la estructura que constituye el Sistema de Numeración Decimal Ampliado. Por otra parte, y en relación con los razonamientos, podemos decir que nos encontramos con la relación Parte- Todo, transformación de una escritura a otra y analogía.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 2

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

2. Elige la respuesta correcta:
   a) 735,6125 = 735 x 10000 + 6125
   b) 735,6125 = 735 + 6/10000 + 1/1000 + 2/100 + 5/10
   c) 735, 6125 = 735 + 6/10 + 1/100 + 2/1000 + 5/10000

Se trata de reconocer la propiedad del Sistema de Numeración Decimal ampliado de la descomposición polinómica de un número decimal. Por lo que se pone en juego una estructura. En la actividad se presenta solo la descomposición de la parte decimal en los distintos órdenes de unidades (inferiores a la unidad). Para ello, se pretende que se haga una lectura de la expresión decimal de la siguiente manera: 735 unidades, 6 décimas, 1 centésima, 2 milésimas y 5 diezmilésimas.

Este procedimiento pertenece al dominio de las operaciones.

También este resultado se expresa en suma de fracciones decimales. Tiene lugar, por tanto, una conversión entre las representaciones decimal y fraccionaria, y que constituye un proceso. Este proceso se relaciona con la operación a través de la estructura para obtener la igualdad correcta.

En cuanto a los sistemas de representación tenemos la notación decimal y la fraccionaria y los ámbitos son reconoce y transforma.

Los razonamientos son: La relación Partes – Todo, descomposición y transformación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 3

La actividad que se plantea es la siguiente:

3. Efectuar:

a) 0,1 · 5,13 =

b) 3,17 : 0, 01 =

Se trata de que el alumno aplique que ($x \cdot \frac{a}{b} = x : \frac{b}{a}$; a y $b \neq 0$ y a y $b \in Z$):

a) Multiplicar el número por una décima es lo mismo que dividirlo por 10.

b) Dividir el número por una centésima es lo mismo que multiplicarlo por 100.

Por ejemplo:

$$0{,}1 \cdot 5{,}13 = \frac{1}{10} \cdot 5{,}13 = 5{,}13 : 10 = 0{,}513$$

Conversión a fracción decimal (Proceso)

Multiplicar un número por una fracción (Estructura)

Dividir por la unidad seguida de ceros (Operación)

Por ello, se plantea una actividad en la que se utilizan la notación decimal y la fraccionaria y que se inicia con un proceso, convertir la expresión decimal a fracción decimal, que se relaciona con una operación a través de una estructura. Posteriormente se aplica una estructura, el concepto de multiplicación de una fracción por un número, en la que se hace uso del algoritmo de la división por la unidad seguida de ceros.

Los razonamientos que se dan son: Esquemas (x, /), la Relación Parte-Todo y la conversión entre representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 4

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

4. El número de habitantes de una ciudad es de 4727986. Si tomamos como unidad:

   a) el millar, el número de habitantes se expresará ....

   b) el millón, el número de habitantes se expresará ....

   c) la decena de millón, el número de habitantes se expresará ....

En cada apartado de la tarea se propone realizar un cambio de unidad para representar una cantidad de magnitud. Está tomada de Centeno (1988) y le atribuye el objetivo de recodificar un número entero en un contexto de medida.

El sistema de representación es el Sistema de Numeración Decimal Ampliado.

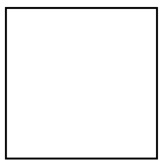
Se pretende que el alumno coloque la coma, que indica la unidad elegida para el cambio, detrás de la cifra que señala dicha unidad. En la actividad se da un proceso, cambio de unidad, que se relaciona con la regla anterior a través de la estructura que es el Sistema de Numeración Decimal.

Los razonamientos son: Relación Parte-todo y la conversión entre unidades de un mismo sistema.

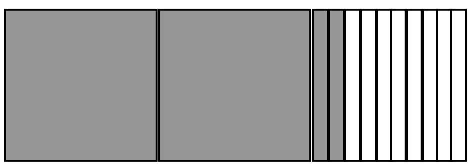
Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 5

La tarea que se plantea es la siguiente:

5.



Ésta es la unidad



El área sombreada es: .... (En escritura decimal)

Esta tarea está tomada de Brown (1981) y se le asigna el objetivo: trabajar los decimales a partir de la medida, en la que se realiza la subdivisión de la unidad, en un contexto continuo.

En la situación problemática planteada se pide realizar un cambio de registro de la representación en diagrama rectangular a la notación decimal. Se pone en práctica un proceso. El alumnado debe contar las unidades enteras y las décimas (2,2). Este último procedimiento constituye una operación. El proceso se relaciona con la operación a través de la estructura.

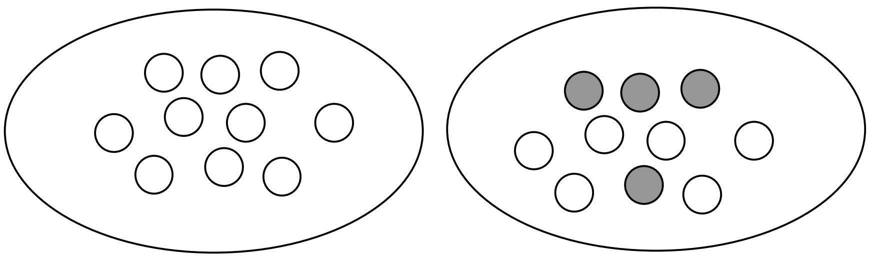
Los razonamientos principales son: La relación Parte-todo, agrupar-desagrupar en el Sistema de Numeración Decimal Ampliado y la transformación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 6

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

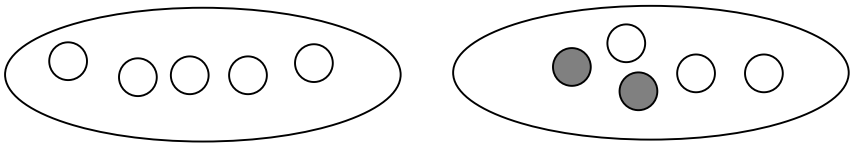
6. ¿Qué parte de la unidad representa el número de bolas negras en cada apartado?

a)



Ésta es la unidad ……………………..

b)



Ésta es la unidad ………………………….

En ambos apartados se pide un cambio de registro de la representación en diagramas de puntos a la notación fraccionaria. Este procedimiento constituye un proceso. El alumno debe contar, lo que constituye una operación, el total de bolas que compone la unidad y las bolas negras que se toman y expresar la relación mediante una fracción. Se aplica el concepto de fracción como relación Parte-Todo. Las fracciones que se obtienen son equivalentes. Por lo tanto, pertenecen al dominio de las estructuras. Se pone en juego la relación de un proceso con la operación a través de la estructura.

Los razonamientos principales son: La relación Partes-Todo, la transformación y la proporcionalidad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 7

La actividad que se plantea es la siguiente:

7. ¿Cuál es el mayor de los números: 0,09; 0,385; 0,1814?

Se trata de una actividad, extraída de Brown (op.cit), en la que se comparan números decimales, expresados en notación decimal, para elegir el mayor de los tres. Se pretende que el alumnado aplique el procedimiento que consiste en considerar como mayor el que mayor tenga la parte entera. Si tienen la misma parte entera se compara la parte decimal, añadiendo ceros a la derecha para que tenga igual número de cifras decimales y se elige como el mayor el que más décimas tenga, si éstas son distintas. Si tienen las mismas décimas, se procede a repetir la comparación con las centésimas, y así sucesivamente hasta la última cifra. Este procedimiento pertenece al dominio de las operaciones.

En cuanto al razonamiento se pone en juego la relación Parte-todo y la comparación de elementos.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 8

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

8. Señala el número más próximo a 0,18 entre los siguientes:

0,1 10 0,2 20 0,01 2

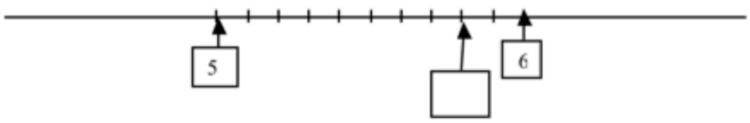
Esta actividad, tomada de Brown, es del mismo tipo que la anterior, pero el alumnado debe elegir el mayor de los que más se aproximan al número dado, se trata de una aproximación por exceso.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 9

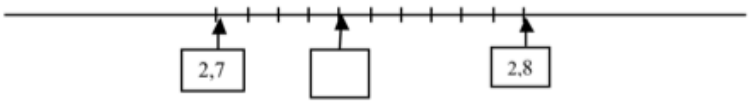
La situación problemática que se plantea es la siguiente:

1. Colocar el número que corresponde en la casilla en blanco en cada apartado:

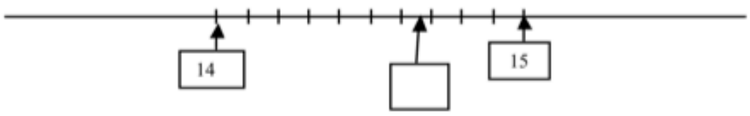
a)



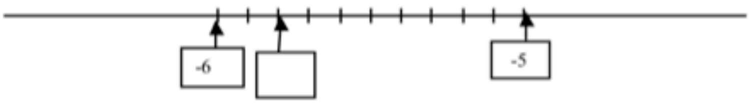
b)



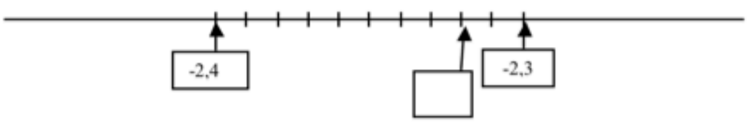
c)



d)



e)



En la situación problemática planteada se pide hallar un número decimal asociándolo con un punto que está señalado en la recta. Se presenta la recta con la suficiente información para poder llevar a cabo la actividad. El punto pertenece a un intervalo cuyos extremos son números decimales, expresados en notación decimal, que se encuentra dividido en diez partes iguales. Los dos extremos del intervalo se sitúan a la derecha del cero o a la izquierda. Por ello, podemos decir que los sistemas de representación que se utilizan son la recta decimal y la notación decimal y se pide un reconocimiento de estos sistemas y una conversión que va de la recta a la notación decimal. Este último contenido supone un proceso. Asimismo, tenemos implícitas, en un principio, las estructuras: número decimal, recta decimal y Sistema de Numeración Decimal. Del mismo modo, el alumno debe manejar los convenios para representar los números positivos y negativos en la recta, aspecto relacionado con la técnica para representar números en la recta y, por lo tanto, con el dominio de las operaciones. El punto coincide con una de las diez partes o con la mitad de una de ellas. Aparece así la relación Partes – Todo y la conversión entre representaciones como razonamientos y el concepto punto medio de un segmento. Además se aplican los conceptos, relativos al Sistema de Numeración Decimal, de décima y centésima. También se pone en juego el orden de los decimales. Estos conceptos pueden ser considerados como estructuras. Asimismo, para finalizar la actividad el alumno deberá contar hacia la derecha o a la izquierda décimas o centésimas, a partir de un entero o de un decimal no entero. Consideramos por tanto, que el dominio operaciones tiene también como ámbito la operación contar.

Debemos añadir que en la descripción del análisis de los contenidos matemáticos de una actividad se dan tres relaciones fundamentales, a saber: operaciones y procesos, operaciones y estructuras, y operaciones y procesos a través de las estructuras (Socas, 2010).

Los razonamientos son: La relación Parte-Todo y conversiones entre representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 10

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

10. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

-0,99 0,63 -1,5 1,4 -1,6 0,1524

Esta pregunta aborda el concepto de orden en los números decimales. Se trata por tanto, de una estructura. El alumno debe aplicar un procedimiento para ordenarlos a saber:

a) Los negativos son menores que los positivos.
b) Los positivos se ordenan según método expuesto en la pregunta nº 7.
c) Los negativos se ordenan de menor a mayor teniendo en cuenta que: $Si\ |a| \geq |b| \Rightarrow a \leq b$.

Se trata de una estructura que se relaciona con una operación.

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo y la comparación de elementos.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 11

La actividad que se plantea es la siguiente:

11. ¿Cuál de las siguientes ordenaciones de números es correcta?

a. 3/4 < 4/3 < 7/6
b. 5/4 < -7/6 < 4/3
c. 2/3 < 3/4 < 5/4

Se pretende que el alumno identifique la ordenación correcta de tres racionales expresados en notación fraccionaria. Para ello, se pone en juego la estrategia más conocida que consiste en expresar las fracciones de cada apartado mediante fracciones equivalentes de igual denominador y comparar posteriormente los numeradores. Esta actividad pertenece al dominio de las operaciones.

Los razonamientos que se ponen en juego son: Relación Partes-Todo, Proporcionalidad y la comparación de elementos.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 12

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

12. Fabrica una cadena de 99 eslabones con 251 gramos de oro. ¿Cuánto pesará cada eslabón?

Se trata de una situación problemática contextualizada en la que está involucrada la división decimal como concepto y como algoritmo. El resultado es un racional no decimal, expresado en notación decimal infinita periódica. Por lo que el alumno debe dar una aproximación decimal del resultado de la división. Esta actividad pertenece al dominio de las estructuras en la que se hace uso de operaciones (algoritmo de la división y la aproximación)

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo, el esquema (x,/) y la aproximación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 13

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

13. ¿Cuál es el número más próximo a 59:190?

0,003 0,03 0,3 3 30 300 300

Actividad, tomada de Brown, en la que el alumnado debe efectuar la división de dos enteros, sacando cifras decimales hasta las milésimas y comparar el resultado con los siete números dados. Se trata por tanto una actividad que pertenece al dominio de las operaciones.

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo, el esquema (x,/) y la aproximación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 14

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

14. ¿Cuáles de los siguientes números son iguales a 0,5?

a) 0,500
b) 0,49999...
c) 1/2
d) 0,49

e) 5×10^{-2}

f) 50%

Se presentan distintas maneras de expresar el número decimal 0,5, que constituye una estructura. Los sistemas de representación son la notación decimal, la fraccionaria, la notación en forma de porcentaje y la notación en forma de potencia. Aparecen otras escrituras que no se corresponden con las del número. El alumno debe realizar cambios de registros para igualar, en los casos que proceda, a 0,5. En el apartado b), habrá que determinar la fracción generatriz y simplificarla, lo que define una operación. En el apartado c), habrá que dividir el numerador por el denominador, estamos así en una operación. Del mismo modo, los apartados e) y f) expresar los números dados en forma de fracción y de ésta a notación decimal. Se trata de un proceso relacionado con la operación a través de la estructura.

Los razonamientos son: relación Partes-Todo, esquema (x,/) y transformación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 15

La tarea que se plantea es la siguiente:

15. Observa el diagrama que se adjunta. ¿Cuál es el número que está más próximo a $\sqrt{2}$?

a) 1

b) 1,2

c) 1,5

d) 2

En esta situación aparecen las notaciones decimal, radical y el sistema de representación de la recta numérica. Se pretende que el alumnado interprete, haciendo uso de la recta, que 1,5 está más próximo a $\sqrt{2}$ que el resto. Los valores críticos y que merecen ser analizados son 1,2 y 1,5. Por un lado, deberá asignar al punto marcado en la recta, en el intervalo $(1,\ 2)$, el número decimal 1,5 (estructura). Para ello debe contar (operación) una unidad y media (la unidad se presenta dividida en dos partes iguales). Por tanto, se trata de un cambio de registro de la recta a la notación decimal (proceso) que es llevado a cabo con un recuento (operación), pero sabiendo que lo que se hace es la representación del número decimal 1,5 (estructura). Por otro lado, hay que estimar que 1,5 está más cerca de $\sqrt{2}$ que 1,2. Para ello se puede contar la diferencia entre las décimas de cada valor con las de $\sqrt{2}$. Se trata de un proceso, cambio de registro a notación decimal del irracional, que se relaciona con una operación, restar las décimas, a través de la estructura.

Los razonamientos son: relación Partes – Todo, transformación de representaciones y aproximación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 16

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

16. Dado el número 4,256197. Se pide:
    a. Redondea a unidades..
    b. Redondea a centésimas...
    c. Redondea a milésimas..
    d. Redondea a cienmilésimas...

Se pretende que se aplique la técnica de redondeo a una expresión decimal finita que representa a un número decimal. Esta actividad pertenece al dominio de las operaciones.

Los razonamientos son: relación Partes-Todo, agrupamiento en el Sistema de Numeración Decimal Ampliado y aproximación.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 17

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

17. Redondea a centésimas los siguientes números:
    a. 13/17 …………………
    b. 127/438 …………………
    c. 11/3 …………………

d. 1/13 …………………

En este ítem el alumno debe aplicar la técnica de redondeo a centésimas a un número expresado en notación fraccionaria. En primer lugar deberá obtener la expresión decimal correspondiente a la fracción y, posteriormente, redondear a la centésima. En un principio, hay un cambio de registro de la notación fraccionaria a la decimal (proceso), efectuando la división entre el numerador y el denominador (operación), sabiendo que ambas expresiones representan a la misma estructura. Finalmente, se aplica la técnica de redondeo (operación) al resultado.

Los razonamientos son: relación Partes-Todo, el Esquema (x,/), la aproximación y la transformación de representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 18

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

18. Obtener la expresión decimal de cada fracción:
    a) 475/100 …………………………………………..
    b) -208/1000 ………………………………………..
    c) $2/10^5$ ……………………………………………..
    d) $-13/10^2$ …………………………………………..

Se presenta una actividad en la que el alumno debe realizar un cambio de registro de la notación fraccionaria a la decimal. Constituye un proceso que se relaciona con la operación división a través de la estructura número decimal.

Los Razonamientos son: El esquema (x,/), la relación Partes-Todo y transformación de representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 19

La actividad que se plantea es la siguiente:

19. Relacionar la expresión decimal con la fracción correspondiente.

218,73	
0,075	
3,5	
0,056	
0,375	

a) 75/1000 b) 7/2 c) 21873/100 d) 3/8 e) 7/125

En este caso tenemos cinco números decimales expresados cada uno en dos registros distintos, la notación decimal y la fraccionaria, y que el alumno tiene que asociar. Se plantea un cambio de registro de la notación decimal a la fraccionaria, hallando la fracción generatriz. Tratamos un proceso que se relaciona con la técnica para hallar la fracción generatriz a través de la estructura de número decimal.

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo, la de igualdad y la transformación de representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 20

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

20. Dos chicos tienen la misma cantidad de dinero en el bolsillo. Uno piensa ahorrar 1/4 de su dinero; el otro, 5/20 del suyo. Marca la respuesta correcta:
    a. 5/20 y 1/4 son iguales
    b. 1/4 es más que 5/20
    c. 5/20 es más que ¼

Los números presentes en la tarea se expresan en notación fraccionaria. El resolutor debe considerar que $\frac{5}{20}$ *y* $\frac{1}{4}$ son iguales al ser fracciones equivalentes. Se trata de una estructura, el concepto de fracciones equivalentes, que se relaciona con la técnica para comprobar fracciones equivalentes (operación).

Los razonamientos son: relación Partes-Todo y proporcionalidad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 21

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

21. ¿Cuál de las siguientes fracciones le corresponde un número decimal?
    a. 17/60
    b. $21/(7 \cdot 5)^2$
    c. 31/20
    d. 3/28

Se pretende que el alumno analice cuál de las fracciones está representada de la forma: $\frac{a}{2^n 5^m}$; $a \in Z$ y $n, m \in N$.

Se pone en juego el concepto de fracción decimal (estructura) relacionado con la técnica para descomponer el denominador en productos de factores primos (operación).

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo y la descomposición.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 22

La tarea que se plantea es la siguiente:

22. Encuentra una fracción decimal equivalente a cada una de las siguientes:
    a. 5/4 ....
    b. 7/2 ....
    c. 23/20 ....
    d. 87/5 ....

Se pretende la aplicación de la técnica, para obtener una fracción decimal equivalente a la dada, siguiente: Buscar un número entero, *n*, tal que al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por dicho número, *n*, se obtiene en el denominador la unidad seguida de ceros (P.ej.: $\frac{5}{4} = \frac{25x5}{25x4} = \frac{125}{100}$). Se trata de una actividad en la que se ponen en juego los conceptos de fracción decimal y la equivalencia de fracciones, relacionada con una operación, la técnica anterior.

Los razonamientos: El esquema (x,/), la relación Partes-Todo y la proporcionalidad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 23

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

23. ¿Cuál es la fracción generatriz de $3,5\overline{124}$?
    a) 35124/9000
    b) 35124/999
    c) 35089/9990
    d) 35089/999

El alumno debe aplicar la regla para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal infinita periódica mixta. Por tanto:

a) Los sistemas de representación son: El Sistema de Numeración Decimal Ampliado y la notación fraccionaria.
b) Se realiza un cambio de registro de la notación decimal a la fraccionaria (proceso) aplicando la regla (operación), conociendo que la expresión fraccionaria elegida y la decimal dada representan al mismo número racional (estructura).
c) Los razonamientos son: La relación Partes-Todo, la transformación entre representaciones y relaciones de igualdad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 24

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

1. Marca con un Sí los números decimales y explica brevemente tu respuesta:

-3,9		
0		
1 /4		
2		
$1+\sqrt{2}$		

10/5		
π		
-7/3		
0,666...		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\widehat{5}$		
1,73205008....		
$\pi - 5$		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		
-1/3		
1,48		
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

Se pretende que el alumnado identifique números decimales entre varios números reales y que dé una explicación o argumento de su respuesta. Con respecto a los argumentos queremos constatar si el alumnado confunde número con representación, en particular, número decimal con número con coma.

Los números vienen expresados en notación decimal (abreviada y expandida, en el que caso de presentar período), notación fraccionaria y notación radical. Asimismo, aparece el símbolo especial, π, para este irracional trascendente. Se presenta una terna de símbolos que representan el mismo número decimal: $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$. La presentación de registros distintos de un mismo número puede ocasionar en algunos alumnos una dificultad en el reconocimiento de la estructura, al identificar el objeto con la representación o con la operación.

En la actividad se ponen en juego los sistemas numéricos de los racionales decimales (fracciones decimales) o racionales no decimales (fracciones no decimales), irracionales (algebraico o trascendente) y reales. Asimismo, tenemos las relaciones entre sistemas numéricos: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$; $I \subset R$; $Q \cup I = R$ y $Q \cap I = \varnothing$. Estos objetos constituyen estructuras. Para saber si un número es decimal el resolutor debe averiguar si el número puede ser expresado mediante una fracción decimal o con notación decimal finita. De esta manera, puede aparecer el proceso de sustitución formal cuya relación con las operaciones debe ser a través de la estructura. Por ejemplo:

En el caso de la igualdad, $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$, se realizan conversiones entre las distintas notaciones hallando el cociente de $\frac{10}{5}$ o una fracción decimal equivalente y simplificando la expresión $\left(\sqrt{2}\right)^2$. El cálculo del cociente o de la fracción equivalente a una dada y la simplificación de la expresión, constituyen operaciones. La igualdad se produce al establecer la relación del proceso con la operación a través de la estructura.

De la misma manera, podrá aplicar las relaciones entre los conjuntos numéricos para clasificar los números, a saber:

a) Los enteros son números decimales.
b) Hay racionales que no son decimales (fracciones no decimales).
c) Los irracionales no son decimales.
d) Hay números reales que no son decimales (racionales no decimales e irracionales).

Los razonamientos son los siguientes: Relación Partes-Todo, clasificación, inclusión jerárquica, negación, conversión entre representaciones, la proporcionalidad y el esquema (x,/).

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 25

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

24. Indica entre qué números enteros se encuentra cada uno de los siguientes números:

a) 2,7 ……………………………..
b) -3,5 …………………………
c) -4,3 …………………………
d) 0,005 ……………………….
e) 0,7 ………………………….
f) 1,99 …………………………

En la situación problemática se trabaja la aproximación por defecto y por exceso de números decimales no enteros con decimales enteros. La técnica que se aplica es la siguiente:

a) Si el número es positivo, se toma la parte entera como la aproximación por defecto. La aproximación por exceso es el entero siguiente a ésta.
b) Si el número es negativo (-3,5), se toma como aproximación por defecto al posterior (4) de la parte entera (3) precedida del signo negativo (-4) y, como aproximación por exceso, al siguiente entero de la aproximación por defecto (-3).

Se pone en juego el orden de los números decimales (estructura) que se relaciona con la técnica anterior (operación).

Los razonamientos son: La aproximación y la Relación Partes-Todo.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 26

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

26. Intercalar un decimal entre 1,23 y 1, 24.

Se pone en juego la densidad de los números decimales y la aplicación de una técnica para intercalar un número decimal entre dos. Los números vienen representados en notación decimal. Se relaciona por tanto una estructura con una operación.

En cuanto los razonamientos empleados nos encontramos con la relación Partes-Todo. El alumno debe describir el procedimiento utilizado para intercalar el decimal.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 27

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

Se pregunta por la densidad de los números decimales, lo que constituye una estructura. El sistema de representación es el Sistema de Numeración decimal Ampliado. En cuanto a los razonamientos se pide que el resolutor argumente su respuesta.

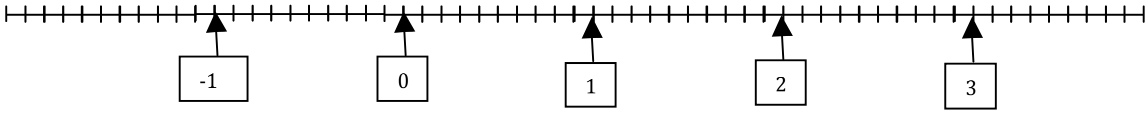
Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 28

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

28. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{2}$ b) 0,75 c) 0,333…. d) - $\sqrt{2}$ e) 11/4 f) 2,75 g) 3 /4

h) 2 $\sqrt{2}$



Se trata de una situación en la que hay que representar algunos números reales en la recta numérica. Los números vienen expresados en notación decimal, fraccionaria y la de los radicales. Por lo tanto, contamos con las representaciones recta numérica, notación decimal, fraccionaria y radical.

Se presentan números racionales decimales $(0{,}75 = \frac{3}{4};\ 2{,}75 = \frac{11}{4})$ y no decimales $(0{,}\bar{3} = \frac{1}{3})$ e irracionales cuadráticos $(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\ \ y\ \ 2\sqrt{2})$. Dos de los números vienen expresados en dos registros distintos: $(0{,}75 = \frac{3}{4};\ 2{,}75 = \frac{11}{4})$. La presentación de registros distintos de un mismo número puede ocasionar en algunos alumnos una dificultad en el reconocimiento de la estructura, al identificar el objeto con la representación o con la operación y asignarle, por tanto, dos puntos distintos de la recta a la estructura.

De esta manera, aparecen las estructuras: recta numérica, número natural, entero, decimal, racional, irracional y real.

El proceso que principalmente tiene lugar es la conversión entre la representación digital (notación decimal, fraccionaria o radical), correspondiente del número, y la analógica (recta numérica).

Para representar un número racional en la recta se debe expresar en forma de fracción. Por ello, en algunos casos, hay una conversión entre las representaciones digitales y, posteriormente, en todos los casos se aplica la técnica para representar fracciones en la recta. Esta técnica está fundamentada en el cálculo de la mediatriz de un segmento si la fracción es binaria o en el teorema de Thales si la fracción no es binaria. Aunque sabemos que la técnica basada en el teorema de Thales es válida para cualquier fracción.

Si el número es irracional y cuadrático, como es esta situación, se representa haciendo uso del teorema de Pitágoras.

Estos teoremas pertenecen al dominio de las estructuras y los métodos de representación al de las operaciones.

La conversión entre representaciones y las técnicas de representación en la recta se deben relacionar a través de las estructuras.

El mapa conceptual (Figura 3.2) que refleja la representación de números reales en la recta y que hemos aplicado para llevar a cabo este análisis es el siguiente:

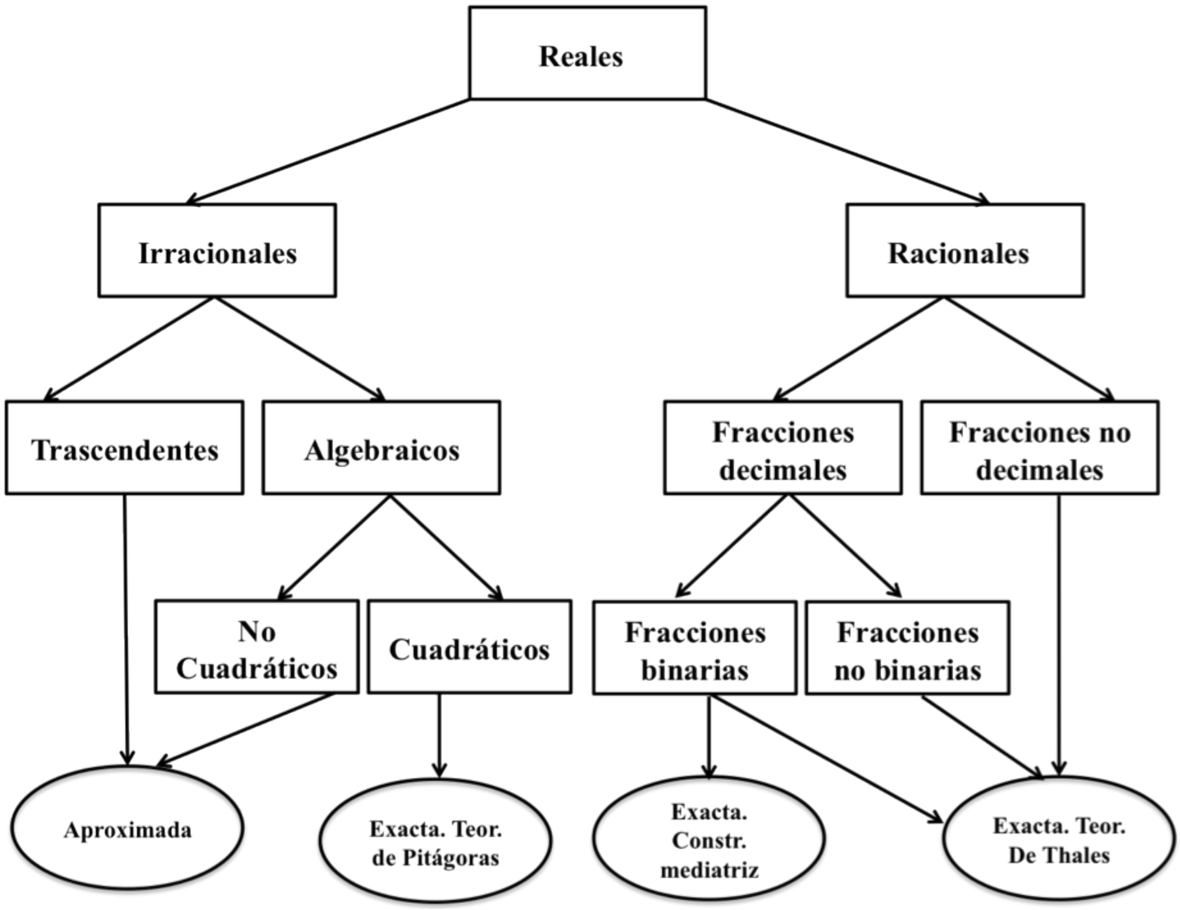


Figura 3.2: Mapa conceptual de la representación de números reales en la recta

En cuanto a los razonamientos nos encontramos con: relación Partes – Todo, razonamiento proporcional, clasificación y transformaciones entre representaciones.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 29

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

29. Rellena la tabla contestando SÍ o NO en cada cuadro, sin dejar ninguno en blanco.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062						
35.521						
3/5						
π						
-1/2						
0,63						
$-\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
$\sqrt{81}$						

En esta actividad se presenta un conjunto de diez números que deben se clasificados en naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y reales. Estos números vienen expresados en notación decimal, fraccionaria y de radicales. Además aparece el símbolo π para este irracional. No hay racionales, no decimales, expresados en notación decimal infinita periódica ni fraccionaria.

Los números π y 3,14 pueden constituir un conflicto para algunos alumnos que confunden número decimal con aproximación decimal de un número real.

La respuesta considerada como correcta viene determinada por la organización de los sistemas numéricos que adoptamos en el estudio, y que mostramos en el esquema siguiente (Figura 3.3)

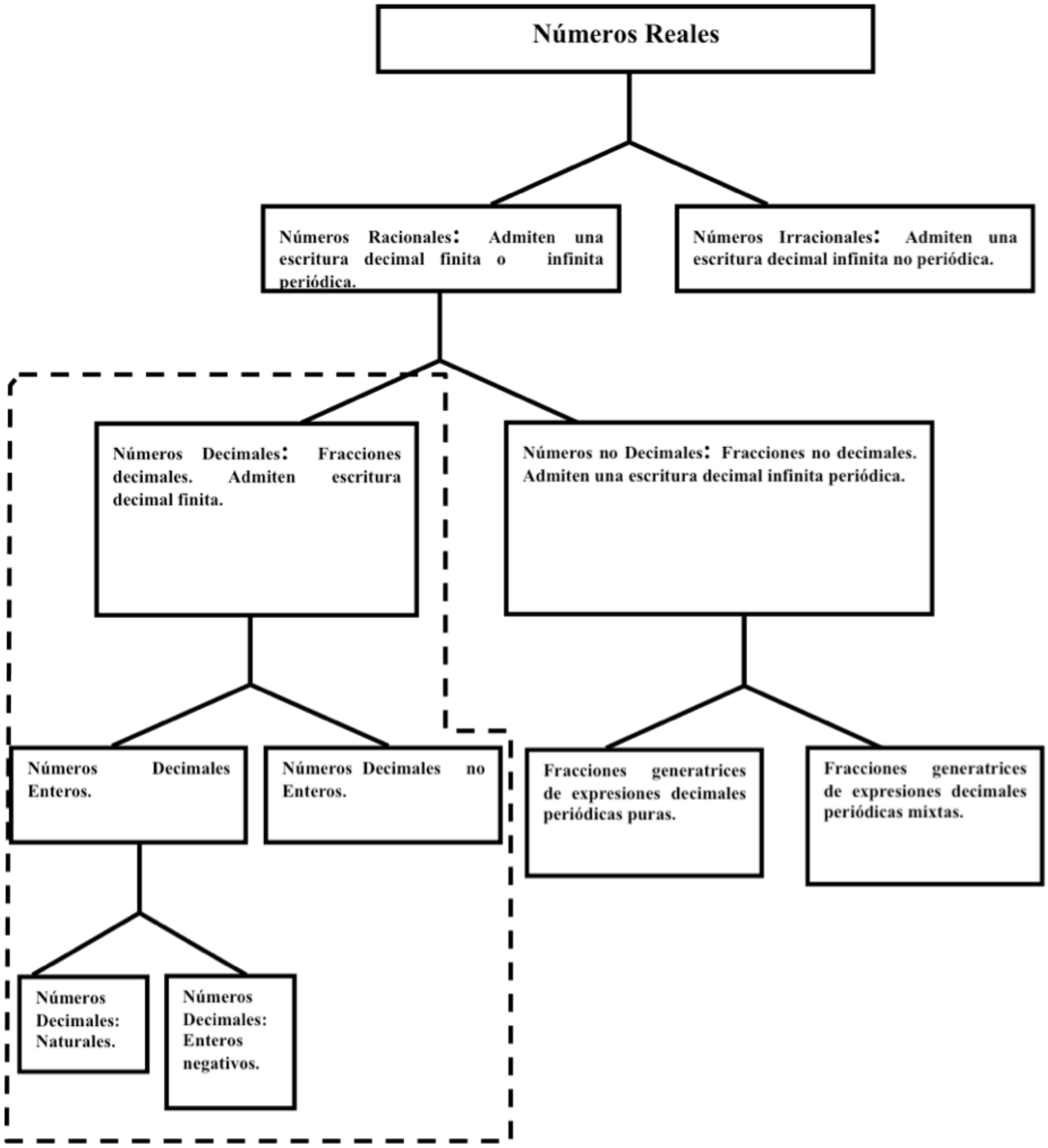


Figura 3.3: Organización de los sistemas numéricos, adoptada en el estudio

Las definiciones involucradas en esta organización son las siguientes:

a) El conjunto de los números reales es la unión del de los racionales con el de los irracionales. Los conjunto de los racionales y de los irracionales son disjuntos.

b) Un número racional se expresa mediante una fracción y sus equivalentes. También puede ser expresado mediante notación decimal finita o infinita periódica.

c) Un número decimal se expresa mediante una fracción decimal y sus equivalentes. También puede ser expresado mediante notación decimal finita.

d) Un número entero es la solución de la resta (y sus equivalentes): $a - 0 = +a,\ a \in N$ o $0 - a = -a,\ a \in N$. También, número natural precedido del signo + (positivos) o del signo – (negativos) (Peacock, 1830). Puede ser expresados mediante fracciones decimales.

e) Un número natural es la propiedad que tienen en común los conjuntos finitos equipotentes entre sí. También, los que se utilizan para contar el número de elementos de un conjunto finito. Puede ser expresados en forma de fracción decimal.

f) Un número irracional es el que no puede ser expresado mediante una fracción. Puede ser expresado mediante notación decimal infinita no periódica.

Las propiedades implicadas son:

a) Todo número natural es entero, decimal, racional, no irracional y real.
b) Todo número entero es decimal, racional, no irracional y real.
c) Todo número racional es no irracional y real.
d) Todo número irracional es real.

Por todo ello, podemos decir que esta actividad pertenece fundamentalmente al dominio de las estructuras. Las estructuras presentes son los sistemas numéricos y la relaciones entre ellos, tal y como hemos comentado anteriormente. Algunas veces se puede realizar cambios de registro para clasificar un número. Por ejemplo, para saber si 35521 es decimal basta con expresarlo en forma de fracción decimal: $\frac{355210}{10}$. Estos cambios de registros están relacionados con las siguientes operaciones: el algoritmo de la división decimal, cálculo de una fracción equivalente y cálculo de la raíz cuadrada (exacta o inexacta). Esta relación entre proceso y operación debe realizarse a través de la estructura correspondiente.

En cuanto a los razonamientos tenemos: La relación Partes-Todo, la inclusión jerárquica, la clasificación, la negación, la conversión entre representaciones y la proporcionalidad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 30

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

30. Rodea en cada apartado la operación que dé resultado mayor.

a) 8 x 4 o 8 : 4
b) 8 x 0,4 o 8 : 0,4
c) 0,8 x 0,4 o 0,8 : 0,4

En esta situación problemática se analiza si el alumno generaliza de forma incorrecta a los decimales un resultado que se da con las operaciones multiplicación y división de números naturales, a saber:

a) La multiplicación implica aumento.
b) La división implica disminución.

Se pone en práctica una tarea que pertenece al dominio de las estructuras en la que intervienen los conceptos de multiplicación y división de decimales y los algoritmos de estas operaciones.

En cuanto a los sistemas de representación se utiliza el Sistema de Numeración Decimal Ampliado.

El razonamiento es el esquema (x,/).

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 31

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

31. ¿La división de números decimales es siempre un número decimal?

Se pide al alumno realizar una reflexión y una argumentación sobre la propiedad de la división de números decimales que dice que no es ley de composición interna ($\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{5}{6}$). Deberá buscar contraejemplos. Esta actividad pertenece al dominio de las estructuras y se relaciona con el de las operaciones, a través del algoritmo de la división de fracciones.

Los razonamientos: La justificación, el esquema (x,/), búsqueda de contraejemplos.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 32

La actividad que se plantea es la siguiente:

32. Inventa una historia para esta suma: 6,4 + 2,3 = 8, 7.

En esta situación aparecen los datos expresados en notación decimal. Se pretende que el alumnado diseñe un problema cuya resolución sea: 6,4 + 2,3 = 8, 7. Esta actividad constituye un proceso en el que se hace uso de la estructura dada.

Los razonamientos son: Esquema (+,-) y la relación Partes-Todo.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 33

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

33. Inventa una historia para esta división: 1,5 : 0,6 = 2,5.

Situación análoga a la anterior, pero en este caso se aplica el esquema multiplicativo. Asimismo, la tarea planteada puede constituir un conflicto para algunos alumnos puesto que se indica un ejemplo en la que la división de decimales implica aumento.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 34

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

34. Realiza los siguientes cálculos:

a) 14,85 + 3,074   b) 200,01 – 32,007   c) 17,74 x 3,1416   d) 17, 74 : 3, 1416

Se pretende que el alumno ponga en práctica los algoritmos de las operaciones con números decimales. Estos números vienen expresados en notación decimal. Se trata, por tanto, de una actividad que pertenece al dominio de las operaciones.

Los razonamientos son: Los esquemas aditivos y multiplicativos y la relación Partes-Todo.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 35

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

35. Mediante fracciones efectúa:
    a. 3,5 + 2,13 =
    b. 2,7 – 3, 172 =
    c. 7,23 x 3,6 =
    d. 7,14 : 2,1 =

En un principio se plantea una conversión de la notación decimal a la fraccionaria de cada término de la operación y, posteriormente, aplicar el algoritmo correspondiente. Por ello, las notaciones que intervienen son la decimal y la fraccionaria.

Se produce, en primer lugar, un proceso en el que se hace uso del cálculo de la fracción generatriz de un número decimal y en el que se establece la igualdad a través del conocimiento de la estructura. En segundo lugar, las fracciones obtenidas se operan.

Los razonamientos empleados son: La relación Partes-Todo y los esquemas aditivo y multiplicativo.

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 36

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

36. Un trozo de queso pesa 0,923 kg. Un kg cuesta 27,50 euros. Halla el precio del queso. ¿Qué operación tienes que realizar?

a) 27,50 + 0,923 c) 27,50 : 0,923 d) 0,923 x 27,50 e) 27,50 – 0,923

Se pretende, de forma fundamental, que el alumno identifique la operación que resuelve un problema que está en un contexto de medida.

La notación que se utiliza en la actividad es la decimal.

En esta tarea se relaciona un proceso, situación problemática en la que intervienen números decimales, con la estructura multiplicativa.

El razonamiento es el esquema (x,/).

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 37

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

37. Calcula los productos:

$0{,}73 \ \ x \ \ 0{,}4 =$

$0{,}\overline{362} \ \ x \ \ 0{,}\overline{84} =$

En cada apartado de esta situación se plantea la multiplicación de dos racionales expresados en notación decimal. Hemos de destacar que en el segundo apartado los racionales vienen expresados en notación decimal infinita, periódica y abreviada. Consideramos que en este caso el alumnado va a tener más dificultad que en el primero.

Se pretende que el alumnado realice, previamente, una conversión de la notación decimal a la fraccionaria para, posteriormente, realizar la multiplicación de las fracciones. Por tanto, se da inicialmente un proceso que es la conversión entre representaciones. Este proceso implica el uso de la técnica (la más habitual) para hallar la fracción generatriz y considerar que ambas expresiones (la decimal y la fraccionaria) representan la misma estructura (número racional correspondiente). En el análisis seguimos el esquema en el que se organiza la obtención de la fracción generatriz de un racional, que se adjunta en la Figura 3.4. Posteriormente, se aplica el algoritmo para multiplicar fracciones, lo que constituye una operación.

Los razonamientos son: La relación Partes-Todo, los esquemas (+,-) y (x,/) y relaciones de igualdad.

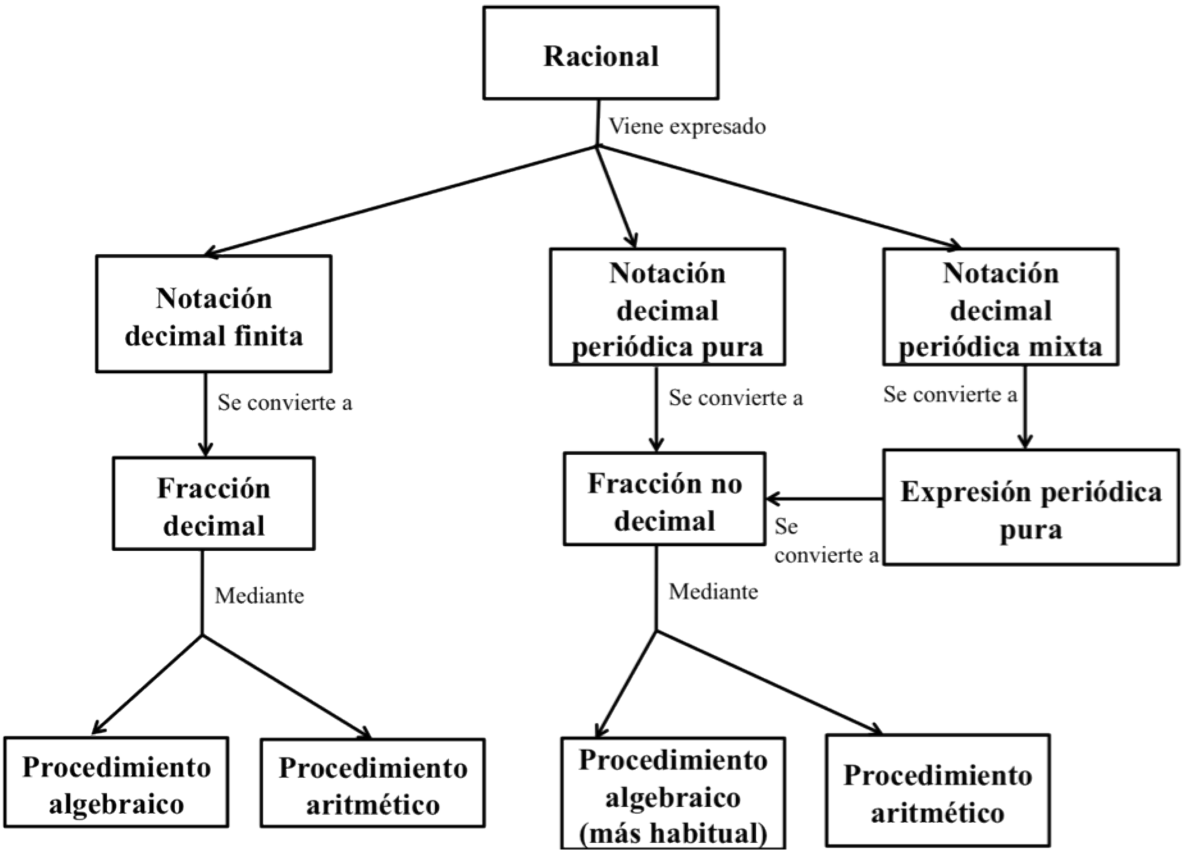


Figura 3.4: Esquema en el que se organiza la obtención de la fracción generatriz de un racional

Análisis del contenido matemático de la pregunta n.º 38

La situación problemática que se plantea es la siguiente:

38. ¿Cuál es el resultado de la operación : 23,45 x 10^3 – 45000/10^3?
   a. 23000
   b. 23405
   c. 23450

En esta actividad hay que calcular el resultado de la resta de dos números racionales, por lo que pertenece al dominio de las operaciones. La notación empleada es mixta, se combina la decimal con la fraccionaria y con la de las potencias.

Los razonamientos son: la relación Parte-todo, el esquema (+,-) y el esquema (x,/).

3.5. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En primer lugar, daremos los resultados en relación con los dos objetivos planteados en el estudio.

En relación con el primer objetivo: Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales, observamos que la mayoría de los alumnos tiene competencias altas en las cuestiones siguientes (más del 75% es capaz de):

- Significado procedimental: Operaciones con números decimales:
  - Realizar sumas y restas de números decimales, expresados en escritura decimal.
  - Multiplicar un número por una décima.
  - Buscar el decimal que se aproxima más a 59 : 190, entre varios.
  - Redondear a centésimas y a milésimas el número 4,256197.
- Orden en los números decimales:
  - Ordenar números decimales positivos según su escritura decimal.
  - Ordenar fracciones.
  - Indicar entre que números enteros se encuentra un decimal positivo.
  - Intercalar un decimal entre 1,23 y 1,24.
- Representaciones:
  - Pasar de la representación gráfica (contexto discreto) a la escritura decimal o a la fracción decimal de un número.
  - Situar números decimales positivos en la recta numérica.
  - Elegir como posibles formas de representar el 0,5: 0,500 (89%); 1 /2 (100%) y 50% (78%).
  - Representar en la recta un número racional.
  - Elegir, entre varios, el decimal que se aproxima a $2^{1/2}$ representado en la recta numérica.
- Uso y utilidad de los números decimales:
  - Usar la ampliación del Sistema de Numeración Decimal para representar los números decimales.
  - Elegir la operación correcta para resolver un problema.
  - Interpretar una expresión numérica en la que se hace uso de la notación científica. Elegir como solución de la división $251 \div 99$, en una situación contextualizada, una aproximación decimal.

- Averiguar si dos fracciones son equivalentes en una situación contextualizada.

La mayoría de los alumnos tiene competencias medias en las cuestiones siguientes (entre el 25% y el 75% es capaz de):

- Significado procedimental: Operaciones con números decimales:
  - Multiplicar dos números decimales expresados en escritura decimal.
  - Operar números racionales en escritura decimal periódica.
  - Dividir un número por una centésima.
  - Redondear a unidades y a cienmilésimas.
  - Redondear a centésimas 13/17, 127/438 y 11/3.
  - Obtener la expresión decimal de una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.
  - Encontrar una fracción decimal equivalente a 87/5.
  - Elegir la fracción generatriz de $0{,}512\overline{4}$.
- Orden en los números decimales:
  - Ordenar números decimales, positivos y negativos.
- Densidad de los números decimales:
  - Reconocer la densidad del conjunto de los decimales.
- Representaciones:
  - Pasar de la representación gráfica de un número decimal, en un contexto continuo, a su escritura decimal.
  - Situar números decimales negativos en la recta numérica.
  - Representar en la recta numérica un número irracional.
- Uso y utilidad de los números decimales:
  - Inventar una historia para la suma: 6,4 + 2,3 = 8,7.

La mayoría de los alumnos tiene Competencias bajas en las cuestiones siguientes (menos del 25% es capaz de):

- Significado conceptual de número decimal
  - Identificar números decimales entre diferentes números reales: naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales.
  - Igualar 0,5 con 0,4999…
- Significado procedimental: Operaciones con números decimales:
  - Encontrar una fracción decimal equivalente a cada una de las siguientes: 5/4, 7/2, 23/20.

- Redondear a centésimas 1/13.
- Reconocer que la división de decimales no es siempre un decimal.
- Dividir decimales expresados en escritura decimal.
- Efectuar mediante fracciones una operación de números decimales expresados en escritura decimal.

- Orden en los números decimales:
  - Indicar entre qué números enteros se encuentra un decimal negativo.
- Densidad de los números decimales
  - Indicar cuántos números decimales pueden escribirse entre dos dados.
- Representaciones:
  - Recodificar un número entero, es decir, expresar un número entero mediante un número decimal cuando tomamos como unidad un orden mayor, por ejemplo: la unidad de millar.
- Relaciones con otros conjuntos numéricos:
  - Identificar y relacionar números entre los distintos conjuntos numéricos.
- Uso y utilidad de los números decimales:
  - Inventar una historia para la división: $1{,}5 \div 0{,}6 = 2{,}5$.

Si ahora tomamos en consideración las tres capacidades generales asociadas a cualquier objeto matemático: reconocer y diferenciar, formular y manipular el objeto, de los resultados anteriores relativos a las capacidades específicas analizadas, podemos observar que estos alumnos tienen dificultades para reconocer y diferenciar y formular los números decimales, no tanto para operar con ellos, salvo en operaciones relacionadas con la división.

Como ya hemos mencionado con anterioridad el segundo objetivo: analizar qué significados conceptuales y procedimentales tienen los alumnos sobre los decimales y qué relaciones establecen entre los conjuntos numéricos, será analizado en términos de dificultades y errores que tienen los alumnos. Dada la amplitud del cuestionario y el amplio número de errores obtenidos, hemos seleccionado para el análisis las preguntas 4c (8%), 14b (8%), 21 (5,6%), 22 (0%), 24 (0%), 29 (0%), 31 (3%), 33 (22%), 35c (6%) y 37b (33%) por pertenecer a las que tienen un porcentaje bajo en la elección de la respuesta correcta. Hemos de decir que encontramos dificultades a la hora de detectar la naturaleza de los errores, debido a que la mayoría del alumnado no añadió explicaciones a sus respuestas, a pesar de ser solicitadas en el transcurso de las sesiones.

De manera especial abordamos el análisis de las preguntas 24, 27 y 29 del cuestionario, que tienen que ver con las dificultades conceptuales, con los problemas asociados a la densidad y con el reconocimiento y la relación entre los diferentes números y conjuntos numéricos, respectivamente. Igualmente, hemos añadido el estudio de las respuestas de la pregunta 28. La importancia de la inclusión radica en que la representación en la recta de números reales conecta, mediante procesos, las representaciones decimal y fraccionaria, para los racionales, y con la radical, para los irracionales cuadráticos. Todo ello, siempre y cuando el alumno identifique las estructuras: número racional, irracional y real. Igualmente, lo hemos ejemplificado en estas cuestiones porque estas preguntas son incluidas, salvo matices, en los trabajos siguientes, constituyendo parte del cuestionario del estudio definitivo, y que nos pueden servir en la búsqueda de comportamientos comunes.

En primer lugar consideramos la pregunta número 4, en particular el apartado c, en él se pide expresar el número de habitantes de una ciudad, 4727986, tomando como unidad la decena de millón. Los errores más frecuentes son: 472.798.600 y 47.279.860.

No se gestiona correctamente qué operaciones hay que aplicar para representar una cantidad cuando se toma como unidad una distinta a la fundamental del sistema. No se eligen de forma correcta los múltiplos y submúltiplos de esta nueva unidad y, por lo tanto, el lugar que ocupa la coma en la escritura.

En la pregunta 14, se presentan distintas maneras de expresar el número decimal 0,5 en la que encontramos la expresión decimal 0,499999… que ha sido elegida solo por el 8%. Conjeturamos que el alumno ha considerado una aproximación y no ha buscado la fracción generatriz de dicho número, tal y como pretendíamos.

En la pregunta número 21, hay que elegir entre varias la fracción que representa un número decimal. El error más frecuente es señalar a todas las opciones. Posiblemente se identifica número decimal con número expresado en notación decimal con coma.

En la pregunta número 22 se plantea buscar una fracción decimal equivalente a una dada. El mayor porcentaje de acierto se obtiene en el último apartado; hecho que se da por la aplicación del alumnado de la estrategia que consiste en multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por dos. El resto de respuesta incorrectas, en su conjunto, presenta el error en el concepto de fracción decimal. Para algunos coincide con un cociente de números decimales no enteros (5/4, 11,5/9,2). Para otros se confunde con el de fracción inversa de una dada (5/4, 4/5).

La pregunta número 24, cuyo objetivo es obtener información sobre el concepto de número decimal que los alumnos encuestados poseen. El recuadro siguiente recoge la pregunta tal y como la presentamos:

24. Marca con un Sí los números decimales y explica brevemente tu respuesta:

-3,9		
0		
1 /4		
2		
$1+\sqrt{2}$		
10/5		
π		
-7/3		
0,666...		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\widehat{5}$		
1,73205008....		
$\pi - 5$		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		
-1/3		
1,48		
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		

Señalamos que esta pregunta no es contestada correctamente por ninguno de los 36 alumnos. En las respuestas dadas encontramos tres comportamientos:

- A (8,3%): Elegir solo como decimales las escrituras decimales con coma.

- B (30,6%): Se marcan como decimales a todos excepto a todas o algunas fracciones, y algunos de los irracionales, no expresados con notación decimal, se excluyen o se dejan sin contestar. Los enteros no son considerados como decimales.
- C (41,7%): Seleccionar a todos como decimales, excepto a los enteros.

La red sistémica que recoge los argumentos dados por alumno y por expresión semiótica es la siguiente, Figuras 3.5 y 3.6:

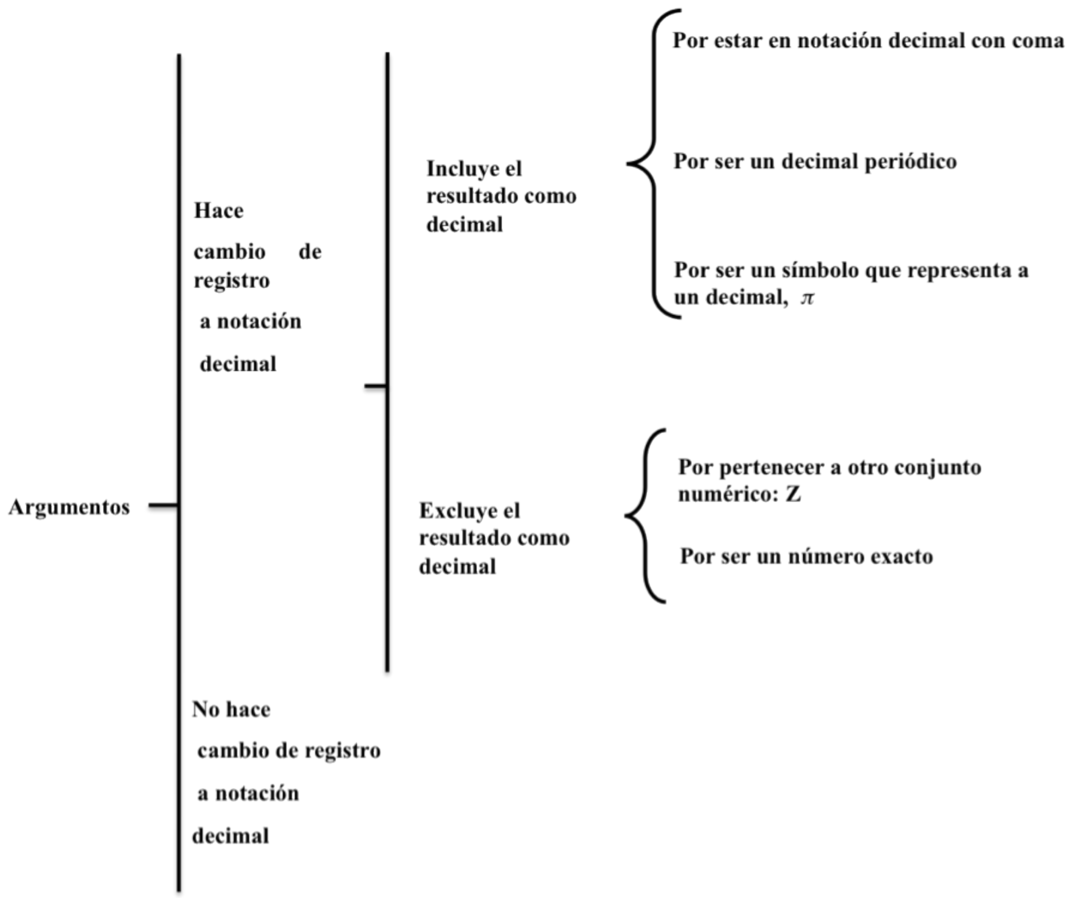


Figura 3.5: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que hacen cambio de registro a notación decimal

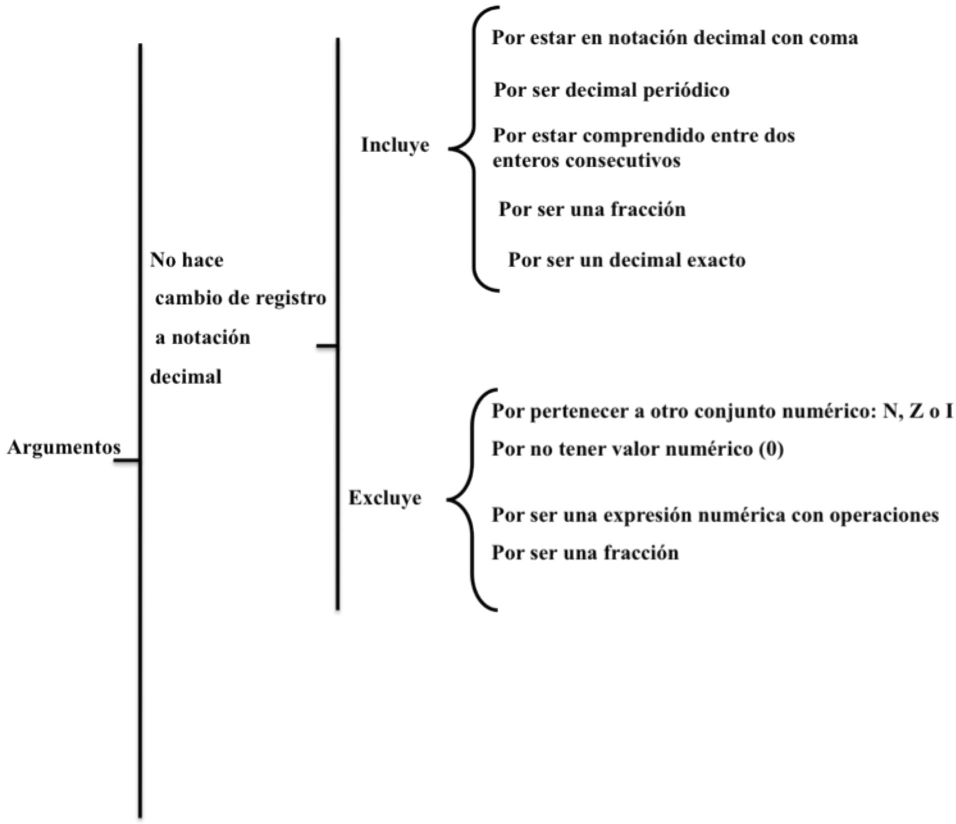


Figura 3.6: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que no hacen cambio de registro a notación decimal

Los errores más comunes y significativos cometidos por los alumnos son los siguientes:

a) Identifican el número decimal como un número con coma o con la escritura decimal (tendencia mayoritaria).
b) Clasifican a los números como no decimales por la ausencia de coma en su representación.
c) Seleccionan a los números decimales tomando como referencia las fracciones y la escritura decimal.
    - Las fracciones no son decimales.
      1 /4 no es decimal porque es una fracción.
    - Las fracciones son números decimales.
      -1/3 es decimal porque es un número fraccionario.

- Los números decimales son el resultado de una división.

  -1/3 es decimal porque al resolver la división no da exacta.

  1 /4 es decimal porque es una fracción y su resultado da un número decimal ya que el numerador es menor que el denominador.

La posición más común es que los números decimales son los números con coma o los que se pueden expresarse mediante un escritura decimal con coma.

Para mostrar las dificultades y errores que cometen los alumnos en el problema de la densidad, hemos seleccionado la pregunta 27:

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta

En esta pregunta se da un 36% de aciertos. El resto, 64%, tiene dificultades para reconocer, formular y manipular los infinitos números decimales entre 1,23 y 1,24.

El error más común cometido, es considerar que solo hay un número finito de números decimales, en particular nueve o diez números. Las respuestas más comunes se describen en la Figura 3.7.

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

1,23; 1,231; 1,232; 1,233; 1,234; 1,235; 1,236; 1,237; 1,238; 1,239; 1,24.

Porque del 1,23 al 1,24 hay nueve espacios hasta llegar al 1,239.

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

9 números: 1,231; 1,232; 1,233; 1,234; 1,235; 1,236; 1,237; 1,238; 1,239

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

1'23, 1'230 1'231, 1'232, 1'233, 1'234, 1'235, 1'236, 1'237, 1'238, 1'239,

1'24. Se podrían escribir 10 nos más.

Figura 3.7: Respuestas de alumnos

En otros estudios relativos a la densidad, se observan las mismas dificultades; por ejemplo, en el realizado por Brown y recogido en Hart (1981), los alumnos de 15 años dieron respuestas similares a las anteriores, a la pregunta sobre cuántos números distintos podrías escribir comprendidos entre 0,41 y 0,42, con un porcentaje del 38%.

Con respecto a la pregunta 28, que trata de representar números reales en la recta numérica, observamos que los que responden (97,2%) utilizan la estrategia de realizar la conversión a notación decimal de los números dados y, después, realizar una representación aproximada. El mapa conceptual descrito en el análisis de contenido matemático de esta pregunta no se detecta en estos alumnos. Se da así un pensamiento más operacional que estructural y procesual.

La pregunta 29, que tiene por objeto obtener información sobre el reconocimiento y la relación que los alumnos establecen entre números de los diferentes conjuntos numéricos.

Veamos los diferentes errores encontrados.

Un ejemplo de respuesta bastante común se recoge en el Cuadro 3.1:

	Natural	**Entero**	**Decimal**	**Racional**	**Irracional**	**Real**
-2,062	Sí	No	Sí	No	No	No
35.521	Sí	Sí	No	No	No	Sí
3/5	Sí	No	No	Sí	No	Sí
π	Sí	No	Sí	No	No	Sí
-1/2	Sí	No	No	Sí	No	No
0,63	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$-\sqrt{7}$	Sí	No	No	No	Sí	No
0,123456...	Sí	No	Sí	No	No	Sí
3,14	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$\sqrt{81}$	Sí	No	No	No	Sí	Sí

Cuadro 3.1

Se puede observar como:

a) Todos los números que son identificados mediante una escritura con coma son decimales (π es considerado como 3,14).

b) Los reales son todos excepto los negativos.

c) Todos son naturales.

d) El único entero es el 35521.

En el Cuadro 3.2 se observa otro tipo de interpretaciones erróneas que parte de una idea correcta: todos los números son reales.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
35.521	SÍ	NO	NO	NO	NO	SÍ
3/5	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
π	NO	NO	NO	NO	NO	SÍ
-1/2	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
0,63	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
0,123456…	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
3,14	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
$\sqrt{81}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

Cuadro 3.2

De nuevo, las interpretaciones erróneas conducen a:

a) Los decimales son los que explícitamente llevan coma, no los que sean susceptibles de escribirse como una expresión decimal con coma.

También surgen otras interpretaciones como:

a) Las fracciones son los únicos racionales.

b) Las raíces son irracionales.

Un tercer tipo de respuestas, se recoge en el Cuadro 3.3, y parte nuevamente de la misma idea correcta anterior: todos los números son reales, sin embargo, ahora la única condición para los decimales es que no sean enteros.

Otro tipo de interpretación errónea es la consideración de ser un número natural si no es negativo.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Sí	No	No	Sí
35.521	Sí	Sí	No	No	No	Sí
3/5	Sí	No	Sí	No	No	Sí
π	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
-1/2	No	No	Sí	No	No	Sí
0,63	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$-\sqrt{7}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
0,123456...	Sí	No	Sí	No	No	Sí
3,14	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí

Cuadro 3.3

En el Cuadro 3.4, encontramos nuevamente que todos los números son reales salvo π, aunque en este caso se refleja la duda del alumno. Se vuelve a identificar a los números decimales como cualquier número, excepto los enteros.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	NO	NO	SI
35.521	SI	SI	NO	NO	NO	SI
3/5	SI	NO	SI	SI	NO	SI
π	NO	NO	SI	NO	SI	NO
-1/2	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0,63	SI	NO	SI	NO	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
0,123456...	SI	NO	SI	NO	NO	SI
3,14	SI	NO	SI	NO	NO	SI
$\sqrt{81}$	NO	SI	NO	SI	SI	SI

Cuadro 3.4

El Cuadro 3.5 es una confirmación de los datos obtenidos anteriormente: todos son reales y todos son decimales menos los enteros (ahora la duda está en la raíz cuadrada de 81). No obstante hay una identificación especial en este grupo de estudiantes: La identificación entre número decimal e irracional.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
35.521	Sí	Sí	NO	Sí	NO	Sí
3/5	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
π	NO	NO	Sí	NO	Sí	Sí
-1/2	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
0,63	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
$-\sqrt{7}$	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
0,123456…	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
3,14	Sí	NO	Sí	NO	Sí	Sí
$\sqrt{81}$	Sí		Sí	NO	Sí	Sí

Cuadro 3.5

Los Cuadros 3.6 y 3.7, nos muestran un elemento común que parece regir la organización mental de estos alumnos: todos los números son decimales, menos los enteros que son naturales y en consecuencia reales, Cuadro 3.6, o menos los enteros que son identificados como enteros, Cuadro 3.7.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
35.521	Sí	Sí	No	Sí		Sí
3/5	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
π	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
-1/2	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
0,63	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
$-\sqrt{7}$	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
0,123456…	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
3,14	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí

Cuadro 3.6

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SÍ			NO
35.521	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ
3/5	NO	NO	SÍ			SÍ
π	NO	NO	SÍ			SÍ
-1/2	NO	NO	SÍ			NO
0,63	NO	NO	SÍ			SÍ
$-\sqrt{7}$	NO	NO	SÍ			NO
0,123456...	NO	NO	SÍ			SÍ
3,14	NO	NO	SÍ			SÍ
$\sqrt{81}$	SÍ	SÍ	NO			SÍ

Cuadro 3.7

El último ejemplo, Cuadro 3.8, también confirma la situación anterior: todos los números son decimales menos los enteros. Sin embargo, ahora el estudiante tiene muchas dudas y no encuentra un referente claro para los dos enteros que no son decimales (al 35.521, lo sitúa correctamente como natural y a la $\sqrt{81}$, como racional).

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	Sí	NO	Sí	NO		
35.521	Sí	Sí	NO	NO		
3/5	Sí	[illegible]	Sí	NO		
π	-	[illegible]	Sí	NO		
-1/2		NO	Sí	NO		
0,63		Sí	Sí	NO		
$-\sqrt{7}$		NO	Sí	Sí		
0,123456...		Sí	Sí	NO		
3,14		Sí	Sí	NO		
$\sqrt{81}$		Sí	NO	Sí		

Cuadro 3.8

En resumen, hemos encontrado dos comportamientos, descritos en la pregunta nº 24, en las respuestas de los decimales: A y C con porcentajes 19,4% y 61,1%, respectivamente.

En la pregunta 31, se pide al alumno realizar una reflexión y una argumentación sobre la propiedad de la división de números decimales que dice que no es ley de composición interna ($\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{5}{6}$). Deberá buscar contraejemplos. En este caso, los alumnos que responden negativamente utilizan como argumento que la división de decimales puede dar un entero y, por tanto, no es decimal. Encontramos el error de excluir a los enteros de los decimales.

En la pregunta 33, se pide inventar una historia para 1,5 : 0,6 = 2, 5.

Los errores encontrados son los siguientes:

a) Se propone la actividad descontextualizada.
b) Se invierte el papel de los términos, es decir: 0,6 : 1,5.
c) Los datos se sustituyen por otros.
d) Se proponen situaciones problemáticas que no se corresponden con la operación división.
e) Se plantean enunciados de problemas de reparto, pero sin sentido. Por ejemplo:

Enrique tiene 1,5 chapas que quiere repartir entre sus 0,6 amigos. ¿Cuántas le tocarán a cada uno?

En este caso se observa que el alumno aplica los conocimientos adquiridos sobre los números naturales a los decimales.

En cuanto a la pregunta 35, en la que se pide efectuar mediante fracciones las siguientes operaciones:

a. 3,5 + 2,13 =
b. 2,7 – 3, 172 =
c. 7,23 x 3,6 =
d. 7,14 : 2,1 =

El alumnado que responde incorrectamente presenta errores en el proceso de conversión de la notación decimal a la fraccionaria. El error encontrado es en particular el siguiente: Por ejemplo, para el apartado a:

$$3{,}5 \ + \ 2{,}13 = \frac{3}{5} + \frac{2}{13}.$$

En la pregunta 37b, se pide efectuar la multiplicación de dos racionales expresados en notación decimal periódica pura y abreviada.

Los errores encontrados son los siguientes:

a) $0,\overline{362} \ x \ 0,\overline{84} = \ 0,\overline{30408}$

b) $0,\overline{362} \ x \ 0,\overline{84} = \ 0,34408$

c) $0,\overline{362} \ x \ 0,\overline{84} = \ 362 \ x \ 84$.

Conjeturamos que la causa de estos errores se debe a una falta de conocimiento relativa a las operaciones con racionales, expresados en esta notación.

3.6. DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

En general los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas, sin embargo, hay algunos errores que se han repetido en la relación con los números decimales y los Sistemas Numéricos. En resumen:

a) Los alumnos muestran confusión con la terminología: naturales, enteros, decimales, etc.

b) Las relaciones ($N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$; $Q \cup I = R \quad y \quad Q \cap I = \varnothing$) entre los Sistemas Numéricos no se establecen de forma clara.

c) La identificación de los números se lleva a cabo por su escritura y no por sus propiedades numéricas.

Esta última situación no se detecta únicamente en los números decimales, sino también en los números racionales. Estos son identificados por su escritura fraccionaria, es decir, el número racional se identifica como el cociente de dos números enteros.

En general, algunos de estos errores también han sido descritos en trabajos anteriores y con otros grupos de alumnos, tal y como señalan (Robinet (1986), Fischbein (1994) y Socas (2001)).

Asimismo, como hemos indicado con anterioridad, en Socas (2001), se describen para alumnos de 5.º, curso de la Licenciatura de Matemáticas, dos tendencias en relación con los números decimales. La primera: “el número decimal como sinónimo de número real” (85%). La segunda: “el número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma” (15%). En este trabajo con estudiantes de la Especialidad de Educación Infantil, tomábamos la segunda posición como conjetura para un grupo de alumnos con una formación matemática más débil. Hemos de señalar de los resultados obtenidos, que de nuevo nos encontramos con las dos posiciones extremas, solo que ahora la más significativa es la segunda, lo que evidencia la conjetura de partida, además, ahora nos encontramos también con otras posiciones intermedias que entremezclan las dos posiciones extremas, en este grupo de alumnos.

Por otra parte, queremos indicar que la presencia en las Facultades de Formación del Profesorado de estos niveles de dificultad asociados a los Sistemas Numéricos, en general, y a los números decimales, en particular, nos sugiere la necesidad de cuidar el tratamiento de estos aspectos en la formación del profesorado, organizando propuestas de enseñanza-aprendizaje más coherentes y en consonancia con estos errores preconcebidos. Pensamos que muchos de los errores tienen su origen en una ausencia de sentido, concretamente están relacionados con cuestiones que se han desarrollado erróneamente en la Educación Primaria y Secundaria. De aquí, que sea importante poner de manifiesto estas imágenes mentales erróneas de los alumnos para tratar de corregirlas al diseñar Programas de Formación del Profesorado.

En estas propuestas de formación y dado el origen del error, debe existir una participación activa del estudiante en las tareas en las que se debe provocar conflicto en la mente del alumno a partir de la inconsistencia de sus propios errores, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los falsos de número decimal por la comprensión conceptual adecuada.

CAPÍTULO 4. ESTUDIO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE SECUNDARIA Y MAESTROS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se aborda un estudio experimental llevado a cabo con dos grupos distintos de individuos y en dos períodos temporales también diferentes.

Tratamos, por un lado, los elementos comunes a las dos situaciones que son: el planteamiento del problema con sus preguntas de investigación, objetivos y conjetura, la metodología aplicada y el análisis de contenido matemático del cuestionario. Por otra parte, se describen y se analizan los resultados obtenidos con la implementación del instrumento de evaluación a cada grupo. Finalmente, se realiza una discusión de los resultados y se concluye el capítulo con consideraciones finales.

4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVOS Y CONJETURA

Los resultados del estudio exploratorio del año 2004 y las aportaciones de trabajos anteriores [Robinet (1986), Fischbein (1994) y Socas (2001)], expuestos en los capítulos anteriores, nos han servido para plantearnos un nuevo estudio experimental. En este trabajo partimos del mismo tema relativo a los decimales, pero lo limitamos profundizando en el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representarlo. En este sentido, atendemos a los siguientes aspectos:

a) Significado conceptual del número decimal.
b) Relaciones con otros conjuntos numéricos: N, Z, D, Q, I y R.
c) Representaciones: notación decimal, fraccionaria, radical y la recta numérica.

Este estudio se lleva a cabo con dos poblaciones distintas, en cuanto al nivel de formación matemática, que definimos alto y medio, y en dos momentos diferentes, año 2006 y 2007, respectivamente. Consiste, en un primer momento, año 2006, en el diseño, administración y corrección de un nuevo cuestionario, C2 (Anexo 1), al grupo de alumnos con un nivel alto en formación matemática. En un segundo momento, año 2007, se administra y corrige el cuestionario C2 a los alumnos con nivel medio en formación matemática. Todo esto ha contribuido también a la revisión del cuestionario que nos sirvió de instrumento para la recogida de datos.

En cuanto a las preguntas que nos hacemos para los dos grupos de alumnos tenemos:

a) ¿Qué significados le atribuyen a cada sistema numérico y, en particular, al de los decimales?

b) ¿Cómo relacionan los distintos sistemas numéricos: N, Z, D, Q, I y R?
c) ¿Qué papel desempeña la notación decimal en las relaciones entre los conjuntos numéricos y en la representación de números reales en la recta?

Nos planteamos los siguientes objetivos generales:

a) Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos.
b) Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.
c) Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

Estos objetivos los desglosamos en los siguientes objetivos específicos:

a) Estudiar comportamientos comunes en las respuestas.
b) Determinar los argumentos esgrimidos por el alumnado en la elección y exclusión de un número real como decimal.
c) Estudiar los procedimientos empleados para representar números en la recta.
d) Analizar y diagnosticar los errores cometidos por los estudiantes en actividades en las que se ponen en juego estructuras y procesos.

Finalmente, conjeturamos, por un lado, que los alumnos con un nivel alto en formación matemática caracterizan el conjunto de los números decimales de forma errónea dentro de los sistemas numéricos. Se presenta como tendencia mayoritaria identificar número decimal con número real. Asimismo, y con respecto a la representación de números reales en la recta numérica, consideramos que el procedimiento más utilizado es aplicar el sentido operacional del número expresado en la escritura decimal.

Por otro lado, pensamos, sin embargo, que en los alumnos con nivel medio en formación matemática la tendencia mayoritaria es la de identificar número decimal con número expresado en notación decimal con coma. Con respecto a la representación de números en la recta, mantenemos que estos estudiantes también utilizan el sentido operacional del número representado con notación decimal.

4.3. METODOLOGÍA

El análisis de los conocimientos de los estudiantes estudiados en este trabajo experimental lo vamos a realizar utilizando el Enfoque Lógico Semiótico, en particular la Competencia Matemática Formal y la Competencia Cognitiva. Las características que conforman estas competencias se han estudiado en el Capítulo 2.

De igual manera que en el estudio exploratorio, para describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en las tareas que forman parte de los instrumentos construidos en este trabajo se aplicará la Competencia Matemática Formal. Esto nos permite delimitar la validez de las cuestiones planteadas, anticipar conflictos potenciales en las respuestas de los alumnos y evaluar los significados personales de los alumnos.

El análisis de las dificultades y errores cometidos por el alumnado en estas tareas se llevará a cabo mediante la Competencia Cognitiva. Esto solo permitirá conjeturar sobre el origen de estos errores, al no disponer de entrevistas.

En cuanto a la población, distinguimos dos grupos de alumnos encuestados en fases distintas.

El primero lo constituyen un licenciado en Matemáticas, seis alumnos que estudian el tercer curso de la misma Licenciatura y un alumno de Ingeniería Técnica. El tamaño de la muestra es de 8 sujetos.

El segundo, se corresponde con 38 alumnos estudiantes del primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Musical del curso 2007/08.

Con respecto a las fases, el trabajo lo secuenciamos en dos fases. La primera, consiste en el diseño de un cuestionario, su puesta en práctica con los alumnos del primer grupo y su posterior corrección. La segunda solo consiste en la administración y corrección del cuestionario anterior a los alumnos del segundo grupo.

Con respecto a los instrumentos de recogida de datos, se diseña un cuestionario.

Este nuevo cuestionario (véase Anexo 1) está compuesto por tres preguntas. La primera, consta de 23 expresiones numéricas, que denotamos como ítems (1.1, 1.2, 1.3, …, 1.23), que los alumnos deben identificar como números naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales o reales. Está relacionada con el primer objetivo: recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos.

La segunda, consta de 19 expresiones numéricas, que denominamos ítems (2.1, 2.2, 2.3, …, 2.19), que los alumnos deben identificar como número decimal o no; en ambos casos debe aportar una breve explicación que justifique su respuesta. Está relacionada con el segundo objetivo: analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y como lo discriminan en relación con los demás números.

La tercera, consta de ocho expresiones numéricas, que nominamos ítems (3.1, 3.2, 3.3, …,3.8) que los alumnos deben representar en una recta graduada con unidades y décimas. Está relacionada con el tercer objetivo: analizar los métodos que utilizan para representar diferentes números en la recta numérica.

Las preguntas anteriores tienen su origen en una reducción del cuestionario C1, instrumento de recogida de datos del Estudio Exploratorio del año 2004 descrito en el Capítulo 3, a las preguntas número 24, 28 y 29, que son también adaptadas. Las modificaciones se han realizado teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

a) Los números elegidos deben ser representativos de los conjuntos numéricos que intervienen en el estudio: N, Z, D, Q, I y R.
b) Los números deben ser representados en, al menos, dos representaciones distintas. En estas tareas contamos con la notación decimal, la fraccionaria, la radical, símbolos especiales (π y $\pi - 5$) y recta numérica.
c) La relación que el alumno establece entre objeto y representación consideramos que puede ser analizada también presentando una misma estructura en varios registros distintos.
d) El predominio de un pensamiento operacional sobre el estructural y procesual se puede estudiar presentando estructuras representadas con expresiones semióticas que contengan operaciones, por ejemplo: $1+\sqrt{2},\ \ 3-\sqrt{3},\ \pi - 5$, etc.
e) La identificación de un número real con una aproximación decimal se puede contemplar presentado parejas como: $3{,}14;\ \pi\ \ y\ \ \frac{3}{5};\ 0{,}6666...$

De esta manera, en la pregunta número 24 solo se sustituye $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{2}$. Así, se presenta un decimal no entero en notación fraccionaria y decimal ($\frac{1}{2}=0{,}5$). Esta situación no se contemplaba anteriormente.

En la pregunta número 28, se sustituyen $-\sqrt{2}\ \ y\ \ 2\sqrt{2}$ por $-2\sqrt{2}$. Se elimina $\frac{11}{4}$, pero se mantiene 2,75. Se añaden racionales no decimales expresados en notación fraccionaria y en notación decimal periódica mixta. Este último es un número racional mayor que la unidad. Estos números son: $\frac{2}{3}$ *y* 2,23333...

La pregunta número 29, se reelabora considerando ahora el conjunto de representaciones semióticas siguientes:

Representaciones semióticas
- 2,062
35.521
$\frac{3}{5}$
2
$-\frac{1}{2}$
0,63
$-\sqrt{7}$
0,123456…
3,14
0
$1+\sqrt{2}$
π
$\frac{10}{5}$
$-\frac{7}{3}$
0,666…
$(\sqrt{2})^2$
$1,3\overset{\frown}{5}$
1,73205008…
π-5
0,5
$3-\sqrt{3}$
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\frac{1}{3}$

Tabla 4.1: Representaciones

Por otra parte, las tres nuevas preguntas conservan estructuras comunes, hecho que nos puede permitir principalmente analizar la consistencia de las respuestas de los alumnos participantes en el estudio. En la siguiente tabla (Tabla 4.2) ofrecemos la relación entre dichas estructuras.

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS RELACIONADAS		
Primera Pregunta	Segunda Pregunta	Tercera Pregunta
2	2	-
0	0	-
$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	-
π	π	-
$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{5}$	-
$-\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-
0,666…	0,666…	$\frac{2}{3}$
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\right)^2$	-
$1,3\widehat{5}$	$1,3\widehat{5}$	-
1,73205008…	1,73205008…	-
π-5	π-5	-
0,5	0,5	-
$3-\sqrt{3}$	$3-\sqrt{3}$	-
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-

Tabla 4.2: Relaciones entre representaciones

En la primera fase, el cuestionario se administró de forma individual y en dos sesiones distintas a un grupo de alumnos de ULL (Licenciado en Matemáticas, alumnos que estudian el tercer curso de la misma Licenciatura y alumno de Ingeniería Técnica). En una sesión inicial se planteó la primera pregunta y, en una segunda, las otras restantes. La distribución de los participantes se recoge en la Tabla 4.3.

LICENCIADO/A	ESTUDIANTE
Matemáticas (12,5 %)	3º Matemáticas (U. L. L) (75 %)
	Ingeniería técnica (12,5 %)

Tabla 4.3: Población

La corrección del cuestionario se lleva a cabo realizando la búsqueda de comportamientos, argumentos y errores comunes entre las respuestas de los alumnos participantes. Esto nos permitirá analizar no solo los objetivos generales planteados, sino también los específicos.

En la segunda fase, el cuestionario se administró, de igual manera que en el caso anterior, de forma individual y en dos sesiones distintas al grupo de 38 alumnos estudiantes del primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Musical. En una sesión inicial se planteó la primera pregunta y, en una segunda, las otras restantes.

La corrección del cuestionario se llevó a cabo realizando la búsqueda de comportamientos, argumentos y errores comunes entre las respuestas de los alumnos. Para organizar y analizar la información utilizamos varios procedimientos de análisis: tablas, esquemas de análisis y redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983).

4.4. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO DEL CUESTIONARIO C2

El análisis del contenido matemático se realiza siguiendo la organización del conocimiento matemático que se corresponde con la de la Competencia Matemática Formal del marco conceptual. Dicha organización está descrita en los capítulos 2 y 3 de esta Memoria. A modo de síntesis, la Competencia Matemática Formal y la contextualización del campo conceptual quedan reflejadas en los siguientes esquemas (Figura 4.1), que han sido desarrollados (Capítulo 2) y se han utilizado para el análisis de contenido de las diferentes tareas (Capítulo 3).

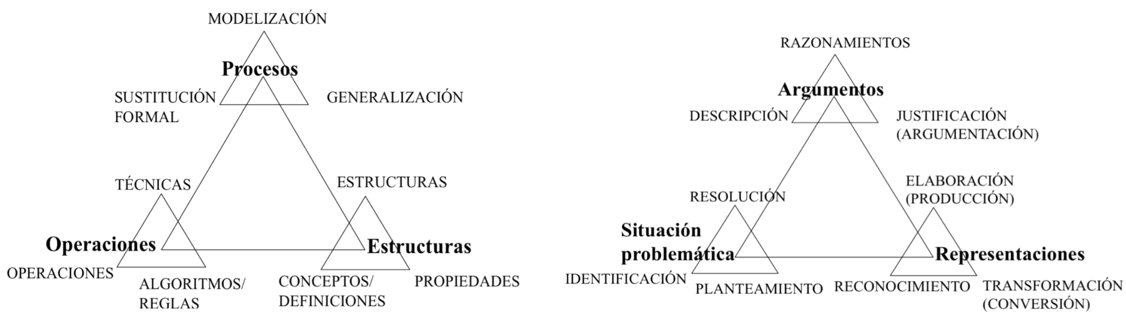


Figura 4.1: Organización y contextualización del campo conceptual

A continuación, procedemos a realizar el análisis del contenido del cuestionario C2.

Análisis del contenido matemático de la pregunta número 1

La situación problemática es la siguiente:

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062						
35.521						
$\frac{3}{5}$						
2						
$-\frac{1}{2}$						
0,63						
- $\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
0						
$1+\sqrt{2}$						
π						
$\frac{10}{5}$						
$-\frac{7}{3}$						
0,666…						
$\left(\sqrt{2}\right)^2$						
$1{,}3\widehat{5}$						
1,73205008…						
π-5						
0,5						

$3-\sqrt{3}$						
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$						
$\frac{1}{3}$						

Se presenta un conjunto de 23 representaciones semióticas que corresponden a distintos números y que deben ser clasificados en naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y reales. Aparecen números racionales decimales ($-2{,}062$; 35521; $\frac{3}{5}$; $2=\frac{10}{5}=\left(\sqrt{2}\right)^2$; $0{,}63$; $3{,}14$; 0 *y* $0{,}5$), racionales no decimales ($-\frac{7}{3}$; $0{,}6666...$; $1{,}3\overline{5}$ *y* $\frac{1}{3}$) e irracionales ($-\sqrt{7}$; $0{,}1234567...$; $1+\sqrt{2}$; π; $\pi-5$; $1{,}73205008...$; $3-\sqrt{3}$ *y* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). El número 2 se representa en registros distintos.

La existencia de registros distintos para un mismo número puede servirnos para constatar la existencia de alumnos que lo identifican por la escritura y no por sus propiedades, dando respuestas distintas según el registro. Asimismo, esta singularidad nos puede permitir encontrar estudiantes que conciben a $\frac{10}{5}$ *y* $\left(\sqrt{2}\right)^2$, por ejemplo, como operaciones y no como estructuras, contestando de manera diferente según la operación indicada.

La presencia de π *y* $3{,}14$ puede poner de manifiesto la existencia de la confusión del número con una aproximación decimal del mismo, dando la misma respuesta para ambos. Del mismo modo para $\frac{3}{5}$ y 0,6666…

Las notaciones que se utilizan son: la decimal (abreviada o expandida, para el caso de presentar periodo), la fraccionaria y con radicales.

La respuesta considerada como correcta viene determinada por la organización de los sistemas numéricos que adoptamos en el estudio, y que mostramos en el esquema siguiente (Figura 4.2), ya comentada en el Capítulo 3.

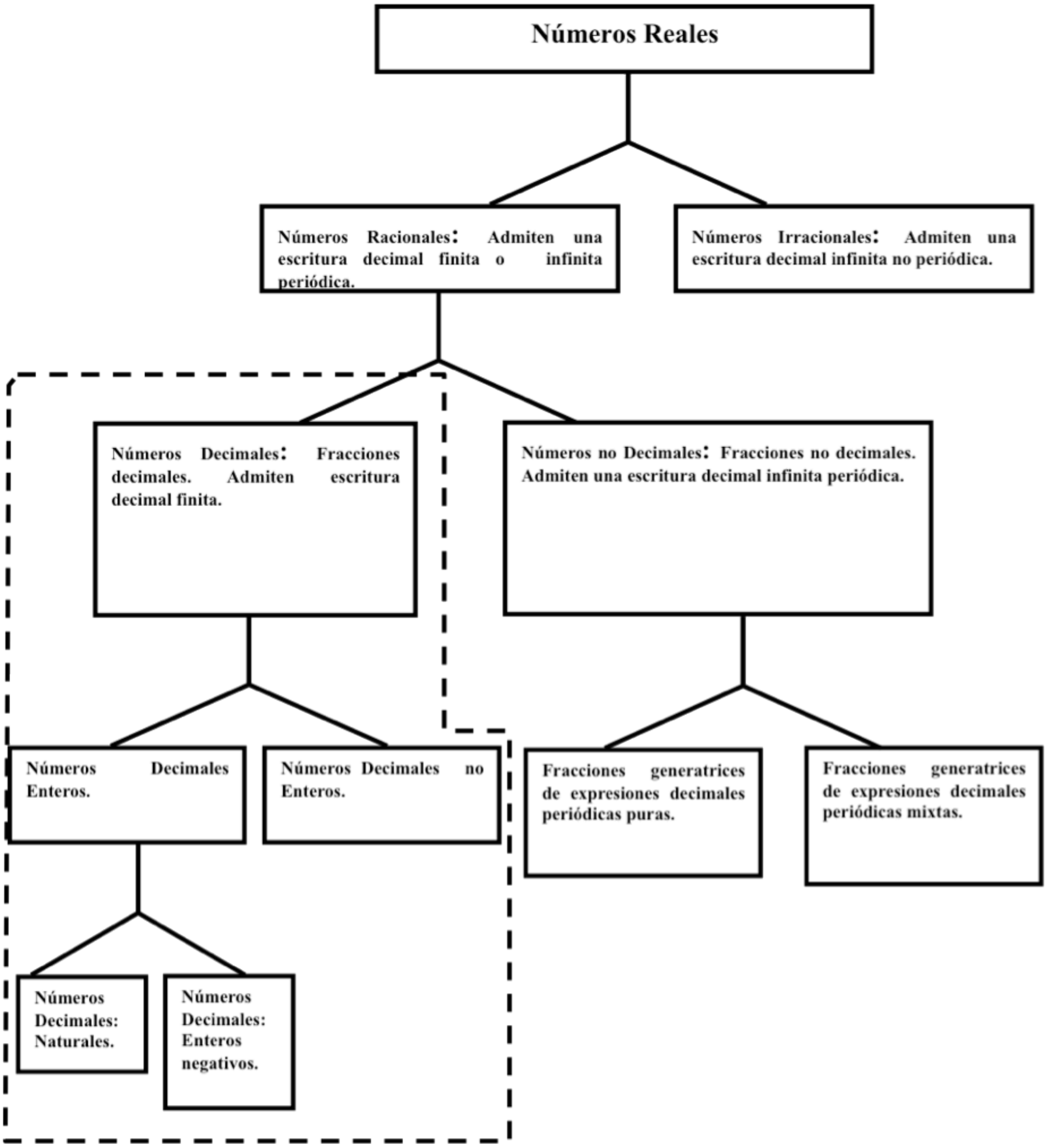


Figura 4.2: Organización de los sistemas numéricos

Las definiciones involucradas en esta organización son las siguientes:

a) El conjunto de los números reales es la unión del de los racionales con el de los irracionales. Los conjunto de los racionales y de los irracionales son disjuntos.

b) Un número racional se expresa mediante una fracción y sus equivalentes. También puede ser expresado mediante notación decimal finita o infinita periódica.

c) Un número decimal se expresa mediante una fracción decimal y sus equivalentes. También puede ser expresado mediante notación decimal finita.

d) Un número entero es la solución de la resta (y sus equivalentes): $a - 0 = +a,\ a \in N\ \ o\ \ 0 - a = -a,\ a \in N$. También se puede representar mediante una fracción decimal. Para alumnos con una formación matemática menos fuerte se puede considerar el significado de número natural precedido de un signo + (positivo) o – (negativo) (Peacock, 1830).

e) Un número natural es la propiedad que tienen en común los conjuntos finitos equipotentes entre sí. También, puede caracterizarse el conjunto de los naturales por el uso que se hace de ellos: Los que se utilizan para contar conjuntos finitos. Asimismo pueden ser expresados en forma de fracción decimal.

f) Un número irracional es el que no puede ser expresado mediante una fracción. Puede ser expresado mediante notación decimal infinita no periódica.

Las propiedades implicadas son:

a) Todo número natural es entero, decimal, racional, no irracional y real.

b) Todo número entero es decimal, racional, no irracional y real.

c) Todo número racional es no irracional y real.

d) Todo número irracional es real.

Por ello tenemos como solución la recogida en la Tabla 4.4.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
35.521	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$\frac{3}{5}$	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SI
2	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$-\frac{1}{2}$	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
0,63	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
0,123456…	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
3,14	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
0	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
π	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
$\frac{10}{5}$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ

$-\frac{7}{3}$	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
0,666…	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$1,3\widehat{5}$	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
1,73205008…	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
π-5	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
0,5	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
$\frac{1}{3}$	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ

Tabla 4.4: Solución de la primera actividad

Por lo tanto, podemos decir que esta actividad pertenece fundamentalmente al dominio de las estructuras. Las estructuras presentes son los sistemas numéricos y la relaciones entre ellos, tal y como hemos comentado anteriormente. Algunas veces se pueden realizar cambios de registro para clasificar un número. Por ejemplo, para saber si 35521 es decimal basta con expresarlo en forma de fracción decimal: $\frac{355210}{10}$. Estos cambios de registros están relacionados con las siguientes operaciones: el algoritmo de la división decimal, cálculo de una fracción equivalente y cálculo de la raíz cuadrada (inexacta). Esta relación entre proceso y operación debe realizarse a través de la estructura correspondiente.

En cuanto a los razonamientos tenemos: La relación Partes-Todo, la inclusión jerárquica, la clasificación, la negación, la conversión entre representaciones y la proporcionalidad.

Análisis del contenido matemático de la pregunta número 2

La actividad propuesta es la siguiente:

2. Marca con un Sí los números decimales y con un No los restantes, explica brevemente tus respuestas.

- 3,9		
0		
$\frac{1}{2}$		
2		
$1+\sqrt{2}$		
$\frac{10}{5}$		
π		
$-\frac{7}{3}$		
0,6666…		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\overline{5}$		
1,73205008…		
$\pi-5$		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		

$-\frac{1}{3}$		
1,48		
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

Se pretende que el alumnado identifique números decimales entre varios números reales y que dé una explicación o argumento de su respuesta.

Los números vienen expresados en notación decimal (abreviada y expandida, en el que caso de presentar período), notación fraccionaria y la notación de los radicales. Asimismo, aparece el símbolo especial, π, para expresar los irracionales trascendentes: π y $\pi - 5$.

Se presenta la terna de símbolos que representan el mismo número decimal: $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$. Del mismo modo, tenemos el decimal, $\frac{1}{2}$, expresado también en notación decimal, es decir, 0,5. La presentación de registros distintos de un mismo número puede ocasionar en algunos alumnos una dificultad en el reconocimiento de la estructura, al identificar el objeto con la representación.

La existencia de representaciones semióticas en las que intervienen operaciones nos puede ayudar a estudiar el predominio del pensamiento operacional sobre el estructural y el procesual. En este sentido, podemos conjeturar, basándonos en nuestra experiencia, que algunos alumnos van a considerar diferente la operación y su resultado.

En la actividad se ponen en juego los sistemas numéricos de los racionales decimales (fracciones decimales) o racionales no decimales (fracciones no decimales), irracionales (algebraico o trascendente) y reales. Asimismo, tenemos las relaciones entre sistemas numéricos: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$; $I \subset R$; $Q \cup I = R$ y $Q \cap I = \varnothing$. Estos objetos constituyen estructuras. Para saber si un número es decimal el resolutor debe averiguar si el número puede ser expresado mediante una fracción decimal o con notación decimal finita. De esta manera, puede aparecer el proceso de sustitución formal cuya relación con las operaciones debe ser a través de la estructura. Por ejemplo:

En el caso de la igualdad, $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$, se realizan conversiones entre las distintas notaciones hallando el cociente de $\frac{10}{5}$ o una fracción decimal equivalente y simplificando la expresión $\left(\sqrt{2}\right)^2$. El cálculo del cociente o de la fracción equivalente a una dada y la simplificación de la expresión constituyen operaciones. La igualdad se produce al establecer la relación del proceso con la operación a través de la estructura.

Igualmente, podrá aplicar las relaciones entre los conjuntos numéricos para clasificar los números, a saber:

a) Los enteros son números decimales.
b) Hay racionales que no son decimales (fracciones no decimales).
c) Los irracionales no son decimales.
d) Hay números reales que no son decimales (racionales no decimales e irracionales).

Los razonamientos son los siguientes: relación Partes-Todo, clasificación, inclusión jerárquica, negación, conversión entre representaciones, la proporcionalidad y el esquema (x,/).

Una posible respuesta es la recogida en la Tabla 4.5.

- 3,9	SÍ	- Se puede expresar mediante una fracción decimal o equivalentes: $-3{,}9 = -\frac{39}{10}$ - Está expresado en notación decimal finita
0	SÍ	- Se puede expresar mediante una fracción decimal o equivalentes: $0 = \frac{0}{100}$ - Está expresado en notación decimal finita - Es un número natural y estos son decimales
$\frac{1}{2}$	SÍ	- Se trata de una fracción decimal: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ - Se puede expresar en notación decimal finita: 0,5
2	SÍ	- Se puede expresar mediante una fracción decimal o equivalentes: $2 = \frac{200}{100}$ - Está expresado en notación decimal finita - Es un número natural y estos son decimales
$1+\sqrt{2}$	NO	- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales - No se puede expresar en forma de fracción. En caso contrario $\sqrt{2}$ sería racional y llegamos a un absurdo - $\sqrt{2}$ es irracional, entonces $1+\sqrt{2}$ es irracional
$\frac{10}{5}$	SÍ	- Se trata de una fracción decimal: $\frac{10}{5} = \frac{20}{10}$ - Está expresado en notación decimal finita: 2 - Es un número natural y estos son decimales - Es el número 2 que ya está estudiado
π	NO	- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales

$-\frac{7}{3}$	NO	- Se trata de una fracción no decimal: fracción irreducible cuyo denominador tiene una descomposición en productos de factores primos distinta de $2^n 5^m;\ n\ \ y\ \ m \in N$. También se puede decir que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10 - Puede ser expresado mediante notación decimal periódica: - 2,33333… - Se trata de un racional no decimal
0,6666…	NO	- Puede ser expresado mediante una fracción no decimal: $0{,}6666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (Ídem caso anterior) - Está expresado mediante notación decimal periódica - Se trata de un racional no decimal
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	SÍ	- Se trata de una fracción decimal: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{10}{5} = \frac{20}{10}$ - Está expresado en notación decimal finita: 2 - Es un número natural y estos son decimales - Es el número 2 que ya está estudiado
-3	SÍ	- Es un número entero y estos son decimales - Se puede expresar mediante una fracción decimal o equivalentes: $-3 = -\frac{300}{100}$ - Está expresado en notación decimal finita.
$1{,}3\overline{5}$	NO	- Puede ser expresado mediante una fracción no decimal: $1{,}3\overline{5} = \frac{122}{90} = \frac{61}{45} = \frac{61}{5 \cdot 3^2}$ - Está expresado mediante notación decimal periódica - Se trata de un racional no decimal
1,73205008…	NO	- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales
$\pi - 5$	NO	- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales - No se puede expresar en forma de fracción. En caso contrario π sería racional, por lo que se llega a un absurdo - π es irracional, entonces $\pi - 5$ es irracional
0,5	SÍ	- Se puede expresar mediante una fracción decimal: $0{,}5 = \frac{5}{10}$ - Está expresado en notación decimal finita - Es $\frac{1}{2}$ y está estudiado anteriormente
$3 - \sqrt{3}$		- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales - No se puede expresar en forma de fracción. En caso contrario $\sqrt{3}$ sería racional y llegamos a un absurdo - $\sqrt{3}$ es irracional, entonces $3 - \sqrt{3}$ es irracional
$-\frac{1}{3}$	NO	- Se trata de una fracción no decimal: fracción irreducible cuyo denominador tiene una descomposición en productos de factores primos distinta de $2^n 5^m;\ n\ \ y\ \ m \in N$. También se puede decir que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10 - Puede ser expresado mediante notación decimal periódica: - 0,3333… - -Se trata de un racional no decimal
1,48	SÍ	- Se puede expresar mediante una fracción decimal o equivalentes: $1{,}48 = \frac{148}{100}$ - Está expresado en notación decimal finita

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	- Se puede expresar mediante notación decimal infinita no periódica - Los irracionales no son decimales - No se puede expresar en forma de fracción. En caso contrario $\sqrt{5}$ sería racional y llegamos a un absurdo - $\sqrt{5}$ es irracional entonces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es irracional

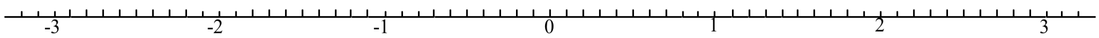
Tabla 4.5: Solución de la segunda actividad

Análisis del contenido matemático de la pregunta número 3

La tarea es la siguiente:

3. Representa en la recta numérica y explica el procedimiento utilizado :

a) $\sqrt{2}$ b) 0,75 c) 0,333… d) $-2\sqrt{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 2,75 g) $\frac{3}{4}$ h) 2,2333…



Se trata de una situación en la que hay que representar algunos números reales en la recta numérica. La recta se presenta dividida en unidades y décimas. Los números vienen expresados en notación decimal, fraccionaria y la de radicales. Por lo tanto, contamos con las representaciones recta numérica, notación decimal, notación fraccionaria y notación con radicales.

Se presentan números racionales decimales $(0{,}75=\frac{3}{4};\ 2{,}75)$ y no decimales $(0{,}333...;\ \frac{2}{3}\ y\ 2{,}23333...)$ e irracionales cuadráticos $(\sqrt{2}\ \ y\ -2\sqrt{2})$. Uno de los números viene expresado en dos registros distintos: $(0{,}75=\frac{3}{4})$. La presentación de registros distintos de un mismo número puede ocasionar en algunos alumnos una dificultad en el reconocimiento de la estructura, al identificar el objeto con la representación o con la operación y asignarle, por tanto, dos puntos distintos de la recta.

De esta manera, aparecen las estructuras: recta numérica, número natural, entero, decimal, racional, irracional y real.

El proceso que principalmente tiene lugar, es la conversión entre la representación digital (notación decimal, fraccionaria o con radicales), correspondiente del número, y la analógica (recta numérica).

Para representar un número racional en la recta se debe expresar en forma de fracción. Por ello, en algunos casos, hay una conversión entre las representaciones digitales y, posteriormente, en todos los casos se aplica la técnica para representar fracciones en la recta. Esta técnica está fundamentada en el cálculo de la mediatriz de un segmento si la fracción es binaria o en el teorema de Thales si la fracción no es binaria. Aunque sabemos que la técnica basada en el teorema de Thales es válida para cualquier fracción.

Si el número es irracional y cuadrático, como es esta situación, se representa haciendo uso del teorema de Pitágoras.

Estos teoremas pertenecen al dominio de las estructuras y los métodos de representación al de las operaciones.

La conversión entre representaciones y las técnicas de representación en la recta se deben relacionar a través de las estructuras.

A continuación, se muestra el mapa conceptual (Figura 4.3), que ya hemos mencionado en el Capítulo 3, que refleja la representación de números reales en la recta y que hemos aplicado para llevar a cabo este análisis.

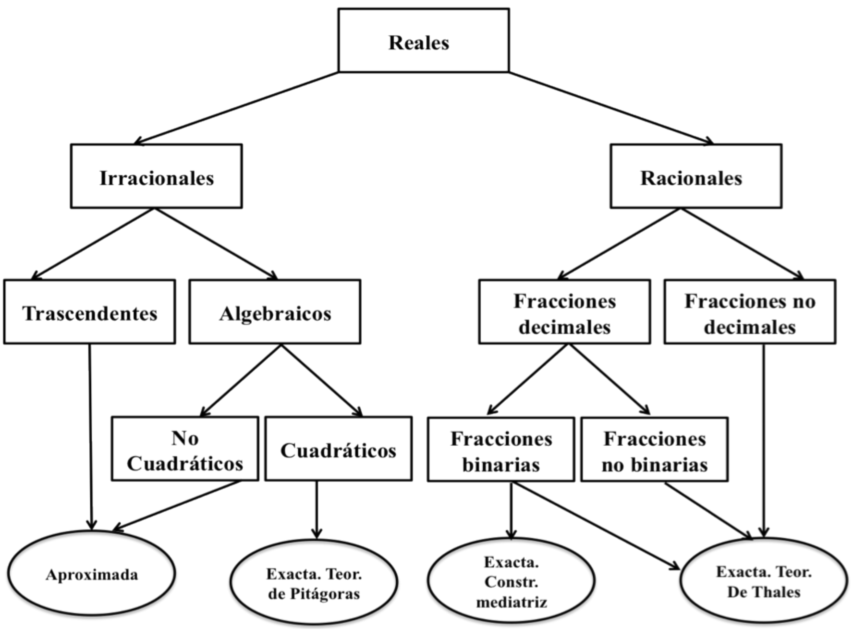


Figura 4.3: Mapa conceptual de la representación de números reales en la recta

En cuanto a los razonamientos nos encontramos con: relación Partes – Todo, razonamiento proporcional, clasificación y transformaciones entre representaciones.

Una posible solución de la tarea se muestra en las siguientes figuras (Figura 4.4, Figura 4.5 y Figura 4.6).

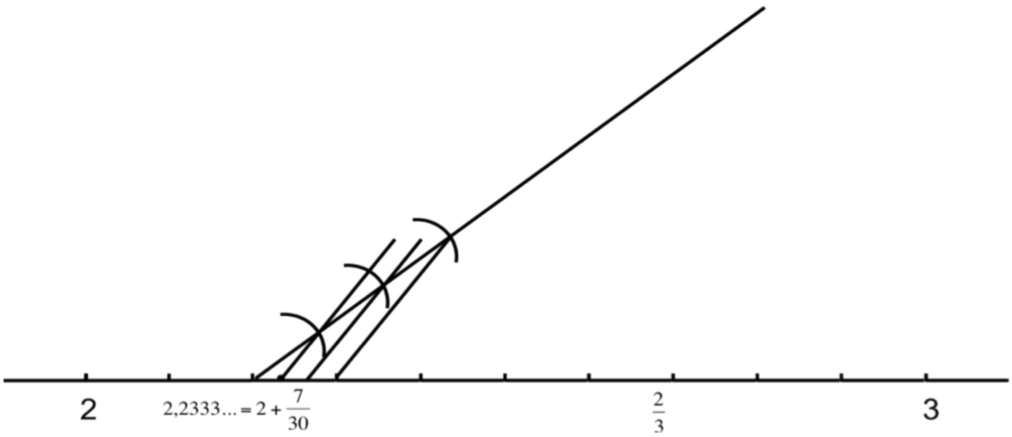


Figura 4.4: Representación de 2,2333…

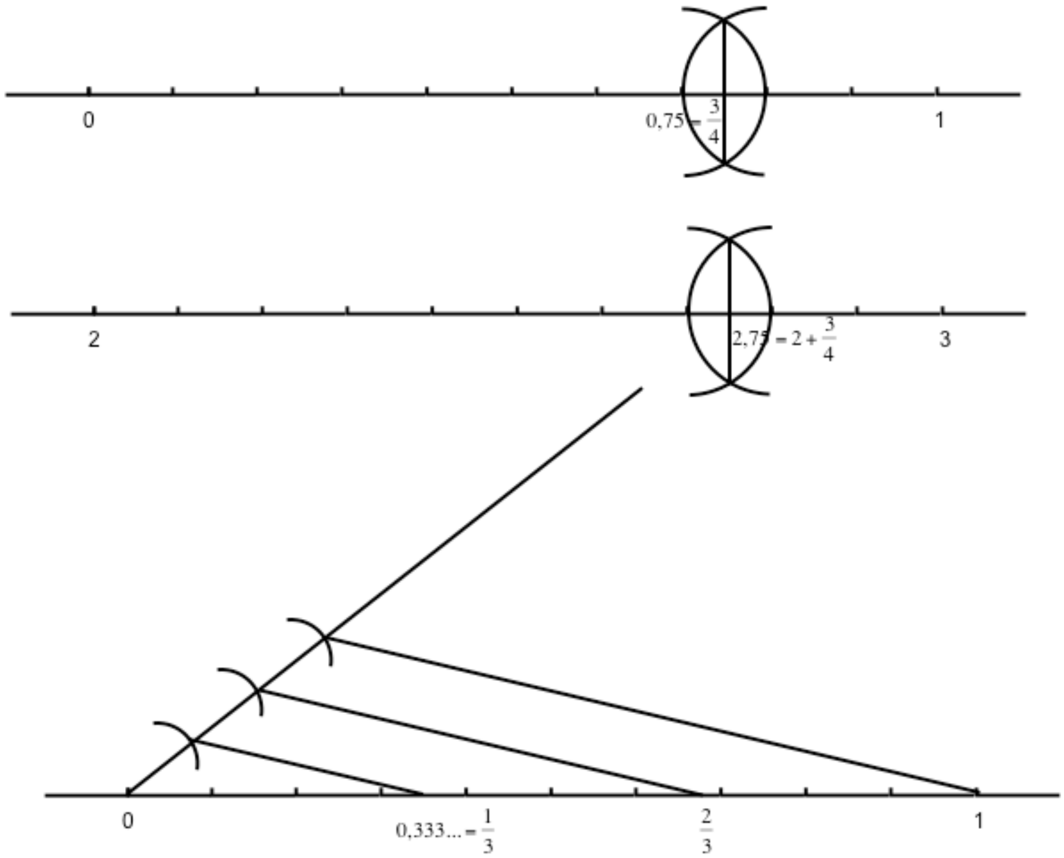


Figura 4.5: Representaciones de 0,75, 2,75 y 1 /3

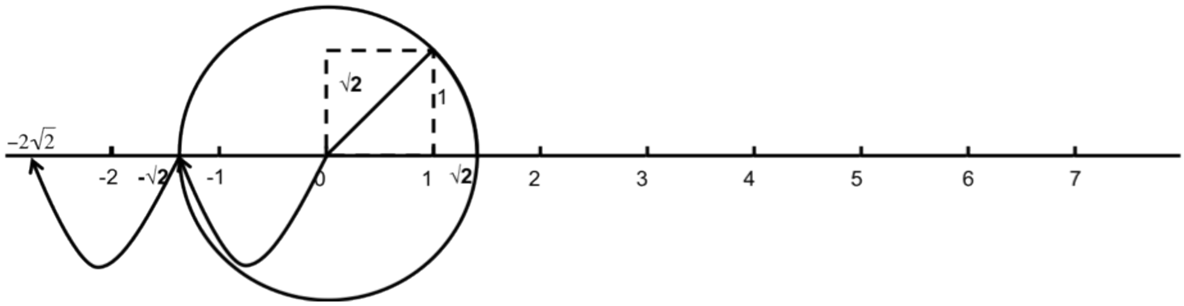


Figura 4.6: Representación de $-2\sqrt{2}$

4.5 ESTUDIO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE SECUNDARIA: PRIMERA FASE

Esta primera fase se inicia con el diseño de un cuestionario de tres preguntas, en el que se hace un análisis de contenido matemático de cada pregunta, mostrado en el apartado anterior, se prosigue con la administración de éste a los alumnos con un nivel alto en formación matemática en el año 2006 y una posterior corrección y evaluación de los resultados. Este trabajo se recoge parcialmente en el artículo de Moreno, Socas y Hernández (2007).

4.5.1 Descripción y análisis de los resultados

Con relación a la primera pregunta:

A tenor de las respuestas de los alumnos, en relación con la primera pregunta, encontramos cinco tipos de comportamiento que pasamos a describir a continuación:

a) Comportamiento A (12,5%): Los números decimales son números con coma, como se observa en el Cuadro 4.1.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	SI	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	SI	NO	SI
3/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
2	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,123456…	NO	NO	SI	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0	SI	SI	NO	SI	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
Π	NO	NO	NO	NO	SI	SI
10/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
-7/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$(\sqrt{2})^2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$1,3\hat{5}$	NO	NO	SI	SI	NO	SI
1,73205008....	NO	NO	SI	NO	SI	SI
Π- 5	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$3 - \sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$(1 + \sqrt{5})/2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI

Cuadro 4.1

En este caso los números decimales son identificados por su escritura decimal con coma.

b) Comportamiento C[1] (37,5%): D contiene a todos los números excepto los enteros, como se observa en el Cuadro 4.2.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	NO	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	NO	NO	SI
3/5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
2	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
0,123456…	NO	NO	SI	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	NO	NO	SI
0	SI	SI	NO	NO	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
Π	NO	NO	SI	NO	NO	SI
10/5	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-7/3	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	NO	SI	SI
$(\sqrt{2})^2$	SI	SI	NO	NO	NO	SI
$1,3\hat{5}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
1,73205008....	NO	NO	SI	NO	SI	SI
Π- 5	NO	NO	SI	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$3 - \sqrt{3}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
$(1 + \sqrt{5})/2$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	SI	SI	NO	SI

Cuadro 4.2

[1] Los comportamientos hallados se han denominado con las letras A, B, C, D,…, O (véase Capítulo 6). En este caso, los que no figuran significa que no se han presentado.

Este tipo de comportamiento se caracteriza porque, para estos alumnos, todos los números son decimales excepto los enteros, tal y como se observa en la tabla.

En este grupo de alumnos se observa también dificultades para tomar en cuenta que $Q \cap I = \varnothing$ y $R = Q \cup I$. Por ejemplo, en algunas situaciones, -2,062 es un número real, pero no es racional ni irracional. Del mismo modo, hallamos errores relacionados con la inclusión de Z en D, por ejemplo: 2 es un entero, pero no decimal.

c) Comportamiento F (25%): D y R son isomorfos (Cuadro 4.3).

En este caso, el alumnado considera que todos los números son decimales. Por tanto, se establece un cierto isomorfismo entre D y R.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Si	Si	No	Si
35.521	No	No	Si	Si	No	Si
3/5	No	No	Si	Si	No	Si
2	Si	Si	Si	Si	No	Si
-1/2	No	No	Si	Si	No	Si
0,63	No	No	Si	Si	No	Si
$-\sqrt{7}$	No	No	Si	No	Si	Si
0,123456…	No	No	Si	No	Si	Si
3,14	No	No	Si	Si	No	Si
0	No	Si	Si	Si	No	Si
$1+\sqrt{2}$	No	No	Si	No	Si	Si
Π	No	No	Si	No	Si	Si
10/5	Si	Si	Si	Si	No	Si
-7/3	No	No	Si	Si	No	Si
0,666...	No	No	Si	Si	No	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	Si	Si	Si	No	S
$1,3\hat{5}$	No	No	Si	Si	No	S
1,73205008....	No	No	Si	No	Si	S
Π- 5	No	No	Si	No	Si	S
0,5	No	No	Si	Si	No	S
$3 - \sqrt{3}$	No	No	Si	No	Si	S
$(1 + \sqrt{5})/2$	No	No	Si	No	Si	S
1/3	No	No	Si	Si	No	S

Cuadro 4.3

d) Comportamiento M: D y Q son isomorfos.

En esta situación, los alumnos identifican el conjunto de los números decimales con el de los racionales (12,5%). En este grupo, también se encuentra algún alumno que excluía a los enteros (Cuadro 4.4).

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Si	Si	No	Si
35.521	Si	Si	Si	Si	No	Si
3/5	No	No	Si	Si	No	Si
2	Si	Si	Si	Si	No	Si
-1/2	No	No	Si	Si	No	Si
0,63	No	No	Si	Si	No	Si
$-\sqrt{7}$	No	No	No	No	Si	Si
0,123456…	No	No	Si	Si	No	Si
3,14	No	No	Si	Si	No	Si
0	Si	Si	Si	Si		Si
$1+\sqrt{2}$	No	No	No	No	Si	Si
Π	No	No	No	No	Si	Si
10/5	Si	Si	Si	Si	No	Si
-7/3	No	No	Si	Si	No	Si
0,666...	No	No	Si	Si	No	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	Si	Si	Si	No	Si
$1,3\hat{5}$	No	No	Si	Si	No	Si
1,73205008....	No	No	Si	Si	No	Si
Π- 5	No	No	Si	Si	No	Si
0,5	No	No	Si	Si	No	Si
$3-\sqrt{3}$	No	No	No	No	Si	Si
$(1+\sqrt{5})/2$	No	No	No	No	Si	Si
1/3	No	No	Si	Si	No	Si

Cuadro 4.4

En esta situación, observamos cómo el alumno considera correctamente a π como irracional, sin embargo, la expresión $\pi - 5$ es clasificado como decimal. Posiblemente, el alumno identifica la expresión π, en el primer caso, como una estructura, y en el segundo $\pi - 5$, como una operación y no como una estructura y su pensamiento operacional le lleva a una aproximación decimal que identifica como decimal. En este grupo se identifican alumnos que dudan sobre si el cero es irracional o no, siendo racional.

e) Comportamiento N: D está formado por los enteros y los números expresados en escritura decimal finita o infinita periódica (Cuadro 4.5).

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	NO	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	NO	NO	SI
3/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
2	SI	SI	SI	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,123456…	NO	NO	NO	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	NO	NO	SI
0	NO	SI	SI	SI	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
Π	NO	NO	NO	NO	SI	SI
10/5	SI	SI	NO	NO	NO	SI
-7/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$(\sqrt{2})^2$	SI	SI	SI	SI	NO	SI
$1,3\hat{5}$	NO	NO	SI	NO	NO	SI
1,73205008....	NO	NO	NO	NO	SI	SI
Π- 5	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$(1+\sqrt{5})/2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI

Cuadro 4.5

Para este último grupo, los números decimales son los enteros y los números expresados en escritura decimal finita o infinita periódica (12,5%).

Además, para este grupo, encontramos alumnos que no establecen de forma correcta la inclusión de D en Q, de manera que 35.521 es decimal, pero no racional, como observamos en la tabla anterior.

Se pone de manifiesto, también, cierta confusión en el uso del punto o coma en la escritura decimal de un número para separar la parte entera de la parte decimal. Así, una respuesta mayoritaria es clasificar a 35.521 como decimal y no entero.

En la siguiente tabla (Tabla 4.6) se recogen las relaciones de inclusión que establecen entre los diferentes Sistemas Numéricos y se muestran los porcentajes de alumnos en términos de relaciones: correcta, incorrecta y no contesta.

	N⊂Z	Z⊂D	D⊂Q	Q⊂R	I⊂R	$Q \cap I = \emptyset$	$Q \cup I = R$
Correcta	87,5%	37,5%	12,5%	87,5%	87,5%	62;5%	62;5%
Incorrecta	12,5%	62,5%	75%			25%	25%
No contesta			12,5%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%

Tabla 4.6: Relaciones de inclusión y porcentajes

En ella se observa que las principales dificultades están en las relaciones entre N y Z con D y la relación entre D y Q.

En las siguientes tablas (Tabla 4.7 y Tabla 4.8) recogemos con detalle los comportamientos encontrados en cada columna y los errores que se cometen en la de los decimales y su relación con las restantes, respectivamente.

	COMPORTAMIENTOS
N	a) Los naturales son los números positivos y el cero (12,5%) b) La respuesta correcta, salvo matices con algunos de los números 35.521, 0, $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ (87,5%)
Z	a) La respuesta correcta, salvo matices con algunos de los números 35.521, 0, $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ (100%)

D	a) $D \approx R - Z$ (25%) b) $D \approx R$ (37,5%) c) $D \approx Q$ (12,5%) d) Los decimales son los números expresados con notación decimal con coma (A) (12,5%) e) Los decimales son los números expresados en notación decimal finita o infinita periódica (12,5%)
Q	a) La respuesta correcta, salvo matices con $0{,}666... \ y \ \pi - 5$ (62,5%) b) Los racionales son los expresados con notación fraccionaria y enteros (25%)
I	a) La respuesta correcta (37,5%) b) Los irracionales y 0,666… (37,5%) c) Los expresados con notación radical (raíces no exactas) y π (12,5%)
R	a) La respuesta correcta (100%)

Tabla 4.7: Comportamientos

ERRORES
a) Los enteros no son decimales (E1) (37,5%) b) Todo número expresado con notación decimal con coma es decimal (E2) (37,5%) c) Todas las fracciones son decimales (E3) (75%) d) Ninguna fracción es decimal (E5[2] (25%) e) Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, son decimales (E6) (62,5%) f) Hay decimales que no son racionales (E9) (25%) g) Los decimales son los números expresados en notación decimal finita o infinita periódica (E7) (12,5%) h) $D \approx R - Z$ (E12) (25%) i) $D \approx R$ (E13) (37,5%) j) $D \approx Q$ (E15) (12,5%)

Tabla 4.8: Errores

Con relación a la segunda pregunta:

En la segunda pregunta el alumnado debe identificar el número decimal y dar una explicación de la respuesta. De esta manera, podemos ver qué argumentos utilizan en cada caso para identificarlo o discriminarlo.

El análisis de esta parte del cuestionario nos permite determinar los siete argumentos siguientes:

a) Todos son decimales menos los enteros. Un número es decimal si tiene décimas, centésimas…

[2] Los errores detectados en las respuestas de los alumnos se han denominado por E1, E2, … , E16 (véase Capítulo 6). Los que no figuran significa que no se han cometido.

b) Todos son decimales menos los enteros. Un número es decimal si tiene parte decimal no nula.
c) Todos son decimales menos los enteros. Un número o su valor es decimal si está entre dos enteros o no es entero.
d) Todos son decimales. Los decimales son los que están representados en el sistema numérico decimal.
e) Todos son decimales excepto los irracionales. Un número, c, es decimal si $\exists\ a\ y\ b \in Z:\ a/b = c$.
f) Todos son decimales, porque pueden expresarse como un número seguido de una coma y decimales.
g) Todos son decimales excepto los que tienen expresión decimal infinita no periódica.

Estos argumentos quedan recogidos en las redes siguientes (Figura 4.7 y Figura 4.8).

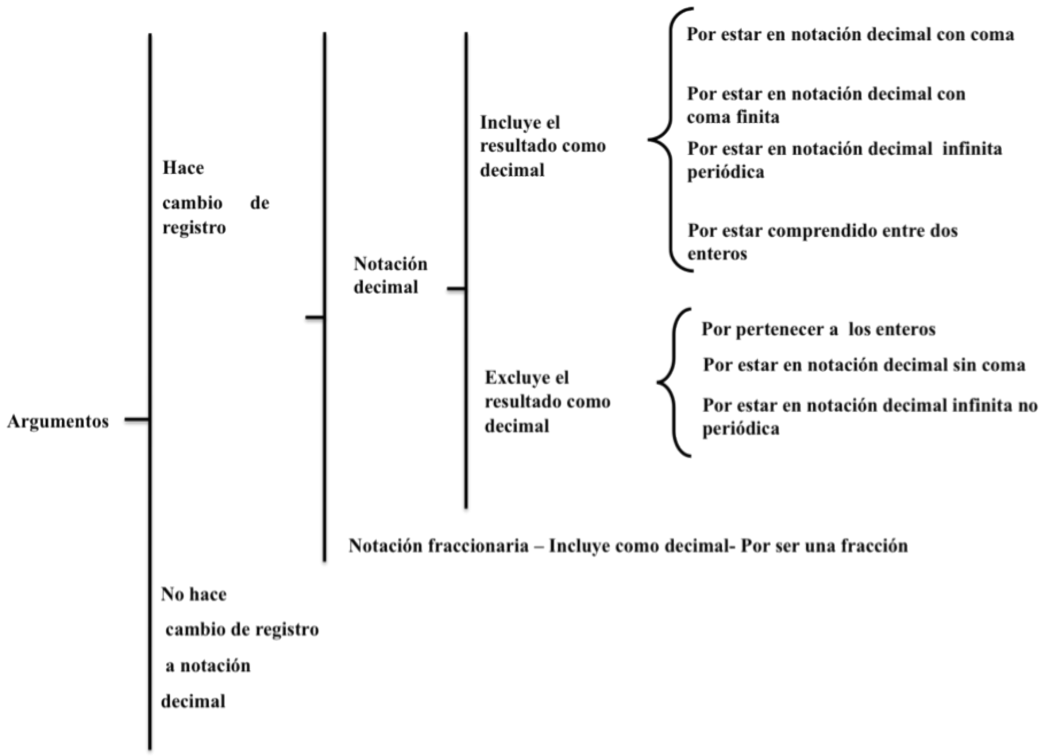


Figura 4.7: Red de argumentos de los alumnos que hacen cambio de registro

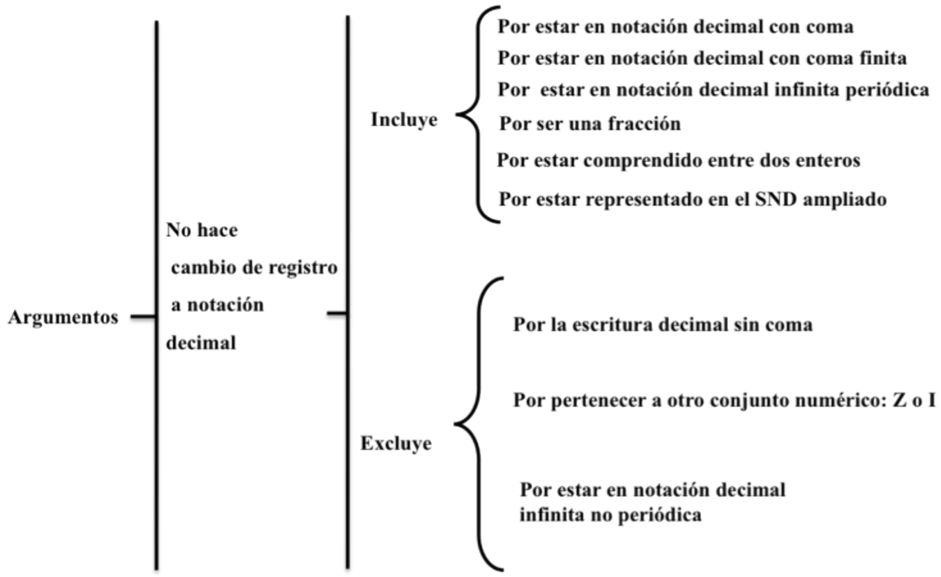


Figura 4.8: Red de argumentos de los alumnos que no hacen cambio de registro

Como se indicó al comienzo de este trabajo, las preguntas 1 y 2 del cuestionario se propusieron en momentos diferentes; ello nos permitió analizar la consistencia o no de los argumentos utilizados. Se observan, en general, algunos cambios. Los más relevantes son:

a) La exclusión de las fracciones como parte del conjunto de los decimales en la primera pregunta al incluirlas en la segunda.
b) Contrariamente, la de incluir los irracionales como decimales en la primera pregunta al excluirlos en la segunda.

Las argumentaciones erróneas de los alumnos las podemos organizar en cuatro grupos:

a) Identificar el número decimal como un número con coma o con la escritura decimal.
b) Seleccionar a los decimales tomando como referencia las fracciones y la escritura decimal.
c) Clasificar a los números como no decimales por la ausencia de coma en su representación.
d) Seleccionar a los números decimales tomando como referencia el orden.

En la Tabla 4.9 recogemos con detalle los comportamientos y los errores encontrados en esta pregunta.

COMPORTAMIENTOS	ERRORES
a) Los decimales son todos, menos los enteros (C) (25%) b) Todos son decimales (F) (37,5%) c) Todos excepto $1+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{3}\ \ y\ \ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (12,5%) d) Todos, excepto los irracionales (M) (D es Q) (12,5%)	a) Los enteros no son decimales (E1) (25%) b) Todas las escrituras con coma representan números decimales (E2) (87,5%) c) Todas las fracciones son decimales (E3) (100%) d) Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, son decimales (E6) (75%)

Tabla 4.9: Comportamientos y errores

Con relación a la tercera pregunta:

En la tercera pregunta el alumnado encuestado ha puesto en práctica diferentes procedimientos para representar las ocho expresiones numéricas:

a) Utilizar la escritura decimal para representar los números exactamente o por aproximación en la recta numérica.

b) Aplicar el método basado en el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$.

c) Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: División de un segmento en partes congruentes.

d) Considerar a $-2\sqrt{2}$ como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$.

e) Situar una fracción en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.

En la Tabla 4.10 reflejamos los porcentajes de alumnos por número y procedimiento.

	$\sqrt{2}$	0,75	0,333...	$-2\sqrt{2}$	2/3	2,75	¾	2,2333...
A	50%	87,5%	87,5%	25%	62,5%	87,5%	75%	87,5%
B	12,5%							
C					12,5%		12,5%	
D				12,5%				
E					12,5%			

Tabla 4.10: Porcentajes de alumnos por número y procedimiento

Conviene señalar que, en algunas representaciones, los alumnos recurren a procedimientos mixtos o combinaciones de los anteriores. En la Tabla 4.10 no hemos considerado esta división y hemos tenido en cuenta para el porcentaje el procedimiento más determinante de los realizados por el alumno.

Sabemos que, en el contexto de la recta numérica, el uso de la escritura decimal para representar números reales, no es un procedimiento eficaz. Sin embargo, en este estudio se observa que es el método utilizado con mayor frecuencia.

Asimismo, obtenemos que $\sqrt{2}$ no es representado por el 25% de los alumnos y $-2\sqrt{2}$ por el 50%.

Estudio particular: Los casos de las alumnas MA y C

Después de la representación global de los resultados, analizamos, a título de ejemplo, los casos de MA (Licenciada en Matemáticas) y C (titulada en Ingeniería Técnica).

MA considera que los números decimales son aquellos números que no son enteros ni irracionales. Cuando contesta a la pregunta 2 del cuestionario mantiene los mismos criterios que usó en la pregunta 1, de manera que sus respuestas en dicha pregunta 2, son del tipo:

-3,9 "es decimal, tiene un decimal. Es decimal puro".

0 "No es decimal, no tiene decimales".

10/5 "No es decimal, es un entero".

-7/3 "Es decimal, puede ser representado como decimal".

π "No es decimal, es irracional".

0,666… "Es decimal, es decimal periódico".

1,73205008… "No es decimal, es irracional".

La tercera cuestión relativa a la representación en la recta numérica, la aborda utilizando tres procedimientos diferentes:

a) Aplicar el método basado en el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$ y, en el caso de $-2\sqrt{2}$, aplicar el mismo procedimiento, utilizando un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 2 unidades.
b) Utilizar la escritura decimal para representar los números en la recta numérica. Esta situación la desarrolla en:

0,75 "A partir de cero (unidad) he tomado siete décimas y cinco centésimas partiendo de que estaba dividida la unidad en décimas".

2,75 “A partir de la unidad 2, tomo siete décimas y 5 centésimas”.

3 /4 “Equivale a 0,75. Lo hago igual que caso b”.

2,2333… “A partir de la unidad 2, tomo 2 décimas y 3 centésimas (3 milésimas…). Lo sitúo de manera aproximada. Si no, lo paso a decimal y lo represento”.

c) Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: división de un segmento en partes congruentes.

0,333… “Equivale a 3/9. Divido la unidad en 9 partes iguales y tomo 3”:

2/3 “Divido la unidad en tres partes iguales y tomo 2”.

MA, es una alumna que identifica los números decimales como aquellos números que son isomorfos a las fracciones propias e impropias (no enteros) y descarta como tales a las fracciones impropias (enteros) y a los irracionales. En la representación, utiliza técnicas propias de la representación decimal, fraccionaria o de los irracionales algebraicos, salvo en el caso de 2,2333…. A pesar de los errores, se puede observar un cierto equilibrio entre el uso en el campo numérico del pensamiento operacional y estructural.

La alumna C, identifica los números decimales como aquellos números que están expresados o son susceptibles de expresarlos, al cambiar de registro, con cifras decimales significativas. Para esta alumna dejan de ser decimales, únicamente, los números enteros. Cuando contesta a la pregunta 2 del cuestionario mantiene los mismos criterios que usó en la pregunta 1, de manera que sus respuestas en dicha pregunta 2, son del tipo: “Sí, si tiene cifras decimales o puede ser escrito con cifras decimales significativas” y “No, si no tiene cifras decimales o no puede ser escrito con cifras decimales significativas”.

La tercera cuestión relativa a la representación en la recta numérica la aborda utilizando dos procedimientos:

a) Utilizar la escritura decimal para representar los irracionales algebraicos en la recta numérica. Como este procedimiento tiene dificultades, acude a una representación aproximada.

Para representar $\sqrt{2}$, señala: “Está entre 1,4 y 1,5”:

En el caso de $-2\sqrt{2}$, lo considera como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$. Indica que $-2\sqrt{2}$ se representa: “A partir del caso anterior, se mide la distancia de o a $\sqrt{2}$, se toma el doble y se mide esa misma distancia hacia la izquierda a partir del cero”.

b) Utilizar la idea de representar el número mediante una fracción y situar ésta en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.

0,75 “Es 3 /4, se divide la distancia entre 0 y 1 en cuatros trozos y se coge la mitad de la segunda mitad”.
0,333… “Equivale a 1/3. Se divide la distancia entre 0 y 1 en tres trozos iguales y se marca en el primero”.
2/3 “Se divide la distancia entre 0 y 1 en tres trozos iguales y se toman los dos primeros”.
2,75 “A partir de 2, se divide en cuatro partes la distancia entre 2 y 3 y se toman las tres primeras”.
3 /4 “Se divide en 4 la distancia entre 0 y 1 y se marca donde llegue la tercera división”.
2,2333… “Se parte de 2. Si fuese 2,25 se dividiría en cuatro trozos la distancia entre 2 y 3 y se tomaría la primera división. Como es un poco menos, se marca un poco antes”.

C, es una alumna que identifica los números decimales como aquellos números que son isomorfos a las fracciones propias e impropias (no enteros) con los irracionales, ya que estos pueden ser expresados con cifras decimales significativas y descarta como tales a las fracciones impropias (enteros).

En la representación, utiliza técnicas propias de las representaciones decimal y fraccionaria o combinaciones de ambas; en casos de dudas por la inexactitud de la técnica, usa la aproximación. La primera la utiliza para los irracionales algebraicos; la segunda, para las fracciones 2/3 y 3 /4, y la combinación de ambas para los restantes casos.

C, es una alumna que manifiesta un pensamiento claramente operacional y lo pone en juego para dar respuesta a las diferentes preguntas del cuestionario.

4.5.2 Consideraciones finales

En el estudio con alumnos que tienen una buena formación matemática hemos encontrado cinco comportamientos diferenciados. Si lo comparamos con resultados anteriores, tenemos que en Socas (2001) se describen, para alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, dos tendencias, a saber:

a) El número decimal sinónimo de número real (85%).
b) El número decimal como aquel número expresado mediante una escritura numérica con coma (15%).

Asimismo, en el estudio anterior, Moreno y otros (2004), se encuentra, en alumnos de 1.º, de la titulación de Maestro, especialidad de Educación Infantil, las mismas posiciones extremas anteriores, pero la más significativa es la segunda:

a) El número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma.

En este trabajo también hemos encontrado, tal y como se ha mencionado anteriormente, las dos tendencias anteriores:

a) Número decimal como sinónimo de número real (25%).
b) Número decimal como número expresado mediante escritura numérica con coma, pero con ciertos matices relacionados con la presencia (o no) de infinitas cifras decimales periódicas (o no) (25%).

Sin embargo, hemos observado otra tendencia:

c) Número decimal como sinónimo de número racional (12,5%).

En relación con los errores, los resultados anteriores nos permiten identificar en las formas de pensar de los alumnos cuatro grupos:

a) Número decimal es cualquier número que admita una representación en el Sistema de Numeración Decimal.
b) Número decimal es cualquier número que esté expresado mediante una escritura con coma o que pueda expresarse de ese modo si se realiza el correspondiente cambio de registro.
c) Número decimal es el que viene expresado mediante una escritura decimal finita (se incluyen a los enteros) o decimal infinita y periódica.

d) Número decimal es aquel en cuya representación aparece una coma.

Hemos identificado, también, cinco procedimientos o combinaciones de ellos para representar expresiones numéricas en la recta numérica.

Cuando analizamos los casos de MA y C, observamos que son alumnas con comportamientos diferenciados en relación con los números decimales, con los Sistemas Numéricos y con las formas de representar los números en la recta numérica. La primera, muestra cierto equilibrio entre el uso en el campo numérico del pensamiento operacional y estructural, mientras que la segunda manifiesta un pensamiento claramente operacional que lo pone en juego para dar respuesta a las preguntas del cuestionario sobre números.

Encontramos, finalmente, en relación con los números decimales, en un grupo de alumnos que tienen una buena formación matemática, comportamientos y prácticas en los que se utiliza "lo decimal" como un lenguaje sin definiciones precisas, más propio de usos y prácticas fuera del sistema didáctico. Cabría esperar de estos alumnos usos y prácticas en el sistema didáctico en los que se utilizara "el decimal" como un lenguaje con definiciones precisas.

4.6 ESTUDIO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES PARA MESTROS: SEGUNDA FASE

El trabajo que nos proponemos en esta segunda fase sigue el marco de referencia planteado en el estudio anterior. Por ello, se inicia con la administración del cuestionario C2 a los alumnos de la ULPGC con un nivel medio en formación matemática en el año 2007 y se finaliza con la corrección y evaluación de los resultados. Los siguientes apartados abordamos la descripción y análisis de los resultados obtenidos y la exposición de las conclusiones

4.6.1 Descripción y análisis de los resultados

Primera pregunta

En relación con las respuestas dadas en la primera pregunta podemos recoger y estudiar los datos por columnas, mostrándose así los significados atribuidos a cada Sistema Numérico. Para ello se recopilan comportamientos comunes entre las respuestas de los 38 alumnos.

Para la columna de los naturales encontramos como respuestas más frecuentes las siguientes:

a) Los naturales son los números positivos y el cero (18,4%).
b) Los naturales son los de la tabla salvo matices (Por ejemplo con el 35.521 o con el 0 que son excluidos) (39,5%).

Para los enteros tenemos:

a) Los enteros de la tabla salvo matices (55,3%).

Para la columna de los decimales observamos:

a) Los decimales son los números expresados con notación decimal con coma (Comportamiento A) (57,9%).
b) Los números decimales son todos excepto los enteros (Comportamiento C) (28,9%).
c) Los decimales son las escrituras con coma y fracciones (Comportamiento B) (10,5%).

Los racionales son:

a) Los expresados en notación fraccionaria (15,8%).
b) Los positivos y el cero (15,8%).
c) Las fracciones positivas (10,5%).
d) Todos excepto las expresiones numéricas en las que aparecen signos de operaciones (7,9%).
e) Los no elegidos como irracionales (7,9%).

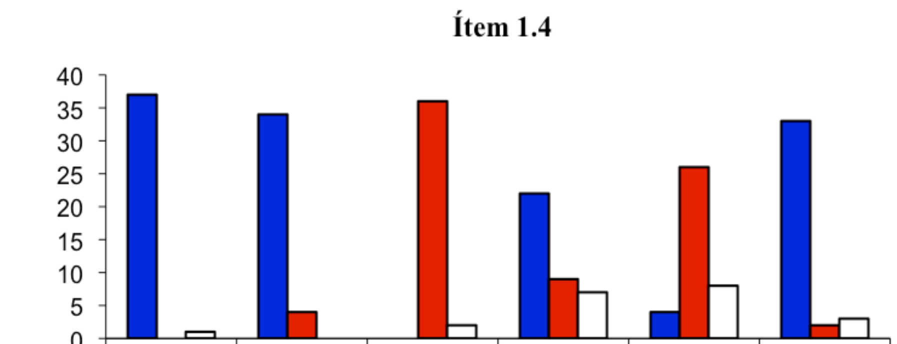
En la columna de los irracionales tenemos:

a) Los no elegidos como racionales (34,2%).
b) Los negativos (21,1%).
c) Los expresados con notación radical o fraccionaria (7,9%).
d) Los expresados con notación radical (5,3%).
e) Ninguno (5,3%).

Los números reales “son todos” es la respuesta mayoritaria con un 26,3%. Se dan otros tipos de respuestas tales como: todos excepto las expresiones que contienen raíz o los que están en notación fraccionaria, los números positivos, considerar R y N isomorfos, etc.

Los datos por fila nos proporcionan información, por un lado, sobre las relaciones de inclusión entre los Sistemas Numéricos y, por otro, sobre la aplicación o no del mismo tratamiento a estructuras iguales. Asimismo, se puede observar la frecuencia en la que cada estructura es elegida como natural, entero, decimal…

En este sentido, observamos que no se establecen correctamente las relaciones entre conjuntos numéricos. Así, números elegidos de forma correcta como naturales y enteros, sin embargo son excluidos como decimales. Por ejemplo, el 35.521 es excluido por el 84,2% como decimal, pero es elegido por el 84,2% como entero y por el 92,1% como natural. Por lo general se da que si un número es elegido como entero es excluido como decimal. En el siguiente gráfico (Tabla 4.11) mostramos este resultado para el número 2 (Ítem 1.4).



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	37	34	0	22	4	33
No	0	4	36	9	26	2
Blanco	1	0	2	7	8	3

Tabla 4.11: Diagrama de barras

También se da la situación en la que se elige un número correctamente como racional, por ejemplo -7/3, pero incorrectamente como irracional, ya que, por ejemplo se identifican a estos con los negativos.

Otro caso lo hallamos en $1+\sqrt{2}$, que es elegido como irracional por el 34,2%, pero es excluido como real por el 31,6%. Hay un 23,7% que no establece la pertenencia de éste a los reales.

En cuanto a las igualdades, $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$, observamos que el alumnado no las establecen por lo general correctamente. La respuesta dada a cada expresión es diferente y parece depender del significado atribuido a cada conjunto numérico, de la realización o no de cambio de registro o de la identificación de operaciones en vez de estructuras. Por ejemplo, un alumno clasifica a 2 como natural, entero, no decimal, racional, no irracional y real; pero, a $\frac{10}{5}$ lo excluye como entero a pesar de elegir como enteros a $\left\{35521,\ 0,\ 2,\ \left(\sqrt{2}\right)^2\right\}$. Otra situación es la del estudiante que clasifica de igual manera que el anterior al 2, pero a $\frac{10}{5}$ como natural, no entero, decimal, no racional, irracional y real. En esta caso, se considera que:

a) Los naturales son los números positivos.
b) Los enteros son los de la tabla, salvo matices.
c) Los decimales son todos excepto los enteros.
d) Los racionales son todos excepto los expresiones que indican operaciones.
e) Los irracionales son los expresados en forma de fracción.
f) Los reales son los positivos.

Con respecto a los errores detectados en esta pregunta consideramos principalmente los que hemos hallado en las respuestas de la columna de los decimales y su relación con las restantes, y que se obtienen en gran parte de los comportamientos descritos con anterioridad. De esta manera distinguimos ocho errores a saber:

a) Los números enteros no son decimales (E1) (50%).
b) Todo número expresado en notación decimal con coma es decimal (E2) (94,7%).
c) Todas las fracciones representan números decimales (E3) (42,1%).
d) Ninguna fracción es decimal (E5) (44,7%).
e) Algunos o todos los irracionales, no expresados en notación decimal con coma, son decimales (E6) (47,5%).
f) Hay decimales que no son racionales (E9) (71,1%).
g) Hay decimales que son irracionales (E10) (55,3%).
h) Hay decimales que no son reales (E11) (36,84%).

Segunda pregunta

En la segunda pregunta, hemos estudiado el tipo de elección realizada por el alumno y la explicación que la acompaña. De esta manera, podemos detectar comportamientos comunes y argumentos para excluir o elegir un número como decimal.

Los comportamientos comunes que hemos encontrado son los siguientes:

a) Se marcan como decimales los números expresados con notación decimal con coma (A) (42,1%).
b) Se seleccionan como decimales a todos excepto los enteros (C) (15,6%).
c) Comportamiento que define una posición en la que se entremezclan los comportamientos anteriores (B) (28,9%). Se suelen marcar las expresiones que se corresponden con escrituras decimales con coma, se excluyen a los enteros, se eligen todas o algunas fracciones y algunos de los irracionales (no expresado en notación decimal) son excluidos o se dejan en blanco.

Se da que los comportamientos mayoritarios en la primera pregunta están presentes también en la segunda, pero con porcentajes inferiores.

Los argumentos (Ai) que se aplican para elegirlo son:

a) Porque está en notación decimal con coma (A1) (71%).
b) Porque es una expresión decimal periódica (A7) (15,8%).
c) Porque se puede, realizando un cambio de registro, expresar en notación decimal con coma (A2) (34,2%).
d) Porque es una cantidad inexacta o al realizar el cambio de registro a notación decimal se obtiene una cantidad inexacta (A3) (7,9%).
e) Porque expresan partes no enteras de la unidad o al realizar el cambio de registro a notación decimal se obtiene una cantidad que indica partes no enteras de la unidad (A4) (7,9%).
f) Porque es una fracción (A13) (5,3%).

Los argumentos (Bi) que se aplican para excluirlo son:
a) Porque es un número expresado con una escritura sin coma (B1) (23,7%).
b) Porque el número pertenece a otro conjunto numérico (B5) (N, Z, No Z, Q o I). Este argumento también se aplica después de realizar el cambio de registro a la notación decimal (65,8%).
c) Porque es una cantidad exacta o al realizar el cambio de registro a notación decimal se obtiene una cantidad exacta (B3) (5,3%).
d) Porque es una expresión numérica en la que aparecen números y signos de operaciones (B9) (5,3%).

e) Porque es una fracción (B6) (13,2%).
f) Porque el cero “no tiene valor” (B11) (5,3%).

En este caso podemos decir, tal y como se observa, que el número es elegido como decimal por la escritura y, es excluido, por la pertenencia a otro conjunto o por la escritura.

Con estos argumentos podemos elaborar una red que relaciona los argumentos con el cambio de registro a la notación decimal. Esta red es aplicable a cada alumno y por ítem. Como se expresa, a modo de ejemplo, en la Figura 4.9 y Figura 4.10.

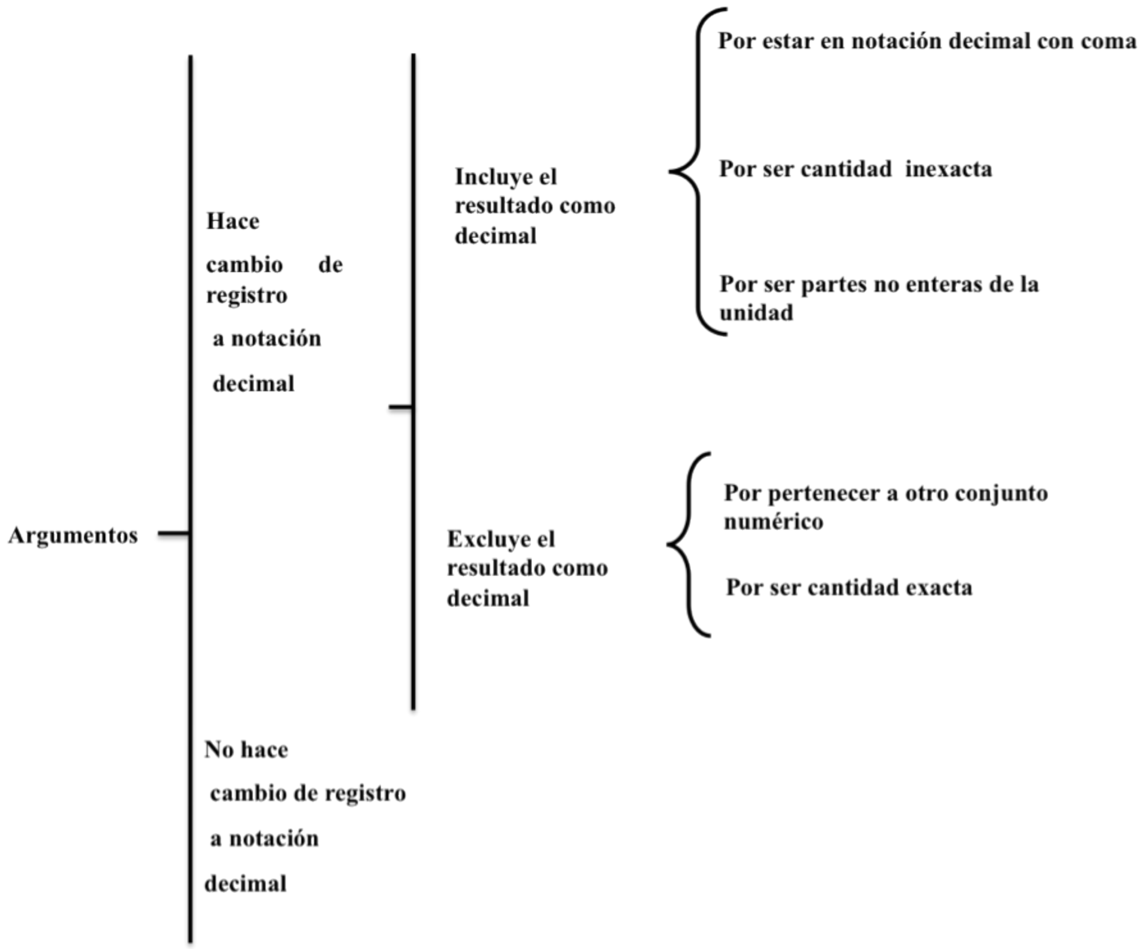


Figura 4.9: Red de argumentos de los alumnos que hacen cambio de registro a la notación decimal

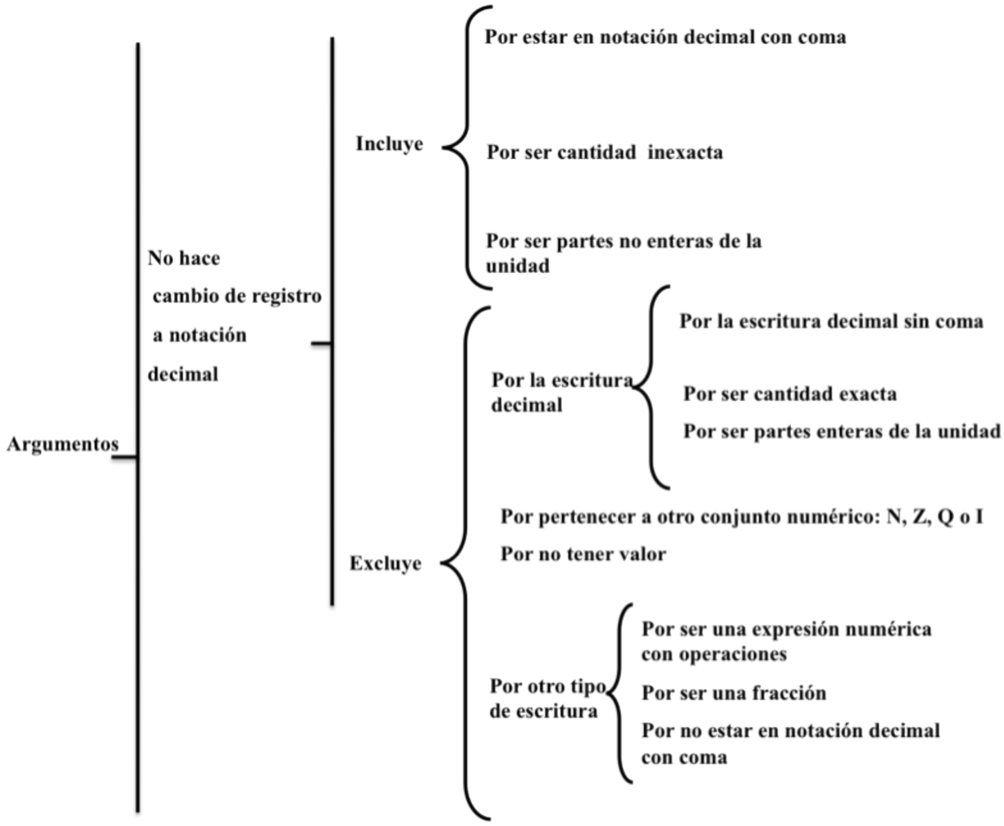


Figura 4.10: Red de argumentos de los alumnos que no hacen cambio de registro a la notación decimal

Los comportamientos están determinados por los argumentos utilizados y podemos ver qué argumentos acompañan a cada comportamiento. En la Tabla 4.12 mostramos la correspondencia entre argumentos y comportamientos.

COMPORTAMIENTOS	ARGUMENTOS
A	A1, A4, B1, B9, B5, B6 y B11
B	A1, A2, A4, B1, B5 y B11
C	A1, A2, A3, B1, B3 y B5

Tabla 4.12: Correspondencia entre comportamientos y argumentos

Se pone de manifiesto que hacer el cambio de registro a la notación decimal determina de forma general los comportamientos B y C.

En cuanto a la consistencia de las respuestas dadas hasta el momento podemos decir que se observa fundamentalmente un ligero aumento en la exclusión de los enteros, en la segunda pregunta, que va del 50% al 65,9%. Por lo general existe, en ambas preguntas, la tendencia a elegir de forma mayoritaria a los números con coma como decimales, le siguen los expresados en notación fraccionaria (no enteras, en la segunda pregunta), π, $\pi - 5$ y $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, después $1+\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{3}$ (y $-\sqrt{7}$ en la primera pregunta) y, por último, los enteros.

Los errores cometidos por los alumnos son los siguientes:

a) Los enteros no son decimales (E1) (65,9%).
b) Todo número expresado en notación decimal con coma es decimal (E2) (94,7%).
c) Todas las fracciones representan números decimales (E3) (50%).
d) Ninguna fracción es decimal (E5) (42,1%).
e) Algunos o todos los irracionales, no expresados en notación decimal con coma, son decimales (E6) (63,2%).

En la Tabla 4.13 ponemos de manifiesto la relación entre los errores y los argumentos.

ERRORES	ARGUMENTOS
E1	B1, B3, B5 y B11
E2	A1 y A7
E3	A2, A4 y A13
E5	B1, B5 y B6
E6	A2 y A3

Tabla 4.13: Correspondencia entre errores y argumentos

Podemos comentar que la información que nos aporta los datos de la tabla es que la escritura y el proceso, cambio de registro a la notación decimal, influyen de forma general en los resultados obtenidos.

Tercera pregunta

En la tercera pregunta el alumnado ha puesto en práctica diferentes procedimientos para representar las ocho expresiones numéricas. En la experiencia anterior (año 2006) hemos clasificado estos procedimientos de la forma siguiente:

a) Utilizar la escritura decimal para representar los números en la recta numérica.

b) Aplicar el método basado en el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$.

c) Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: División de un segmento en partes iguales.

d) Considerar a $-2\sqrt{2}$ como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$.

e) Situar una fracción en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.

En esta investigación hemos observado que los procedimientos (b) y (c) no se aplican para representar las fracciones (o para cada fracción generatriz de una escritura decimal) y los irracionales ($\sqrt{2}$ y -$2\sqrt{2}$), respectivamente. Sin embargo, el procedimiento (a) es utilizado por el 84,2 % de los estudiantes. La combinación de los procedimientos (a) y (e), el primero, para las escrituras decimales y, el segundo, para las fracciones, se da en un 2,6 % . De la misma manera, la de los procedimientos (a) y (d), el primero para las escrituras decimales y fracciones y, el segundo, para los irracionales, también se da un 2, 6 % .

Los errores hallados son los siguiente:

a) A $\frac{3}{4}$ se le hace corresponder un punto en la recta distinto que a 0,75.

b) $\frac{3}{4} < 0{,}75$.

c) Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ son interpretadas, respectivamente, como 2,3 y 3,4.

d) 0,75 y 0,333… se sitúan a la izquierda del cero (7,9%).

e) 0,75 es situado entre 0 y 0,1.

f) $\sqrt{2}$ se iguala a 2 o se aproxima a 4 (7,9%).

g) $-2\sqrt{2}$ se le asigna, en unos casos, el punto correspondiente al cero y, en otros, el del -1 (10,5%). También se sitúa en el mismo punto que -1,4.

h) $-2\sqrt{2}$ es situado entre -1 y 0 (2,6%).

i) Elegir una unidad, distinta a la tomada en la pregunta, para situar una fracción en la recta numérica por el procedimiento (e).

j) $\sqrt{2}$ se iguala a 1 y $-2\sqrt{2}$ a -1.

Resultados relacionados con la aplicación y corrección del cuestionario C2

Durante la aplicación del cuestionario no se necesitaron, por lo general, explicación sobre las consignas. En este sentido destacamos que las preguntas formuladas estaban relacionadas con no recordar algún tema en particular, sobre todo los conjuntos numéricos y las técnicas para representar reales en la recta. Un ejemplo de pregunta que formularon varios alumnos fue: ¿Se me pregunta por $\frac{1}{3}$ o por su resultado?

Contestaron a todas las preguntas excepto un 5,3% que no contestó a la tercera.

Todos los alumnos terminaron la prueba en el tiempo estimado de una hora por sesión, por lo que se considera adecuado el tiempo previsto.

Con respecto a las preguntas, podemos señalar, a partir de la corrección del cuestionario y con el objetivo de clarificar las respuestas, que en la tercera sería conveniente, por un lado, añadir al enunciado la condición de que el alumno elabore una explicación escrita y breve del procedimiento aplicado. Por otra parte, ofrecer la posibilidad de representar por separado cada número.

4.6.2 Consideraciones finales

En este estudio hemos encontrado tres comportamientos diferenciados. Si lo comparamos con resultados anteriores, tenemos que en Socas (2001) se describen, para alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, dos tendencias, a saber:

c) El número decimal sinónimo de número real (85%).
d) El número decimal como aquel número expresado mediante una escritura numérica con coma (15%).

Asimismo, en el estudio anterior, Moreno y otros (2004), se encuentra, en alumnos de 1.º, de la titulación de Maestro, especialidad de Educación Infantil, las mismas posiciones extremas anteriores, pero la más significativa es la segunda:

a) El número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con coma.

En el trabajo del año 2006 también hemos encontrado, tal y como se ha mencionado anteriormente, las dos tendencias anteriores:

a) Número decimal como sinónimo de número real (25%).

b) Número decimal como número expresado mediante escritura numérica con coma, pero con ciertos matices relacionados con la presencia (o no) de infinitas cifras decimales periódicas (o no) (25%).

Sin embargo, encontramos otra tendencia:

c) Número decimal como sinónimo de número racional (12,5%).

En este estudio hallamos también el comportamiento (A) como mayoritario, en el que el número decimal es el que está expresado con notación decimal con coma (57,9% en la primera pregunta y 42,1% en la segunda). Asimismo, observamos un segundo comportamiento en el que los decimales son todos menos los enteros, pero no necesariamente se establece que todos son reales. Por ello algunos de estos alumnos consideran número decimal sinónimo de número real no entero. No se dan las tendencias de número decimal sinónimo de número real ni sinónimo de racional.

En relación con los errores, los resultados nos permiten identificar en las formas de pensar de los alumnos dos grupos:

a) Número decimal es cualquier número que esté expresado mediante una escritura con coma o que pueda expresarse de ese modo si se realiza el correspondiente cambio de registro.
b) Número decimal es aquel en cuya representación aparece una coma.

Finalmente, en relación a la tercera pregunta, hemos identificado cinco procedimientos o combinaciones de ellos para representar expresiones numéricas en la recta numérica, en los que el más aplicado es el de utilizar la notación decimal con un 84,2%.

4.7 DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

De forma general, se presentan mejores resultados en el primer grupo que en el segundo.

Con respecto al primer objetivo consideramos que la organización de los sistemas numéricos que guía el análisis de contenido matemático, no está presente en el alumnado. Se presentan ideas poco claras sobre los conjuntos numéricos y las relaciones que se establecen entre ellos.

El primer grupo de alumnos se fija para clasificar los números dados en aspectos, entre otros, relacionados con el signo (positivo) del número y con las escrituras: decimal, fraccionaria y la de los radicales. Mientras que en el segundo grupo aplican, además, el criterio de ser una expresión numérica que contiene operaciones: Un 7,9 % elige como números racionales a todos excepto las expresiones numéricas que contengan operaciones.

Las respuestas dadas, en su mayoría, para los naturales y enteros son, salvo matices, las correctas para ambos grupos ((N: 87,5%, Z: 100%) y (N: 39,5%, Z: 55,3%), respectivamente). Esta situación no se da con el resto de los conjuntos numéricos, excepto para los reales (100% y 26,3%, respectivamente). En la Tabla 4.13 describimos los significados que los alumnos tienen sobre cada conjunto, pero con mayor porcentaje.

	PRIMER GRUPO (AÑO 2006)	SEGUNDO GRUPO (AÑO 2007)
N	La respuesta correcta salvo matices con 35.521, 0, $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ (87,5%)	La respuesta correcta salvo matices con 35.521 (39,5%)
Z	La respuesta correcta salvo matices con 35.521, 0, $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ (100%)	Los enteros de la tabla salvo matices (55,3%)
D	- $D \approx R$ (37,5%) - Los números expresados con escritura decimal con coma (12,5%)	Los números expresados con escritura decimal con coma (57,9%)
Q	- La respuesta correcta , salvo matices (0,666… y $\pi - 5$) (62,5%) - Los expresados en forma de fracción y los enteros (25%)	- Los expresados con notación fraccionaria (15,8%) - Los positivos y el cero (15,8%)
I	- La respuesta correcta (37,5%) - Los irracionales y 0,666… (37,5%)	Los no elegidos como racionales (34,2%)
R	La respuesta correcta (100%)	La respuesta correcta (26,3%)

Tabla 4.13: Significado más frecuente de cada conjunto numérico

Tal y como se observa, en ningún caso, se distinguen entre fracciones decimales y no decimales, conceptos básicos en la organización establecida.

En cuanto a las inclusiones entre conjuntos numéricos se presentan, en ambos grupos, mayores dificultades en la de Z en D y la de D en Q.

En relación con el segundo objetivo, podemos comentar que los resultados obtenidos sobre los decimales en cuanto a comportamientos y, como consecuencia, en cuanto errores vienen determinados por lo significados asignados a estos números, expresados en los argumentos, y por la manera de gestionarlos al presentarlos en sistemas de representación distintos. Por ejemplo, nos encontramos con alumnos que consideran que los números decimales son los números expresados en escritura decimal con coma que asignan valores diferentes a 0,5 y a $\frac{1}{2}$. En este caso, nos encontramos con tres situaciones:

a) 0,5 y $\frac{1}{2}$ representan escrituras distintas (decimal y fraccionaria) y, por tanto, número distintos.

b) 0,5 representa un número decimal y $\frac{1}{2}$ una operación y como no es lo mismo la operación que el resultado no se establece la igualdad.

c) $\frac{1}{2} = 0{,}5$, luego son decimales.

En la Tabla 4.14 mostramos como se presentan más, situaciones análogas a las dos primeras del ejemplo, para los alumnos del segundo grupo que para los del primero. Se consideran las tres preguntas.

	PRIMER GRUPO (AÑO 2006)	SEGUNDO GRUPO (AÑO 2007)
PRIMERA PREGUNTA No se establece: $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$	37,5%	89,5%
SEGUNDA PREGUNTA No se establece: $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2$	0%	50%
SEGUNDA PREGUNTA No se establece: $\frac{1}{2} = 0{,}5$	0%	47,4%
TERCERA PREGUNTA No se establece: $0{,}75 = \frac{3}{4}$	0%	55,3%

Tabla 4.14: Porcentajes del no establecimiento de la igualdad de estructuras, representadas de formas distintas

Debemos comentar que la definición de número decimal dada en el análisis del contenido matemático no aparece en los argumentos del alumnado. En ninguno de los grupos no se da la distinción entre fracciones decimales y no decimales, al igual que en la primera pregunta.

En relación con los comportamientos destacamos que solo en el segundo grupo aparece el que consiste en elegir como decimales solo los que están representados con notación decimal con coma con 42,1%; además, se constituye como mayoritario. En los dos grupos se da el comportamiento de seleccionar a todos como decimales excepto los enteros, pero con porcentajes distintos: 25 % y 15,6 %, para el primer y segundo grupo respectivamente. De igual manera, solo en el primer grupo se observa el comportamiento caracterizado por elegir a todos como decimales (37,5%).

De la comparación de los esquemas realizados para los argumentos esgrimidos por los dos grupos podemos observar los argumentos comunes y no comunes.

Con respecto de los comunes diremos que se toman como referencia la escritura decimal (con coma o sin coma) y la pertenencia a los enteros o a los irracionales para seleccionar o no a los números como decimales.

Para los no comunes, el primer grupo atribuye las escrituras decimal finita, la infinita periódica y la fraccionaria, a los decimales, y la infinita no periódica a los irracionales. En el primer grupo aparecen también dos argumentos que no se dan en el segundo. Estos están relacionados con el orden y con la existencia de un sistema de representación (SND) para todos los reales, respectivamente.

En el segundo grupo se aplican argumentos que podemos decir que están relacionados con la medida y que no se utilizan en el primero. Otros argumentos presentes solo en este grupo están relacionados con el significado atribuido al cero, la consideración de las fracciones como no decimales, la identificación de algunas escrituras con operaciones en vez de con estructuras y la no coincidencia de la escritura con la notación decimal con coma.

Con respecto al tercer objetivo concluimos que para el primer grupo el mapa conceptual que guió el análisis de contenido matemático se observa parcialmente. Se hace uso del teorema de Pitágoras, para los irracionales cuadráticos, y del teorema de Thales, para $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$, aunque en este último caso no se aplica a todos los racionales de la lista. Sin embargo, para ambos grupos, es el uso de la notación decimal el procedimiento que se utiliza de forma mayoritaria para representar de forma exacta o aproximada cualquier número real de la lista (75% y 84,2%, respectivamente). Esto pone de manifiesto que el proceso, conversión entre la representación digital y la analógica (recta numérica) no se hace a través de la estructura. El alumnado no se plantea qué estructura es la que tiene que representar para poder aplicar el procedimiento adecuado. Por ello decimos que se utiliza más el sentido operacional del número que el estructural y procesual.

Con respecto a los errores distinguimos comunes de los no comunes a las dos muestras. Los comunes son los siguientes:

E1: Los enteros no son decimales.

E2: Todo número expresado en notación decimal con coma es decimal.

E3: Todas las fracciones representan número decimales.

E6: Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, son decimales.

Estos errores pueden estar relacionados con el cambio de registro a la notación decimal y con la identificación de los decimales con la escritura decimal con coma.

Entre los errores no comunes se tiene:

Para el primer grupo:

E7: Son decimales los expresados con notación decimal finita e infinita periódica.

E12: $D \approx R - Z$.

E13: $D \approx R$.

E15: $D \approx Q$.

Para el segundo grupo:

E5: Ninguna fracción es decimal.

E10: Hay decimales que son irracionales.

E11: Hay decimales que no son reales.

A $\frac{3}{4}$ se le hace corresponder un punto distinto de la recta que a 0,75.

Estos errores pueden estar relacionados con el cambio de registro a la notación decimal, la identificación de los decimales con la escritura decimal con coma, el significado atribuido a algunas escrituras como operación y los significados dados a los demás conjuntos numéricos y relaciones entre ellos.

Pensamos que muchos de estos errores tienen su origen en una ausencia de sentido, concretamente están relacionados con cuestiones que se han desarrollado erróneamente en la Educación Primaria y Secundaria.

Con respecto a lo que la conjetura planteada sostiene diremos que se verifica en este estudio experimental, salvo algún matiz. Tenemos que para el primer grupo hemos encontrado las tendencias siguientes:

d) Número decimal como sinónimo de número real (37,5%).
e) Número decimal como número expresado mediante escritura numérica con coma, pero con ciertos matices relacionados con la presencia (o no) de infinitas cifras decimales periódicas (o no) (25%).

Sin embargo, encontramos otra tendencia:

f) Número decimal como sinónimo de número racional (12,5%).

Para el segundo grupo, tal y como ya hemos comentado, hallamos también el comportamiento (A) como mayoritario, en el que el número decimal es el que está expresado con notación decimal con coma (57,9% en la primera pregunta y 42,1% en la segunda). Se observa un segundo comportamiento en el que los decimales son todos menos los enteros, pero no necesariamente se establece que todos son reales. Por ello algunos de estos alumnos consideran número decimal sinónimo de número real no entero. No se dan las tendencias de número decimal sinónimo de número real ni sinónimo de racional.

Ambos grupos aplican el sentido operacional del número en su representación decimal para representar cualquier número real en la recta.

De esta manera, encontramos en relación con los números decimales, en un grupo de alumnos, con niveles de formación matemática distintos, comportamientos y prácticas en los que se utiliza "lo decimal" como un lenguaje sin definiciones precisas, más propio de usos y prácticas fuera del sistema didáctico. Cabría esperar de estos alumnos usos y prácticas en el sistema didáctico en las que se utilizara "el decimal" como un lenguaje con definiciones más precisas.

Finalmente, los diferentes resultados obtenidos en este estudio nos permitieron diseñar e implementar el estudio definitivo.

CAPÍTULO 5. ESTUDIO DEFINITIVO CON ESTUDIANTES PARA MAESTROS

5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo contiene la información relativa al Estudio definitivo realizado en esta investigación.

Comenzamos con la presentación de la metodología aplicada que abarca, inicialmente, la exposición de los objetivos, cuya explicación se ha abordado en el Capítulo 2, y de la conjetura planteada. También, comentamos la muestra elegida para el estudio y describimos las fases del experimento y los instrumentos de recogida de datos. En este sentido, se presenta y se describe el esquema del experimento de enseñanza llevado a cabo. Distinguimos tres fases: diagnóstico, retroalimentación y revisión. Asimismo, se abordan los siguientes puntos, contenidos en las fases anteriores:

- Diseño y administración del cuestionario (C2) (Anexo 1).
- Diseño y administración de la unidad temática: Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración.
- Diseño y administración de la unidad temática: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas.
- Las entrevistas.
- La tarea denominada Producción.

Seguidamente, se exponen los resultados obtenidos en las fases de diagnóstico y revisión y se lleva a cabo una comparación de los mismos. Del mismo modo, se presentan los resultados obtenidos en la tarea denominada Producción.

Continuamos, realizando una discusión de los resultados obtenidos en las fases de diagnóstico y revisión. Para ello, interpretamos los datos obtenidos haciendo uso de nuestro Marco Conceptual (Capítulo 2). También, confrontamos estos resultados con los obtenidos en investigaciones similares, recogidas en el Capítulo 1.

Finalizamos con la exposición de las conclusiones con respecto a los objetivos y conjetura planteados.

5.2 METODOLOGÍA

En este epígrafe tratamos los siguientes elementos del marco metodológico:

- Objetivos y conjetura de investigación. Población y muestra.
- Fases e instrumentos de recogida de datos.

El tratamiento se lleva a cabo con el desarrollo de estos elementos en los subapartados siguientes.

5.2.1 Objetivos y conjetura de investigación. Población

A continuación exponemos los objetivos, conjetura y población de este estudio. Nos limitamos solo a la descripción de estos elementos de la metodología, ya que la explicación de ellos se ha tratado en el Capítulo 2.

Objetivos:

a) Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. En definitiva, encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) desde los decimales.
b) Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.
c) Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.
d) Diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

Conjetura:

La conjetura está basada en la idea de que estos alumnos, con una formación matemática por lo general equivalente a la que sostienen los currículos de la Educación Secundaria o el Bachillerato, muestran grandes dificultades cuando se enfrentan a actividades numéricas en las que se pone en juego más el pensamiento estructural y procesual que el operacional. De esta manera, seleccionan los números decimales, entre otros números, o los relacionan con otros sistemas numéricos, teniendo en cuenta más su escritura decimal que su estructura. Asimismo, en las situaciones en las que se representan números en la recta numérica pensamos que la conversión a la notación decimal es una estrategia mayoritaria. Sin embargo, consideramos que una organización diferente (Figura 5.1), tal y como comentamos más adelante, de la enseñanza de los sistemas numéricos puede favorecer un cambio en las concepciones de los alumnos del sistema numérico de los decimales.

Población:

La muestra elegida fue de 28 estudiantes de primer curso de la especialidad de Maestro de Educación Musical de la ULPGC.

5.2.2 fases e instrumentos de recogida de datos

Para la evaluación de los objetivos planteados inicialmente en este trabajo se ha diseñado e implementado un experimento de enseñanza guiado por conjeturas y un cuestionario, y se han realizado entrevistas e informes individuales.

El experimento de enseñanza se organiza en tres fases, tal y como se señala en la Figura 5.2.

Comenzamos comentando la organización del experimento de enseñanza. La primera fase es de diagnóstico y de discusión a priori, la segunda es de retroalimentación y discusión a posteriori y la tercera es de revisión y producción.

En la primera fase, diagnóstico y discusión a priori, se utiliza un cuestionario cuyo diseño y administración trataremos en el siguiente punto, se corrigen las pruebas y se seleccionan seis alumnos que son entrevistados.

La administración del cuestionario se realiza en dos sesiones distintas, para analizar la consistencia de las respuestas. Las entrevistas (entrevistas iniciales) tienen por objeto obtener con mayor precisión la información que nos aportan las respuestas comunes de los encuestados que son audiograbadas. Asimismo, se realiza una discusión a priori con todo el grupo, sobre las diferentes respuestas dadas en el cuestionario.

En la fase segunda, la retroalimentación se genera, especialmente, a partir de dos unidades de aprendizaje: “Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración” y “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas”

La primera, trata del estudio de los números y sus diferentes escrituras considerando como elemento organizativo “lo decimal” y “la numeración decimal”. De manera concreta para su elaboración nos apoyamos en una organización de “lo decimal” y “la numeración decimal” en el entorno escolar, en el que el conjunto de los números decimales es considerado como un sistema numérico que permita conectar y dar sentido a los diferentes números y la escritura decimal es una representación que debe ser diferenciada del número decimal y que permite establecer relaciones significativas con las otras representaciones o escrituras de los diferentes números. En el siguiente esquema (Figura 5.1) se recoge la organización conceptual de la propuesta, descrita también en los capítulos 3 y 4.

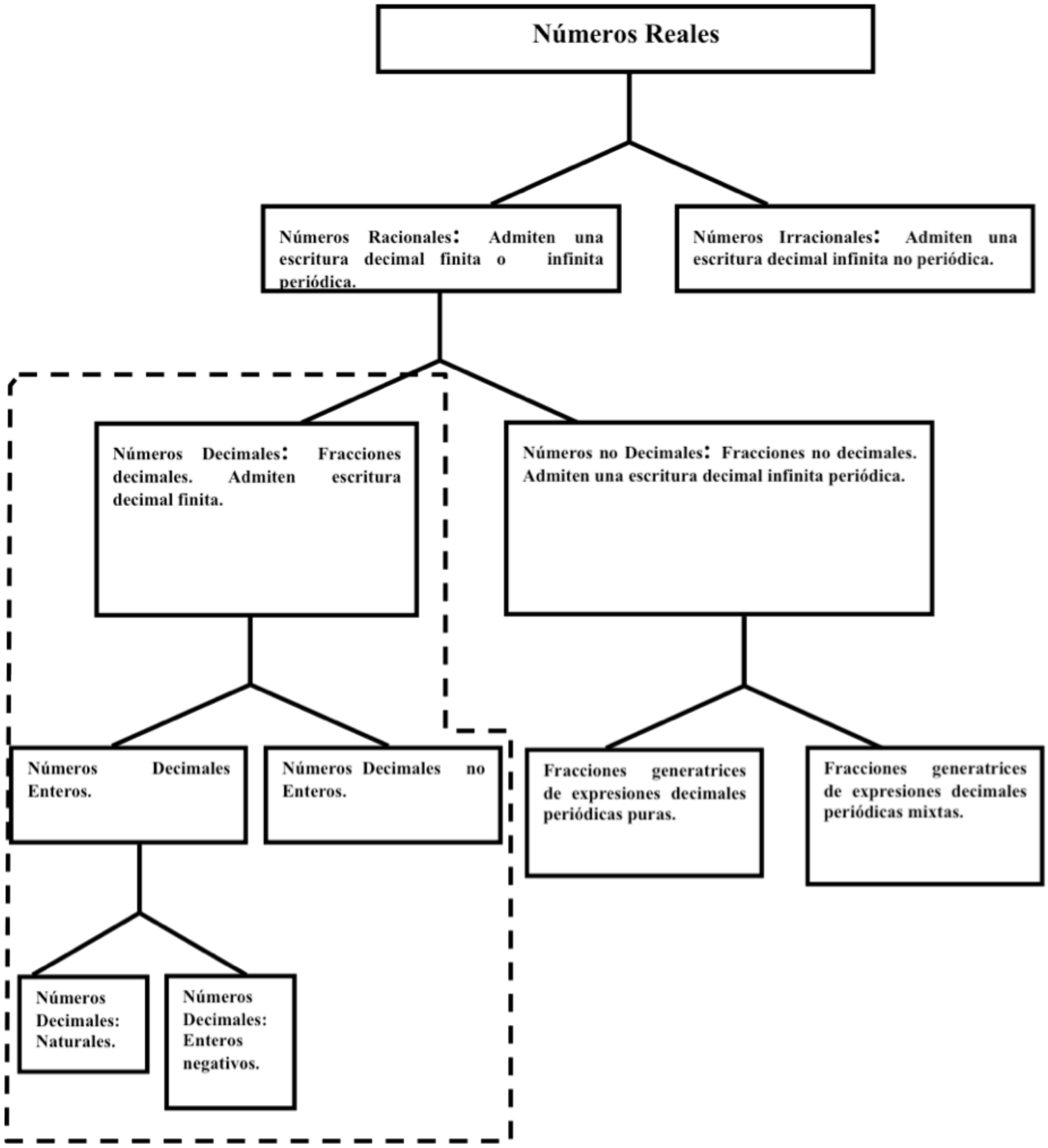


Figura 5.1: Organización de los sistemas numéricos y de los sistemas de numeración

La segunda, "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas", supone proporcionar al alumnado un conocimiento teórico, técnico y práctico que permita analizar y reflexionar sobre el objeto número y sus diferentes escrituras y cómo estas confusiones entre el objeto matemático y sus escrituras generan dificultades que a veces se convierten en obstáculos. La elaboración de esta unidad de aprendizaje constituye una adaptación para este alumnado del capítulo: *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria* de Socas (1997). En definitiva, este conocimiento pretende proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas teóricas, técnicas y prácticas, que les sirvan para reflexionar sobre las causas de los errores que han cometido al contestar las preguntas del cuestionario.

En la tercera fase, revisión y producción, se vuelve administrar el mismo cuestionario y de igual forma que al principio se selecciona una muestra de alumnos para ser entrevistados (entrevistas finales o de la tercera fase que fueron también audiograbadas). Igualmente, en esta fase, se les pide a cada estudiante una tarea concreta que denominamos, producción, en la que cada alumno presenta un informe escrito sobre sus dificultades, obstáculos y errores con los números y sus escrituras, en relación con las tres preguntas del cuestionario, y referidas a los resultados expresados en la primera prueba del cuestionario, que se les había devuelto fotocopiado.

Esto nos ha permitido observar la evolución y discusión de los resultados, mediante las diferentes actividades realizadas y documentos aportados en el experimento de enseñanza.

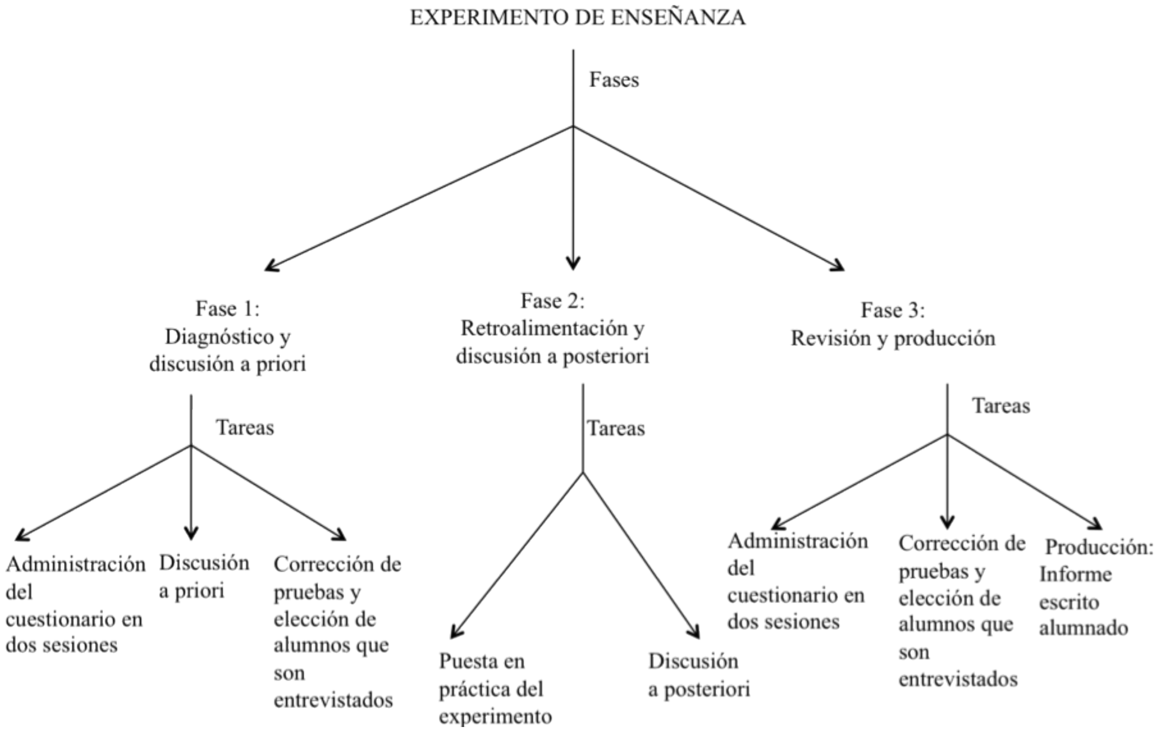


Figura 5.2: Fases del experimento de enseñanza

Diseño y administración del cuestionario

Se administra el cuestionario 2, cuyo análisis de contenidos matemáticos se ha realizado en el apartado 4.4 de esta memoria, en dos partes: Parte 1ª (tarea una, con 23 ítems) y Parte 2ª (tareas dos y tres, con 19 y 8 ítems, respectivamente) y que los alumnos contestan en dos fases diferentes: Diagnóstico y Revisión.

Como hemos comentado con anterioridad, la primera pregunta, consta de 23 expresiones numéricas, que denotamos como ítems 1.1, 1.2, 1.3, …, 1.23, que los alumnos deben identificar como números naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales o reales. Tiene como finalidad recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos.

La segunda, consta de 19 expresiones numéricas, que denominamos ítems 2.1, 2.2, 2.3, …, 2.19, que los alumnos deben identificar como número decimal o no; en ambos casos deben aportar una breve explicación que justifique su respuesta. Tiene como finalidad analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.

Y la tercera, consta de ocho expresiones numéricas, que denominamos ítems 3.1, 3.2, 3.3, …,3.8 que los alumnos deben representar en una recta graduada con unidades y décimas. Tiene como finalidad analizar los métodos que utilizan para representar diferentes números en la recta numérica.

La población elegida fue de 28 estudiantes de primer curso de la especialidad de Maestro de Educación Musical de la ULPGC. Los alumnos serán identificados en este trabajo mediante un código numérico: 1, 2, 3,…,28, que se corresponde con el orden alfabético.

Para organizar y analizar la información utilizamos varios procedimientos de análisis: tablas, esquemas de análisis, redes sistémicas (Bliss, Monk, y Ogborn, 1983), transcripciones de las entrevistas, informes y triangulación de los datos.

El experimento de enseñanza se ha desarrollado en las tres fases mencionadas anteriormente: diagnóstico y discusión *a priori*, retroalimentación y discusión *a posteriori* y la de revisión y producción.

En la primera, para el diagnóstico, se administró el cuestionario a los alumnos individualmente en dos sesiones distintas para analizar la consistencia de las respuestas, y se realizó una discusión *a priori* con todo el grupo, sobre las diferentes respuestas dadas en el cuestionario. Se corrigieron las pruebas y se seleccionó una muestra de alumnos, en función del comportamiento y errores cometidos en las respuestas, para ser entrevistados (entrevistas previas o de la fase primera que fueron audiograbadas). Estas entrevistas tienen por objeto obtener con mayor precisión la información que nos aportan las respuestas comunes de los encuestados.

En la segunda fase de retroalimentación se pone en práctica el experimento de enseñanza diseñado en el marco del programa de formación y se realiza una discusión *a posteriori* con todo el grupo de clase.

En la tercera fase de revisión, se vuelve administrar el mismo cuestionario y de igual forma que al principio se selecciona una muestra de alumnos para ser entrevistados (entrevistas finales o de la tercera fase que fueron también audiograbadas). Asimismo, en esta fase, se le pide a cada alumno una tarea concreta que denominamos, producción, en la que cada alumno presenta un informe escrito sobre sus dificultades, obstáculos y errores con los números y sus escrituras, en relación con las tres preguntas del cuestionario, y referidas a los resultados expresados en la primera prueba del cuestionario, que se les había devuelto fotocopiada.

Esto nos ha permitido observar la evolución y discusión de los resultados, mediante las diferentes actividades realizadas y documentos aportados en el experimento de enseñanza. Todo ello en consonancia con la idea sostenida por Socas (1997) de que:

> *Las estrategias de enseñanza deben ir encaminadas a detectar los errores y provocar el conflicto en los alumnos, fomentando ideas que permanezcan activas más allá de la clase de Matemáticas y capacitándoles para evaluar si sus ideas o métodos son o no correctos en una determinada tarea matemática*.

Diseño y administración de la unidad temática: Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración

El diseño y planificación de esta unidad se enmarca en el Programa de Formación, diseñado para el curso 2008/09, dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica de la Especialidad de Maestro de Educación Musical.

A continuación relatamos las competencia, objetivos y contenidos que se han tenido en cuenta en esta unidad.

Las competencias que se trabajan son:

a) Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
b) Utilizar diferentes representaciones (representaciones digitales y analógicas).
c) Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
d) Argumentar.

e) Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
f) Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
g) Comunicar el proceso y la solución de problemas.
h) Conocer los procesos de simbolización matemática, de las representaciones enactivas a las simbólicas, pasando por las icónicas.
i) Saber utilizar programas informáticos generales y matemáticos y las tecnologías de la información para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
j) Usar y hacer usar a los alumnos los números y sus significados.
k) Conocer y aplicar los medios, materiales y recursos didácticos usuales en la enseñanza – aprendizaje de los números decimales.

Los objetivos son:

a) Conocer los problemas matemáticos y de la vida cotidiana o laboral que resuelve la construcción de los números decimales.
b) Conocer el esquema en el que se utilizan los números decimales para organizar los Sistemas Numéricos.
c) Establecer correctamente las relaciones existentes entre los Sistemas Numéricos.
d) Saber interpretar en un diagrama la relación de inclusión: $N \subset Z \subset D \subset Q$.
e) Conocer procedimientos para representar números en la recta numérica.
f) Comprender que la notación decimal no es la más adecuada para representar números racionales en la recta numérica.
g) Reconocer la importancia de representar los números decimales con dos Sistemas de Representación distintos (notación decimal y la fraccionaria) para evitar la identificación de número decimal con número con coma.
h) Saber que se suele sostener que la notación decimal facilita el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones con decimales, al apoyarse en el conocimiento de los algoritmos de las operaciones con números naturales (expresados en el Sistema de Numeración Decimal).
i) Realizar cambios de registro de la notación decimal a la fraccionaria y viceversa.

j) Reconocer la conveniencia de hallar la fracción generatriz para operar números dados en notación decimal infinita periódica.
k) Operar con números racionales en distintos sistemas de representación.
l) Ordenar números racionales expresados de formas distintas.
m) Valorar el uso del Sistema de Representación ampliado como sistema para representar los números reales.
n) Conocer las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de los decimales al nivel de la Educación Primaria.
o) Reconocer el importante papel que representan los materiales didácticos, tanto reales como virtuales, en la enseñanza-aprendizaje de los decimales.
p) Conocer los contenidos oficiales relativos a este tópico en la Educación Primaria.

Los contenidos matemáticos se determinan teniendo en cuenta los tres aspectos que caracterizan a los números decimales, a saber: funcional, fenomenológico y conceptual.

El aspecto funcional, toma en consideración el uso y la utilidad de los números decimales en diferentes contextos.

El fenomenológico, lo componemos con las nociones relativas al orden, la densidad, las operaciones, las representaciones y las relaciones entre los números.

El conceptual, incluye el significado conceptual y procedimental de los números decimales.

Los contenidos didácticos se escogen siguiendo el marco conceptual propuesto, en el aspecto de las dificultades, obstáculos y errores en la enseñanza de las Matemáticas. Por ello, se pone énfasis en la importancia del conocimiento de los errores por parte de los futuros maestros, que cometen los escolares al trabajar con los decimales, para abordar el proceso de enseñanza. De la misma manera, se presentan materiales didácticos reales o virtuales para trabajar de forma reflexiva estos conceptos con sus futuros alumnos.

En la Tabla 5.1 mostramos los contenidos distribuidos por apartados y subapartados.

NÚMEROS, NUMERALES, SISTEMAS NUMÉRICOS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN	
1. Introducción	
2. Concepto de número decimal. Relación de los decimales con los enteros	
3. Los números decimales expresados en el Sistema de Numeración Decimal Ampliado	3.1. Notación decimal 3.2. Obtención de expresiones decimales: técnica de la división decimal 3.3. Interés de la notación decimal 3.4. Otras notaciones: ejemplos
4. Operaciones con números decimales	4.1. Definiciones 4.2. Propiedades 4.3. Las operaciones en el Sistema de Numeración Decimal Ampliado
5. La representación de los números decimales en la recta numérica: la recta decimal	5.1. Representación 5.2. Comparación de decimales en la recta numérica. Densidad. D no completa la recta
6. Comparación de decimales según otras representaciones	6.1 Comparación de decimales representados en notación fraccionaria 6.2. Comparación de decimales representados en notación decimal
7. Relación de los números decimales con los racionales	7.1. Introducción del concepto de número racional 7.2. Otra forma de representación de los números racionales: expresiones decimales infinitas periódicas 7.3. Conversión de una expresión decimal periódica a fracción: fracción generatriz 7.4. Aproximaciones decimales de un número racional 7.5. Operaciones con números racionales 7.6. Los racionales en la recta numérica. Densidad. Q no completa la recta
8. Relación de los números decimales con los reales	
9. Errores que cometen los escolares con los decimales	
10. Algunos recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de los decimales	10.1 Materiales didácticos reales: Bloques Multibásicos, Ábacos, Barajas de fracciones, etc. 10.2 Materiales didácticos virtuales: Uso de páginas Web con recursos para la enseñanza de los decimales
11. Los decimales en los documentos oficiales de la Educación Primaria	

Tabla 5.1: Contenidos de la unidad temática: Números, numerales, Sistemas numéricos y Sistemas de numeración

La planificación, metodología y evaluación que se siguen son las propuestas en el proyecto docente de la asignatura.

En la fase de retroalimentación y con respecto a la presentación del tema: Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de representación, la iniciamos con una introducción en la que se abordan aspectos funcionales e históricos del tópico. Seguidamente, se procede a construir el Sistema Numérico de los Decimales y su relación con el resto de los otros sistemas. Todo ello se desarrolla destacando el papel que desempeñan "lo decimal" y "la numeración decimal" como elementos organizadores de las relaciones entre los números y sus representaciones.

Para ello, elegimos como estrategia un proceso, ya iniciado en el tema de los enteros, formulado en tres pasos. En el primero, se construye el concepto de número decimal, a partir de la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros para resolver, de forma parcial, el problema de que la división de enteros no es siempre posible. Consideramos que estos nuevos números son las soluciones de las ecuaciones: $x \cdot 10^n = a;\ a \in Z\ \ y\ \ n \in N$. Se relacionan estos números con los anteriores por lo que se trabaja la idea de que los enteros son también decimales. En el segundo paso, después de abordar los aspectos fenomenológicos descritos anteriormente, procedemos a construir el conjunto de los racionales como aquellos números soluciones de las ecuaciones: $x \cdot b = a;\ a,b \in Z\ \ y\ \ b \neq 0$. Se estudia la relación de inclusión de los decimales en los racionales. En el tercer paso, se construye el conjunto de los reales como unión disjunta de los racionales e irracionales y, estos últimos, como aquéllos que no pueden ser expresados en forma de fracción, pero sí con una expresión decimal infinita no periódica. Se trabaja la relación de inclusión de los decimales en los reales.

Todo este trabajo se acompaña con un conjunto de actividades en las que el alumnado ponga en práctica los tipos de pensamiento: operacional, estructural y procesual.

Diseño y administración de la Unidad Temática: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

En este caso hemos realizado una adaptación del capítulo *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, escrito por Socas en Rico y otros (1997). Para ello, se ha respetado el texto completo exceptuando los ejemplos en los que se requiere una formación matemática con un nivel superior a la de los estudiantes de Maestro en la Educación Musical. Estas situaciones son sustituidas por otras que se dan en estos niveles o en inferiores.

A continuación comentamos las competencias, objetivos y contenidos que se han tenido en cuenta en esta unidad.

En relación con las competencias destacamos:

a) Aplicar el conocimiento de los errores, en el aprendizaje de un tópico matemático, en el diseño de una secuencia didáctica.
b) Averiguar las causas de sus errores, cometidos en actividades planteadas.

Con respecto a los objetivos consideramos como fundamental conseguir que el alumnado conozca una teoría, articulada en las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje, que le sirva de guía en su labor docente futura.

Los contenidos, tal y como hemos comentado, son los estudiados en el capítulo del trabajo mencionado anteriormente. En la Tabla 5.2 se recogen:

DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
1. INTRODUCCIÓN 2. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 2.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos 2.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático 2.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas 2.4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos 2.5. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas 3. OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 4. ERRORES EN LAS MATEMÁTICAS 5. ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EVALUACIÓN Y DIAGNÓSTICO 6. ESTRATEGIAS DE PREVENCIÓN Y REMEDIOS

Tabla 5.2: Contenidos de la unidad temática: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

En el siguiente esquema (Figura 5.3) mostramos la idea básica que hemos desarrollado en la presentación de la unidad , en la fase de retroalimentación, y que explicamos en los párrafos siguientes.

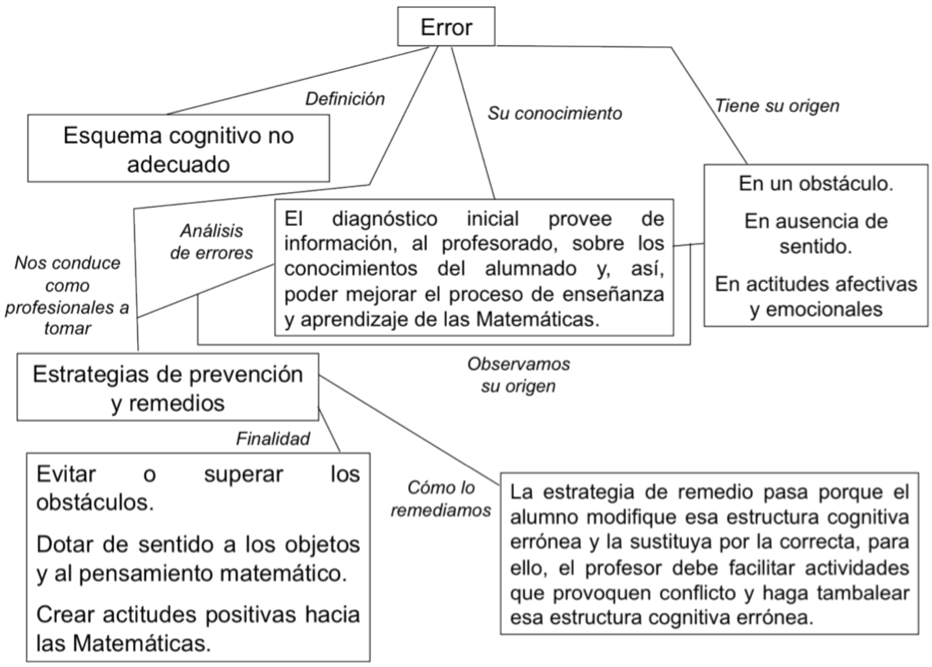


Figura 5.3: Esquema de la unidad temática: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

El profesor que se sitúa en la Teoría Cognitiva del Aprendizaje, considera que el error lo ha construido el alumno, y es, por tanto, una estructura de su dominio. Socas (1997) destaca el papel en la superación del error que desempeña la estrategia de remedio en la enseñanza y aprendizaje, tal y como hemos mencionado en el capítulo 2.

Este trabajo se acompaña con actividades de dos tipos:

a) El alumnado busca, explica y propone cómo remediar los errores en producciones de escolares que se les proponen.
b) El alumno analiza sus propios errores cometidos en algunas actividades y se le plantea buscar sus causas.

La planificación, metodología y evaluación que se siguen, son las propuestas en el proyecto docente de la asignatura.

Las entrevistas

Hemos realizado entrevistas audiograbadas a alumnos seleccionados por categorías de respuestas detectadas en las correcciones de las pruebas, en las fases de diagnostico y revisión. La finalidad fundamental de éstas es aclarar datos y profundizar en las respuestas del cuestionario del alumnado. Los resultados de su análisis nos han servido de guía sobre la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones.

Aunque las entrevistas no son estructuradas, podemos decir que en todas ellas hemos considerado unas preguntas generales sobre cada una de las tres cuestiones planteadas en el cuestionario, a saber:

- ¿Necesitaste usar la calculadora?
- ¿Recordabas los conjuntos numéricos nombrados en la pregunta 1 (fase preliminar)?
- ¿Un número puede pertenecer a varios conjuntos numéricos (fase preliminar)?
- ¿Qué criterio aplicaste para elegir (o excluir) un número como decimal?
- ¿Aplicaste el mismo criterio para elegir (o excluir) un número decimal en las preguntas 1 y 2? ¿Cuál? ¿Por qué?
- ¿Por qué realizas operaciones para clasificar o representar algunos números?

- Se le presenta al alumno entrevistado varias respuestas del cuestionario, dadas por sus compañeros, entre las que está la correcta, y se le pide su opinión sobre cada una (fase de diagnóstico).

Para las entrevistas, de la fase de diagnóstico, se han elegido tres alumnos (codificados como [n], $0 < n \leq 28$: [17], [12] y [20]) que han cometido los errores comunes y más frecuentes, detectados en las respuestas del cuestionario. Entre los elegidos nos encontramos con un alumno, [17], que en sus respuestas presenta más aciertos que el resto.

Para las entrevistas, de la fase de revisión, también se han seleccionado alumnos que han manifestado los errores comunes y más frecuentes ([10], [21], [27]). Asimismo, hemos incorporado el alumno, [17], por presentar las respuestas correctas.

La tarea denominada Producción

La tarea se formula con la presentación de una tabla para cada pregunta del cuestionario que el alumno debe completar.

Para la primera pregunta la tabla presenta cuatro columnas. En la primera figuran los conjuntos numéricos: N, Z, D, Q, I y R. En la segunda se formula la pregunta: ¿Qué significado le asigné? En la tercera se cuestiona: ¿Es correcta mi respuesta? En la última se pregunta: ¿Cuál es el origen o causa de mi error? El alumno debe contestar estas preguntas para cada conjunto numérico.

Para la segunda pregunta del cuestionario la tabla es de cinco columnas. En la primera se encuentran los números. En la segunda, el alumno debe copiar su respuesta inicial. En la tercera, describe los criterios de elección y exclusión empleados para los decimales. En las otras dos, se debe cuestionar si sus respuestas son correctas y cuáles son las causas de sus errores, cuando proceda.

Para la tercera pregunta del cuestionario la tabla dispone de tres columnas. En la primera aparecen los números que debían representar. En la segunda, se comentan los procedimientos empleados para estos. En la tercera se debe cuestionar sin son correctos los procedimientos y determinar, en su caso, las causas de sus errores.

5.3 RESULTADOS DE LA FASE DE DIAGNÓSTICO

En este punto tratamos de describir los resultados obtenidos en la implementación del cuestionario (C2). Para ello, hacemos un análisis de cada pregunta.

Parte de este trabajo se ha publicado en el artículo de Moreno, Socas y Hernández (2009).

Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de diagnóstico

La situación problemática planteada es la siguiente:

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062						
35.521						
$\frac{3}{5}$						
2						
$-\frac{1}{2}$						
0,63						
$-\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
0						
$1+\sqrt{2}$						
π						
$\frac{10}{5}$						
$-\frac{7}{3}$						
0,666…						
$\left(\sqrt{2}\right)^2$						
$1,3\overset{\frown}{5}$						
1,73205008…						
π-5						

0,5						
$3-\sqrt{3}$						
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$						
$\frac{1}{3}$						

A continuación recogemos las respuestas dadas por el alumnado a la primera pregunta, agrupadas por tipos, para cada columna, salvo para la de los decimales, que se estudiará con mayor profundidad en el siguiente apartado.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Naturales** son:

a) Los positivos y con notación decimal, y el cero (3,6%).
b) Los positivos y el cero. En algunos casos se excluye a $3-\sqrt{3}$ (21,4%).
c) Los expresados con notación decimal (7,1%).
d) Los que están representados con notación decimal finita (7,1%).
e) Todos, excepto las expresiones que contienen una raíz (3,6 %).
f) Los que están expresados con notación decimal y fraccionaria (3,6%).
g) Todos, excepto las raíces con signo negativo (3,6%).
h) Los números naturales. En algunos casos no se establecen las igualdades: $2=\frac{10}{5}=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Además, se excluye el 35.521 (21,4%).

Observamos que algunos criterios tienen porcentajes no significativos. Los porcentajes más altos se dan en b) y en h), podemos señalar que para gran parte de los alumnos estos números son los naturales, los positivos y el cero, con las salvedades que se enuncian anteriormente.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Enteros** son:

a) Los enteros, pero al igual que en los naturales se dan las mismas circunstancias con el 35.521 y con las igualdades $2=\frac{10}{5}=\left(\sqrt{2}\right)^2$ (35,7%).
b) Todos, salvo los negativos y los que en su escritura llevan raíz (7,1%).
c) Los negativos. Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$ (7,1%).
d) Los enteros y las fracciones (3,6%).

e) Los representados con notación decimal (3,6%).

f) Otros (25 %).

Observamos que para estos números la respuesta más frecuente consiste, a grandes rasgos, en marcar los enteros de la tabla.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Racionales** son:

a) Las fracciones, algunos incluyen a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (10,7%).

b) Los que se expresan con notación decimal (3,6%).

c) Los números enteros (3,6%).

d) Todos, excepto $1,3\overline{5}$ (3,6%).

e) Los que no están expresados con notación decimal (o son operaciones indicadas) (7,1%).

f) Las fracciones positivas (3,6%).

g) Las escrituras numéricas que contienen una raíz (3,6%).

h) Las fracciones decimales (7,1%).

i) Todos los que se puedan expresar con notación decimal con coma y finita (7,1%).

j) Ninguno (3,6%).

k) Los no irracionales (3,6%).

l) Otros (21 %).

Observamos como estos números se identifican con mayor frecuencia con los números expresados con notación fraccionaria.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Irracionales** son:

a) Los que contienen en su representación una raíz. Algunos excluyen a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (10,7%).

b) Los no expresados con notación decimal (3,6%).

c) Los no racionales (7,1%).

d) Ninguno (3,6%).

e) Las fracciones y a las escrituras que contienen una raíz (3,6%).

f) $-\sqrt{7}$ (3,6 %).

g) Las fracciones negativas (3,6%).

h) Todos, excepto las escrituras que contienen una raíz (3,6%).

i) Los irracionales de la tabla (3,6%).

j) Los que pueden expresarse con notación decimal con coma e infinita (3,6%).

k) Otros (18%).

Observamos que el criterio que más predomina es el de identificar como números irracionales las expresiones numéricas que contienen una raíz cuadrada.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Reales** son:

a) Todos. Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$ o $3-\sqrt{3}$ y, otros, a $\pi\ y \pi-5$ (28,6%).

b) Los que contienen en su representación una raíz (3,6%).

c) Todos, excepto las escrituras que contienen una raíz (7,1%).

d) $-\sqrt{7}$ (3,6%).

e) Todos, salvo los que presentan infinitas cifras decimales (7,1%).

f) Los positivos y el cero (3,6%).

g) Otros (21,9%).

Observamos que la respuesta más frecuente de las dadas es a), es decir, todos son reales salvo algunos matices.

Por ello, y a grandes rasgos, en los casos en los que hemos podido encontrar un patrón en las respuestas, conjeturamos que el alumnado utiliza como criterio para identificar a los números de forma mayoritaria su escritura o forma de representación y otras características de los números asociadas a los signos. Entre esas características destacamos:

a) Ser un número positivo.

b) Ser un número negativo.

c) Presentar un signo negativo en su representación.

d) Ser una fracción.

e) Presentar una raíz en su representación.

f) Estar expresado con notación decimal.

g) Presentar una coma en su escritura.

h) Estar expresado con notación decimal con coma y finita (o infinita).

i) Ser símbolos especiales como $\pi\ y\ \pi-5$.

Por ejemplo, entre las respuestas frecuentes nos encontramos los criterios que utiliza el alumno identificado en la investigación como [20], que se recogen en el Cuadro 5.1:

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	Si	NO	Si	NO	NO	Si
35.521	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$\frac{3}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
2	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$-\frac{1}{2}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$-\sqrt{7}$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
0,123456…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	NO	Si
0	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$1+\sqrt{2}$	~~Si~~ NO	NO	NO	NO	Si	Si
π	NO	NO	NO	NO	NO	NO
$\frac{10}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
$-\frac{7}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,666…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	Si	NO	NO	NO	Si	S
$1,3\widehat{5}$	NO	NO	Si	NO	NO	Si
1,73205008…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
π-5	NO	NO	NO	NO	NO	NO
0,5	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	Si	Si
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	NO	NO	Si	Si	Si
$\frac{1}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si

Cuadro 5.1

a) Los números naturales son los que se pueden expresar con notación decimal finita.

b) Los enteros son los correspondientes de la tabla, salvo $\left(\sqrt{2}\right)^2$ y $\frac{10}{5}$.

c) Los decimales, los que llevan coma.

d) Los racionales, los que están en notación fraccionaria.

e) Los irracionales, las expresiones numérica que contienen una raíz.

f) Lo reales son todos, excepto π *y* $\pi - 5$.

En segundo lugar, expresamos el número de alumnos que excluyen o incluyen a los 23 números dados en esta tarea como decimales.

Los recogemos en la Tabla 5.3 y mostramos el número de alumnos que contesta con un Sí o con un No en cada celda de la columna de los decimales. A cada expresión numérica le hacemos corresponder un ítem, tal y como se muestra en la tabla.

Ítem de la primera pregunta	**Número de alumnos que lo excluye como decimal**	**Número de alumnos que lo incluye como decimal**	
1.1	2	25	- 2,062
1.2	21	5	35.521
1.3	9	16	$\frac{3}{5}$
1.4	25	1	2
1.5	9	16	$-\frac{1}{2}$
1.6	1	24	0,63
1.7	15	8	$-\sqrt{7}$
1.8	5	20	0,123456…
1.9	2	25	3,14
1.10	24	1	0
1.11	15	9	$1+\sqrt{2}$
1.12	11	16	π
1.13	19	6	$\frac{10}{5}$
1.14	9	18	$-\frac{7}{3}$
1.15	2	25	0,666…
1.16	18	5	$\left(\sqrt{2}\right)^2$
1.17	3	23	$1,3\widehat{5}$
1.18	3	24	1,73205008…
1.19	11	14	$\pi-5$
1.20	1	26	0,5
1.21	13	10	$3-\sqrt{3}$
1.22	11	11	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.23	9	17	$\frac{1}{3}$

Tabla 5.3: Tabla de frecuencias

Se observa que los ítems que más fueron contestados positivamente se corresponden con los números que están expresados con notación decimal con coma. Seguidamente, nos encontramos con los que se corresponden con las fracciones no enteras y, por último, con los que están expresados con notación radical. Los números enteros son excluidos del conjunto de los decimales por la mayoría de los alumnos (92,9%).

En tercer lugar describimos los comportamientos encontrados en los alumnos a partir de respuestas similares.

Para ello hemos tratado de identificar comportamientos regulares a partir de respuestas similares. Estos comportamientos son los siguientes:

a) A (21,4%): Los números decimales son solo los que están expresados con notación decimal con coma.
b) B (28,6%): Los números decimales son los que están expresados con notación decimal y algunas o todas las fracciones. Además, algunas de las expresiones que contienen una raíz, π o $\pi - 5$ se excluyen o se dejan sin contestar. Los enteros tampoco se consideran decimales.
c) C (25%): Los números decimales son todos, excepto los enteros.
d) D (3,6%): Los decimales son los enteros, los que están expresados con notación decimal, con coma y finita, y todas las fracciones.

Podemos observar que el Comportamiento B se muestra como el más significativo.

Los errores, Ei, que hemos tenido en cuenta son los que están relacionados con el significado atribuido a los decimales y con las relaciones establecidas entre estos y los otros sistemas numéricos ($N \subset Z \subset D \subset R$ y $D \cap I = \varnothing$).

De esta manera tenemos:

a) E1: Los enteros no son decimales (92,9%).
b) E2: Los números expresados con notación decimal con coma son decimales (89,3%).
c) E3: Todas las fracciones son decimales (21,4%).
d) E4: Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente (42,9%).
e) E5: Ninguna fracción es decimal (35,7%).
f) E6: Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal son decimales (57,1%).
g) E9: Hay decimales que no son racionales (53,6%).
h) E10: Hay decimales que son irracionales (35,7%).
i) E11: Hay decimales que no son reales (25%).

j) E12: $D \approx R - Z$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales (10,7%).

k) E16: Solo los números positivos, expresados con notación decimal con coma y con parte decimal finita son los decimales (3,6%).

Uno de los errores más frecuente es el de excluir a los enteros del conjunto de los decimales (92,9%). En éste hemos contabilizado a todos los alumnos que fallaron en algunos de los ítems siguientes: 1.2, 1.4, 1.10, 1.13 y 1.16. Los últimos ítems presentan un porcentaje de exclusión menor que los tres primeros.

En el análisis de las respuestas, relacionadas con los ítems 1.4, 1.13 y 1.16, de los alumnos que excluyen a los enteros de los decimales, nos hemos encontrado las siguientes:

a) $\frac{10}{5}$ es decimal, pero no $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

b) $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ son decimales.

c) $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ no son decimales.

d) $\frac{10}{5}$ no es decimal, pero $\left(\sqrt{2}\right)^2$ sí.

El 89,3% comete el error de considerar a todo número expresado con notación decimal con coma, como decimal. Así, los fallos contabilizamos en los ítems 1.8, 1.15, 1.17 y 1.18 consisten en elegir como decimales a los reales expresados con notación decimal infinita periódica (periodo distinto de 9 y de 0) y no periódica. Algunos alumnos dejan en blanco el $1,3\overline{5}$.

En estos casos es cuando se observa que el criterio que consiste en fijarse en si la escritura presenta una coma para elegirlo como decimal, deja de ser válido. Sin embargo, hemos considerado como correcto, en el entorno del Sistema Numérico Decimal, cuando el alumno elige como número decimal a un número por presentar en su escritura (no obtenida con la calculadora) la coma y un número finito de cifras decimales. Aunque se sabe que números que no son decimales se expresan también, en otros sistemas de numeración, con coma y con un número finito de cifras después de ésta. Tal es el caso del racional, no decimal, siguiente: $\frac{1}{3} = 0,1_{(3}$.

El 3,58% se limita a señalar como decimales a los números positivos, pero los expresados con notación decimal con coma y finita. Los decimales son las medidas de cantidades de magnitud. De esta manera, se excluyen a los enteros y a los decimales negativos, expresados con notación decimal o fraccionaria.

En relación con los números expresados con notación fraccionaria hay alumnos que los seleccionan a todos como decimales (21,4%). Se aprecia que no se tiene adquirida la clasificación de las fracciones en decimales y no decimales.

Asimismo, hay un grupo de encuestados (35,7%), que excluye a los enteros, que considera a todas las fracciones como decimales, salvo las enteras. Sin embargo, otros (7,1%), cometen el error de considerar decimales precisamente las que no los son y, excluir, las que lo son.

Se da la situación particular que estos elementos de la muestra marcan a $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2} \; y \; \frac{10}{5}$ como los únicos racionales.

El 51,1% apunta como decimal a π. Del mismo modo, el 50 % selecciona a $\pi - 5$. Pensamos que se hace un cambio de registro a la notación decimal. Asimismo, se observa que hay alumnos que eligen a π como decimal, pero la casilla del $\pi - 5$ la dejan en blanco o contestan que no. Estos manifiestan un comportamiento similar al A.

El número áureo es elegido como decimal por el 39,3% de la muestra. En esta situación, conjeturamos que se hace la operación indicada con la calculadora o de forma estimada, tomando un valor aproximado de la raíz cuadrada, y se clasifica por el resultado. También, se puede interpretar como una fracción, y como las fracciones son vistas como decimales, entonces éste es decimal.

En el mismo caso se encuentran: $3-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2} \; y \; -\sqrt{7}$. Su explicación creemos hallarla en la interpretación de estas estructuras como operaciones indicadas, cuyos resultados son expresados con la notación decimal y, por tanto, son clasificadas como decimales.

Hemos tenido en cuenta como error cuando un estudiante elige correctamente un número como decimal, sin embargo, no lo considera racional o real. También contemplamos como fallo el que se pone de manifiesto al establecer que $D \cap I \neq \varnothing$.

En estos casos juega un papel importante el significado que se le atribuye a cada sistema numérico. Por ejemplo, si un alumno considera que los racionales son los números expresados con notación fraccionaria, entonces comete el error de excluir a 0,5 o a -2,062 como racionales. Véase el ejemplo siguiente que se presenta en los cuadros: Cuadro 5.2, Cuadro 5.3 y Cuadro 5.4.

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	Si	NO	Si	No	NO	Si
35.521	Si	Si	No	NO	NO	Si
$\frac{3}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
2	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$-\frac{1}{2}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	NO	Si
- $\sqrt{7}$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
0,123456…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	NO	Si
0	Si	Si	NO	NO	NO	Si
1+$\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	Si	Si
π	NO	NO	NO	NO	NO	NO
$\frac{10}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
$-\frac{7}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,666…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
1,3$\widehat{5}$	NO	NO	Si	NO	NO	Si
1,73205008…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
π-5	NO	NO	NO	NO	NO	NO
0,5	Si	NO	Si	NO	NO	Si
3-$\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	Si	Si
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	NO	NO	Si	Si	Si
$\frac{1}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si

Cuadro 5.2

Así, si marca como irracionales a todos, excepto las expresiones numéricas que contienen una raíz, sostiene que, por ejemplo, 0,5, es irracional. En el siguiente Cuadro 5.3 se muestra lo comentado:

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	No	Si	Si	No	Si	X
35.521	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{3}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
2	Si	No	No	No	Si	X
$-\frac{1}{2}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,63	Si	No	Si	No	Si	X
- $\sqrt{7}$	No	Si	Si	Si	No	X
0,123456…	Si	No	No	No	Si	X
3,14	Si	No	Si	No	Si	X
0	Si	No	No	No	Si	X
1+$\sqrt{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
π	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{10}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
$-\frac{7}{3}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,666…	Si	No	Si	No	Si	X
$(\sqrt{2})^2$	Si	No	Si	Si	No	X
1,3$\widehat{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
1,73205008…	Si	No	Si	No	Si	X
π-5	No	Si	Si	No	Si	X
0,5	Si	No	Si	No	Si	X
3-$\sqrt{3}$	No	Si	Si	Si	No	X
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
$\frac{1}{3}$	Si	No	Si	No	Si	X

X = Si

Cuadro 5.3

Del mismo modo, si se apuntan como números reales a los positivos y el cero, tal y como se observa en el Cuadro 5.4, entonces -2,062, por ejemplo, no es real.

Contesta con un Si o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	No	No	Sí	Sí	[illegible] No	No
35.521	No	No	Sí	Sí	[illegible]	Sí
$\frac{3}{5}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
2	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
$-\frac{1}{2}$	No	No	Sí	No	Sí	No
0,63	No	No	Sí	No	Sí [illegible] Sí	Sí
$-\sqrt{7}$	No	No	Sí	[illegible]	Sí [illegible] Sí	No
0,123456…	No	No	Sí	No	Sí [illegible] Sí	Sí
3,14	No	No	Sí	No	[illegible]	Sí
0	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
$1+\sqrt{2}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
π	No	No	Sí	No	Sí	Sí
$\frac{10}{5}$	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
$-\frac{7}{3}$	No	No	Sí	No	Sí	No
0,666…	No	No	Sí			Sí
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí
$1,3\overline{5}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
1,73205008…	No	No	Sí	No	Sí	Sí
π-5	No	No	Sí	No	Sí	No
0,5	No	No	Sí	(Sí)	No	Sí
$3-\sqrt{3}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
$\frac{1}{3}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí

Cuadro 5.4

El 10,7% establece, salvo matices, que D es isomorfo a R-Z. Marcan positivamente (Sí) los mismos números en ambas columnas, salvo los enteros, que se excluyen como decimales, pero se clasifican como reales. Podemos decir que estos alumnos reconocen a todos los números como reales y, a los decimales, como aquéllos que se pueden expresar con notación decimal con coma, con parte decimal no nula. Consideramos que se contesta en la columna de los decimales haciendo el cambio de registro a la notación decimal con coma, en todas de las expresiones numéricas que están en otro registro, de forma general (véase Cuadro 5.5).

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	No	Si	Si	No	Si	X
35.521	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{3}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
2	Si	No	No	No	Si	X
$-\frac{1}{2}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,63	Si	No	Si	No	Si	X
$-\sqrt{7}$	No	Si	Si	Si	No	X
0,123456…	Si	No	No	No	Si	X
3,14	Si	No	Si	No	Si	X
0	Si	No	No	No	Si	X
$1+\sqrt{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
π	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{10}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
$-\frac{7}{3}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,666…	Si	No	Si	No	Si	X
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	Si	No	Si	Si	No	X
$1,3\widehat{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
1,73205008…	Si	No	Si	No	Si	X
π-5	No	Si	Si	No	Si	X
0,5	Si	No	Si	No	Si	X
$3-\sqrt{3}$	No	Si	Si	Si	No	X
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
$\frac{1}{3}$	Si	No	Si	No	Si	X

X = Si

Cuadro 5.5

Resultados de la segunda pregunta en la fase de diagnóstico

Recordemos que la segunda pregunta responde a la situación problemática:

2. Marca con un Sí los números decimales y con un No los restantes, explica brevemente tus respuestas.

- 3,9		
0		
$\frac{1}{2}$		
2		
$1+\sqrt{2}$		
$\frac{10}{5}$		
π		
7		

0,6666…		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\overline{5}$		
1,73205008…		
$\pi - 5$		
0,5		
$3 - \sqrt{3}$		
$-\frac{1}{3}$		
1,48		
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

El estudio de las respuestas que constituyen la elección realizada, cuya finalidad es determinar comportamientos, de los alumnos se ha llevado a cabo a través de un proceso caracterizado por las siguientes elementos:

- Un conjunto de preguntas que nos sirve de guía en el análisis de las respuestas:

a) ¿Son los enteros decimales?
b) ¿Son todas las escrituras decimales con coma elegidas como decimales?
c) ¿Las fracciones son señaladas como decimales?
d) ¿Los irracionales, no expresados con notación decimal, son escogidos como decimales?

- La elaboración de un diagrama de árbol (véase Anexo 4) que permite clasificar a los alumnos en grupos, según las respuestas a las preguntas anteriores.

De esta manera se determinaron los siguientes comportamientos:

a) A (17,9%): Se eligen como decimales solo los que están representados con notación decimal con coma.

b) B (21,4%): Los números decimales son los que están expresados con notación decimal y algunas o todas las fracciones. Además, algunas de las expresiones que contienen una raíz, π o $\pi - 5$ se excluyen o se dejan sin contestar. Los enteros tampoco se consideran decimales.

c) C (50%): Todos los números, excepto los enteros, son elegidos como decimales.

d) F(7,1%): Todos los números son considerados decimales.

En relación con los aciertos, observamos que el 7,1% del alumnado clasifica correctamente a los enteros como decimales y el 75 % a los decimales no enteros. En los racionales no decimales y en los irracionales no se acierta con su clasificación. Algunos son elegidos como decimales.

Con respecto a los argumentos, o justificaciones de las respuestas, hemos considerado tanto los aplicados para elegir un número como decimal (Ai), como los considerados para excluirlo (Bi). En el primer caso encontramos:

a) A1: Si el número está en notación decimal con coma, entonces es decimal. En este caso se contemplan las respuestas que hacen referencia a aspectos de la notación decimal; llevar coma, tener parte entera y decimal o poseer cifras decimales después de la coma (75%).

b) A2: Si el número no está en notación decimal se procede a realizar la conversión de forma aproximada o no, y se clasifica por el resultado obtenido. Entendemos que la conversión es aproximada cuando el alumnado toma o estima una aproximación decimal del resultado. Así, si el nuevo registro es una escritura con coma, se dice que el número es decimal (78,6%).

En los siguientes argumentos, también se contempla que el alumnado haya realizado cambio de registro a la notación decimal.

c) A3: El número es decimal porque es una cantidad inexacta (10,7%).

d) A4: Los números decimales son los que representan partes no enteras de la unidad (10,7%).

e) A5: Los números decimales son los que están comprendidos entre dos enteros consecutivos cualesquiera (3,6%).

f) A6: Es decimal porque pertenece a otro conjunto numérico: Z, No Z o I (39,3%).

g) A7: Los números expresados con notación decimal con coma, infinita y periódica son decimales (14,3%).

h) A8: Las escrituras decimales con coma, infinita y no periódicas, también son decimales (3,6%).

En el segundo, tenemos:

a) B1: No está en notación decimal con coma (46,4%).
b) B2: Se hace cambio de registro y se obtiene un resultado que está en una escritura decimal sin coma (14,3%).

En los que siguen, también se considera que el alumnado haya realizado cambio de registro a la notación decimal.

c) B3: Es una cantidad exacta (10,7%).
d) B4: Son partes enteras de la unidad (7,1%).
e) B5: No es decimal porque pertenece a otro conjunto numérico: N o Z (67,6%).

Sin embargo, en los siguientes, no se hace cambio de registro a la notación decimal.

f) B6: Es una fracción (21,4%).
g) B7: Es una expresión que contiene una raíz (3,6%).
h) B8: Son símbolos especiales (7,1%). Es el caso de π.
i) B9: Es una expresión numérica (7,1%).

Los porcentajes se han hallado teniendo en cuenta el número de alumnos que los utiliza en relación con el total. Los más altos son los de A1, A2 y B1, en los que la notación decimal desempeña un papel destacado.

Tal y como se observa, los argumentos son todos falsos, excepto el A7 en el caso en el que el periodo sea 9, que no es mencionado en esta fase. También, hemos observado que los aciertos en la elección pueden venir acompañados de justificaciones incorrectas.

Desde otra perspectiva, en las explicaciones dadas por los estudiantes hemos observado que algunos separan, en algunas de las situaciones en las que se aprecia una operación indicada, el significado atribuido al resultado obtenido del asignado a la representación numérica dada. Este hecho se manifiesta más en el ítem 2.3 (1/2) que en los restantes. De esta manera, por ejemplo, 1 /2 no es un número decimal porque es una fracción, pero su resultado, 0,5, sí.

Seguidamente, haremos un comentario de algunos de los argumentos anteriores.

En el argumento A6, los alumnos esgrimen que *el número es decimal porque no es entero*. Para ello, se fijan en la escritura y puntualizan que tiene coma y cifras decimales después de ella.

Otros, al utilizar el argumento B5, comentan que *no es decimal porque es entero*. En estos casos se observa que algunos se refieren a un número expresado con notación decimal sin coma, pero otros, a uno representado por otra escritura, pero sin coma.

De esta manera observamos dos clasificaciones de los números de la tabla, en las que se tienen en cuenta la representación dada y no se hace cambio de registro, a saber:

a) Los números decimales son los expresados con notación decimal con coma. A veces, tal y como hemos ya mencionado, se denotan como no enteros. Los no decimales, son los restantes y reciben el nombre de enteros.

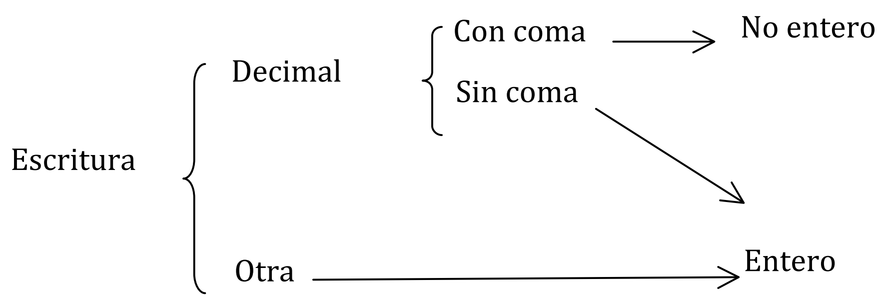


Figura 5.4: Situación en la que no se distingue la escritura decimal sin coma de las restantes escrituras no decimales

b) Los números decimales son también los expresados con notación decimal con coma, pero hay distinción entre las escrituras decimales sin coma y las restantes. De tal modo que los enteros son $\{0,\ 2,\ -3\}$ y no el conjunto de todas las escrituras no decimales y decimales sin coma.

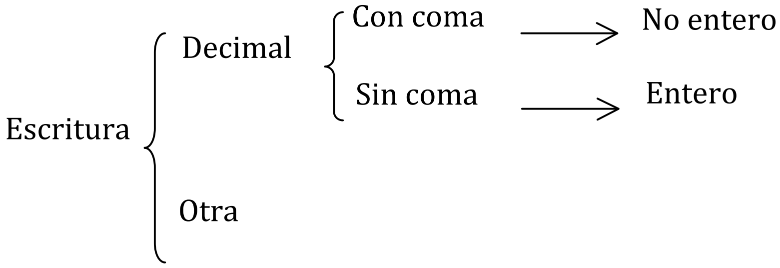


Figura 5.5: Situación en la que se distingue la escritura decimal sin coma de las restantes escrituras no decimales

También se explica que π no es decimal por asignarle a este símbolo, podemos decir, un significado especial, es decir, una letra que toma valores decimales.

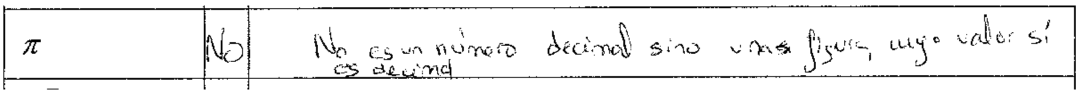


Figura 5.6: Respuesta de un alumno

En otras respuestas, recogidas en los comportamientos B, C y F, el alumnado realiza la operación indicada, en todos los casos posibles o en algunos, y clasifica el resultado, aplicando los argumentos descritos con anterioridad. De esta manera, el conjunto de los decimales se corresponde con R – Z y con R en los comportamientos C y F, respectivamente.

A continuación, teniendo en cuenta lo comentado con anterioridad, presentamos la red sistémica de los argumentos que puede permitir clasificar las respuestas por los razonamientos del alumnado.

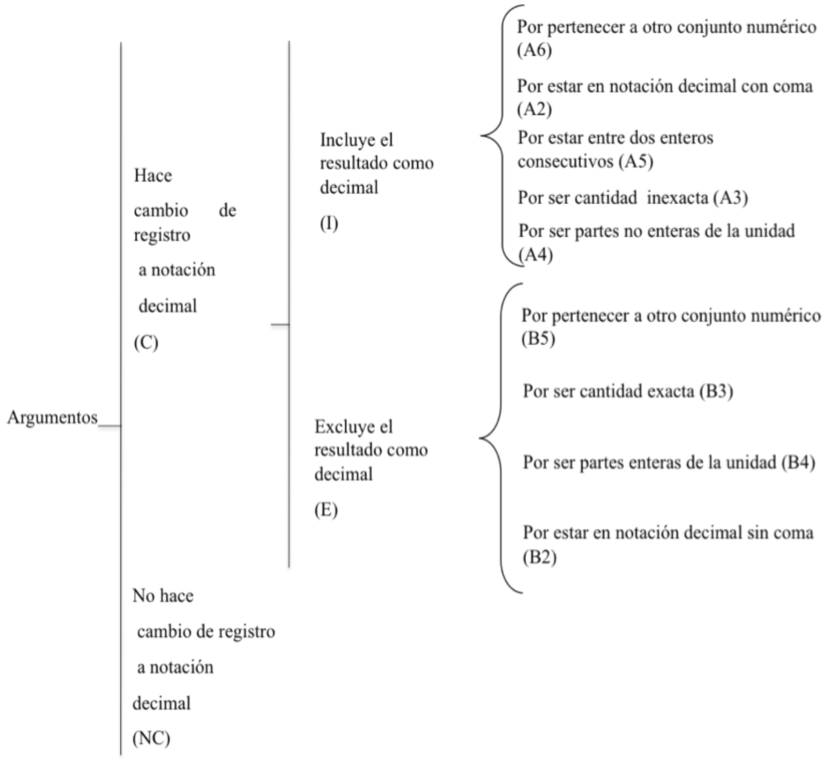


Figura 5.7: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que hacen cambio de registro a la notación decimal

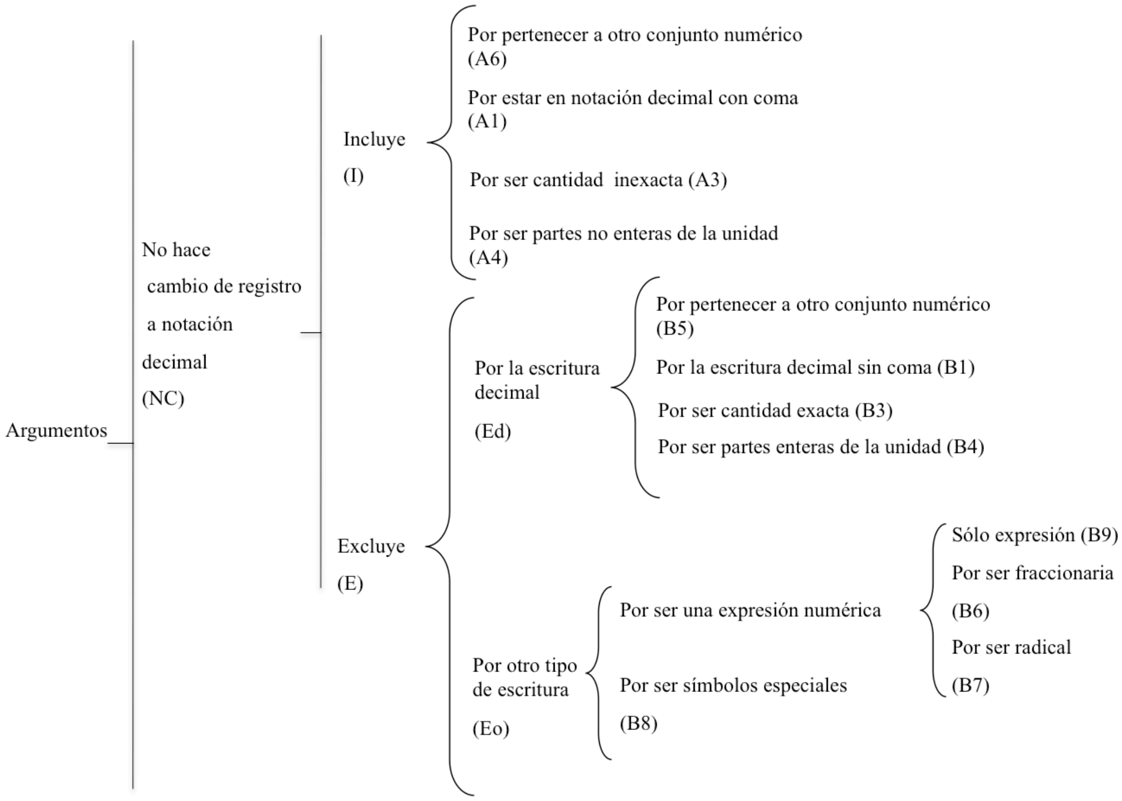
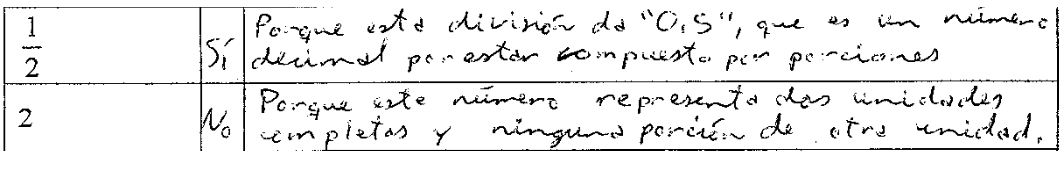


Figura 5.8: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que no hacen cambio de registro a la notación decimal

Por ejemplo, un alumno, y para los ítems 2.3 y 2.4, procede así: CIA4 para el 2.3 y NCEEdB4 para el 2.4 (Figura 5.9).



$\frac{1}{2}$	Sí	Porque esta división da "0,5", que es un número decimal por estar compuesto por porciones
2	No	Porque este número representa dos unidades completas y ninguna porción de otra unidad.

Figura 5.9: Respuesta de un alumno

De igual manera, podemos establecer una correspondencia entre los argumentos que más se han usado con los tipos de comportamientos detectados. Así, los argumentos más utilizados se aplican en los cuatro comportamientos: A, B, C y F. En el comportamiento A, no se hace cambio de registro a la notación decimal, pero se considera que los números decimales son los expresados con escrituras con coma. En los comportamientos B, C y F, se hace, en todos o en algunos, cambio de registro a la notación decimal con coma y, también, se identifica número decimal con números con coma.

Los argumentos y comportamientos anteriores nos proporcionan la serie de errores (Ei) siguiente:

a) E1: Los enteros no son decimales (92,9%).
b) E2: Los números expresados con notación decimal con coma son decimales (100%).
c) E3: Todas las fracciones son decimales (14,3%).
d) E4: Algunas fracciones son decimales, pero la clasificación es incorrecta (67,9%).
e) E5: Ninguna fracción es decimal (17,9%).
f) E6: Algunos o todos de los irracionales, no expresados con notación decimal, son decimales (85,7%).
g) E12: D es R-Z (50%).

Los errores anteriores se pueden relacionar entre sí. Un alumno que considere como decimal los números expresados con notación decimal con coma, error E2, también puede cometer algunos de los errores restantes, según realice o no cambio de registro a la notación decimal.

De esta manera, por ejemplo, un estudiante que cometa el error E2 y realiza el cambio de registro y manifiesta E1, E3 y E6, pertenece al comportamiento C, es decir, todos los números son decimales excepto los enteros.

Los argumentos que se utilizan para excluir a los enteros como decimales pueden explicar el significado atribuido a ambos conjuntos numéricos. Así, tenemos que se aplica B1, B3, B4 o B5. De esta manera, tenemos que:

a) Los números enteros son los que están representados con notación decimal sin coma.
b) Los números enteros representan partes enteras de la unidad (Relación Parte – todo).
c) Los números enteros representan cantidades exactas.
d) Los números enteros son: {…-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,…}.

Los aplicados para elegir como decimales a los números expresados con notación decimal con coma, nos muestran que el significado de número decimal está relacionado con las ideas siguientes:

a) Los que llevan coma.

b) Los que representan partes no enteras de la unidad.

c) Los números decimales representan cantidades no exactas.

d) Los números decimales son los que están comprendidos entre enteros consecutivos.

e) Los decimales periódicos y no periódicos, son números decimales.

Los que consideran que todas las fracciones son decimales, hacen la división del numerador entre el denominador, de forma exacta o aproximada, y clasifica el resultado utilizando alguno de los argumentos siguientes: A2, A3, A4, A6 o A7. Sin embargo, hay estudiantes que excluyen solo al 10/5 y argumentan B2, B3, B4 o B5. En cambio, los que excluyen a todas las fracciones se basan en algunos de los criterios siguientes: B1 o B6. Además, debemos tener en cuenta que hay alumnos que manifiestan que asignan un significado distinto al resultado de la operación que al de la representación dada. De esta manera, se decantan por uno, en algunas ocasiones y, por otro, en otras.

En el E6, se juega un papel destacado el cambio de registro a la notación decimal con coma. Los argumentos utilizados en este caso son algunos de los siguientes: A2, A3, A4, A6 o A8. En este punto, nos parece interesante comentar que el criterio que el alumnado utiliza para excluirlos como decimales no es el que sean irracionales, sino B1, B7, B8 o B9. Por lo tanto se fijan solo en la escritura.

También, hallamos alumnos con un porcentaje del 7,1%, que establecen la inclusión de Q en D, aunque no es explícita. La combinación de argumentos para justificar sus elecciones conduce al estudiante a establecer la inclusión incorrectamente, estos se incluyen en los que tienen el comportamiento F. De igual forma de I en D.

Otros errores los encontramos en ciertas contradicciones que tienen que ver con considerar diferentes, estructuras iguales, presentadas en registros distintos. Tenemos los casos de: $2 = \frac{10}{5} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad y \quad 0,5 = \frac{1}{2}$.

En el primer caso, se señala al 2 como no decimal, pero a $\frac{10}{5}$ *o* $\left(\sqrt{2}\right)^2$ como decimales. Se estima que el resultado es un número con coma. En el segundo, 0,5 es marcado como decimal, pero ½ no. Se excluyen a las fracciones de los decimales. Todo ello pone de manifiesto que fijan su atención en la escritura.

En la tabla que se adjunta se relaciona cada error con los argumentos que se utilizan. Se puede observar que la notación decimal es la única representación que se identifica con los decimales. Las fracciones decimales no se mencionan en ningún caso.

ERRORES	ARGUMENTOS
E1	B1, B3, B4, B5, B6, B7
E2	A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8
E3	A2, A3, A4, A6, A7, A8
E4	A2, A3, A4, A6, A7 / B1, B2, B3, B4, B5, B6
E5	B1, B5, B6
E6	A2, A3, A4, A6, A8

Tabla 5.4: Correspondencia entre errores y argumentos

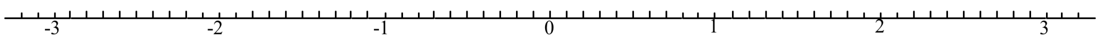
Como la administración del cuestionario se llevó a cabo en dos sesiones distintas, tratamos la consistencia de las respuestas dadas en ambas preguntas. En este sentido, encontramos que no es alta. Si bien se dan los comportamientos A, B, C en ambas; debemos añadir en la segunda pregunta un nuevo comportamiento, F, que consiste en considerar a todos los números como decimales. También, los alumnos que hemos agrupado en esos comportamientos no son los mismos en cada pregunta.

Resultados de la tercera pregunta en la fase de diagnóstico

La situación problemática que hemos planteado es la siguiente:

3. Representa en la recta numérica y explica el procedimiento utilizado :

a) $\sqrt{2}$ b) 0,75 c) 0,333… d) $-2\sqrt{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 2,75 g) $\frac{3}{4}$ h) 2,2333…



A esta pregunta le añadimos, para cada apartado, un segmento de recta, subdividido en 10 partes iguales, y sin marcar los extremos. De esta manera, el alumno podía elegir el segmento unidad, dividido en el número de partes iguales que le convenía.

En esta pregunta hemos observado que el alumnado utiliza los siguientes procedimientos para representar los números.

a) Se divide la unidad en 10, 100, 1000 etc. partes congruentes y se cuentan unidades, décimas, centésimas, milésimas, etc. A veces se comenta que se trata de un proceso ilimitado.
b) Se divide la unidad en partes congruentes, pero no en un número que sea la unidad seguida de ceros, y se toman las necesarias. Por ejemplo: se divide la unidad en cuatro partes congruentes y se cuenta 0, 0,25, 0,5 y 0,75 o se dice que de cuatro partes se toman tres.
c) Se sitúa aproximadamente en un punto, algunas veces no se marca, de un intervalo de la recta. Por ejemplo: se dice que 0,333… está entre 0 y 1, y, en otras ocasiones, se le asigna un punto próximo al del cero.
d) Se aplica el teorema de Pitágoras para representar a $\sqrt{2}$ o a $-2\sqrt{2}$.

La aplicación de estos métodos se acompaña en algunas casos con un cambio de registro a notación decimal con coma. A parte, hemos distinguido los comportamientos que resultan de la combinación de las acciones siguientes:

a) Realizar las operaciones indicadas para la representación posterior de $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$ (78,6%).
b) No efectuar la división para representar a $\frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$ (17,9%). Las fracciones se interpretan como la relación Parte-Todo.
c) Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$ (3,6%).
d) Representar solo los que están en notación decimal con coma (7,1%).
e) Situar algunos números indicando solo el intervalo al que pertenecen (10,7%).

Por ejemplo, este alumno manifiesta el comportamiento que resulta de aplicar a).

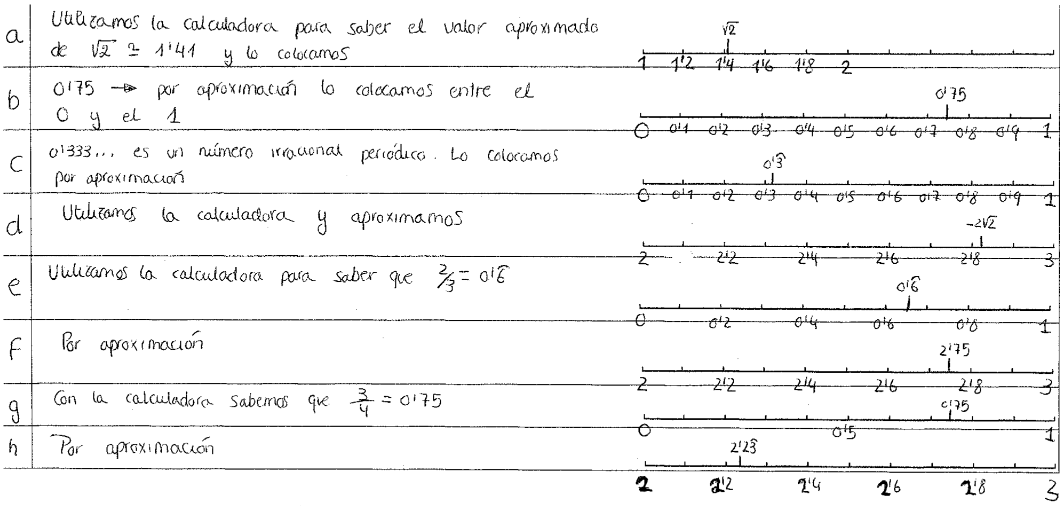


Figura 5.10: Ejemplo de respuesta de un alumno

El comportamiento mayoritario no se corresponde con el que se refleja en un mapa conceptual como el que consideramos que rige la organización de los contenidos matemáticos de esta pregunta, tal y como mostramos en la Figura 5.11.

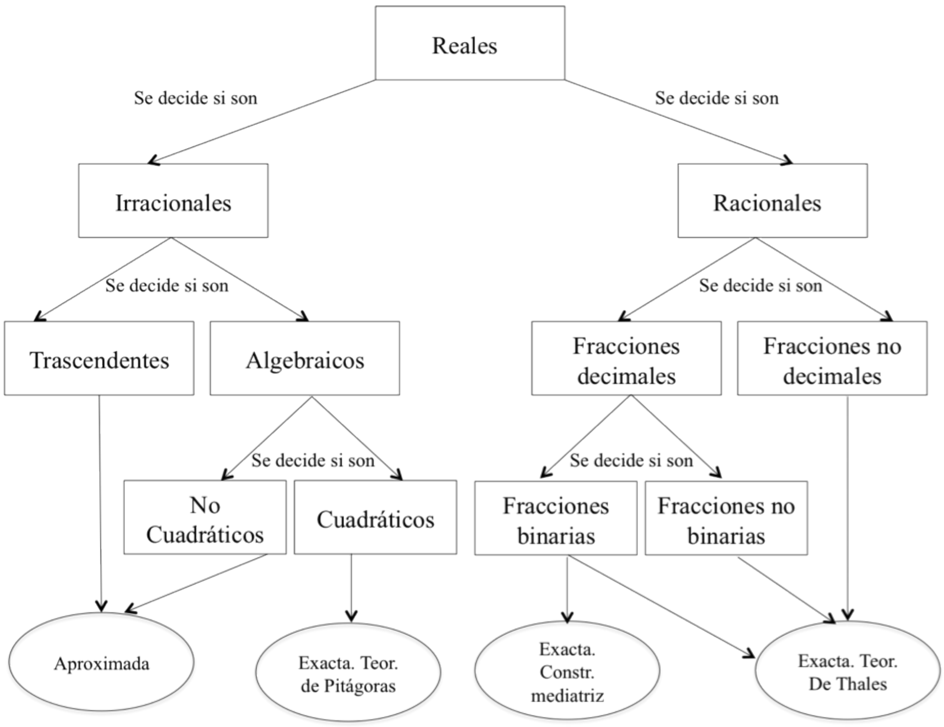


Figura 5.11: Mapa conceptual de los contenidos que rige el análisis de contenidos matemáticos

La relación entre las técnicas, utilizadas por el alumnado, y el proceso de sustitución formal de una representación digital a la recta, no se hace a través de las estructuras. Conjeturamos que el alumnado no se plantea inicialmente qué tipo de número es, para buscar la técnica de representación adecuada, sino qué tipo de representación. Por lo general, se aprecia que el alumnado solo aplica la representación de un número en notación decimal en la recta. Por ello, se procede a transformar la representación fraccionaria y la notación de radicales a notación decimal y, posteriormente, se representa en la recta de forma aproximada.

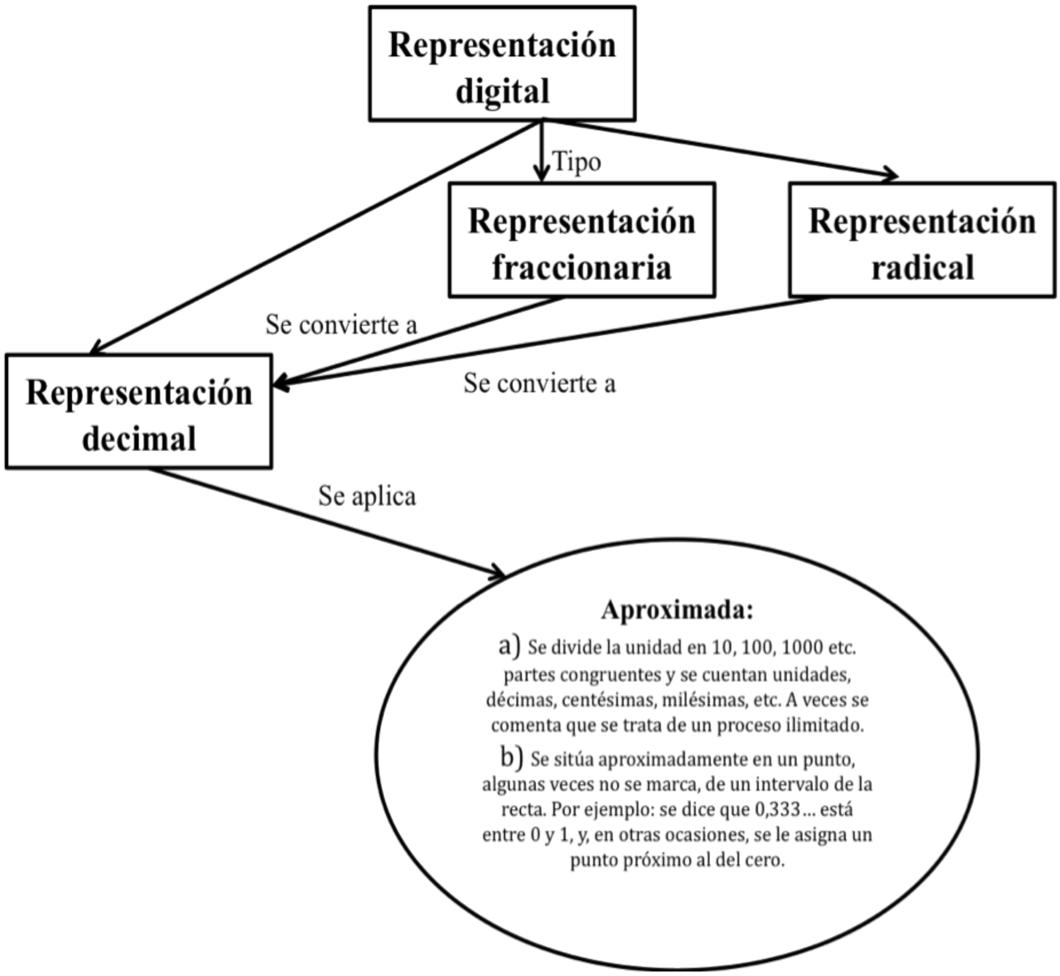


Figura 5.12: Procedimientos de los alumnos en la fase de diagnóstico

En este orden de cosas, hemos observado los siguientes errores, aunque con porcentajes bajos de incidencia:

a) Se asignan a números positivos puntos situados a la izquierda del cero. También, a números negativos, se les corresponden con puntos situados a la derecha del cero (7,1%).
b) Se aplica el orden de los naturales a los números negativos ($-2 \leq -2{,}6$) (3,6%).
c) Algunos números, tales como $-2\sqrt{2}$ o 0,333…, se dicen que pertenecen al intervalo [-1, 0] (7,1%).
d) $\sqrt{2}$ se iguala con el dos o con el cuatro. Asimismo, $-2\sqrt{2}$ se identifica con el cero o con $-\sqrt{2}$ (7,1%).

5.4 RESULTADOS DE LA FASE DE REVISIÓN

En este apartado, al igual que en el anterior, mostramos, por preguntas, los resultados obtenidos en la puesta en práctica, en esta fase, del cuestionario (C2).

Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de revisión

Analizamos en este apartado la misma pregunta del cuestionario en la fase de revisión siguiendo el orden anterior. En primer lugar, la respuesta dada por el alumnado a cada conjunto numérico, con excepción de la columna decimales, en relación con los 23 números dados en la tarea.

Volvemos a encontrar, nuevamente, que los alumnos continúan, en algunos casos, considerando el criterio de identificar a los números por su escritura o por alguna característica asociada a los signos.

Los criterios para los números **Naturales** son:

a) Los números positivos y el cero. En algunos casos se excluye el $3-\sqrt{3}$, por contener el signo menos en la escritura (32,1%).
b) Los números expresados con notación decimal. (7,1%).
c) Todos. Algunos excluyen a π *y a* $\pi-5$. (7,1%).
d) Los números positivos, pero con un número finito de cifras decimales (7,1%).
e) Los naturales de la tabla (39,3%). A veces no son clasificados como naturales el 35.521, $\frac{10}{5}$ *o* $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Ahora el criterio más frecuente es elegir como números naturales los números naturales de la tabla con las salvedades mencionadas.

Los criterios para los números **Enteros** son:

a) Todos (14,3%). Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$.
b) Los enteros de la tabla (35,7%). A veces no son clasificados como enteros el 35.521, $\frac{10}{5}$ *o* $\left(\sqrt{2}\right)^2$.
c) Los números positivos y el cero (3,6%).
d) Todos, excepto algunos irracionales (3,6%).
e) Los números positivos expresados con notación decimal finita (3,6%).
f) Los números que se pueden expresar con notación decimal finita (14,3%).

Ahora, lo más frecuente es elegir los números enteros de la tabla con los matices establecidos en b).

Los criterios para los números **Racionales** son:

a) Todos, excepto algunos irracionales (3,6%).
b) Los números que se pueden expresar con notación decimal con coma y finita (10,7%).
c) Los números expresados con notación fraccionaria (3,6%). Algunos eligen también el número áureo.
d) Todos (14,3%). En algunos casos se excluye al $-\sqrt{7}$.
e) Todos los que no han sido seleccionados como irracionales (10,7%).
f) Las expresiones numéricas que contienen raíces, π *y* $\pi - 5$ (3,6%).
g) Los racionales (3,6%).
h) Los positivos (3,6%).
i) Los expresados con notación decimal (3,6%).
j) Todos menos los enteros y $-\sqrt{7}$ (3,6%).
k) Las escrituras que contienen raíces y las fraccionarias (3,6%).

En este caso, no hemos podido observar claramente un patrón. Podemos señalar como el más significativo el criterio de que los alumnos identifican como número racional a todos, salvo algunos casos como a $-\sqrt{7}$.

Los criterios para los números **Irracionales** son:

a) Los números que no han sido considerados como racionales (28,6%).
b) Las expresiones numéricas que contienen raíces y algunos irracionales (por ejemplo: $\pi \ y \ \pi - 5$) (7,1%).
c) Los números expresados con notación decimal con coma e infinita, y algunos irracionales (3,6%).
d) Los números que se pueden expresar con notación decimal con coma infinita (7,1%).
e) Las expresiones numéricas que contienen raíces (7,1%).
f) Ninguno (3,6%).
g) Solamente $-\sqrt{7}$ o, $\pi \ y \ \pi - 5$ (7,1%).
h) Los que están en escrituras decimales con coma infinitas y no periódicas, $\pi \ y \ \pi - 5$ (3,6%).
i) Los representados con notación no decimal (3,6%).

Las respuestas más frecuentes son las recogidas en los apartados a): los que no son racionales, considerando implícitamente $Q \cap I = \varnothing$.

Los criterios para los números **Reales** son:

a) Todos (57,1%). En algunos casos se excluye a $-\sqrt{7}$.
b) Los números positivos (7,1%). En algunos casos se excluyen a $\pi \ y \ \pi - 5$.
c) Los que no se han elegido como irracionales (3,6%).
d) Los números positivos expresados con notación decimal (3,6%).
e) Los enteros {35.521, 2, 0} (3,6%).

La respuesta mayoritaria es a), es decir, se consideran a todos como reales, pero en algunos casos se excluye a $-\sqrt{7}$.

En segundo lugar, expresamos el número de alumnos que excluyen o incluyen a los 23 números dados en esta tarea como decimales.

Ítem de la primera pregunta	**Número de alumnos que lo excluye como decimal**	**Número de alumnos que lo incluye como decimal**	
1.1	0	28	- 2,062
1.2	15	11	35.521
1.3	4	24	$\frac{3}{5}$
1.4	19	9	2
1.5	3	25	$-\frac{1}{2}$
1.6	1	27	0,63
1.7	8	14	$-\sqrt{7}$
1.8	5	22	0,123456…
1.9	1	27	3,14
1.10	20	6	0
1.11	9	14	$1+\sqrt{2}$
1.12	8	18	π
1.13	13	15	$\frac{10}{5}$
1.14	12	14	$-\frac{7}{3}$
1.15	3	24	0,666…
1.16	13	12	$\left(\sqrt{2}\right)^2$
1.17	3	24	$1,3\widehat{5}$
1.18	5	21	1,73205008…
1.19	8	17	π-5
1.20	2	25	0,5
1.21	8	18	$3-\sqrt{3}$
1.22	5	20	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.23	12	15	$\frac{1}{3}$

Tabla 5.5: Tabla de frecuencias

A partir de los datos de reflejados en la Tabla 5.5 observamos que se vuelven a elegir, de forma mayoritaria, los que están expresados con notación decimal con coma, a los que debemos incluir las fracciones decimales ($\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{2}$). Nuevamente, encontramos situaciones en las que el 2 y el 0 no son considerados como decimales.

En tercer lugar describimos los comportamientos encontrados en los alumnos a partir de respuestas similares.

En esta fase encontramos los comportamientos siguientes:

a) A (7,1%): consiste en elegir como decimales solo los que están expresados con notación decimal con coma.

b) B (25%): se seleccionan las escrituras decimales con coma, todas o algunas fracciones. Los enteros son excluidos. Asimismo, se excluyen o se dejan en blanco algunos de los irracionales, no expresados con la notación decimal.

c) C (17,9%): los números decimales son todos, excepto los enteros.

d) E (3,6 %): la respuesta correcta.

e) F (7,1 %): los números decimales son todos. Nos encontramos que además algunos consideran que D es isomorfo a R-Z.

f) G (18 %): se incluyen los números expresados con notación decimal con coma y se establece correctamente la clasificación de las fracciones (decimales o no). Con respecto a los irracionales, no expresados con notación decimal, se incluyen todos o se excluyen algunos. Los enteros son incluidos en algunos casos.

En cuarto lugar mostramos, de forma resumida, los errores encontrados. Estos son los siguientes:

a) E1: Los enteros no son decimales (92,9%).

b) E2: Todos los números expresados con notación decimal con coma son decimales (78,6%).

c) E3: Todas las fracciones son decimales (25%).

d) E4: Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente (46%).

e) E5: Ninguna fracción es decimales (7,1%).

f) E6: Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal, son decimales (71,4%).

g) E7: Los números expresados con notación decimal con coma, excepto la infinita no periódica, son decimales (7,1%).

h) E9: Hay decimales que no son racionales (50%).

i) E10: Hay decimales que son irracionales (35,7%).

j) E11: Hay decimales que no son reales (32 %).

k) E12: $D \approx R - Z$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales (17,8%).

l) E13: También nos encontramos con el error que consiste en considerar D isomorfo a R (7,1%).

Resultados de la segunda pregunta en la fase de revisión

La búsqueda de comportamientos se ha realizado aplicando la misma técnica que en la fase de diagnóstico. De esta manera, hemos encontrado los siguientes comportamientos además de A (3,6%), y F (3,6%):

a) Comportamiento E (10,7%).
b) Comportamiento M (3,6%).
c) Comportamiento H (25%).
d) Comportamiento J (7,1%%).
e) Comportamiento K (28,6%).
f) Comportamiento L (o B) (17,9%)

Los comportamientos que aparecen, por primera vez y que no constituyen el adecuado (Comportamiento E), al ser estudiado el diagrama de árbol mencionado con anterioridad, se muestran a continuación.

Comportamiento M: Se elige a Q como D.

Comportamiento H: Se marcan correctamente todos los números decimales que están en notación fraccionaria y se excluyen las fracciones no decimales. Además, son elegidos todos o algunos de los expresados con notación decimal con coma.

Comportamiento J: Se eligen algunas de las fracciones no decimales y se excluyen, mayoritariamente, los números expresados con notación decimal infinita y no periódica. Algunos también descartan a las expresiones periódicas.

Comportamiento K: Se toman todos los números decimales que están en notación fraccionaria y se excluyen las fracciones no decimales. Asimismo, se eliminan los números expresados con notación decimal infinita y no periódica; algunos, también, las periódicas.

Comportamiento L: Se decantan por alguna fracción no decimal y no se excluyen los expresados con notación decimal infinita y no periódica. Prácticamente es el comportamiento B en la fase de diagnóstico. En este caso hay alumnos que marcan negativamente a los irracionales que no están en notación decimal.

En estos comportamientos se eliminan a todos o algún entero y, de los irracionales, no representados por escrituras decimales, se da más diversidad en las respuestas.

Igualmente, destacamos que el 32,1% de los alumnos clasifican correctamente a los irracionales como no decimales. El 57,1% selecciona correctamente las fracciones equivalentes a decimales y el 17,9% a los enteros. El 39,3% descarta a elementos de Q-D.

Los argumentos aplicados en esta situación son los siguientes:

- La estructura es incluida como decimal porque:

a) A1: Está representada con notación decimal con coma (35,7%).
b) A2: Se realiza el cambio de registro a la notación decimal con coma (57,1%).
c) A3: Es una cantidad inexacta (3,6%).
d) A4: Constituye partes no enteras de la unidad (7,1%).
e) A5: Por estar comprendida entre dos enteros consecutivos (3,6%).
f) A6: Pertenece a otro conjunto numérico: N, Z, Q o I (39,9%).
g) A7: Se expresa con notación decimal con coma, infinita y periódica (10,7%).
h) A9: Se puede expresar como una fracción decimal (53,6%).
i) A10: Se puede representar con notación decimal, pero con parte decimal nula o con periodo nueve (10,7%).
j) A11: Está representada con notación decimal finita (14,3%).
k) A8: Por ser una expresión decimal infinita y no periódica (3,6%).

El porcentaje que acompaña a cada argumento indica la relación entre el número de alumnos que lo han aplicado alguna vez y el total.

- Sin embargo, es excluida como decimal porque:

a) B1: No está representada con notación decimal con coma (21,4%).
b) B2: Se realiza el cambio de registro a la notación decimal sin coma (35,7%).
c) B3: Es una cantidad exacta (3,6%).
d) B4: Constituye partes enteras de la unidad (3,6%).
e) B5: Pertenece a otro conjunto numérico: N, Z, No Z o I (67,9%).
f) B6: Está expresada en forma de fracción (3,6%).
g) B7: Es una expresión numérica que contiene una raíz cuadrada (3,6%).
h) B9: Se trata de una expresión numérica (3,6%).

i) B10: No se puede expresar como una fracción decimal (39,3%).

j) B11: No tiene valor (7,1%).

k) B12: Por llevar signo negativo (7,1%).

l) B13: Está expresada con notación decimal con coma e infinita (28,6%).

m) B14: Está representada con notación decimal con coma, infinita y periódica (10,7%).

n) B15: Se expresa con notación decimal con coma, infinita y no periódica (3,6%).

o) B16: Se puede representar con notación decimal con coma, infinita y con periodo distinto de nueve (3,6%).

p) B17: Es un número imaginario (3,6%).

La red sistémica de argumentos encontrados en esta fase, que se recoge en la Figura 5.13 para los alumnos que hacen cambio de registro a la notación decimal, y en la Figura 5.14 para los estudiantes que no hacen cambio de registro a la notación decimal.

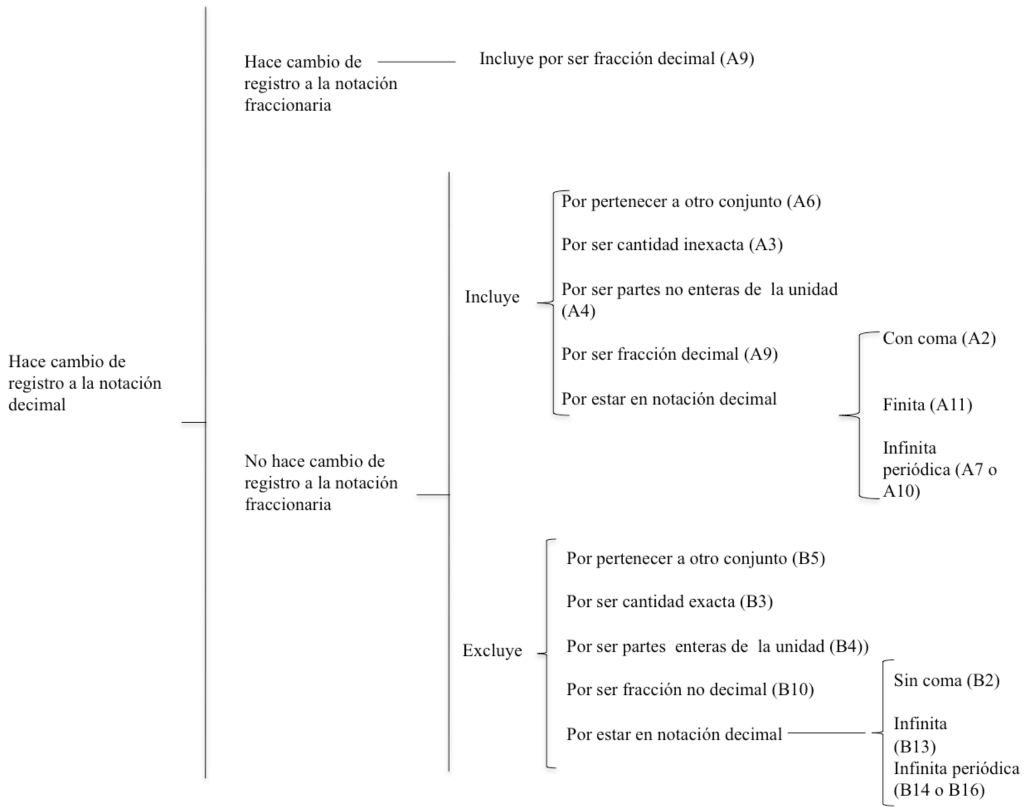


Figura 5.13: Red sistémica de los alumnos que hacen cambio de registro a la notación decimal

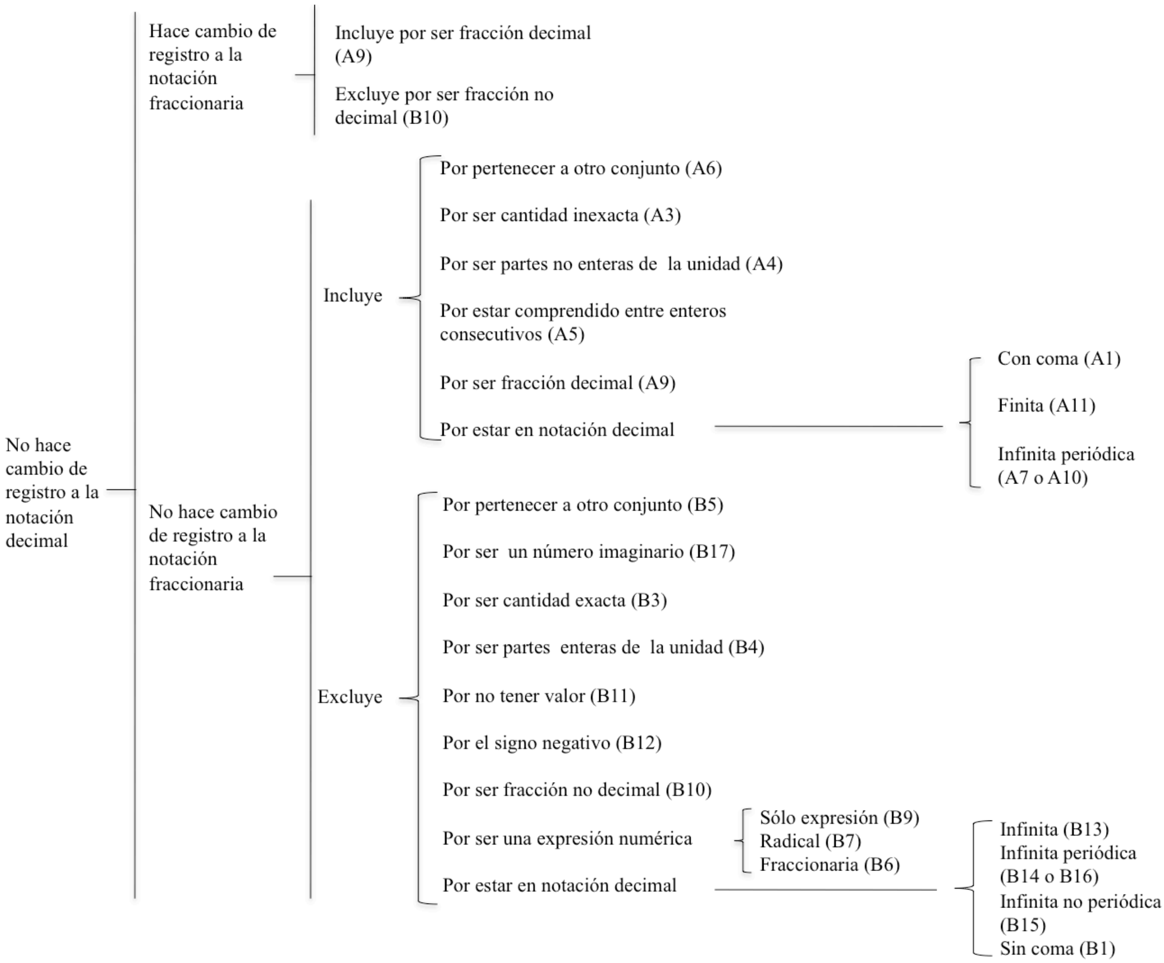


Figura 5.14: Red sistémica de los alumnos que no hacen cambio de registro a la notación decimal

En este caso, se dan argumentos falsos, pero también correctos. Destacamos el A9, B10 y B13 (salvo periodo nueve o cero). Así, se observa que aparece, por primera vez en el estudio, el argumento en el que el alumno hace cambio de registro a la notación fracción decimal para explicar el porqué ha elegido el número (ídem para excluirlo). La notación decimal no es la única representación que se utiliza para expresar estos números. También, se excluyen como decimales los números que se pueden expresar con notación decimal infinita.

Por otra parte, se puede establecer una correspondencia entre los comportamientos y los argumentos. Para ello, se ha considerado que si un alumno, que manifiesta un comportamiento determinado, aplica uno de esos argumentos, éste es asignado al comportamiento. De esta manera tenemos que los argumentos más utilizados se aplican en los siguientes comportamientos:

a) Está representado con notación decimal con coma en A, F, H, J, K y en L.
b) Se realiza cambio de registro a la notación decimal con coma en H, J y L.
c) Pertenece a otro conjunto numérico (N, Z, Q o I) en E, M, H, K y L.
d) Se puede expresar como fracción decimal en H, K y E.
e) No está representada con notación decimal con coma en A, H, J y L.
f) Se realiza el cambio de registro a la notación decimal sin coma en H, J, K y L.
g) Pertenece a otro conjunto numérico (N, Z, No Z o I) en E, M, H, J, K y L.
h) No se puede expresar en forma de fracción decimal en E y H.
i) Está representado con notación decimal con coma e infinita en E, H, J y K.

La aplicación de la notación decimal con coma para elegir un número como decimal, se da en todos los comportamientos, excepto en el correcto, E, y en el que se identifica Q con D.

Los errores que en esta fase hemos encontrado son:

a) E1: Los enteros no son decimales (75%).
b) E2: Los números expresados con notación decimal con coma son decimales (35,7%).
c) E3: Todas las fracciones son decimales (14,3%).
d) E4: Algunas fracciones son decimales, pero la clasificación es incorrecta (25%).
e) E5: Ninguna fracción es decimal (3,6%).
f) E6: Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, son decimales (53,6%).
g) E7: Todo número expresado con notación decimal con coma finita o infinita periódica, es decimal (21,4%). Se descartan los expresados con notación decimal infinita y no periódica.
h) E8: -3,9 no es decimal (14,3%).
i) E14: Todo número expresado con notación decimal con coma finita o infinita no periódica es decimal (10,7%).

Entre los que excluyen a los enteros como decimales encontramos respuestas que consideran como tales a todos o a algunos de los siguientes: $\{-3, 0\ ,2\}$. A veces, se les denotan como naturales. En otros casos, el término entero se utiliza para señalar a otros números que realmente no los son, por ejemplo: -3,9, $-\frac{7}{3}$, $-\frac{1}{3}$, π, 0,5 y 1,48.

Los números expresados con notación decimal con coma se eligen como decimales y se aplican argumentos como: A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9 y A11. Así, el alumnado, al aparecer el argumento A9, ya se plantea en esta cuestión si un número se puede expresar en forma de fracción decimal.

- 3,9	Si	Porque puede representarse como fracción decimal de la $\frac{-39}{10}$

Figura 5.15: Número expresado en forma de fracción decimal por un alumno

En esta fase se explicita, en algunos casos, que Q es subconjunto de D.

$1,3\bar{5}$	Sí	$1,3\bar{5}$ es un número racional, por ello es también decimal.

Figura 5.16: Respuesta de un alumno en la que se incluye Q en D

El error E7, podemos decir que es menos fuerte que el E2, al excluirse los irracionales expresados con notación decimal. Por ello, hemos separado los alumnos que cometen este error de los del E2, puesto que parte del alumnado (21,4%) ya no piensa que todo número expresado con notación decimal sea decimal.

En este orden de cosas, comentamos que el ítem 2.13 (1,732…) se excluye por algunas de las siguientes ideas:

a) Ser un irracional.
b) No poderse expresarse como fracción decimal.
c) Estar expresado en notación decimal infinita.
d) Estar representado con notación decimal, infinita y no periódica.

Algunos de los que establecen que todas las fracciones son números decimales combinan los argumentos A2 y A9. Primero se hace cambio de registro a notación decimal y de éste a fracción decimal ($\frac{1}{2}=0{,}5=\frac{5}{10}$). En otras situaciones se aplica A9 en un ítem y, en otro, el A2.

$\frac{10}{5}$	Sí	Ya que $\frac{10}{5}=2=\frac{20}{10}$ (Se puede expresar con una fracción con denominador 10^*)
π	No	π pertenece al conjunto de números irracionales
$-\frac{7}{3}$	Sí	Ya que $-7/3=-2{,}\hat{3}$

Figura 5.17: Ejemplo de respuesta de un estudiante en la que se considera a las fracciones como decimales

En el E4, la mayoría excluye a $\frac{10}{5}$ y esgrimen los argumentos B2 y B5. Por tanto, se realiza la conversión a notación decimal. Algunas veces es elegido al considerarse una fracción decimal, pero el 2 no.

2.	No	Es un numero natural
$1+\sqrt{2}$		
$\frac{10}{5}$	Sí	Porque el denominador es divisor de 10

Figura 5.18: Ejemplo de respuesta de un alumno en la que se considera a los enteros como no decimales

El porcentaje de incidencia del error que consiste en pensar que ninguna fracción es decimal es bajo y se aplica el argumento B6.

Los estudiantes que cometen el error E6 argumentan A2, A3 o A9. Este último argumento se aplica en $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puesto que se interpreta como una fracción, y en π-5, al tomarse una aproximación decimal de π y realizar, posteriormente, la conversión a fracción decimal.

Con respecto al error que consiste en considerar a -3,9 no decimal, observamos que algunos razonan de la forma siguiente: *-3,9 no es decimal porque no es múltiplo de 10*. Esto mismo sucede con 1,48, pero con menos frecuencia.

En este orden de cosas, podemos comentar que encontramos confusiones entre nociones (divisor, múltiplo, potencia y reglas para saber si una fracción representa un número decimal):

a) En vez de decir que el denominador de la fracción es divisor de la unidad seguida de ceros se dice que es múltiplo.
b) Se explica que el denominador es múltiplo de 10 en vez de potencia de 10.
c) Se habla de que, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es decimal *porque es múltiplo de 10*.
d) Se comenta que, para el mismo ejemplo anterior, que es decimal porque *el denominador es de base 10* o *es una fracción de base 10*.
e) Se dice que un número es decimal si es divisor (o múltiplo) de 10. De esta manera, *-3 no es decimal porque no es divisor de 10*.

Así, el error E1, los enteros no son decimales, presenta también argumentos erróneos distinto a los de no estar en notación decimal con coma o ser enteros.

Por todo ello pensamos que existen relaciones entre los errores encontrados y que se pueden establecer al realizar tratamientos en una representación o cambios de registros entre representaciones distintas.

Asimismo, en la Tabla 5.6 establecemos la relación de los errores con los argumentos. Se tiene en cuenta la correspondencia entre el error y todos los argumentos que han empleado los estudiantes que lo cometen.

ERRORES	ARGUMENTOS
E1	B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B9, B10, B11 (0) y B12(-3)
E2	A1, A3, A7 y A9
E3	A2, A7o A10 y A9
E4	A2, A4 y A6/ B2, B4 y B5
E5	B6 y B9
E6	A2, A6 y A9
E7	A1, A6, A7 o A10 y A9
E8	B5 y B10
E14	A6 o A9

Tabla 5.6: Relación de errores con argumentos

Resultados de la tercera pregunta en la fase de revisión

En esta fase hemos observado que el alumnado utiliza los siguientes procedimientos para representar los números.

a) Se divide la unidad en 10, 100, 1000 etc. partes congruentes y se cuentan unidades, décimas, centésimas, milésimas, etc. A veces se comenta que se trata de un proceso ilimitado.

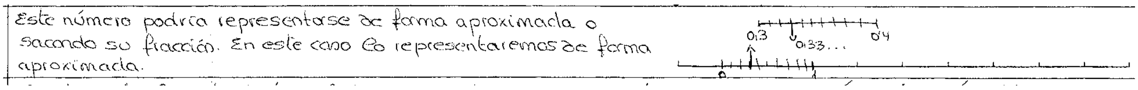


Figura 5.19: Representación aproximada de 0,3333…, realizada por un estudiante

b) Se divide la unidad en partes congruentes, pero no en un número que sea la unidad seguida de ceros, y se toman las necesarias.

c) Se aplica el teorema de Pitágoras para representar a $\sqrt{2}$ o a $-2\sqrt{2}$. Este último número también se representa hallando el doble de $\sqrt{2}$ y, después, el opuesto de $2\sqrt{2}$.

Para ello, hay alumnos que realizan, previamente, un cambio de registro a notación decimal con coma o a notación fraccionaria, en algunas situaciones. De esta manera, distinguimos comportamientos, al igual que en la prueba inicial, que se obtienen de la combinación de las acciones siguientes:

a) Representar a 0,75, 0,333…, 2,75 y 2,2333…, haciendo cambio de registro a notación fraccionaria en algunos (o en todos) de ellos (17,9%).

b) Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$ (42,9%).

c) No efectuar la división para representar a $\frac{2}{3}$ *o* $\frac{3}{4}$ (35,7%). Las fracciones se interpretan como la relación Parte-Todo.

d) Realizar las operaciones indicadas para la representación posterior de $\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$ *o* $\frac{3}{4}$ (46,4%).

Por ejemplo este alumno combina las acciones a), b) y c):

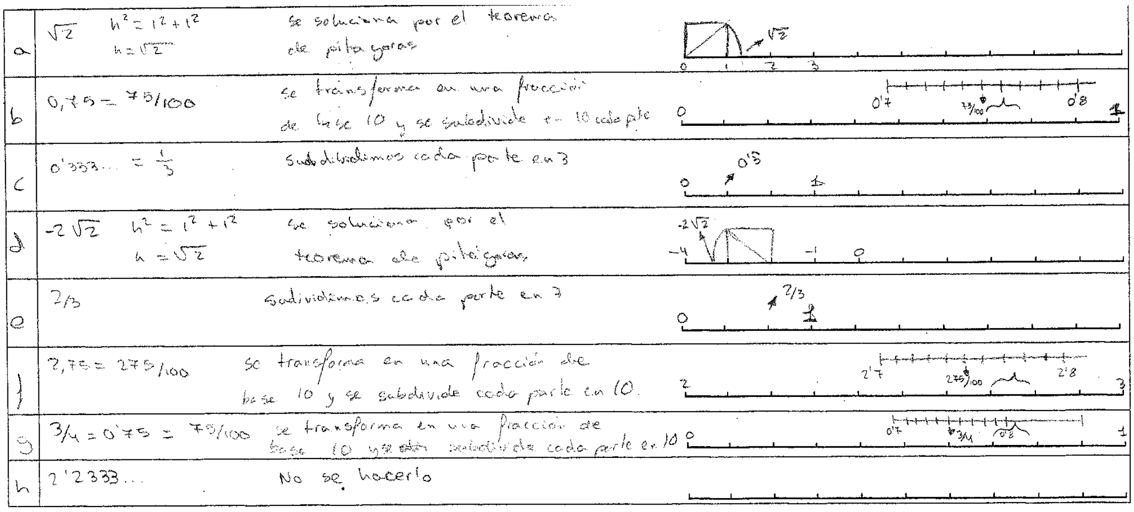


Figura 5.20: Ejemplo de respuesta de un alumno

En el esquema siguiente recogemos las combinaciones que hemos encontrado.

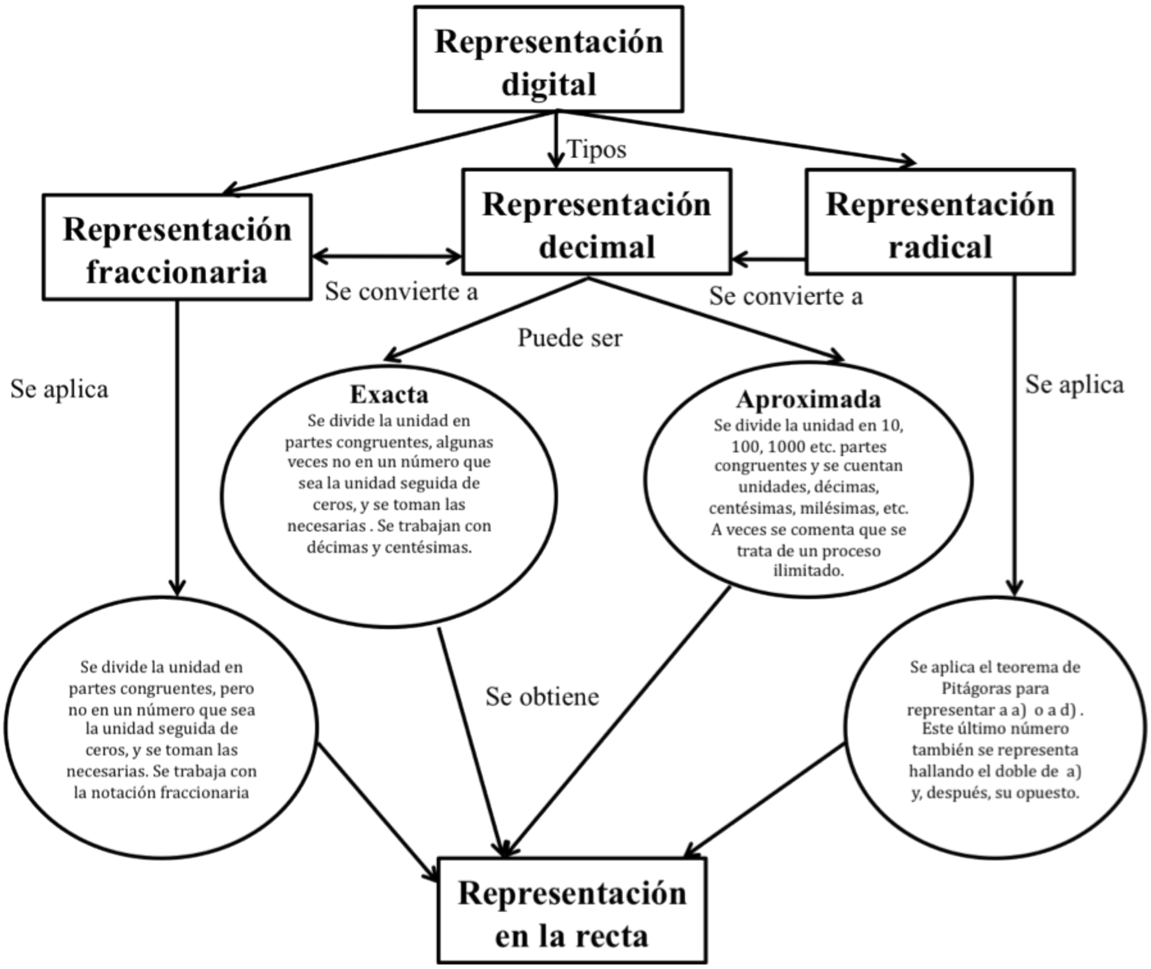


Figura 5.21:Procedimientos de los alumnos en la fase de revisión

En este caso, hemos hallado los siguientes errores, aunque con una frecuencia baja:

a) Situar números positivos a la izquierda del cero (3,6%).
b) Contar décimas siguiendo la secuencia: 0,1, 0,2, 0,3,…, 0,9 y 0,10 (3,6%).
c) Confundir $-2\sqrt{2}$ con $2-\sqrt{2}$ y situarlo incorrectamente (3,6%).
d) Para situar el $-2\sqrt{2}$, se construye el cuadrado de lado la unidad sobre el intervalo [-2, -1] y se transporta la diagonal de tal modo que el punto se halla en el intervalo $[-1,\ 0]$. De esta manera, el punto que se le asigna está a la derecha del -1. También se dibuja el cuadrado sobre el intervalo [-3, -2] y se localiza el punto en el [-4, -3]. Su porcentaje es del 7,1%.
e) Equivocarse en el procedimiento para hallar la fracción generatriz de 2,23333… (7,1%).
f) Considerar que $\sqrt{2}$ no se puede representar porque *es imaginario;* $-2\sqrt{2}$ *porque no existe; 0,333… por ser inexacto y 2,2333…porque es periódico mixto* (3,6%).

5.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS FASES DE DIAGNÓSTICO Y REVISIÓN

Comparamos ahora los resultados obtenidos en las tres preguntas.

Comparación de los resultados de la primera pregunta

Dedicamos este apartado a comparar y discutir los resultados obtenidos. Con respecto a los resultados generales, sobre los criterios usados para identificar a los diferentes números, obtenemos un mayor porcentaje de aciertos en la elección de los naturales en la última prueba (39,3%) que en la inicial (21,3%). Del mismo modo, en la selección correcta de los reales, del 28,6% al 57,1%.

En la Tabla 5.7 presentamos los comportamientos obtenidos en ambas pruebas, en la columna de los decimales, con los porcentajes de incidencia.

Comportamientos en la prueba inicial (columna de los decimales)	Porcentaje	Comportamiento en la prueba final (columna de los decimales)	Porcentaje
Comportamiento A	21,4%	Comportamiento A	7,1%
Comportamiento B	28,6%	Comportamiento B	25%
Comportamiento C	25%	Comportamiento C	17,9%
Comportamiento D	3,6 %	-	
		Comportamiento E	3,6%
		Comportamiento F	7,1%
		Comportamiento G	17,9%

Tabla 5.7: Comportamientos obtenidos en ambas pruebas

Tal como se observa hay comportamientos que se repiten y otros que aparecen por primera vez.

Con respecto a los que se repiten nos encontramos con el A, que consistía en contestar como decimales solo los números expresados con notación decimal con coma, cuyo porcentaje experimenta una reducción de la prueba inicial (21,4 %) a la final (7,1%). Asimismo, el porcentaje de incidencia del comportamiento C, en el que los alumnos señalan como decimales a todos excepto a los enteros, disminuye del 25 % al 17,9 %. El comportamiento B pasa del 28,6 % al 25%.

En relación con los nuevos comportamientos E y G, destacamos que aparece, por una parte, la respuesta correcta y, por otro, se presenta una mejoría en la clasificación de las fracciones. Por otra, surge el comportamiento F, en el que el alumnado considera a todos los números como decimales, pero con un porcentaje bajo (7,1%). En los comportamientos E y F se consideran a los enteros como decimales.

En relación con los errores podemos observar que aparecen prácticamente los mismos, según se observa en la Tabla 5.8.

Tipos de errores	Porcentaje (Prueba inicial)	Porcentaje (Prueba final)
a) E1:Los enteros no son decimales.	92,9%	92,9 %
b) E2: Todos los números expresados con notación decimal con coma son decimales.	89,3%	78,6%
c) E7:Los números expresados con notación decimal con coma, excepto la infinita no periódica, son decimales.	_	7,1%
d) E3: Todas las fracciones son decimales.		
e) E4: Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente.	21,4% 42,9%	25% 46 %
f) E5: Ninguna fracción es decimal.		
g) E6: Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal son decimales.	35,7 % 57,1%	7,1% 71,4 %
h) E9: Hay decimales que no son racionales.		
i) E10: Hay decimales que son irracionales.	53,6%	50%
j) E11: Hay decimales que no son reales.	35,7%	35,7%
k) E12: $D \approx R - Z$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales.	25%	32%
l) E13: También nos encontramos con el error que consiste en considerar D isomorfo a R.	10,7%	17,8%
	-	7,1% 7,1%

Tabla 5.8: Tipos de errores en ambas pruebas

En la tabla podemos observar que el error que se comete al excluir los números enteros de los decimales es persistente por lo que podemos pensar que desde D los alumnos no pueden organizar N y Z.

Por otro lado, en el caso de las fracciones, aunque se experimenta un aumento del porcentaje en la prueba final de los errores E3 y E4 de la tabla, disminuye el porcentaje del error E5. Podemos decir que ahora hay más estudiantes que plantean que las fracciones sí pueden ser decimales, que en la prueba inicial.

Observamos en la prueba final la presencia del error E7 que muestra además que parte del alumnado separa las expresiones decimales con coma infinita, periódicas, de las no periódicas. Inicialmente, se hacía un tratamiento global, todas representaban números decimales.

Asimismo, el error E6 tiene una mayor incidencia en la prueba final que la inicial. Conjeturamos que la causa de este hecho se encuentra en que ahora hay más alumnos que hacen cambio de registro.

Los errores que están relacionados con la relación de inclusión mantienen aproximadamente el mismo porcentaje, excepto en el E11. En esta fase final hay más alumnos que consideran que los decimales no son un subconjunto de los reales. El estudiante, de forma general, manifiesta menos el pensamiento estructural y el procesual que el operacional.

Finalmente, comentamos que parte del alumnado sigue utilizando el criterio, aunque con menos incidencia, de que si el número está o puede ser representado (cambio de registro) con una escritura decimal con coma, es decimal. Pensamos que esta disminución se debe a que parte del alumnado ha incorporado las reglas para averiguar si una fracción es decimal o no.

A modo de conclusión, podemos decir que la organización curricular que encontramos en la fase de diagnóstico queda caracterizada por los siguientes aspectos:

- El comportamiento general es identificar a cada estructura con una escritura o con otras características asociadas a los signos (Por ejemplo: + o -).

- Los números decimales se identifican con la representación decimal con coma.

- Los enteros se excluyen de los decimales.

- La notación decimal es tratada de forma global: no se distingue entre la notación decimal, infinita y periódica de la no periódica.

- La aplicación de los conceptos, fracción decimal y no decimal, no es apreciada en sus respuestas.

- Los racionales se identifican con los números expresados con notación fraccionaria.

- Los irracionales se identifican con las expresiones que contienen una raíz cuadrada.

Sin embargo, la organización curricular, hallada en la fase de revisión, queda caracterizada por los siguientes aspectos:

- Los números decimales se identifican con la escritura decimal con coma, pero, en algunos casos, con la notación fraccionaria decimal.

- Los enteros se excluyen de los decimales.

- Los racionales, ahora, son todos los de la tabla, salvo $-\sqrt{7}$.

- Los irracionales, son los que no son racionales: $Q \cap I = \varnothing$.

- La notación decimal no es tratada de forma global: Los irracionales, expresados con notación decimal, son considerados no decimales.

- La aplicación de los conceptos, fracción decimal y no decimal, se aprecia en las respuestas del alumnado.

Por tanto, se observa, por una parte, que hay alumnos que diferencian las fracciones decimales de las que no lo son y, por otra, que se hace la identificación de las expresiones decimales, infinitas y no periódicas con los irracionales.

Los errores comunes y presentes en la mitad o más del alumnado son los siguientes: E1, E2, E4, E6 y E9. Todos estos errores están relacionados, en general, con la identificación de número decimal con la escritura decimal con coma y con el cambio de registro a esta notación.

Comparación de los resultados de la segunda pregunta

Realizamos un estudio comparativo entre los comportamientos encontrados en las fases: diagnóstico y revisión.

Con relación al comportamiento A, se observa que es una constante a lo largo del desarrollo del estudio. Sin embargo, experimenta una disminución en su frecuencia, de tal forma que en la última prueba lo presenta un solo alumno de la muestra.

El comportamiento B, que se presenta en la prueba inicial con un porcentaje del 21,4 % lo convertimos, en la prueba final, en el L (17,9 %). En este caso se tiene en cuenta, tal y como hemos mencionado con anterioridad, que el alumnado haya excluido o no a todos los irracionales, no expresados con notación decimal.

El comportamiento C, en el que se considera a todos los números como decimales excepto a los enteros, no aparece en la fase de revisión (prueba final).

El comportamiento E, que es la respuesta correcta, se da solo en la prueba final, con un porcentaje, aunque bajo, del 10,7%.

El comportamiento F, elegir a todos los números como decimales, aparece en las dos pruebas, pero disminuye su frecuencia en la final. La frecuencia es baja, 3,6%.

El resto de los comportamientos, H, M, J y K, se observan solo en la prueba final.

Los comportamientos más significativos en ambas fases (diagnóstico y revisión) son el C (50%) y el K (28,6%), respectivamente. La diferencia fundamental es que se pasa de elegir a todos los números, excepto a los enteros, como decimales, a seleccionar a las fracciones decimales y a excluir a los irracionales en escritura decimal y, en algunos casos, también a las expresiones periódicas.

Con respecto a los argumentos, hallamos que, en conjunto, los de la prueba final contienen en su mayoría a los de la inicial. Tenemos, además, que en la última se dan el A9, A10 y el A11 (B10, B11, B12, B13, B14, B15, B16 y B17). Se aplica la idea de que es decimal si se puede expresar en forma de fracción decimal y que las escrituras decimales, con un número finito de cifras, se corresponden también con decimales.

Los más utilizados en la primera parte, A1, A2 son aplicados con menor frecuencia en la segunda. Se pasa del 75 % para A1 al 35,7% y, del 78,6%, para el A2, al 57,1 %. Estos argumentos están relacionados con la identificación de estos números con las escrituras con coma. El B5, se aplica casi con las misma frecuencia, ya que, sus porcentajes son del 67,6%, en la fase inicial, al 67,9 %, en la final. En este argumento, en la fase de diagnóstico, se sostiene que los números considerados como naturales o enteros, no son decimales, sin embargo, en la fase de revisión, se excluye, además, a los irracionales. En esta última prueba, uno de los argumentos que más se utiliza es el A9, para elegir un número como decimal, con un porcentaje del 53,6 %. Éste se caracteriza por la aplicación del concepto de fracción decimal.

En resumen, podemos decir que si bien, en la fase de diagnóstico, los argumentos para elegir un número como decimal se basan en la escritura decimal con coma, en la fase de revisión, se fundamentan, además, en la representación del número en forma de fracción decimal. Los argumentos, para excluir un número como decimal, en la fase de diagnóstico, están basados en la pertenencia a un conjunto numérico, identificado con N o con Z, o en una escritura sin coma. Sin embargo, en la fase de revisión, los fundamentan, también, en la imposibilidad de expresarse en forma de fracción decimal o en la pertenencia a los irracionales. Se aprecia que los enteros y los irracionales no son considerados como decimales y que la notación fraccionaria decimal es incorporada en sus razonamientos.

Del mismo modo, observamos, al comparar los esquemas de los argumentos, que parte del alumnado hace distinciones entre los tipos de escrituras decimales con coma, en la última prueba. En la inicial, podemos decir que el alumnado establecía la notación decimal con coma como una sola categoría.

Con respecto a los errores, recogidos en la Tabla 5.8, comentamos que, por lo general, se dan errores que se repiten en ambas pruebas y otros en una de las dos. Los porcentajes de los errores comunes experimentan una disminución en la prueba final, excepto E3 (Todas las fracciones son decimales) que lo mantiene. Sin embargo, no son los mismos alumnos los que lo cometen. Pensamos que este hecho está relacionado con la prioridad que el alumno da a la escritura o a la operación en cada caso.

Destacamos el argumento E2, el alumno señala como decimales a todos los expresados con escrituras decimales con coma, que pasa del 100%, en la prueba inicial, al 35,7%, en la final. Esta disminución viene acompañada de la observada en el argumento A1 (Es decimal porque está en notación decimal con coma). El error E5 (ninguna fracción es decimal), prácticamente desaparece con un porcentaje del 3,6%.

Podemos decir que de los errores comunes (E1, E2, E3, E4, E5 y E6), los que más veces se cometen son E1, E2, E4 y E6. En ellos se detecta que:

- Los números enteros es excluyen como decimales.
- Los números expresados con notación decimal o que se pueden representar, al realizar cambio de registro a esta notación, son decimales.
- La clasificación de las fracciones en decimales y no decimales se presenta confusa en sus respuestas.

En la Tabla 5.9 se recogen los porcentajes de incidencia de los errores en ambas pruebas.

ERRORES EN LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO Y PORCENTAJES		ERRORES EN LA PRUEBA DE REVISIÓN Y PORCENTAJES	
E1	92,9%	E1	75%
E2	100%	E2	35,7%
E3	14,3%	E3	14,3%
E4	67,9%	E4	25%
E5	17,9%	E5	3,6%
E6	85,7%	E6	53,6%
-	-	E7	21,4%
-	-	E8	14,3%
E12	50%	-	-
-	-	E14	10,7%

Tabla 5.9: Errores y porcentajes en las pruebas de diagnóstico y de revisión

La explicación de parte de los resultados obtenidos se encuentra en los cambios experimentados en:

a) La aplicación de la clasificación de las fracciones en decimales y no decimales.
b) La incorporación de todos o algunos de los enteros como decimales. Observamos, por ejemplo, que el cero es seleccionado como decimal, en la segunda pregunta de la prueba inicial, por el 7,1% y, en la final, por el 64,3%.
c) La clasificación correcta de los irracionales como no decimales (32,1%), en la prueba final.
d) La disminución producida en la apreciación de los números, expresados con notación decimal con coma e infinita, como decimales. Por ejemplo, 0,666…

(segunda pregunta) pasa de un porcentaje del 96,4% ,en la prueba inicial, al 50% en la final.

En conclusión y en relación con los significados de número decimal, hemos hallado al final del experimento los siguientes:

a) Los decimales son los números expresados o pueden ser expresados con notación decimal con coma.
b) Los decimales son las fracciones decimales.
c) Los decimales son los que se pueden expresar en forma de fracción decimal.
d) Los decimales son los números expresados o pueden ser expresados con notación decimal finita.
e) Los decimales son los números expresados o pueden ser expresados con notación decimal finita o infinita periódica.
f) Combinación de algunos de los significados anteriores, por ejemplo: a) y b) o b) y d).

Comparación de los resultados de la tercera pregunta

En cuanto a los comportamientos en esta tercera pregunta, el alumnado sigue realizando las operaciones indicadas para la representación de $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$ en ambas pruebas, pero su frecuencia disminuye del 78,6%, en la fase de diagnóstico, al 46,4%, en la fase de revisión.

La utilización del teorema de Pitágoras aumenta del 3,6 % al 42,9%. Del mismo modo, el método para representar fracciones en la recta experimenta una mayor aplicación del 17,9% al 35,7%. De la misma manera, aparece una nueva estrategia, en la fase final, en la que el alumnado hace cambio de registro de la notación decimal a la fraccionaria (17,9%).

Sin embargo, se presenta con mayor porcentaje (78,6% - 46,4%), en ambas fases, el procedimiento de realizar el cambio de registro a la notación decimal, en los casos $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$.

Con relación a los errores, podemos decir que en ambas pruebas son poco significativos. Sin embargo, encontramos errores comunes que están relacionados con la representación en espejo y con el orden de los números negativos.

A modo de conclusión, podemos decir que:

a) La interpretación de los signos como operaciones se aplica con menos frecuencia en la fase final.
b) El pensamiento estructural se manifiesta más en la prueba final que en la inicial.
c) Se aprecia que hay alumnos que ahora prefieren la notación fraccionaria a la decimal para representar racionales en la recta.

Los resultados sobre las acciones realizadas por los alumnos se recogen en la Tabla 5.10, diferenciando las dos pruebas.

	PRUEBA INICIAL	PRUEBA FINAL
ACCIONES	a) Realizar las operaciones indicadas para la representación posterior de $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$ (78,6%) b) No efectuar la división para representar a $\frac{2}{3}\ o\ \frac{3}{4}$ (17,9%). Las fracciones se interpretan como la relación Parte-Todo c) Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$ (3,6%) d) Representar solo los que están en notación decimal con coma (7,1%) e) Situar algunos números indicando solo el intervalo al que pertenece (10,7%)	a) Representar a 0,75, 0,333…, 2,75 y 2,2333…, haciendo cambio de registro a notación fraccionaria en algunos (o en todos) de ellos (17,9%) b) Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$ (42,9%) c) No efectuar la división para representar a $\frac{2}{3}\ o\ \frac{3}{4}$ (35,7%). Las fracciones se interpretan como la relación Parte-Todo d) Realizar las operaciones indicadas para la representación posterior de $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\ \ o\ \ \frac{3}{4}$ (46,4%)

Tabla 5.10: Acciones en la prueba inicial y final

Los resultados sobre los errores cometidos por los alumnos se recogen el la Tabla 5.11, diferenciando las dos pruebas.

	PRUEBA INICIAL	PRUEBA FINAL
ERRORES	a) Se asignan a números positivos puntos situados a la izquierda del cero. También, a números negativos, se les corresponden con puntos situados a la derecha del cero (7,1%) b) Se aplica el orden de los naturales a los decimales negativos ($-2 \le -2{,}6$) (3,6%) c) Algunos números, tales como $-2\sqrt{2}$ o 0,333…, se dicen que pertenecen al intervalo [-1, 0] (7,1%) d) $\sqrt{2}$ se iguala con el dos o con el cuatro. Asimismo, $-2\sqrt{2}$ se identifica con el cero o con $-\sqrt{2}$ (7,1%)	a) Situar números positivos a la izquierda del cero (3,6%) b) Contar décimas siguiendo la secuencia: 0,1, 0,2, 0,3,…, 0,9 y 0,10 (3,6%) c) Confundir $-2\sqrt{2}$ con $2-\sqrt{2}$ y situarlo incorrectamente (3,6%) d) Para situar el $-2\sqrt{2}$, se construye el cuadrado de lado la unidad sobre el intervalo [-2, -1] y se transporta la diagonal de tal modo que el punto se halla en el intervalo $[-1,\ 0]$. De esta manera, el punto que se le asigna está a la derecha del -1. También se dibuja el cuadrado sobre el intervalo [-3, -2] y se localiza el punto en el [-4, -3]. Su porcentaje es del 7,1% e) Equivocarse en el procedimiento para hallar la fracción generatriz de 2,23333… (7,1%) *f)* Considerar que $\sqrt{2}$ no se puede representar porque *es imaginario;* $-2\sqrt{2}$ *porque no existe; 0,333… por ser inexacto y 2,2333…porque es periódico mixto* (3,6%)

Tabla 5.11: Errores en la prueba inicial y en la final

5.6 RESULTADOS DE LA TAREA DENOMINADA PRODUCCIÓN

En este apartado vamos a comentar el análisis que los propios alumnos hacen, individualmente, de las respuestas que dan a las preguntas del cuestionario (C2), en la fase de diagnóstico. Para ello, el alumno dispone de una fotocopia de su cuestionario y de una ficha diseñada para guiar este análisis (apartado 5.5.2); en este último documento se reflejan la evaluación de sus conocimientos y la reflexión sobre las causas de sus errores. En esta actividad de producción se pone en juego los conocimientos adquiridos en las unidades de aprendizaje, diseñadas para este experimento de enseñanza.

A continuación, vamos a describir las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta.

Con relación a la primera pregunta, comenzamos con los significados atribuidos a los números naturales. Hemos hallado los siguientes:

- Fijan su atención solo en el signo (+ o -) (17,9%).
- Fijan su atención solo en la escritura (10,7%).
- Fijan su atención en el signo (+ o -) y en la escritura (39,3%).

- Los naturales constituyen una parte de la secuencia numérica: {0, 1, 2, 3, …,9} y {1, 2, 3, …, 999, 1000} (3,6%).
- Se relaciona con las funciones o usos del número: contar, medir, etc (3,6%).
- Se relaciona con la no existencia de las raíces cuadradas de números negativos en el sistema de los números reales (3,6%).
- Se relaciona con un intervalo de la recta numérica o con un subconjunto de la misma (7,1%).

Podemos observar que el significado que tiene mayor porcentaje se corresponde con el que el alumno selecciona a los naturales fijándose en el signo (+ o -) y en la escritura. Es frecuente comentar que es natural *porque es positivo y no lleva coma*.

Los alumnos que contestan que sus respuestas no son correctas consideran como posibles causas, algunas de las siguientes:

- Explicación no adecuada por parte del profesor de Primaria (3,6 %).
- Los números estudiados incorrectamente u olvidados (7,1%).
- Confusión entre sistemas numéricos o con otro subconjunto de números (14,3%).
- Asignación al número natural del significado que se corresponde con algunos de los que se le atribuyen a la palabra natural en el lenguaje habitual (3,6%).
- Desconocimiento de la materia (7,1%).
- Complejidad de los objetos matemáticos (3,6%).

La causa del error en su respuesta la encuentran con mayor proporción en la confusión entre sistemas numéricos o con otros subconjuntos de números, por ejemplo: Confundir los naturales con los números positivos o con los reales.

Los significados atribuidos a los números enteros son los siguientes:

- Los enteros son seleccionados teniendo en cuenta solo el signo (+ o -) del número (10,7%).
- Los enteros son reconocidos solo por la escritura (21,4%).
- Los enteros son elegidos teniendo en cuenta el signo del número y la escritura (35,7%).
- Los enteros son identificados con una parte de la secuencia numérica (3,6%).
- Los enteros son identificados con un intervalo de la recta numérica o con un subconjunto de los reales (10,7%).
- El conjunto de los enteros y el de los naturales son iguales (3,6%).
- Un número entero es el opuesto de un número natural (3,6%).

- Los números enteros se obtienen por extensión de los naturales, a partir de la resta (3,6%).

Podemos concluir, que de forma significativa, el alumno identifica a los enteros fijándose en el signo del número y en la escritura, por ejemplo: *Los positivos y negativos que no llevan coma.*

Los alumnos que contestan que sus respuestas no son correctas consideran como posibles causas algunas de las siguientes:

- Los números estudiados incorrectamente u olvidados (3,6%).
- Confusión entre sistemas numéricos: Z con N (7,1%).
- Comprensión no adecuada del concepto (7,1%).
- Confusión del término entero con el de negativo (7,1%).
- Desconocimiento de la materia (3,6%).

Observamos que los porcentajes son poco significativos, pero las causas más indicadoras que esgrimen desvelan que confunden los enteros con los naturales o con los números negativos.

Con respecto a los decimales, y de forma mayoritaria (96,4%), el significado asignado a este objeto es el de número que se puede expresar con escritura decimal con coma. Esta interpretación coincide con la que hemos realizado de sus respuestas en este estudio.

En este caso, consideran como posibles causas de este error las siguientes:

-Desconocimiento de la materia u olvido (17,9%).
- Falta de comprensión de esta noción (10,7%).
- Asignación de este nombre a los números con coma en el Instituto (3,6%).
- Convencimiento de que las escrituras con coma representan siempre números decimales (14,3%).
- Explicación incorrecta de este concepto en la escuela (3,6%).
- Llevar mucho tiempo sin estudiar (3,6%).
- Asignación de este nombre a los números con coma en el lenguaje habitual (7,1%).
- No calcular el resultado de la operación (3,6%).
- Complejidad de los objetos matemáticos (7,1%)

La causa más significativa expuesta por el alumnado es la falta de conocimiento u olvido de los decimales.

Los significados atribuidos a los números racionales en los informes, son los siguientes:

- Los números expresados en forma de fracción (14,3%).
- Los racionales son las raíces cuadradas (7,1%).
- Los racionales son los números expresados en forma de fracción y raíces cuadradas (3,6%).
- Los números denominados en los libros de texto como decimales exactos y los periódicos (14,3%).
- Los números que no son irracionales (3,6%).
- Q es Z o R (7,1%).
- Los números que pueden expresarse con notación decimal, cuya parte decimal se pueda representar (3,6%).
- Los números que no están representados en notación fraccionaria, radical ni con símbolos especiales (3,6%).
- Los que no están expresados en forma de fracción (3,6%).

Encontramos dos significados con el mismo porcentaje, el mayor de los hallados: Los números expresados en forma de fracción y los números decimales exactos y los periódicos.

Se señalan las siguientes causas:

- Los números racionales olvidados (10,7%).
- Relacionar el término raíz con el de racional (3,6%).
- Consecuencia de actitudes afectivas o emocionales: no atender en clase o contestar al azar (7,1%).
- Desconocimiento de los números racionales (32,1%).
- Relacionar la palabra racional con la división y la partición. Por ello se eligen las fracciones (3,6%).
- Procesos de enseñanza erróneos o inadecuados en la etapa de Primaria (7,1%).

La causa más significativa nos desvela que estos alumnos consideran que los números racionales no forman parte de sus conocimientos sobre los números.

Los números irracionales son identificados como:

- Los números que no son racionales (10,7%).
- Los números expresados con notación radical (14,3%).
- Los números expresados con notación radical, fraccionaria o con símbolos especiales (14,3%).

- Los irracionales son los decimales (3,6%).
- Los números expresados con notación decimal infinita (10,7%).
- Los números expresados con notación decimal infinita y no periódica y con notación radical (3,6%).
- Las fracciones negativas (3,6%).
- Los números que al expresarlos en notación decimal, su parte decimal no se puede representar (3,6%).
- Las cantidades no exactas ni finitas (3,6%).

Los significados con mayor presencia en estos alumnos están relacionados con la notación radical.

Las causas de sus errores son atribuidas a que:

- La palabra irracional significa que la representación no contenga raíces (3,6%).
- Se desconoce este concepto (17,9%).
- Son consecuencia de actitudes afectivas o emocionales hacia las Matemáticas: contestar al azar (7,1%).
- Los números irracionales se han olvidado o no estudiado (17,95).
- Se asocian los números irracionales con las raíces (7,1%).
- Se confunde número irracional con número racional (3,6%).

Observamos que las causas más significativas están relacionadas con el desconocimiento de este concepto y con su olvido.

Finalmente los significados atribuidos a los números reales son los siguientes:

- Todos los números de la tabla son reales (25%).
- Ninguno (7,1%).
- Todos, excepto:
    - los negativos (3,6%).
    - los imaginarios (para algunos los números imaginarios son los negativos) (3,6%).
    - las fracciones (3,6%).
    - los irracionales (3,6%).
    - los expresados con notación decimal periódica (3,6%).
    - las expresiones que contienen operaciones indicadas (3,6%).
- La unión de racionales con los irracionales (3,6%).
- Los números positivos, se excluye a π (3,6%).
- Los números con los que se opera (3,6%).

- Cualquier número “que se pudiera ver en la realidad de forma exacta” (3,6%).

El significado que presenta mayor porcentaje es el que el alumnado considera a todos los números como reales.

Consideran que las posibles causas son:

- Considerar que los números pueden ser reales o imaginarios, y los últimos son los negativos (3,6%).
- Desconocimiento de esta noción (14,3%).
- Los números reales olvidados o no estudiados (14,3%).
- Confundirlo con otro conjunto numérico (C) (3,6%).
- Consecuencia de actitudes afectivas o emocionales hacia las Matemáticas: contestar al azar (3,6%).
- Procesos de enseñanza erróneos o inadecuados en la etapa de Primaria (3,6%).
- Confundir $-\sqrt{a}$ *con* $\sqrt{-a}$ (3,6%).

Observamos, al igual que en el caso anterior, que las causas más significativas están relacionadas con el desconocimiento de este concepto y con su olvido.

De forma general, atribuyen la causa de sus errores, en esta pregunta, al desconocimiento u olvido de los distintos conjuntos numéricos, en especial, el de los racionales (32,1%).

Con relación a la segunda pregunta, se ha tenido en cuenta cuando el alumno ha reconocido su error y explica su causa. De forma global, se atribuyen sus errores a las siguientes causas.

- Por desconocimiento:
    - De que los enteros son decimales (14,3%)
    - De los irracionales y de que estos no son decimales (7,1%)
    - De las fracciones decimales (3,6%)
- Por procesos de enseñanza no adecuados en cursos anteriores (7,1%).
- Por concepciones no adecuadas:
    - Pensar que los decimales eran los expresados con notación decimal con coma o con parte decimal (50%).
    - Creer que al no tener coma o parte decimal, indicaba que no era decimal (21,4%).
    - Considerar que los enteros no son decimales (7,1%).

- Pensar que el resultado de la operación es decimal (en el caso de ser entero excluirlo como decimal) (14,3%).
- Considerar que las fracciones eran solo racionales (3,6%).

- Por no ajustarse a su definición actual:
  - Es decimal porque se puede expresar en forma de fracción decimal (28,6%).
  - No es decimal porque no se puede expresar en forma de fracción decimal (3,6%).
  - No es decimal por ser irracional (17,6%).
  - No es decimal por estar en notación decimal con coma infinita y, por ello, no se puede expresar en forma de fracción decimal (7,1%).
  - No es decimal porque las expresiones que contienen raíces representan números irracionales (7,1%).
  - Es decimal por estar en notación decimal con coma infinita y periódica y ésta se puede convertir en forma de fracción decimal (7,1%).
  - Es decimal porque también es natural, entero, racional y real (7,1%).
- Por atribuirle a la expresión semiótica el significado de operación indicada (3,6%).

Podemos concluir que el 50% del alumnado reconoce que su error se encontraba en la concepción de número decimal como número con coma.

Con relación a la tercera pregunta, las causas atribuidas por los alumnos a los errores cometidos, las hemos clasificado en las siguientes categorías:

- Falta de conocimiento de la técnicas de representación de irracionales cuadráticos y de fracciones (28,6%).
- Procesos de enseñanza inadecuados en cursos anteriores (7,1%).
- Imprecisión en la representación de un número decimal, expresado en notación decimal (por ejemplo: 0,75) (10,7%).
- Representación de forma aproximada de los irracionales cuadráticos, de las fracciones y de los racionales expresados con notación decimal periódica (46,4%).
- Desconocimiento del resultado de $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$ (3,6%).
- Las técnicas de representación de números reales olvidadas (3,6%).

La causa que se presenta con mayor porcentaje (46,4%) es la que se corresponde con considerar que la representación, de forma aproximada, de irracionales cuadráticos y de racionales, es correcta.

En resumen, las causas (que denotamos por Ri), más significativas de sus errores, esgrimidas en las tres preguntas, son las siguientes:

- R1: En la primera pregunta y de forma general, es el desconocimiento u olvido de los conjuntos numéricos, en especial, el de los racionales (32,1%).
- R2: En la segunda pregunta, es la concepción de número decimal como número con coma (50%).
- R3: En la tercera pregunta, es la representación aproximada en la recta de irracionales cuadráticos y de racionales (46,4%).

Se observa, por tanto, en las autoevaluaciones del alumnado el uso de argumentos (R2 y R3) que están en consonancia con los sostenidos en la planificación y desarrollo de las unidades de aprendizaje en la fase de retroalimentación. Se proponían actividades, con el objetivo de provocarle un conflicto, en las que se hacía hincapié que hay números, que no son decimales, que se pueden expresar con notación decimal con coma, y que también hay otros sistemas de representación, distintos del Sistema de Representación Decimal Ampliado, que se pueden utilizar para representar a los decimales. Asimismo, y con relación a la tercera pregunta, se plantean actividades, con la finalidad de darle sentido a los objetos matemáticos implícitos, en las que se trabajan las técnicas de representación de números racionales e irracionales. Se insiste en que la notación fraccionaria es más adecuada que la notación decimal, para representar números racionales en la recta. Todo esto, fundamentado en nuestro marco conceptual, que contempla la prevención y remedio de errores en la enseñanza de las Matemáticas tomando como referente a Socas (2007).

En relación con la aplicación de la teoría, estudiada para analizar el origen del error, podemos decir que presentó grandes dificultades. Muy pocos alumnos , alrededor del 7,1%, utilizaron términos como afectividad, ausencia de sentido u obstáculos, y no siempre de forma adecuada. Las dificultades las atribuimos no solo a una falta de comprensión de estas nociones, sino, también, a los problemas que presentan los alumnos para la comunicación y reflexión de sus conocimientos.

5.7 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este epígrafe realizamos la discusión de los resultados, diferenciando los de la fase de diagnóstico de los de la fase de revisión.

5.7.1 Síntesis y discusión de los resultados de la fase de diagnóstico

En este apartado tratamos de sintetizar y discutir los resultados descritos anteriormente. Para ello, buscamos las explicaciones en los argumentos dados por el alumnado en el cuestionario (Anexo 1) y en las entrevistas (Anexo 2). Las herramientas de análisis que vamos a utilizar son las que nos proporcionan la Competencia Matemática Formal y la Competencia Cognitiva de nuestro marco conceptual (Capítulo 2).

A continuación, mostramos una síntesis de los resultados obtenidos y su posterior análisis.

En cuanto a los comportamientos encontrados en las respuestas del alumnado tenemos:

a) En la primera pregunta:

- Para gran parte de los alumnos los **Naturales** son los naturales, con las salvedades realizadas en este punto (21,4%).
- Para los **Enteros**, la respuesta más frecuente consiste, en grandes rasgos, en marcar los enteros de la tabla (35,7%).
- Los **Decimales**, son los que están expresados con notación decimal con coma y algunas o todas las fracciones. Además algunas de las expresiones que contienen una raíz, π o $\pi - 5$ se excluyen o se dejan sin contestar. Los enteros tampoco se consideran decimales. Se trata del Comportamiento B y es el que se da con mayor frecuencia (28,6%).
- Los **Racionales**, se identifican con mayor frecuencia con los números expresados con notación fraccionaria (10,7%).
- Los **Irracionales** se identifican con las expresiones que contienen una raíz cuadrada (10,7%).
- Los **Reales**, son los reales de la tabla, salvo algunos matices (28,6%).

Estos resultados, junto con los de menor frecuencia, nos conducen a considerar un comportamiento general en las respuestas de la primera pregunta. Esto es, el alumnado utiliza como criterio para identificar a los números de forma mayoritaria su escritura o forma de representación y otras características de los números asociadas a los signos. Entre esas características destacamos:

- Ser un número positivo.
- Ser un número negativo.
- Presentar un signo negativo en su representación.
- Ser una fracción.
- Presentar una raíz en su representación.
- Estar expresado con notación decimal.
- Presentar una coma en su escritura.
- Estar expresado con notación decimal con coma y finita (o infinita).
- Ser símbolos especiales como π y $\pi - 5$.

Por todo ello, no apreciamos de forma clara la organización curricular descubierta en los programas oficiales (Capítulo 1). Hemos detectado que:

- No se da la identificación de número decimal con número real, salvo el 7,1 % en la segunda pregunta.
- De forma general, no se diferencian los distintos tipos de escrituras decimales (limitadas, ilimitadas periódicas e ilimitadas no periódicas). Se tratan globalmente como escrituras sin coma y con coma. En los casos en los que los alumnos hacen algunas distinciones entre las escrituras, no se realizan de forma correcta sus correspondencias con los números, que pueden ser representados por ellas. Por ejemplo:

> E: ¿Qué entendías por número natural?
>
> [20]: […] Los números, estoy dudando, vale, los números naturales es un número fijo. Los que tienen infinitos, éste, los periódicos mixtos no los puse natural porque no es un número fijo, exacto.

Se recapitulan cuáles fueron excluidos como naturales y se concluye:

> [20]: O sea, que tienen infinitos términos.

- Se excluyen a los enteros de los decimales. El alumnado manifiesta que no es decimal porque no lleva coma. Una proporción baja de alumnos duda en este sentido, ya que piensa que puede ser expresado con notación decimal, con parte decimal nula.

> E: Vamos a analizar algunas respuestas, por ejemplo: 35.521, 2 y 0 no son decimales, ¿por qué?
> [12]: Porque no tienen coma, pero, ahí, también yo pensaba que por ejemplo el 35.521 es 35.521,000, entonces me quedó la duda, pero lo puse que no porque…por ponerlo.

No se aprecia la aplicación de los conceptos: fracción decimal y no decimal. En este sentido, al realizar las entrevistas iniciales nos encontramos con dos concepciones. La primera hace alusión a que la fracción es decimal si el resultado obtenido al dividir el numerador entre el denominador es un número decimal y, la segunda, a que el numerador o el denominador sea un número expresado con notación decimal con coma. En esta segunda concepción errónea se observa que el alumno define el concepto tomando como referencia la escritura decimal. A continuación, se muestran algunos fragmentos de las entrevistas en los que se pone de manifiesto lo comentado.

> E: ¿Qué entiendes por fracción decimal?
> [12]: Que el resultado me da decimal, ¿quizá?.

Otro alumno comenta:

> [20]: Es que yo creo que aquí no hay ninguna fracción decimal. Fracción decimal yo lo entendería como que uno de los dos términos, el numerador o el denominador tenga un número decimal, tenga parte entera y parte decimal.

De igual modo, no se establecen correctamente las relaciones entre los conjuntos numéricos. Las relaciones que se dan están relacionadas con el comportamiento general que observamos en las respuestas dadas en la primera pregunta.

Igualmente, en las entrevistas descubrimos que algunos alumnos utilizaron de forma incorrecta el diagrama que suele aparecer en los libros de texto para representar las relaciones entre los conjuntos numéricos. Debemos señalar que los errores cometidos en su uso pueden tener su origen en su olvido. Por ejemplo:

> E: ¿Un número puede pertenecer a varios conjuntos numéricos?
>
> [12]: Sí.
>
> E: Por ejemplo.
>
> [12]: ¡Vamos a ver! A mi me enseñaron que en forma de círculo, estaba el gran círculo, que eran los reales; luego, eran los naturales, dentro de los naturales estaban los enteros; luego los decimales y, así… Los irracionales estaban dentro de los números reales, pero no dentro de todos estos. Creo recordar.

Se pone de manifiesto que el número es clasificado según su escritura y no atendiendo a sus propiedades. Para el caso de los decimales, se confunde el objeto número decimal con la representación decimal con coma (Duval (1993), Socas (2001), Ávila (2008), Konic (2011)). La explicación que podemos dar, fundamentándola en nuestro marco conceptual, es que la relación entre el concepto y la estructura no se hace a través de las propiedades.

> E: Para contestar a la primera pregunta y, en la columna de los decimales, ¿qué criterio utilizaste para elegir (o excluir) un número como decimal?
>
> [17]: Cuando utilicé, el criterio aquí fue: miraba todos aquéllos que tuvieren coma y también los naturales o enteros que fueran exactos, yo pensaba que a lo mejor poniéndole coma y añadiéndole cero, pues ya podía decirse también que es un decimal. Así, más o menos, después los irracionales me parece no los puse como decimales, ni los periódicos tampoco.

b) En la segunda pregunta:

En este caso, el comportamiento con mayor frecuencia encontrado es ahora el Comportamiento C (50%): Todos los números, excepto los enteros, son elegidos como decimales. Como se puede observar ha cambiado respecto del de la primera pregunta. La transición del comportamiento B al C está basado en la conversión a la notación decimal con coma de todos los números, excepto los enteros. La razón del cambio está relacionada con los conocimientos previos de los compañeros con los que se comentó la primera pregunta, en el descanso de la primera sesión de la administración del cuestionario.

E: Los señalas a todos como decimales; ¿por qué cambias de idea con respecto a la primera pregunta?

[17]: Estaba superliado ese día y, después de salir de la primera prueba, pensando y hablando con los compañeros, pues llegué a la conclusión de que no era ese criterio el que tenía que haber seguido para decir si eran decimales o no. Aquí intenté cambiar de criterio y parece ser que empeoré un poco las cosas.

En estas circunstancias, juega un papel importante, la interpretación de las fracciones y los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, como operaciones. Observamos que, unos, aplican de forma efectiva la sustitución formal, cambio de registro de representación, y, por tanto, consideran que ambas expresiones representan el mismo número. Es decir, la relación de las operaciones con los procesos se hace a través de las estructuras. Otros, en cambio, hacen corresponder a cada expresión un número distinto. Esto pone de manifiesto las valoraciones distintas que algunos estudiantes hacen de una misma estructura, expresada de formas distintas.

E: 3/5, -1/2, 10/5, -7/3 y 1/3 ¿los clasificaste como no decimales?

[20]: Los puse como no decimal, aunque su resultado era decimal. Sabía que su resultado era decimal, pero al no ser un número decimal, 3/5, no sabía si ponerlo decimal**.**

Los argumentos más utilizados para elegir (o excluir) un número como decimal son:

- A1: Si el número está en notación decimal con coma, entonces es decimal. En este caso se contemplan las respuestas que hacen referencia a aspectos de la notación decimal, tales como: llevar coma, tener parte entera y decimal o poseer cifras decimales después de la coma (75%).
- A2: Si el número no está en notación decimal se procede a realizar la conversión de forma aproximada o no, y se clasifica por el resultado obtenido. Entendemos que la conversión es aproximada cuando el alumnado toma o estima una aproximación decimal del resultado. Así, si el nuevo registro es una escritura con coma, se dice que el número es decimal (78,6%).
- B1: No está en notación decimal con coma (46,4%).

- B5: El número o el resultado de la operación no es decimal porque pertenece a otro conjunto numérico: N o Z (67,6%).

Por ello, los argumentos esgrimidos por los alumnos en la elección o no de un número como decimal están fundamentados más en su forma de representación (notación decimal, notación fraccionaria y radical) que en sus propiedades (Socas, 2001). Podemos decir que de forma general el alumnado no relaciona sus conceptos con las estructuras a través de sus propiedades.

d) En la tercera pregunta:

El comportamiento más frecuente para representar los números consistió en convertir a notación decimal los números y su posterior representación aproximada o exacta ($\frac{3}{4} = 0,75$) en la recta. Para ello, se realizan las operaciones indicadas en $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}$ *o* $\frac{3}{4}$ y su posterior representación del resultado (78,6%).

No hemos observado la presencia de un mapa conceptual como el que rige el análisis de contenido del cuestionario (C2), realizado en el apartado 4.6.

Debemos señalar que los resultados del cuestionario y las entrevistas realizadas ponen de manifiesto que las técnicas de representación de números reales, descritas en el apartado 4.6, en la recta no es un conocimiento que esté presente en nuestro alumnado, en particular, de números fraccionarios y radicales (Ramírez y Porcel (2006)). Por ello, no se plantea de qué tipo de número se trata para buscarle la técnica de representación adecuada. La relación entre la técnica, utilizada por el alumno, y el proceso de sustitución formal de una representación digital a la recta, no se hace a través de la estructura correspondiente. El trabajo se reduce a la representación de números decimales en notación decimal. Por ello, se produce una confusión del número racional no decimal y, también, del irracional, con una aproximación decimal (Sirotic y Zazkis (2007)). En este sentido, Scaglia y Coriat (2003) encuentran un conflicto cognitivo que consiste en la dificultad para admitir el cierre de un proceso infinito sugerido por las infinitas cifras decimales de la escritura decimal de algunos números constructibles, por lo que aprecian que la escritura decimal constituye un obstáculo para la adquisición del objeto número. Por otro lado, encontramos un predominio del pensamiento operacional frente al estructural y procesual, al igual que Socas y otros

(2009) en un estudio con alumnos de la especialidad de Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna. Observar el siguiente fragmento de entrevista.

> E: Explícame cómo representaste $\sqrt{2}$.
>
> [12]: El resultado me dio 1,41, y lo mismo que antes: de 1 a 2, sería la muestra esta…uno, dos, tres, cuatro y, luego, 1,41, puse el 41.

En cuanto a los errores cometidos en las preguntas formuladas consideramos:

a) En las dos primeras preguntas, nos encontramos con errores comunes y de mayor frecuencia, a saber:
   - E1: Los enteros no son decimales (92,9% en ambas preguntas).
   - E2: Los números expresados con notación decimal con coma, son decimales (89,3% - 100%).
   - E4: Algunas fracciones son decimales, pero la clasificación es incorrecta (42,9% - 67,9%).
   - E6: Todos o algunos de los irracionales, no expresados con notación decimal, son decimales (57,1% - 85,7%).

b) En la tercera pregunta, hallamos otra serie de errores con proporciones poco significativas. Algunos de esos errores como la "representación en espejo" (situar números positivos a la izquierda del cero o viceversa), aplicar el orden de los naturales a los números negativos o situar $\sqrt{2}$ en el punto que le corresponde al 2, se han detectado también en alumnos de distintos niveles y en otros estudios (Gairín (2003-2004), Steinle (2004), Ramírez y Porcel (2006)).

Con respecto a las causas de los errores (E1, E2, E4 y E6), pensamos que se encuentran en aspectos relacionados con el manejo de los sistemas de representación (ausencia de sentido) presentes en estas situaciones problemáticas (notación decimal, fraccionaria y radical) y con la existencia de un desequilibrio entre los pensamientos operacional, estructural y procesual). El pensamiento operacional predomina en estas situaciones. Así, tenemos que en nuestros alumnos se da:

- La confusión de número decimal con la representación decimal.

- El tratamiento global de las distintas formas de la notación decimal: limitada, ilimitada periódica e ilimitada no periódica. Por ello, no existe la correspondencia adecuada entre esas formas de representación y los sistemas numéricos. Se observa también que no se extiende, de forma mayoritaria, la notación decimal con coma como representación de los enteros.
- El tratamiento no global de las fracciones, aunque las distinciones no están relacionadas con una clasificación correcta de las fracciones en decimales y no decimales. En este caso, juega un papel importante la prevalencia de la interpretación de éstas como escrituras sobre la de operaciones, o viceversa. Algunos, cuando eligen la interpretación como operación, no aplicación de manera efectiva la sustitución formal, tal y como hemos comentado en los comportamientos.
- La confusión de número irracional y aproximación decimal. Este resultado puede estar relacionado con la interpretación de estos objetos como operaciones. También, hemos observado que algunos alumnos relacionan número irracional con las expresiones decimales, ilimitadas y no periódicas; sin embargo, es tratado como decimal, por ser un número con coma.

> E: ¿Para ti, las expresiones con infinitas cifras decimales periódicas o no, no son decimales?
>
> [17]: Eso depende, porque en el primer ejercicio había puesto que no lo eran, pero aquí (segunda pregunta), ya pongo que sí, porque como veo la coma y, a partir de ahí, ya pongo que son todos decimales.

5.7.2 Síntesis y discusión de los resultados de la fase de revisión

En cuanto a los comportamientos presentados por los alumnos participantes tenemos:

a) Primera pregunta

Los alumnos han elegido los siguientes números, de forma más significativa, para cada columna de la tabla:

- Los Naturales, son los naturales de la tabla con las salvedades realizadas anteriormente (39,33%).
- Los Enteros, son los enteros de la tabla con los matices establecidos (35,7%).

- Los Decimales, son las escrituras decimales con coma y todas o algunas fracciones. Asimismo, los enteros son excluidos como decimales. En cuanto a los irracionales, no expresados con notación decimal, algunos se excluyen o se dejan en blanco. Se corresponde con las características del Comportamiento B, que tiene un porcentaje mayor de incidencia y que es del 25%. El Comportamiento G, destaca por haber un 18% de los alumnos que establece correctamente la clasificación de las fracciones (decimales y no decimales). Observamos que solo uno de los alumnos da la respuesta correcta: Comportamiento E. En el Comportamiento C (17,9%), se eligen a todos los números como decimales, excepto los enteros. De forma global, nos encontramos con que el alumnado elige a los decimales por la escritura decimal en mayor porcentaje que por la notación fraccionaria decimal.
- Los racionales, el criterio más significativo (14,3%) es el que los alumnos identifican a todos como racionales, salvo $-\sqrt{7}$.
- Los irracionales, los que no son elegidos como racionales (28,6%).
- Los reales, la respuesta mayoritaria (57,1%) es considerarlos a todos, pero algunos se excluye a $-\sqrt{7}$.

La organización curricular de los sistemas numéricos (apartado 5.2), puesta en práctica en la fase de retroalimentación, aparece de manera confusa en las respuestas del alumnado. Se observa que los alumnos muestran acierto en la elección, con los matices establecidos (apartado 5.5), de naturales, enteros y reales, pero, cometen errores en la de decimales, racionales e irracionales. Se sigue excluyendo a los enteros de los decimales por su escritura, obsérvese el siguiente fragmento de entrevista.

> E: ¿Por qué el 0 y el 2 no son decimales?
>
> [27]: Realmente, en Bachillerato me lo explicaron, me explicaron que el cero, en realidad, no es cero, sino es 1,999… que da cero, pero se pone como convenio cero. En el momento en el que lo hice no me acordé de eso, ni pensaba nada en ello. Para mí, cero, no era un número decimal porque no tenía coma. Tampoco sabía que si podía conseguir un denominador de base 10 y expresarlo en modo de fracción, pues sería un decimal, no me lo habían explicado nunca…

Con respecto al concepto de número decimal se aprecia que se sigue identificando con la notación decimal con coma, pero, en algunos casos, se combina con la idea de poderse expresarse en forma de fracción decimal.

> E: ¿Cuáles son los decimales?
>
> [17]: Los decimales serían los que llevan coma, pero que pudieran transformarse en fracciones con 10 en denominador o la unidad seguida de ceros o 2 o 5, que serían los divisores de 10.

Asimismo, no podemos afirmar que en todos los casos se hace un tratamiento global de la notación decimal.

> E: ¿Y los irracionales?
>
> [17]: Los irracionales serían todos los que no están dentro del conjunto de los racionales, que serían aquellos números con infinitas cifras decimales que no se repiten, bueno, se repiten, pero no de forma cíclica.

También, apreciamos, en esta fase, el papel fundamental que los alumnos asignan a la interpretación de las fracciones y de los irracionales, no expresados en notación decimal con coma, como operaciones. Algunos aplican de forma efectiva la sustitución formal, cambio de registro de representación, al considerar la relación entre la operación y el proceso a través de la estructura. Otros, sin embargo, hacen corresponder a la expresión que representa la operación y a la del resultado estructuras distintas.

> [21]: Yo separo las fracciones, yo veo una fracción y veo el resultado de una fracción para mí son cosas distintas, aunque en sí el resultado va a provenir de esa fracción, pero visto así, yo lo veo diferente, entonces tendría que hacer el resultado para saber si es decimal, el resultado de 3 partido de 5 y, en este caso, no es decimal porque me fijo solo en la fracción.

Sin embargo, aparecen algunos resultados que demuestran concepciones y relaciones estudiadas, tales como:

- La presencia del comportamiento que recoge la respuesta correcta.
- La existencia de un comportamiento, G, en el que se refleja la distinción entre las fracciones decimales de las no decimales. No podemos afirmar que en todos los casos se realiza un tratamiento global de las fracciones.
- El establecimiento, de forma implícita, que $Q \cap I = \varnothing$.

b) Segunda pregunta

De los comportamientos hallados en las respuestas de los alumnos, el Comportamiento K, presenta el mayor de los porcentajes en su incidencia (28,6%). Sus características fundamentales son las siguientes:

- Se eligen, de los números expresados con notación fraccionaria, las fracciones decimales, y se excluyen, las no decimales.
- Se eliminan los números expresados con notación decimal infinita y no periódica; algunos, también, las expresiones periódicas.

En cuanto a los argumentos aplicados, para elegir un número como decimal, destaca en cuanto a su mayor presencia el A2 (57,1%). Con este argumento se justifica la elección de un número como decimal por estar expresado con notación decimal o por poderse expresar de esta manera, al realizar cambio de registro. Sin embargo, emerge el A9, con un porcentaje del 53,6%. Por primera vez, en este estudio, el alumnado aplica el concepto de que un número es decimal si se puede expresar en forma de fracción decimal. Concepto que forma parte de los contenidos de la organización curricular de los sistemas numéricos, aplicada en este experimento de enseñanza.

En cuanto a los argumentos sostenidos, para excluir un número como decimal, señalamos en cuanto su mayor porcentaje el B5, 67,9%. En él se comenta que un número que sea natural, entero, no entero o irracional, no es decimal. En este caso, hay que tener en cuenta los matices que observamos en la concepción de los enteros que algunos alumnos presentan. Entre los que excluyen a los enteros como decimales encontramos respuestas que consideran como tales a todos o algunos de los siguientes: $\left\{-3, 0\ ,2\right\}$. A veces, se les denotan como naturales. En otros casos, el término entero se utiliza para señalar a otros números que realmente no los son, por ejemplo: -3,9, $-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}$, π, 0,5 y 1,48. Asimismo, surge, por primera vez en este estudio, el argumento B10 (39,3%), en el que el alumnado excluye un número decimal por no poderse expresar en forma de fracción. Negación de la definición de número decimal, trabajada en este experimento de enseñanza.

> E: 0,666… comentas que no es decimal porque no se puede expresar por una fracción cuyo denominador sea 10. ¿El denominador de una fracción decimal es siempre 10?

[17]: Cuando dije diez querría referirme a la unidad seguida de ceros, 10, 100, 1000…. O también, podrían ser los divisores de 10 (2, 5), potencias de base 2 o de base 5 o multiplicaciones entre ellas**.**

También, observamos la persistencia en excluir como decimales los números que no están expresados o no se pueden escribir con notación decimal con coma, argumento B2 (35,7%). Por ejemplo:

E: Escribes que el cero no es decimal porque representa una cantidad exacta. ¿Qué significa que representa una cantidad exacta?
[10]: Que no tiene coma. No se puede, no está dividido por nada.

En este mismo orden de cosas, un 28,6% del alumnado excluye como decimal al número expresado con notación decimal con coma e infinita, argumento B13.

E: ¿Por qué 0,666… no es decimal?
[27]: Puesto que es un número real, racional, pero no decimal, porque tiene infinitas cifras. Como tenía infinitas cifras, supongo que es lo mismo que pasó anteriormente con lo otro, pensé que no era decimal. ¿Por qué? No tiene lógica, no sé, supongo que pensaba, bueno, tiene infinitas cifras, no es decimal y, guiándome por ahí, hice todos los demás.

Se pone de manifiesto, por un lado, que algunos alumnos excluyen a los enteros y a los irracionales de los decimales, por la escritura decimal y, por otro, a los racionales no decimales, por la escritura fraccionaria.

c) Tercera pregunta

En este caso, los comportamientos obtenidos se definen como combinación de algunos de los siguientes procedimientos:

- Representar a 0,75, 0,333…, 2,75 y 2,2333…, haciendo cambio de registro a notación fraccionaria en algunos (o en todos) de ellos (17,9%).
- Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$ (42,9%).

- No efectuar la división para representar a $\frac{2}{3}$ *o* $\frac{3}{4}$ (35,7%). Las fracciones se interpretan como la relación Parte-Todo.
- Realizar las operaciones indicadas para la representación posterior de $\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}$ *o* $\frac{3}{4}$ (46,4%).

En esta fase, detectamos pequeñas pinceladas del mapa conceptual, que organiza los contenidos del tema sobre la representación de números reales en la recta, de nuestro experimento. Se observa que, aunque el 46,4% del alumnado hace cambio de registro a la notación decimal, y posteriormente, representa dicho número de forma exacta o aproximada; emergen, en menor proporción, las técnicas para representar los irracionales cuadráticos y los racionales. En este último caso, comentamos que el alumnado no divide el segmento unidad en partes iguales, aplicando el teorema de Thales, sino que utiliza las subdivisiones de la recta, dadas en la pregunta.

De esta manera, podemos decir que encontramos alumnos que manifiestan un menor desequilibrio entre los pensamientos operacional, estructural y procesual. Las técnicas, en especial la de los irracionales cuadráticos, se relacionan con los procesos a través de las estructuras.

En cuanto a los errores cometidos en las preguntas formuladas hallamos:

a) En las dos primeras preguntas, nos encontramos con errores comunes y con mayor porcentaje, a saber:
   - E1 (92,9%-75%): Los enteros no son decimales.
   - E2 (78,6%- 35,7%): Todo número expresado con notación decimal con coma, es decimal.
   - E6 (71,4%-53,6%): Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal con coma, son decimales.

b) En la tercera pregunta, existe otra serie de errores con proporciones poco significativas (3,6% o 7,1%). Estos errores están relacionados con la aplicación de la técnica de representación de irracionales cuadráticos, con la representación en espejo, con el cálculo de la fracción generatriz o con el valor posicional.

Con respecto a las causas de los errores (E1, E2 y E6), pensamos, al igual que en el caso anterior, que se encuentran en aspectos relacionados con el manejo de los sistemas de representación (ausencia de sentido) presentes en estas situaciones problemáticas (notación decimal, fraccionaria, notación de los radicales y recta numérica) y con la existencia de un desequilibrio entre los pensamientos operacional, estructural y procesual. Aunque debemos señalar que este desequilibrio es menor en la fase de revisión que en la de diagnóstico.

5.8 CONSIDERACIONES FINALES

En este apartado comenzamos con la recopilación de los aspectos relevantes sobre los objetivos planteados en este estudio.

a) Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. En definitiva, encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) desde los decimales.

En este sentido, y en la fase de diagnóstico, hallamos que el alumnado muestra ideas confusas sobre los números y que se manifiestan en un comportamiento general en la que los números se identifican con escrituras o con otras características ligadas a los signos. Así, por ejemplo, los decimales se relacionan con la notación decimal con coma, los racionales, con la notación fraccionaria y, los irracionales, con la notación de los radicales. Las ideas acerca de decimales, racionales e irracionales están menos claras que las de naturales, enteros y reales. Con respecto a las relaciones entre los conjuntos numéricos, vienen determinadas por ese comportamiento general que conduce a errores. De esta manera, destacamos la exclusión de los enteros de los decimales. El alumnado considera que como los enteros "no tienen coma", no son decimales.

En relación con la notación decimal, el alumnado, por lo general, no hace la distinción entre los distintos tipos de escrituras (limitada, ilimitada periódica e ilimitada no periódica). Se interpretan de manera global como escrituras sin coma y con coma. Sin embargo, no se da la identificación de número decimal con número real, encontrada en un estudio anterior (Socas (2001)), aunque si se aprecia la de número decimal con la notación decimal con coma.

Del mismo modo, y con respecto a las fracciones, por lo general, no se hace la distinción entre fracciones decimales y no decimales. La exclusión de una fracción como decimal está relacionada con la prevalencia de la escritura sobre la operación.

En la fase de revisión, la organización curricular de los sistemas numéricos (apartado 5.2), puesta en práctica en la fase de retroalimentación, aparece de manera poco clara en las respuestas del alumnado. Se observa que los alumnos muestran acierto en la elección, con los matices establecidos (apartado 5.4), de naturales, enteros y reales, pero, cometen errores en la de decimales, racionales e irracionales. Con respecto al concepto de número decimal, se aprecia que se sigue identificando con la notación decimal con coma, pero, en algunos casos, se combina con la idea de poderse expresarse en forma de fracción decimal. Asimismo, se consideran a los enteros como no decimales, por su escritura decimal sin coma.

En relación con la notación decimal, no podemos afirmar que en todos los casos se realice un tratamiento global, hay alumnos que hacen corresponder la notación decimal ilimitada y no periódica con los irracionales.

Con relación a la clasificación de las fracciones, en decimales y no decimales, nos encontramos con la existencia de comportamientos en los queda patente: E (3,6%) y G (17,9%). No podemos afirmar que en todos los casos se realiza un tratamiento global de las fracciones.

Con respecto a los errores comunes y presentes en la mitad o más del alumnado, hallamos E1, E2, E4, E6 y E9. Errores relacionados con la identificación de número decimal con la escritura decimal con coma y con el cambio de registro a la notación decimal. Hemos atribuido sus orígenes a una ausencia de sentido y al predominio del pensamiento operacional frente al estructural y procesual. El alumno conoce las distintas representaciones (notación decimal, fraccionaria, radical y símbolos especiales), presentes en la pregunta, pero le asigna un papel predominante a la conversión a la notación decimal. Presenta mayores dificultades la conversión de la decimal a cualquiera de las otras, en especial, a la fraccionaria. Podemos decir que el alumnado no maneja de forma efectiva las distintas notaciones, en particular, las conversiones que se dan entre ellas.

b) Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.

En la fase de diagnóstico, el alumnado elige (50%) como decimales a todos, excepto los enteros. Se considera que esa proporción de alumnos hacen cambio de registro a la notación decimal y, por tanto, clasifican al número por la escritura decimal con coma. Se observa que se confunde número decimal con representación decimal con coma, hecho que se pone de relieve en las entrevistas iniciales y en los argumentos mayoritarios : A1(75%) y A2(78,6%). También, son excluidos como decimales, los que están expresados con escrituras sin coma, en especial, naturales y enteros: argumentos B1(46,4%) y B5(67,6%). Por esta razón son excluidos los enteros.

Podemos afirmar, que de forma general, el alumno no relaciona el concepto con la estructura a través de sus propiedades.

En la fase de revisión, si bien se sigue identificando número decimal con la representación decimal con coma (argumento A2 (57,1%)), este resultado se combina con la identificación de los decimales con las fracciones decimales (argumento A9 (53,6%)). La exclusión de los enteros se sigue llevando a cabo al considerar que están expresados con notación decimal sin coma, y la de los irracionales, se produce por la escritura decimal ilimitada (argumentos B2(35,7%), B5 (67,9%) y B13 (28,6%)). Sin embargo, los racionales no decimales se excluyen por la escritura fraccionaria (argumento B10 (39,3%)). En este último resultado, se observa que para el alumnado presenta dificultades la conversión de una escritura decimal infinita periódica a la notación fraccionaria (cálculo de la fracción generatriz). Por ello, la idea de fracción decimal se aplica más a los racionales, expresados en notación fraccionaria.

En esta situación los errores comunes y más significativos son: E1, E2, E4 y E6. Hemos atribuido sus orígenes, al igual que en el caso anterior, a una ausencia de sentido y al predominio del pensamiento operacional frente al estructural y el procesual. Destacamos no solo al manejo no adecuado de las distintas representaciones, sino también, apreciamos el papel fundamental que los alumnos asignan a la interpretación de las fracciones y de los irracionales, no expresados en notación decimal con coma, como operaciones. Algunos aplican de forma efectiva la sustitución formal, cambio de registro de representación, al considerar la relación entre la operación y el proceso a través de la estructura. Otros, sin embargo, hacen corresponder a la expresión que representa la operación y a la del resultado estructuras distintas.

c) Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

En la fase de diagnóstico, llegamos a concluir, por un parte, a que el alumnado hacía, de manera mayoritaria, el cambio de registro a la notación decimal de la notación fraccionaria y de la de radicales y, posteriormente, representar el resultado de forma aproximada (o exacta, por ejemplo:0,75 y 3 /4). Por otra parte, esto ponía de manifiesto que la relación entre las técnicas utilizadas y los procesos de sustitución formal, no se hacían a través de las estructuras.

En la fase de revisión, hemos obtenido, por un lado, los mismos resultados que en la fase de diagnóstico, aunque con porcentajes más bajos. Por otro lado, apreciamos que la aplicación de nuevas técnicas para representar fracciones e irracionales cuadráticos, estudiadas en la unidad de aprendizaje correspondiente de los decimales, demuestra que el desequilibrio entre el pensamiento operacional, estructural y procesual es menor en este momento.

d) Diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

En la fase de revisión, hemos observado que lo decimal y la numeración decimal no ayudan a organizar a los números enteros. Sin embargo, sí contribuyen a organizar a los irracionales. Por otra parte, el alumnado presenta menos dificultades en valorar si una fracción es decimal o no, que en hallar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica y valorarla posteriormente.

En cuanto a la conjetura realizada comentamos, por un lado, que se caracterizaba por los siguientes factores:

- El alumno, futuro maestro de Primaria, manifiesta grandes dificultades cuando se enfrenta a actividades donde se pone en juego más el pensamiento estructural y procesual que el operacional.
- Estos estudiantes seleccionan los números decimales, teniendo en cuenta más su escritura decimal que sus propiedades.
- Este alumnado, para representar números reales en la recta, aplica de forma mayoritaria, la conversión a la notación decimal.
- La organización curricular de los sistemas numéricos (Figura 1.8), propuesta en el experimento de enseñanza, puede favorecer un cambio en las concepciones de los alumnos del sistema de los números decimales.

Por otro lado, que el desarrollo y análisis del experimento de enseñanza ponen de manifiesto una cierta mejoría en algunos de los factores anteriores. Si bien, se aprecia que parte del alumnado aplica la identificación de número decimal con la notación decimal con coma, hay otros alumnos que la combinan con la idea de poderlo expresar en forma de fracción decimal. Asimismo, el 46,4% del alumnado sigue representando números reales en la recta con la estrategia de convertir la representación semiótica a la notación decimal; sin embargo, surgen, en menor proporción, las técnicas estudiadas (apartado 4.4) para representar racionales e irracionales cuadráticos. Todo ello, demuestra que encontramos, en la fase de revisión, un menor desequilibrio entre los pensamientos operacional, estructural y procesual.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo hacemos una recopilación de los resultados relevantes obtenidos en los tres estudios: Estudio exploratorio (Capítulo 3), Estudio experimental (Capítulo 4) y Estudio definitivo (Capítulo 5), que exponemos en términos de errores, comportamientos, argumentos y procedimientos de representación de números reales en la recta que tienen o utilizan los alumnos de esta investigación. Esto permite señalar los diferentes tipos de conocimientos que utilizan los estudiantes y los conflictos que tienen, en relación con los sistemas numéricos en general y con los números decimales, en particular y sus representaciones en la recta numérica.

Se realiza también una comparación, apartado 6.3, entre los resultados de los tres estudios en aquellos aspectos que son comparables. Para ello debemos tener en cuenta que de los instrumentos de recogida de datos elaborados para estos estudios, tenemos los cuestionarios (C1 y C2) que presentan características comunes. En ellos se plantean al alumnado unas situaciones problemáticas, en las que se trabajan fundamentalmente estructuras y procesos, que son iguales (Estudio experimental y definitivo: Cuestionario (C2)) o que tienen un análisis de contenido matemático equivalente (Cuestionario (C1): pregunta n.º 24, n.º 28 y n.º 29, con las del Cuestionario (C2). Para ello, confrontamos los resultados obtenidos en las preguntas: n.º 24, n.º 28 y n.º 29, del cuestionario (C1) y, n.º 1, n.º 2 y n.º 3, del cuestionario (C2). La pregunta n.º 24 está relacionada con la n.º 2; la pregunta n.º 28 con la n.º 3 y la pregunta n.º 29 con la n.º 1.

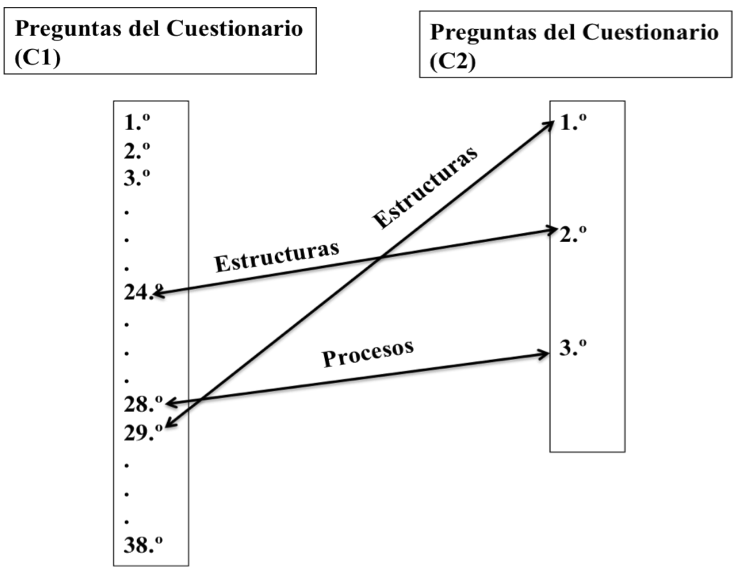


Figura 6.1: Correspondencia entre preguntas de los cuestionarios

6.2 RESULTADOS DE LOS ESTUDIOS

En este apartado se hace una recopilación de los errores, comportamientos, argumentos y procedimientos de representación de números reales en la recta, relevantes, que han presentado los estudiantes de esta investigación.

6.2.1 Los errores

Los errores (Ei) son los siguientes:

- E1: Los enteros no son decimales.
- E2: Los números expresados con notación decimal con coma son decimales.
- E3: Todas las fracciones son decimales.
- E4: Algunas fracciones son decimales, pero la clasificación es incorrecta.
- E5: Ninguna fracción es decimal.
- E6: Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal, son decimales.
- E7: Todo número expresado con notación decimal finita y notación decimal infinita, periódica, es decimal.
- E8: -3,9 no es decimal.
- E9: Hay decimales que no son racionales.
- E10: Hay decimales que son irracionales.
- E11: Hay decimales que no son reales.
- E12: D es R-Z.
- E13: D es isomorfo a R.
- E14: Todo número expresado con notación decimal con coma finita e infinita, no periódica, es decimal.
- E15: D es isomorfo a Q.
- E16: Solo los números positivos, expresados con notación decimal con coma y con parte decimal finita, son los decimales.

6.2.2 Los comportamientos

En relación con los sistemas numéricos en general hemos detectado el siguiente comportamiento: el alumnado utiliza de forma mayoritaria como criterio para identificar a los números, la escritura, además de otras características de los números asociadas a los signos (por ejemplo: positivo-negativo).

En relación con los números decimales encontramos los siguientes comportamientos:

- A: Los números decimales son solo los que están expresados con notación decimal con coma.
- B: Los números decimales son los que están expresados con notación decimal con coma y algunas o todas las fracciones. Además, algunas de las expresiones que contienen una raíz, π o π -5 se excluyen o se dejan sin contestar (números borrosos). Los enteros tampoco se consideran decimales.
- C: Los números decimales son todos excepto los enteros.
- D: Los decimales son los enteros, los que están con notación decimal finita y todas las fracciones.
- E: La respuesta correcta.
- F: Los números decimales son todos. Nos encontramos que además algunos consideran a D isomorfo a R – Z.
- G: Son los números con notación decimal con coma y se establece correctamente la clasificación de las fracciones. Con respecto a los irracionales, no expresados con notación decimal, se incluyen todos o algunos. Los enteros son incluidos en algunos casos.
- H: Se marcan correctamente todos los números decimales que están en notación fraccionaria y se excluyen las fracciones no decimales. Asimismo, son elegidos todos o algunos de los expresados con notación decimal con coma.
- J: Se eligen algunas de las fracciones no decimales y se excluyen, mayoritariamente, los números expresados con notación decimal infinita y no periódica. Algunos descartan las expresiones periódicas.
- K: Se toman los números decimales que están en notación fraccionaria y se excluyen las fracciones no decimales. Asimismo, se eliminan los números expresados con notación decimal infinita y no periódica; algunos, también, las expresiones periódicas.
- L: Se decantan por alguna fracción no decimal y no se excluyen los expresados con notación decimal infinita y no periódica. En este caso hay alumnos que marcan negativamente a los irracionales que no están en notación decimal.
- M: Se elige a Q como D.

- N: D está formado por los números enteros y los números expresados en escritura decimal finita o infinita periódica.
- O: Los decimales son todos, excepto $1+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{3}\ \ y\ \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.2.3 Los argumentos

Presentamos los argumentos (Ai) aplicados por los alumnos para incluir un número como decimal, es decir, es decimal porque:

- A1: El número está en notación decimal con coma.
- A2: Se procede a realizar la conversión a notación decimal (aproximadamente o no) y se clasifica por el resultado.
- A3: Es una cantidad inexacta.
- A4: Representan partes no enteras de la unidad.
- A5: Está comprendido entre dos enteros.
- A6: Pertenece a otro conjunto numérico: Z, no Z o I.
- A7: Tiene infinitas cifras decimales y periódicas.
- A8: Tiene infinitas cifras decimales y no periódicas.
- A9: Se puede expresar como una fracción decimal.
- A10: Se puede expresar con notación decimal, pero con parte decimal nula o con período nueve.
- A11: Está representado con notación decimal finita.
- A12: Por ser una expresión decimal infinita y no periódica.
- A13: Es una fracción o se puede expresar en forma de fracción.
- A14: Los decimales son los que están representados en el sistema numérico decimal.

Los argumentos (Bi) para excluir un número como decimal son:

- B1: No está en notación decimal con coma.
- B2: Se hace cambio de registro y se obtiene un número sin coma.
- B3: Es una cantidad exacta.
- B4: Son partes enteras de la unidad.
- B5: Pertenece a otro conjunto numérico: N, Z, Q o I.
- B6: Es una fracción (no se hace cambio de registro).
- B7: Es una expresión que contiene una raíz (no se hace cambio de registro).
- B8: Son símbolos especiales (no se hace cambio de registro). Es el caso de π.

- B9: Es una expresión numérica (no se hace cambio de registro).
- B10: No se puede expresar en forma de fracción decimal.
- B11: El cero no tiene valor.
- B12: Lleva signo negativo.
- B13: Está representado con notación decimal con coma infinita.
- B14: Está representado con notación decimal con coma, infinita y periódica.
- B15: Está representado con notación decimal con coma, infinita y no periódica.
- B16: Se puede expresar con notación decimal con coma, infinita y con período distinto de nueve.
- B17: Es un número imaginario.

6.2.4 Los procedimientos para representar números reales en la recta

Hemos recopilado los siguientes procedimientos utilizados por los estudiantes de esta investigación para representar números reales en la recta:

- Utilizar la escritura decimal para representar los números en la recta numérica.
- Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: división de un segmento en partes iguales.
- Considerar a $-2\sqrt{2}$ como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$.
- Situar una fracción en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.
- Representar a 0,75, 0,333…, 2,75 y 2,2333…, haciendo cambio de registro a notación fraccionaria en algunos (o en todos) de ellos.
- Utilizar el teorema de Pitágoras en la representación de $\sqrt{2}$ o de $-2\sqrt{2}$.
- Representar solo los que están en notación decimal con coma.
- Situar algunos números indicando solo el intervalo al que pertenecen.

6.3 COMPARACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LOS TRES ESTUDIOS

Comenzamos con la comparación de los resultados en las preguntas n.º 29 (Cuestionario (C1)) y n.º 1 (Cuestionario (C2)). En ambas preguntas, tal y como ya hemos comentado en capítulos anteriores, se pide clasificar números en naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y reales. Estos números están expresados en notación decimal, fraccionaria, de radicales y aparece, también, el símbolo π.

En el Estudio exploratorio encontramos cierta confusión con la terminología: naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y reales. No está presente la organización de los sistemas numéricos aplicada en el análisis de contenido matemático realizado. La identificación de los números se lleva a cabo por su escritura y no por sus propiedades. Por ejemplo, se halla la identificación de los decimales con la escritura decimal con coma y la de los racionales con la fraccionaria (véase tabla 6.1). Asimismo, las relaciones entre los conjuntos numéricos ($N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$; $I \subset R$, $Q \cup I = R$ y $Q \cap I = \varnothing$) no se establecen de forma clara. Se detecta la exclusión de los enteros como decimales (alrededor del 80,5 %) y la inclusión de algunos irracionales como decimales (61,1%).

En este trabajo, con respecto a los decimales, se encuentran las dos posiciones extremas halladas en el trabajo de Socas (2001), solo que ahora la más significativa es la segunda: la identificación de número decimal con la escritura decimal con coma. Ahora hallamos también otras posiciones intermedias que entremezclan las dos posiciones extremas, en este grupo de alumnos.

En el Estudio experimental tampoco observamos, en ninguna de las poblaciones o grupos estudiados, la organización de los sistemas numéricos del análisis del contenido matemático. Se detectan mayores dificultades en la identificación de decimales, racionales e irracionales que en la de naturales y enteros. Debemos señalar que el grupo con una fuerte preparación matemática (población del año 2006) presenta porcentajes más altos en sus respuestas correctas que el de una débil formación (población del año 2007). Las relaciones entre los conjuntos numéricos se manifiestan de forma incorrecta. Por ejemplo, hacemos hincapié en que los enteros son excluidos de los decimales en ambos grupos (37,5% y 50%, respectivamente). Se incluyen algunos irracionales en los decimales (62,5% y 47,5%, respectivamente). En los alumnos con una fuerte preparación matemática, descubrimos un 12,5% que hace distinciones entre las escrituras decimales finitas, las infinitas periódicas y las infinitas no periódicas. También, se consideran racionales no decimales como decimales; al clasificar a todas las fracciones como decimales (75% y 42,1%, respectivamente). Por ello, consideramos que las fracciones se tratan globalmente, es decir, no se separan decimales de no decimales.

En los alumnos, con una fuerte preparación matemática, observamos, con respecto a los decimales, las dos tendencias, halladas en otros estudios, comentados anteriormente, a saber:

- Establecer un isomorfismo entre los decimales y los reales (primera tendencia: 37,5%).
- Considerar los números expresados con notación decimal con coma como decimales (segunda tendencia: 12,5%).

Sin embargo, en los alumnos con una débil formación matemática, solo manifiestan la segunda tendencia en un 57,9%.

En el Estudio definitivo, vamos a distinguir los resultados obtenidos en la fase de diagnóstico de los de la fase de revisión. En la fase de diagnóstico, encontramos un comportamiento general que se caracteriza por utilizar como criterio para identificar a los números, de forma mayoritaria, su escritura o forma de representación y otras características de los números asociadas a los signos. Para el caso de los decimales, se confunde el objeto número decimal con la representación decimal con coma. En cuanto a las relaciones entre los conjuntos numéricos, también se establecen de forma incorrecta, dependen de ese comportamiento general observado. Al igual que en los estudios anteriores, se excluyen a los enteros de los decimales (92,9%). En cuanto al tratamiento de la notación decimal, podemos decir que se hace de manera global, es decir, se consideran solo escrituras con coma o sin coma. El concepto de fracción decimal no se aprecia en sus respuestas. Hay un 21,4% que clasifica a todas las fracciones como decimales. Por ello, no apreciamos la organización curricular que rige el análisis del contenido matemático de estas preguntas.

En la fase de revisión, la organización de los sistemas numéricos, puesta en práctica en la fase de retroalimentación, que coincide con la del análisis de contenido matemático de estas preguntas, aparece poco clara en las respuestas del alumnado. Los números decimales se identifican con la notación decimal con coma, pero, en algunos casos, se combina con la idea de poderse expresar en forma de fracción decimal. Se sigue excluyendo a los enteros de los decimales (92,9%) por su escritura. Al igual que en el Estudio experimental con los alumnos con una fuerte preparación matemática, no podemos afirmar que se haga ese tratamiento global de la notación decimal. Esto se observa de manera especial en la identificación de los irracionales, clasificados como no decimales, con la escritura decimal infinita o con la infinita no periódica. Asimismo, la presencia, por ejemplo, de la respuesta correcta, comportamiento E y del comportamiento G, en los que se clasifican correctamente las fracciones en decimales y no decimales, pone de manifiesto la aplicación del concepto de fracción decimal en sus respuestas.

Podemos concluir que:

- La organización de los sistemas numéricos, del análisis matemático realizado de estas preguntas y puesta en práctica en la fase de retroalimentación del Estudio definitivo, se presenta confusa en el alumnado en estos tres estudios.
- En todos los estudios se produce la confusión de número decimal con la representación decimal con coma, salvo en el Estudio definitivo, en la fase de revisión, en el que el alumnado combina la notación decimal con la fraccionaria decimal.
- Se excluyen a los enteros de los decimales en todos los casos y de forma significativa.
- El concepto de fracción decimal solo surge en el Estudio definitivo y en la fase de revisión.
- El tratamiento global de la notación decimal se aprecia solo en los alumnos del Estudio exploratorio, en los de una débil formación matemática del Estudio experimental y en los estudiantes del Estudio definitivo, pero en la fase de diagnóstico.

En la Tabla 6.1 recogemos el comportamiento del alumnado que se presenta con mayor porcentaje, en cada conjunto numérico y estudio.

		N	Z	D	Q	I	R
ESTUDIO EXPLORATORIO		Son todos los números (22,2%)	Respuesta correcta (38,9%)	Comportamiento C (61,1%)	Los números expresados en forma de fracción (13,9%)	Los números expresados con raíces (11,1%)	La respuesta correcta (41,7%)
ESTUDIO EXPERIMENTAL	E. PROFESOR SECUNDARIA	La respuesta correcta, salvo matices (87,5%)	La respuesta correcta, salvo matices (100%)	Comportamiento F (37,5%)	La respuesta correcta salvo matices (0,6666…) (62,5%)	- La respuesta correcta (37,5%) - Los irracionales y 0,666… (37,5%)	La respuesta correcta (100%)
	E. MAESTRO PRIMARIA	La respuesta correcta salvo matices con 35521 (39,5%)	La respuesta correcta, salvo matices (55,3%)	Comportamiento A (57,9%)	- Los expresados en forma de fracción (15,8%). - Los positivos y el cero (15,8%)	Los no elegidos como racionales (34,2%)	La respuesta correcta (26,3%)
ESTUDIO DEFINITIVO	DIAGNÓSTICO	La respuesta correcta, salvo matices (21,4%)	La respuesta correcta (35,7%)	Comportamiento B (28,6%)	Los expresados en forma de fracción (10,7%)	Los números expresados con raíces (10,7%)	La respuesta correcta, salvo matices (28,6%)
	REVISIÓN	La respuesta correcta, salvo matices (39,3%)	La respuesta correcta, salvo matices (35,7%)	Comportamiento B (25%) y comportamiento G (18%)	Todos los números excepto $-\sqrt{7}$ (14,3%)	Los no elegidos como racionales (28,6%)	La respuesta correcta, salvo matices (57,1%)

Tabla 6.1: Comportamiento mayoritario detectado para cada sistema numérico en los estudios

Procedemos a comparar los resultados obtenidos en las preguntas n.º 24 y n.º 2. En estas preguntas el alumnado debe marcar si un número real dado es decimal o no, además, debe dar una explicación de su respuesta.

En el Estudio exploratorio hemos observado que el comportamiento mayoritario (41,7%) es C, que consiste en elegir como decimales a todos los números excepto los enteros. Por ello, el argumento más común es considerar como decimales a los números que están expresados con notación decimal con coma, o que pueden expresarse de esa manera (A2, 41,7%). Asimismo, los números que son excluidos como decimales se especifica que es por la pertenencia a otro conjunto numérico, en especial a los enteros (B5, 33,3%). Sin embargo, han surgido otros argumentos, aunque menos significativos, y que también recogemos en la red sistémica siguiente.

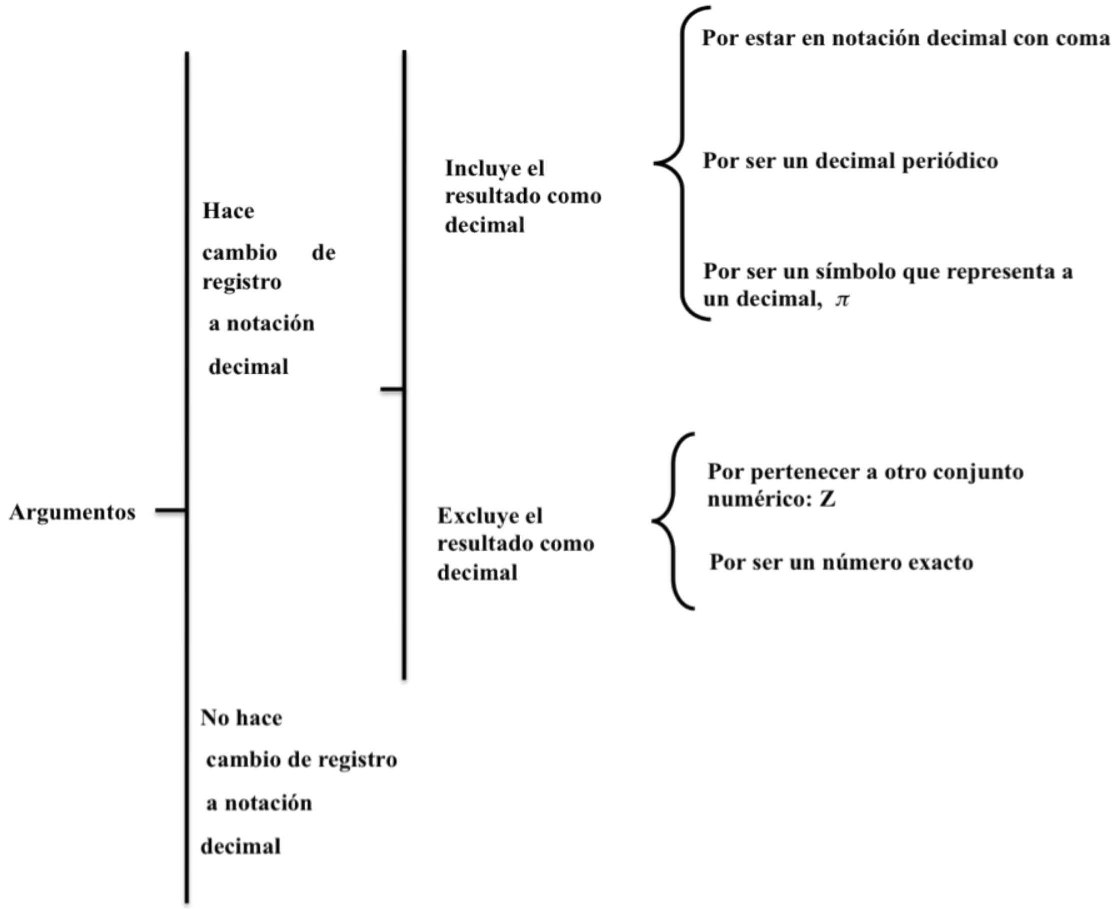


Figura 6.2: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que hacen cambio de registro a notación decimal (Estudio exploratorio)

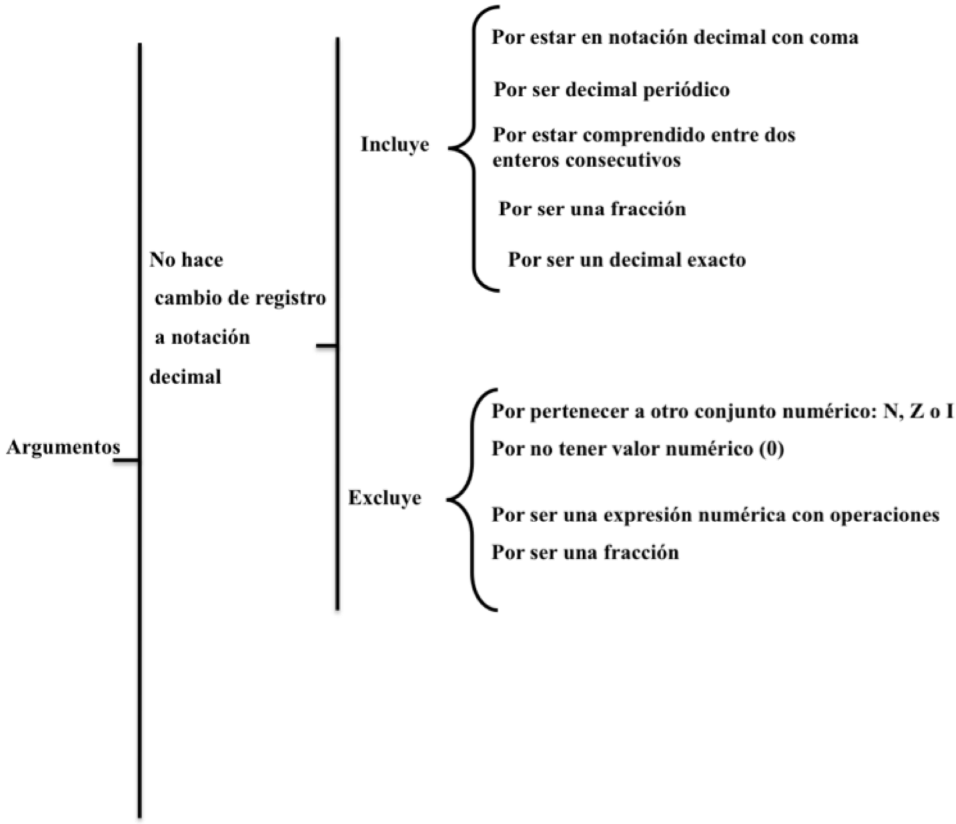


Figura 6.3: Red sistémica de los argumentos de los alumnos que no hacen cambio de registro a notación decimal (Estudio exploratorio)

En el Estudio experimental y con los alumnos con una fuerte preparación matemática, el comportamiento que se presenta con mayor porcentaje (37,5%) es el F, en el que se consideran a todos los números como decimales. En cuanto al argumento mayoritario aplicado es: todo número es decimal porque se puede expresar con notación decimal con coma (37,5%). Este argumento coincide con el denominado A2. Los argumentos de exclusión son más variados, pero presentan los mismos porcentajes y pocos significativos (alrededor del 12,5%), salvo el B5 (25%). En la siguiente red sistémica presentamos los argumentos.

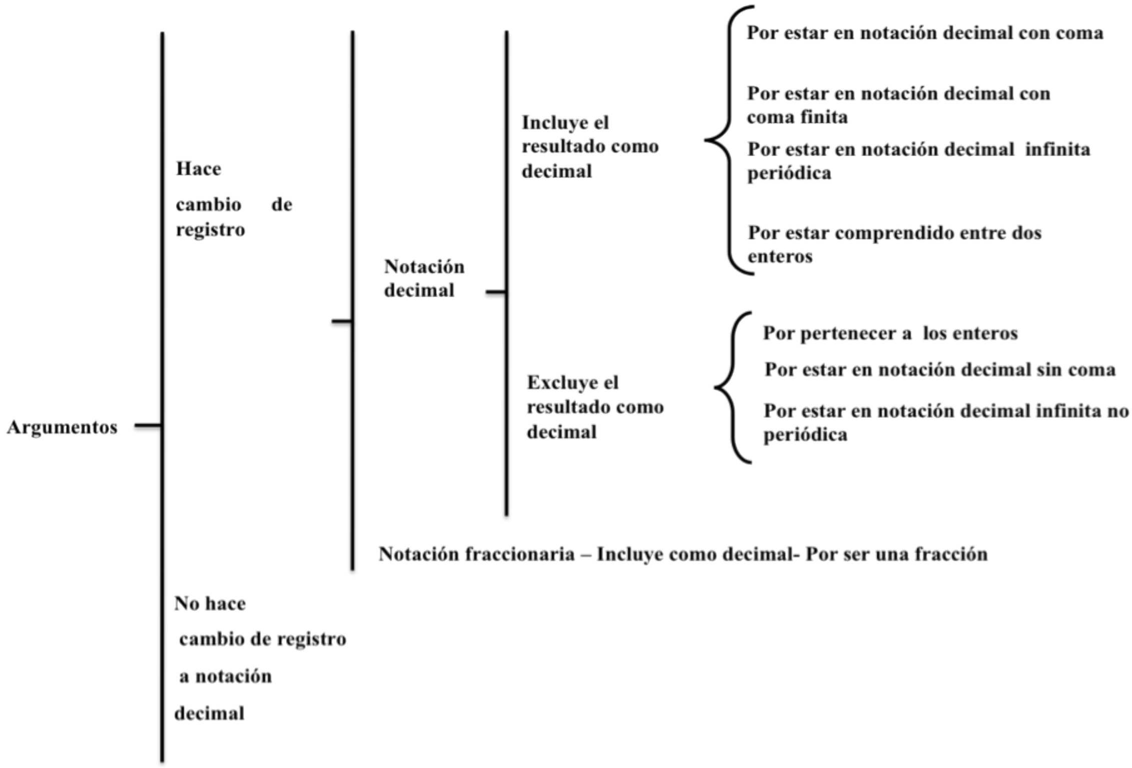


Figura 6.4: Red sistémica de los argumentos de los alumnos, con una fuerte preparación matemática, que hacen cambio de registro a la notación decimal o fraccionaria (Estudio experimental)

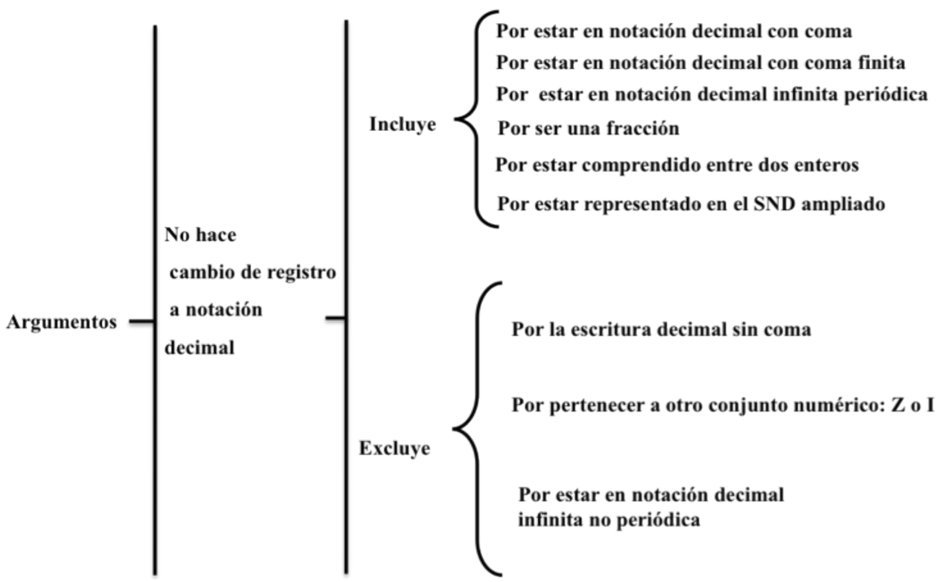


Figura 6.5: Red sistémica de los argumentos de los alumnos, con una fuerte preparación matemática, que no hacen cambio de registro a la notación decimal (Estudio experimental)

Podemos observar, al comparar esta red con la correspondiente del Estudio exploratorio, que solo en este caso se hace cambio de registro a la notación fraccionaria. Este hecho está relacionado con el comportamiento que consiste en elegir a todos como decimales excepto a los irracionales (12,5%). En ambas redes se aprecia el argumento mayoritario A2: es decimal porque está expresado o se puede expresar en notación decimal con coma.

Los alumnos con una débil formación matemática, manifiestan de manera mayoritaria en esta pregunta un comportamiento que hemos denominado A (42,1%); éste consiste en elegir solo como decimales las escrituras decimales con coma. En este caso, no se realiza cambio de registro a la notación decimal. Por ello, hallamos que el argumento más frecuente es A1 (71%), en el que se explicita que el número es decimal porque lleva coma su escritura. También, un 34,2% aplica el argumento A2, por tanto, hay una proporción de estudiantes que sí hace cambio de registro a la notación decimal. La explicación que se da para excluir un número como decimal está basada en la pertenencia a otro conjunto numérico (N, Z, no Z, Q o I) (B5, 65,8%). Todo esto pone de relieve que el número decimal es elegido por la escritura decimal con coma, y es excluido por la pertenencia a otro conjunto numérico.

En el Estudio definitivo, y en la fase de diagnóstico, el comportamiento con mayor porcentaje es el C (50%). Asimismo, los argumentos, para incluir un número como decimal, que destacamos son: A1 (75%) y A2 (78,6%). El cambio de registro a la notación decimal e identificar el número con esta escritura juegan un papel fundamental en sus razonamientos. Los argumentos, para excluir un número como decimal, con porcentajes más altos son: B1 (46,4%) y B5 (67,6%).

En la fase de revisión, el comportamiento más significativo es el K (28,6%). Este comportamiento solo se da en estos alumnos y en este momento. Sus características fundamentales son las siguientes:

- Se eligen, de los números expresados con notación fraccionaria, las fracciones decimales, y se excluyen, las no decimales.
- Se eliminan los números expresados con notación decimal infinita y no periódica; algunos, también, las expresiones periódicas.

Los argumentos esgrimidos y más utilizados, en este caso, para clasificar un número como decimal son los siguientes: A2 (57,1%) y A9 (53,6%). Este último solo aparece en este Estudio y en esta fase; consiste en considerar un número como decimal si se puede expresar en forma de fracción decimal. Sin embargo, los argumentos más utilizados para excluir un número como decimal son los siguientes: B2 (35,7%); B5 (67,9%) y B10 (39,3%). Este último razonamiento solo se da en esta situación y el alumno excluye el número por no poderse expresar en forma de fracción decimal.

Podemos observar que para los alumnos con una fuerte preparación matemática, el comportamiento mayoritario es considerar a todos los números reales como decimales. Sin embargo, para los de una débil formación matemática y que no pertenecen al Estudio definitivo y en la fase de revisión, hallamos dos tendencias. La primera, es considerar solo como decimales los que están expresados en notación decimal con coma y sin realizar cambio de registro y, la segunda, es elegir a todos los reales excepto a los enteros como decimales. No aparece el concepto de fracción decimal. No obstante, los alumnos que han intervenido en el experimento de enseñanza y en la fase de revisión, sí clasifican las fracciones de forma correcta, con mayor porcentaje, en decimales y no decimales. Asimismo, se excluyen como decimales los que están expresados con notación decimal infinita y no periódica, por lo que no se hace un tratamiento global de la notación decimal.

Los argumentos que se presentan en todas las situaciones son A2 y B5, aunque con porcentajes distintos. En la Tabla 6.2 mostramos comportamientos y argumentos mayoritarios para cada caso.

ESTUDIO EXPLORATORIO	ESTUDIO EXPERIMENTAL		ESTUDIO DEFINITIVO	
C (41,7%) A2 (41,7%) B5 (33,3%)	ESTUDIANTE PROFESOR DE SECUNDARIA	ESTUDIANTE PARA MAESTRO DE PRIMARIA	DIAGNÓSTICO	REVISIÓN
	F (37,5%) A2 (37,5%) B5 (25%)	A (42,1%) A1 (71%) A2 (34,2%) B5 (65,8%)	C (50%) A1 (75%) A2 (78,6%) B1 (46,4%) B5 (67,6%)	K (28,6%) A2 (57,1%) A9 (53,6%) B2 (35,7%) B5 (67,9%) B10 (39,3%)

Tabla 6.2: Comportamientos y argumentos mayoritarios hallados en los estudios (pregunta n.º 24 del cuestionario C1 y segunda pregunta del cuestionario C2)

Finalmente, comparamos los resultados obtenidos en las preguntas n.º 28 y n.º 3. En ambas preguntas se pide representar en la recta un conjunto de números reales, expresados en notación decimal, la de los radicales y la fraccionaria.

En el Estudio exploratorio, hallamos que los que responden (97,2%) utilizan la estrategia de realizar la conversión a notación decimal de los números dados y, después, realizar una representación aproximada. No se aplica la técnica basada en el teorema de Pitágoras, para los irracionales cuadráticos, ni la fundamentada en Thales para los racionales. Por ello, podemos decir que el mapa conceptual descrito en el análisis del contenido matemático de esta pregunta no se detecta en estos alumnos.

En el Estudio experimental y para todos los alumnos, observamos también, al igual que en el Estudio exploratorio, ese comportamiento mayoritario (75% - 84,2%) que consiste en representar en notación decimal los números en la recta. Además apreciamos, solo en los alumnos con una fuerte preparación matemática, la aplicación del teorema de Pitágoras (12,5%) y de Thales (12,5%) para representar irracionales cuadráticos y racionales, respectivamente. Por ello, en estos alumnos encontramos un mapa conceptual que se asemeja más al aplicado en el análisis del contenido matemático de esta pregunta.

En el Estudio definitivo, y en la fase de diagnóstico, el 78,6% del alumnado representa en notación decimal los números reales en la recta. Un 17,9% representa las fracciones dividiendo la unidad en tantas partes como indica el denominador y eligiendo tantas como indica el numerador. Un 3,6% aplica el teorema de Pitágoras para representar irracionales cuadráticos.

Sin embargo, en la fase de revisión, los resultados nos muestran que solo un 46,4% representa en notación decimal los números en la recta. El porcentaje disminuye después de la implementación del experimento de enseñanza. La conversión a la notación fraccionaria se da solo en este caso y con un 17,6%. La técnica basada en el teorema de Pitágoras para representar irracionales cuadráticos es aplicada por un 39,3%; en esta situación el porcentaje aumenta respecto de las anteriores. Las fracciones se representan como partes de una unidad (35,7%), dividida en un número de partes congruentes. Todo esto pone de manifiesto que, el mapa conceptual que hemos aplicado en el análisis del contenido matemático de estas preguntas y que la enseñanza de estas técnicas en la unidad de aprendizaje, están parcialmente reflejadas en los comportamientos de los alumnos.

Asimismo, observamos, en mayor o menor proporción, que en todos los estudios que hemos realizado permanece ese comportamiento de representar los números en la recta en notación decimal.

Con respecto a los errores cometidos en las dos primeras preguntas del Cuestionario (C2) y análogas del Cuestionario (C1), observamos que los que se repiten en todos estos estudios son los siguientes: E1, E2, E3 y E6. La exclusión de los enteros como decimales (E1) se da en menor porcentaje en la población, formada por los alumnos con una fuerte preparación matemática, del Estudio experimental, que en el resto. Asimismo, para este grupo de estudiantes es más frecuente seleccionar a todas las fracciones como decimales (E3) que para los demás. En todos los estudios más de 1/3 de cada población considera que todo número con coma es decimal (E2). El error que consiste en tratar a algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal, como decimales (E6), se da con mayor frecuencia en los alumnos del Estudio definitivo, y en la fase de diagnóstico, y en los del Estudio experimental, con una fuerte preparación matemática.

	ESTUDIO EXPLORATORIO	ESTUDIO EXPERIMENTAL		ESTUDIO DEFINITIVO	
		ESTUDIANTE PROFESOR SECUNDARIA	ESTUDIANTE MAESTRO DE PRIMARIA	DIAGNÓSTICO	REVISIÓN
E1	80,6%-50%	37,5%-25%	50%-65,9%	92,9%-92,9%	92,9%-75%
E2	80,6%-50%	37,5%-87,5%	94,7%-94,7%	89,3%-100%	78,6%-35,7%
E3	61,1%-41,7%	75%-100%	42,1%- 50%	21,4%-14,3%	25%-14,3%
E6	61,1%-41,7%	62,5%-75%	47,5%-63,2%	57,1%-85,7%	71,4%-21,4%

Tabla 6.3: Porcentajes de errores de las dos primeras preguntas del Cuestionario (C2) y de sus correspondientes del Cuestionario (C1)

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

7.1 INTRODUCCIÓN

En este último capítulo presentamos los principales resultados obtenidos y hacemos una breve exposición de las líneas de investigación que nos proponemos seguir en el futuro.

Los resultados obtenidos abarcan los hallados en los tres estudios que conforman esta investigación: exploratorio, experimental y definitivo.

En el Estudio exploratorio, nos planteamos un trabajo que consiste en una primera exploración cuya finalidad es analizar la problemática de los números decimales y sus distintas representaciones y sus relaciones con otros sistemas numéricos, en los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de la Especialidad de Maestro de Educación Infantil (ULPGC) en el año 2004.

En el Estudio experimental, llevado a cabo en los años 2006 y 2007 (con alumnos de la ULL y de la ULPGC), partimos del mismo tema relativo a los decimales, pero lo limitamos profundizando en el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representarlo.

En el Estudio definitivo, realizado en el año 2008 (con alumnos de la ULPGC), se aborda también el análisis de la dimensión conceptual del número y sus diferentes formas de representación, antes y después de la puesta en práctica de un experimento de enseñanza guiado por conjeturas. En dicho experimento se plantea una organización diferente de los sistemas numéricos. Esta organización curricular se corresponde con la propuesta por Socas (2001) (Figura 1.8). Esta propuesta intenta esclarecer la organización de los sistemas numéricos, en la que los números decimales son considerados con entidad propia. Además, se pretende que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

Asimismo, en el diseño de nuestro experimento nos planteamos también conseguir que el alumnado conozca una teoría, articulada en las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje (Socas, 2007), que le sirva de herramienta de análisis en su labor docente futura.

Los objetivos generales de la investigación son los siguientes:

Primero: Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.

Segundo: Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. En definitiva, encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) desde los decimales.

Tercero: Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.

Cuarto: Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

Quinto: Diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

Figura 7.1: Relaciones de objetivos con estudios realizados

7.2 CONCLUSIONES

En este epígrafe se exponen fundamentalmente las conclusiones relacionadas con los objetivos planteados y las respuestas a las preguntas de investigación. También, se realiza una valoración de recursos empleados en la investigación.

Con relación al primer objetivo: Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.

Si tomamos en consideración las tres capacidades generales asociadas a cualquier objeto matemático: reconocer y diferenciar, formular y manipular el objeto; en los resultados obtenidos relativos a las capacidades específicas analizadas, podemos observar que estos alumnos tienen dificultades para reconocer y diferenciar y formular los números decimales, no tanto para operar con ellos, salvo en operaciones relacionadas con la división, lo que describe un predominio del pensamiento operacional frente al estructural y procesual.

Con relación al segundo objetivo: Recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos. En definitiva, encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos (N, Z, Q, I y R) desde los decimales.

En este sentido, la organización de los sistemas numéricos que deriva del análisis del contenido matemático, realizado de las preguntas de los cuestionarios y relacionadas con este objetivo y puesta en práctica en la fase de retroalimentación del Estudio definitivo, se presenta confusa en el alumnado en estos tres estudios. Se dan más aciertos en la clasificación de naturales, enteros y reales que en la de decimales, racionales e irracionales. La identificación de los racionales con la escritura fraccionaria se aprecia más en alumnos con una débil formación matemática. Lo mismo sucede con la identificación de los irracionales con las "raíces".

En todos los estudios se produce la confusión de número decimal con la representación decimal con coma, salvo en el Estudio definitivo, en la fase de revisión, en el que el alumnado combina la notación decimal con la fraccionaria decimal. En todos los casos encontramos alumnos que solo consideran números decimales a los que están expresados con notación decimal (Comportamiento A); no realizan cambios de registros.

Excluyen a los enteros de los decimales en todos los casos y de forma significativa. Así, hallamos que el comportamiento (C) que consiste en considerar como decimales a todos los números excepto a los enteros, se da en todas las poblaciones estudiadas, pero con una débil formación matemática. Por ello, pensamos que la organización de los sistemas numéricos, implementada en el experimento de enseñanza, no ayuda a organizar a Z.

El concepto de fracción decimal solo surge en el Estudio definitivo y en la fase de revisión.

El tratamiento global de la notación decimal se aprecia solo en los alumnos del Estudio exploratorio, en los de una débil formación matemática del Estudio experimental y en los estudiantes del Estudio definitivo, pero en la fase de diagnóstico.

Con relación al tercer objetivo: Analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y cómo lo discriminan en relación con los demás números.

Podemos observar que para los alumnos con una fuerte preparación matemática, el comportamiento mayoritario es considerar a todos los números reales como decimales. Sin embargo, para los de una débil formación matemática y que no pertenecen al Estudio definitivo y en la fase de revisión, hallamos dos tendencias. La primera, es considerar solo como decimales los que están expresados en notación decimal con coma y sin realizar cambio de registro y, la segunda, es elegir a todos los reales excepto a los enteros como decimales. No aparece el concepto de fracción decimal. No obstante, los alumnos que han intervenido en el experimento de enseñanza y en la fase de revisión, sí clasifican las fracciones de forma correcta, con mayor porcentaje, en decimales y no decimales. Además, se excluyen como decimales los que están expresados con notación decimal infinita y no periódica, por lo que no se hace un tratamiento global de la notación decimal.

Los argumentos que se presentan en todas las situaciones son A2 y B5, aunque con porcentajes distintos.

- A2: Se procede a realizar la conversión a notación decimal (aproximadamente o no) y se clasifica el número como decimal por el resultado.
- B5: Se excluye el número como decimal por pertenecer a otro conjunto numérico, en especial a Z.

El A2 es esgrimido con mayor porcentaje por los alumnos del Estudio definitivo (78,6% - 57,1%, en las fases de diagnóstico y revisión, respectivamente). El B5 se presenta menos en los alumnos con una fuerte preparación matemática (33,3%).

Con relación al cuarto objetivo: Estudiar los métodos que utilizan los estudiantes para representar diferentes números en la recta.

Observamos, en mayor o menor proporción, que en todos los estudios que hemos realizado permanece ese comportamiento de representar los números en la recta en notación decimal. Los porcentajes son más bajos en los alumnos con una fuerte preparación matemática y en los del Estudio definitivo, en la fase de revisión (75% - 46,4%, respectivamente).

La conversión a la notación fraccionaria se da solo en la fase de revisión del Estudio definitivo, y con un 17,6%.

Las técnicas para representar irracionales cuadráticos y fracciones, basadas en el teorema de Pitágoras y en el de Thales, respectivamente, solo se hallan en el Estudio experimental, en los alumnos con una fuerte preparación matemática, y en el Estudio definitivo.

Encontramos un desequilibrio entre los pensamientos operacional, estructural y procesual; mayor predominio del operacional sobre los otros dos en los alumnos con una débil formación matemática que en los de una fuerte preparación. En este sentido, después del experimento de enseñanza, se obtienen mejores resultados con los alumnos del Estudio definitivo.

Con relación al quinto objetivo: Diseñar y poner en práctica un experimento de enseñanza del sistema de los números decimales, en el que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos.

El análisis del contenido matemático de las asignaturas que intervienen en nuestra investigación, antes de la implementación del diseño de nuestro experimento, pone de manifiesto que, aunque el concepto de número decimal que se estudia no se identifica con la escritura decimal y que se trabajan las relaciones entre los conjuntos numéricos, sin embargo, no se da el estatus matemático al conjunto de los decimales destacando sus propiedades. Del mismo modo, y en relación con las técnicas de representación de números racionales en la recta, no se aborda el método basado en el Teorema de Thales, ni se hace hincapié en que la notación fraccionaria es más adecuada para su representación que la notación decimal. Con nuestro experimento hemos pretendido no solo remediar esta situación sino también las concepciones erróneas que sobre este tópico nuestros estudiantes manifiestan, de forma previa. Los resultados obtenidos, en el Estudio definitivo y en la fase de revisión, ponen de manifiesto cierta mejoría al incorporar los alumnos el concepto de fracción decimal en sus razonamientos y al no presentar, todos ellos, la preferencia de la notación decimal para representar números reales en la recta. Por ello, concluimos que estos resultados muestran, por un lado, la necesidad de este cambio en la organización curricular de los sistemas numéricos y en el desarrollo del esquema o mapa conceptual propuesto para la enseñanza de la representación de números reales en la recta. Por otro lado, que estas estrategias son viables de aplicar y útiles en los próximos cursos con otros alumnos.

En el diseño de este experimento se plantea también conseguir que el alumnado conozca una teoría, articulada en las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje, que le sirva de guía en su labor docente futura. En este sentido, el alumno debió aplicarla para la realización del "Informe". Del análisis de los orígenes de los errores, cometidos en las respuestas al cuestionario C2, por los estudiantes que participaron en el Experimento definitivo, se puede deducir que les resultó una actividad compleja. Muy pocos alumnos, alrededor del 7,1%, utilizaron términos como afectividad, ausencia de sentido u obstáculos, y no siempre de forma adecuada. Las dificultades, tal y como hemos comentado en el Capítulo 5, las atribuimos no solo a una falta de comprensión de estas nociones, sino también, a los problemas que presentan los alumnos para la comunicación y la reflexión de sus conocimientos. No obstante, el alumnado considera tres posibles causas de sus errores, a saber:

- R1: En la primera pregunta y de forma general, es el desconocimiento u olvido de los conjuntos numéricos, en especial, el de los racionales (32,1%).
- R2: En la segunda pregunta, es la concepción de número decimal como número con coma (50%).
- R3: En la tercera pregunta, es la representación aproximada en la recta de irracionales cuadráticos y de racionales (46,4%).

Estas conclusiones, relacionadas con los objetivos, también constituyen respuestas a las preguntas de investigación. Las preguntas, tal y como hemos mencionado en el Capítulo 2, son:

a) ¿Qué competencias tienen los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado en relación con los números decimales?
b) ¿Qué significados le atribuyen a cada sistema numérico y, en particular, al de los decimales?
c) ¿Cómo relacionan los distintos sistemas numéricos: N, Z, D, Q, I y R?
d) ¿Qué papel desempeña la notación decimal en las relaciones entre los conjuntos numéricos y en la representación de números reales en la recta?

Con respecto a sus respuestas, podemos concretar, además de lo mencionado en cada objetivo, los siguientes resultados:

- El alumnado manifiesta mayor dominio en la realización de sumas y restas con números decimales, expresados en escritura decimal, que en multiplicaciones y divisiones.

- Los estudiantes demuestran una mayor competencia en ordenar números decimales positivos, según su escritura decimal, que decimales negativos.
- Con respecto a la densidad, el alumno presenta dificultades para indicar cuántos números decimales pueden escribirse entre dos dados.
- En cuanto a las conversiones entre representaciones, se aprecia cierto dominio en el paso de la representación gráfica (contexto discreto y continuo) a la escritura decimal o fraccionaria decimal de un número. La representación de números racionales y de irracionales en la recta numérica, llevada a cabo por los alumnos del Estudio exploratorio y por los estudiantes para maestro del Estudio experimental, se hace fundamentalmente en notación decimal. Se presentan menos problemas en la representación de números racionales que en la de números irracionales.
- En relación al uso y utilidad de los números decimales, destacamos la baja competencia del alumnado en contextualizar situaciones problemáticas. Se buscan situaciones que son solo propias de los números naturales.
- El alumnado presenta dificultades en la identificación de números decimales entre diferentes números reales. También, hallamos problemas en identificar los distintos conjuntos numéricos y en establecer relaciones correctas entre ellos. Las relaciones entre los conjuntos numéricos no se establecen de forma adecuada por depender del significado atribuido a cada conjunto numérico.
- El significado atribuido a los decimales está estrechamente relacionado con la escritura decimal con coma, aunque los alumnos del experimento de enseñanza también lo relacionan con la notación fraccionaria decimal, tal y como hemos mencionado anteriormente. Los números racionales y los irracionales son identificados por la escritura fraccionaria y con la de los radicales, respectivamente.
- La notación decimal juega un papel importante en la exclusión de los números enteros de los decimales ("no tiene coma") y en la valoración de las escrituras con coma como números decimales ("lleva coma, es decimal"). De la misma manera, la representación de números reales en la recta se hace, de forma mayoritaria, con la realización previa de la conversión a la notación decimal, tal y como ya hemos comentado.

Por otra parte, los errores cometidos por las distintas poblaciones, en las preguntas de los cuestionarios con el mismo contenido matemático, y comunes a todos los Estudios son: E1, E2, E3 y E6.

- E1: Los enteros no son decimales
- E2: Todo número expresado en notación decimal con coma, es decimal
- E3: Las fracciones son decimales
- E6: Algunos o todos los irracionales, no expresados con notación decimal, son decimales

El origen o causa de estos errores lo atribuimos por un lado, a una ausencia de sentido, que se manifiesta en un manejo no apropiado de las distintas representaciones que hemos utilizado para expresar a los números; de manera especial en las conversiones entre ellas. Por otro lado, a un obstáculo didáctico, que se pone de relieve en la identificación de los decimales con las escrituras con coma en todos los estudios realizados. Este obstáculo está caracterizado por la concepción de que los decimales son los números que se utilizan para representar las cantidades no enteras (el alumno excluye a los enteros: E1) y por la clasificación de los decimales en decimales exactos, decimales ilimitados periódicos y no periódicos; ambas ideas son trabajadas en la escuela. Apreciamos el papel fundamental que los alumnos asignan a la interpretación de las fracciones y de los irracionales, no expresados en notación decimal con coma, como operaciones. Algunos aplican de forma efectiva la sustitución formal, cambio de registro de representación, al considerar la relación entre la operación y el proceso a través de la estructura. Otros, sin embargo, hacen corresponder a la expresión que representa la operación y a la del resultado estructuras distintas.

En relación con la conjetura que formulamos, ésta se basa en la idea, tal y como hemos mencionado en el Capítulo 2, de que, por un lado, los alumnos, futuros maestros de Primaria, muestran grandes dificultades cuando se enfrentan a actividades numéricas en las que se pone en juego más el pensamiento estructural y procesual que el operacional. De esta manera, seleccionan los números decimales, entre otros números, o los relacionan con otros sistemas numéricos, teniendo en cuenta más su escritura decimal que su estructura. Asimismo, en las situaciones en las que se representan números en la recta numérica la conversión a la notación decimal es una estrategia mayoritaria. Sin embargo, consideramos que una organización diferente, en la que lo decimal y la numeración decimal sirvan como elementos organizadores de los demás conjuntos numéricos, puede favorecer un cambio en las concepciones de los alumnos del sistema numérico de los decimales.

Por otro lado, los alumnos con un nivel alto en formación matemática caracterizan el conjunto de los números decimales de forma errónea dentro de los sistemas numéricos. Sin embargo, se presenta como tendencia mayoritaria el identificar número decimal con número real. Con respecto a la representación de números reales en la recta numérica, consideramos que el procedimiento más utilizado es aplicar el sentido operacional del número expresado en la escritura decimal.

Podemos concluir que:

- Existe en los futuros maestros de Primaria un predominio del pensamiento operacional frente al estructural y procesual.
- La nueva organización de los sistemas numéricos no ayuda a organizar los enteros.
- Los alumnos con una débil formación matemática identifican número decimal con la notación decimal con coma, excepto los del Estudio definitivo en la fase de revisión que la combinan con la notación fraccionaria decimal. Los alumnos con una fuerte preparación matemática manifiestan la tendencia a identificar número decimal con número real.
- En todos los Estudios se observa que la conversión a la notación decimal para representar números en la recta, sigue siendo una estrategia mayoritaria.

Valoración de recursos empleados

Podemos comentar con relación al marco conceptual, por una parte, que la Competencia Matemática Formal ha servido como instrumento para el análisis de los contenidos matemáticos de los cuestionarios C1 y C2 y, por otra, determinar qué competencias matemáticas presentan los estudiantes de esta investigación sobre los sistemas numéricos en general y sobre los decimales, en particular. La Competencia Cognitiva permite formular los posibles orígenes de los errores de los alumnos.

La revisión de trabajos sobre los conocimientos matemáticos que tienen los futuros profesores de Matemáticas, se ha utilizado para fundamentar las conjeturas de la investigación y para confirmar resultados comunes.

Los programas de las asignaturas que cursan los alumnos de la investigación los hemos analizado para conocer qué organización de los sistemas numéricos se propone y qué concepto de número decimal se aborda, para, posteriormente, diseñar y poner en práctica la propuesta de enseñanza.

Finalmente, el MKT permite organizar los tipos de conocimiento que se abordan en este trabajo; por ejemplo: el esquema propuesto, en el experimento de enseñanza para la organización de los sistemas numéricos, puede formar parte del conocimiento matemático especializado (SCK).

Con respecto a los recursos metodológicos: entrevistas audiograbadas e Informes, comentamos que sirvieron para aclarar respuestas del alumnado y para contrastar interpretaciones de resultados, sin embargo, no permitieron confirmar los orígenes de los errores de los estudiantes.

7.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

A lo largo del desarrollo y en la formulación de todo este trabajo de investigación, han surgido algunos aspectos que nos proponemos abordar en el futuro. Estos son:

- Realizar un análisis matemático y didáctico de los libros de texto sobre la enseñanza de los números decimales, haciendo uso de las herramientas que proporciona el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).
- Estudiar el tratamiento que se hace de la representación de números reales en la recta en la Enseñanza Obligatoria; analizando el currículo, libros de texto y recursos didácticos.
- Profundizar en los conocimientos que tienen los maestros en formación sobre números irracionales y representaciones.
- Estudiar si el alumnado con formación matemática equivalente a la que proporciona el Bachillerato o nivel superior, identifica número complejo con escrituras en las que aparezcan el símbolo "*i*", predominio de la notación $a + bi$. Comprobar si se establecen correctamente las inclusiones entre conjuntos numéricos: ¿Algunos excluirán a los naturales, por ejemplo, de los complejos?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *Uno*, 25, 89-105.

Arnal, J. y Arnal, N. (1987). *Estudio de los resultados cuantitativos de una evaluación*. Barcelona: PPU.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, *1*(1), 40-55.

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, *20*(2), 5-33.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l´esprit scientifique*. Paris: De Vrin. (Traducción al castellano: *La formación del espíritu científico* (1985). México: Siglo Veintiuno.

Ball, D., Hill, H. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(3), 14-22 y 43-46.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Becerra, M.V. y otros (1996). *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: McGraw-Hill.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion, 296-333. En Grouws D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishers Company: New York.

Benander, L. y Clement, J. (1985). *Error Patterns: Observed in basis arithmetic and algebra courses. Fund for improvement of post secondary education*. New York: Exxon Education Foundation.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research.* Kent: Croom Helm.

BOE (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

BOE (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Bolon, J. (1997). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. These de doctorat. Paris: IREM-Paris VII.

Bonotto, C. (1991). Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazioni didattiche. *L´insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 14*(7), 607-638.

Bonotto, C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L´insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 15*(5), 415-448.

Bonotto, C. (2006). Extending Student´s Understanding of Decimal Numbers Via Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. En J. Novotná, M. Krátká y N. Stenhliková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 193-200. PME: Praga.

Brekke, G. (1996). A decimal number is a pair of whole numbers. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2, 137-144, PME: Valencia.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathèmatiques. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1985). Quelques concepts fondamentaux en Didactique des mathématiques. En *EPS, contenus et didactique*, 269-277. SNEP: Paris:.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 281-300.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. Journal of the Learning Sciences, 2(2), 141-178.

Carpenter, T.P. y otros (1981). Decimals: Results and implications from national assessment. *The Arithmetic Teacher*, *21*(8), 34-37.

Castro, E. (2001). Números decimales (Cap. 13, 315-343). En Castro, E. y otros: *Didáctica de las matemáticas en la Educación Primaria*. Síntesis Educación: Madrid.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria (Cap. 12, 285-311). En Castro, E. y otros: *Didáctica de las matemáticas en la Educación Primaria.* Síntesis Educación: Madrid.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación.

Chick, H. (2003). Pre-service teachers´ explanations of two mathematical concepts. *Proceedings 2003 annual Conference of the Australian for Research in Education.* Auckland, N. Z. Recuperable en: http://www.aare.edu.au/03pap/chi03431.pdf.

Cid, E. Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino. *Matemáticas para maestros*, 11-162. Granada. Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences, 10*, 113-164.

Colera, J. y otros (1996). *Matemáticas I ESO*. Madrid: Anaya.

Collins, A. (1992). Towards a design science of education. En E. Scanlon y T. O'Shea (Eds.) *New directions in educational technology*, 15-22. Springer-Verlag: Berlin.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R.K. Sawyer (Ed.) *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, 135-152. New York: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* 231-265. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, N.J.

Courant, R.; Robbinns, H, (1971). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar.

Cramer, K., Wyberg, T. y Leavitt, S. (2009). Rational Number Project. Fraction, operations and initial decimal ideas. Recuperable en: http://cehd.umn.edu/rationalnumbersproject.

Cuartero, B. (1987). La literatura matemática: su acceso y utilización. En *Aspectos didácticos de Matemáticas, 2.* ICE de la Universidad de Zaragoza.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

De Guzmán, M. (2006). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Pirámide.

Dede, C. (2004). If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS Special Issue on Design- Based Research. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 105-114.

Dhombres, J. y otros (1987). *Mathématiques au fil des âges*. Paris: Gauthier-Villars.

Dickson, L.; Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

diSessa, A.A. y Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'ápprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*, 77-110.

Douady, R. y Perrin, M. J. (1990). *Nombres decimaux*. Paris: IREM Paris VII.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, 1997).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Fischbein, E. (1994). The irracional numbers and corresponding epistemological obstacles. En *Proceedings of the XVIII PME*, *2*, 352-359, Lisbon.

Fischbein, E., Jehiam, R. y Cohen, D. (1995). The concept of irracional numbers in high-school students and prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, *29*, 29-44.

Foxman, D. y otros (1985). *A Review of Monitoring in Mathematics 1978 to 1982. Assessment of Performance Unit (1)*. London: Department of Education and Science.

Fuglestad, A.B. (1998). Computer Support for Diagnostic teaching. A case of decimal numbers. *Nordic Studies in Mathematics Education (Nordisk Matematikdidaktikk) 6, (3-4)*, 25-50.

Gairín, J.M. (2003-2004). Estudiantes para maestros. Reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos Educativos, 6-7*, 235-260.

Grossman, A.S. (1983). Decimal Notation: An Important Research Finding. *The Arithmetic Teacher, 30*, 32-33.

Grupo Zero (1978). *La medida y el número*. ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Hart, K. M. (1981). *Children´s Understanding Mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hernández, J., Noda, A., Palarea, M. y Socas, M.M. (2003). Un estudio sobre habilidades básicas en matemáticas de alumnos de magisterio. *Noticias de la Real Sociedad Matemática Española. 2*(2), 4.

Hernández, J., Noda, A., Palarea, M. M. y Socas M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, VI*, 159-188.

Hernández, J., Socas, M. M., Palarea, M. y Afonso, C. (2008). La influencia del pensamiento operacional en la resolución de problemas de Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 9*, 147-174.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1986). Procedures Over Concepts: The Acquisition of Decimal Number Knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,*199-223. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers´topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Kelly, A.E. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Kelly, A.E. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 115-128.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Kouba, V.L. y otros (1989). Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number, Operations, and Word Problems. *The Arithmetic Teacher, 35*(8), 14-19.

Lachance, A. y Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behaviour, 20*, 503-526.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. (Cap. 7, 188-220). En Chamorro, M.C. y otros: *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Pearson Prentice Hall: Madrid.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Mariotti, M.A., Sainati Nello, M. y Sciolis Marino, M. (1995). Con quale idea di numero i ragazzi escono dalla scuola media? *L´insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18A-18B*, 5.

Merenluoto, K. (2004). The cognitive-motivational profiles of students dealing with decimal numbers and fractions. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 297-304, PME: Bergen.

Michaelidou, N., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: a research with sixth grade students. En M.J. H∅ines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 3, 305-312. PME: Bergen.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación Primaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Moreno, M.D. y otros (2009). Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre el concepto de número decimal. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 10*, 179-221.

Moreno, M.D., Socas, M.M. y Hernández, V. (2007). Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 8*, 251-272.

Moreno, M.D.; Hernández, V. y Socas, M.M. (2004). Respuestas del alumnado de Magisterio a un cuestionario sobre decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6,* 253-275.

Nortes A. y otros (2003). Conocimientos matemáticos de maestros en formación. *Suma, 44*, 71-81.

Palarea, M., Hernández, J. y Socas, M.M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del Profesorado e investigación en Educación Matemática, III,* 213-226. Campus. La Laguna. ISBN: 84-931584-5-3.

Peirce, C.S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Pinto, M. y Tall, D. (1996). Student Teachers´Conceptions of Rational Numbers. En *Proceedings of PME 20, 4,* 139-146, Valencia.

Porcel, E. y Ramírez, M. G. (2004). Determinación y análisis de las principales deficiencias en la identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos: N, Z, Q, I o R, en alumnos ingresantes a FACENA en 2001. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*, Universidad Nacional del Nordeste, Argentina.

Putt, I. J. (1995). Preservice Teachers Ordering of Decimal Numbers: When More is Smaller and Less is Larger! *Focus on Learning Problems in Mathematics. 17*(3), 1-15.

Ramírez, M.G. y Porcel, E. (2006). Tipos de representación en la recta real y visualización de errores frecuentes de alumnos ingresantes a FACENA. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas,* Universidad Nacional del Nordeste, Argentina.

Restrepo, J. y Torres J. (2006). Una caracterización de las concepciones de estudiantes para profesor de Matemáticas sobre el concepto de número natural. *Revista de investigación. 6*(2), 225-232.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathématiques, 21*. IREM. Paris 7.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. Enseñanza de las Ciencias, 14(1), 3-14.

Ruiz, L. (2004). Construcción de los decimales en la escuela primaria. De las fracciones a la notación decimal. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño (189-234)*. Ministerio de Educación y Ciencia: Madrid.

Scaglia, S. y Coriat, M. (2003). Dos conflictos al representar números reales en la recta. *La Gaceta de la RSME, 6*(1), 131-168.

Schilling, S. y Hill, H. (2007). Asseing measures of mathematical knowlegde for teaching: A validity argument approach. *Measurement, 5 (2-3),* 69-130.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L. y Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32*(1), 25-28.

Short, E. (1985). The concept of competente: Its use and misuse in education. *Journal of Teacher Education, 36*(2), 2-6.

Sierpinska, A. (1985). La notion d´obstacle épistémologique dans l´enseignement des mathématiques. *Comptes-rendus de la 37e reencontré organisée par la CIEAEM (Mathématiques pour tous à l´age de l´ordinateur),* 73-95. Leiden.

Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line-where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology. 38*(4), 477-488.

Sirvent, J. (2002). Períodos. *Epsilon, 52*, 115-138.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, 125 -154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. ICE-Horsori. Barcelona.

Socas, M.M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 297-318.

Socas, M.M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números, 50*, 19-34.

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En Camacho, M., Flores, P. y Bolea, M.P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52, La Laguna: SEIEM.

Socas, M.M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 10*, 9-42.

Socas, M.M. (2011). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. La Laguna: Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

Socas, M.M. (2012). El análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2012,* 1-22. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM: Valencia.

Socas, M.M. y Moreno, M.D. (2011). Sistemas numéricos y Sistemas de representación. Problemas de enseñanza y aprendizaje. XIII Evento Internacional "MATECOMPU 2011" y III Congreso Internacional "ALAMMI 2011", Universidad de Ciencias Pedagógicas "Juan Marinello", Matanzas (Cuba).

Socas, M.M., Hernández, M. y Afonso, M.C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII*, 101-119. ISSN: 1579-3141.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. y Bana, J. (2001). Preservice teachers´knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students´misconceptions of decimal numbers. Tesis Doctoral*. Department of Science and Mathematics Education The University of Melbourne, Australia.

Steinle, V. y Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. En J.Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4, 225-232. PME: Bergen.

Steinle, V., Stacey, K. y Chambers, D. (2006). *Teaching and Learning about decimals*. [CD]. University of Melbourne. Australia.

TIMSS-R (1999). Recuperable en: http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change. *Learning and Instruction, 14*, 453-467.

Vizmanos, J.R. y otros (2000). *1º Secundaria, Aritmos 2001 Matemáticas*, Madrid: SM.

Vourgias, Ch., Vourgia, S. y Elia, L. (2003). Representations and learning of mathematics definitions: application in decimal number. *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*. Athens.

Weame, D. (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: a one year follow-up. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 545-564.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 497-504. PME: Bergen.

ÍNDICE

ANEXO 1

ANEXO 1. CUESTIONARIOS

1.1 CUESTIONARIO (C1): NÚMEROS DECIMALES

1. Escribe:

a) Seis décimas 0,6

b) Tres centésimas ………..

c) Cuatro milésimas ………..

d) Treinta y siete milésimas ………..

e) Cuarenta centésimas ………...

2. Elige la respuesta correcta:

a) 735,6125 = 735 x 10000 + 6125

b) 735,6125 = 735 + 6/10000 + 1/1000 + 2/100 + 5/10

c) 735, 6125 = 735 + 6/10 + 1/100 + 2/1000 + 5/10000

3. Efectúa:

a) 0,1 · 5,13=

b) 3,17 : 0, 01 =

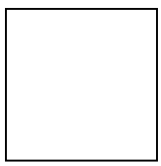
4. El número de habitantes de una ciudad es de 4727986. Si tomamos como unidad:

a) el millar, el número de habitantes se expresará ....

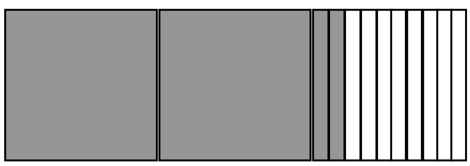
b) el millón, el número de habitantes se expresará ....

c) la decena de millón, el número de habitantes se expresará ....

5.



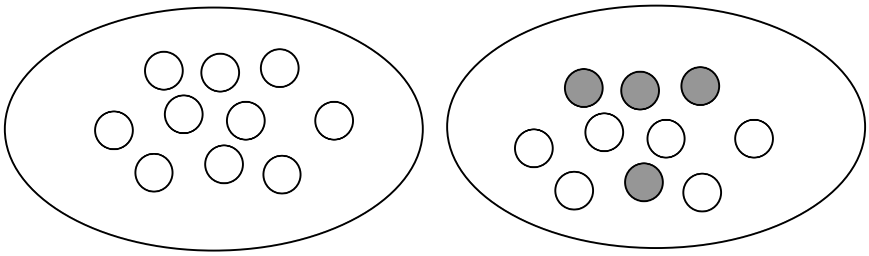
Ésta es la unidad



El área sombreada es: .... (En escritura decimal)

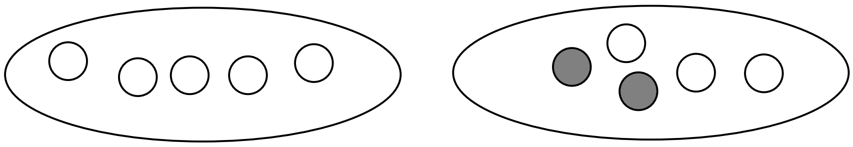
6. ¿Qué parte de la unidad representa el número de bolas negras en cada apartado?

a)



Ésta es la unidad ……………………..

b)



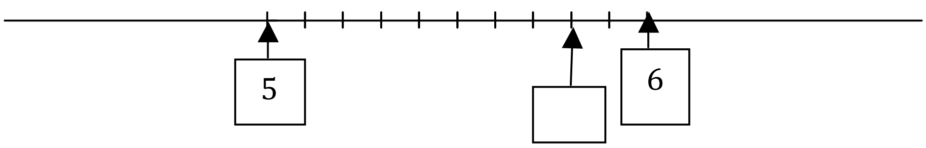
Ésta es la unidad ………………………….

7. ¿Cuál es el mayor de los números: 0,09; 0,385; 0,1814?
8. Señala el número más próximo a 0,18 entre los siguientes:

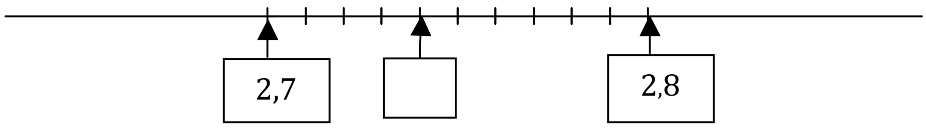
0,1 10 0,2 20 0,01 2

9. Escribe el número que corresponde en la casilla en blanco en cada apartado:

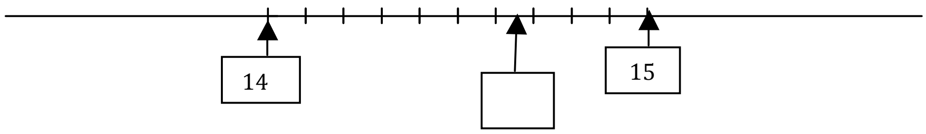
a)



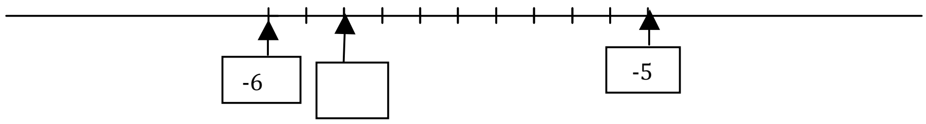
b)



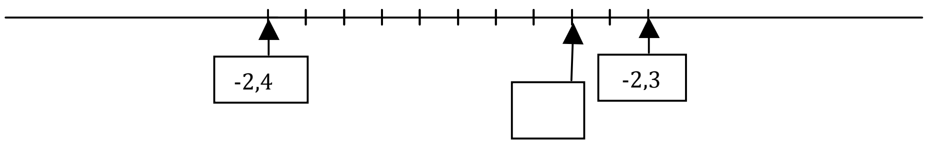
c)



d)



e)



10. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

-0,99 0,63 -1,5 1,4 -1,6 0,1524

……………………………………………………………………………………….

11. ¿Cuál de las siguientes ordenaciones de números es correcta?

a) $3/4 < 4/3 < 7/6$

b) $5/4 < -7/6 < 4/3$

c) $2/3 < 3/4 < 5/4$

12. Fabrica una cadena de 99 eslabones con 251 gramos de oro. ¿Cuánto pesará cada eslabón?

13. ¿Cuál es el número más próximo a 59:190?

0,003 0,03 0,3 3 30 300 300

14. ¿Cuáles de los siguientes números son iguales a 0,5?

a) 0,500

b) 0,49999...

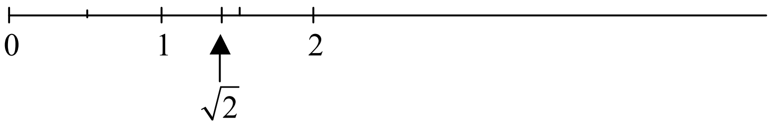
c) 1/2

d) 0,49

e) 5×10^{-2}

f) 50%

15. Observa el diagrama que se adjunta. ¿Cuál es el número que está más próximo a $\sqrt{2}$?



a) 1

b) 1,2

c) 1,5

d) 2

16. Dado el número 4,256197. Se pide:

a) Redondea a unidades...

b) Redondea a centésimas..

c) Redondea a milésimas..

d) Redondea a cienmilésimas...

17. Redondea a centésimas los siguientes números:

a) 13/17 …………………

b) 127/438 …………………
c) 11/3 …………………
d) 1/13 …………………

18. Obtén la expresión decimal de cada fracción:

a) 475/100 …………………………………………..

b) -208/1000 ………………………………………..

c) $2/10^5$ ……………………………………………..

d) $-13/10^2$ …………………………………………..

19. Relaciona la expresión decimal con la fracción correspondiente.

218,73	
0,075	
3,5	
0,056	
0,375	

a) 75/1000 b) 7/2 c) 21873/100 d) 3/8 e) 7/125

20. Dos chicos tienen la misma cantidad de dinero en el bolsillo. Uno piensa ahorrar 1/4 de su dinero; el otro, 5/20 del suyo. Marca la respuesta correcta:

a) 5/20 y 1/4 son iguales
b) 1/4 es más que 5/20
c) 5/20 es más que ¼

21. ¿Cuál de las siguientes fracciones le corresponde una expresión decimal?

a) 17/60
b) $21/(7 \cdot 5)^2$
c) 31/20
d) 3/28

22. Encuentra una fracción decimal equivalente a cada una de las siguientes:

a) 5/4 ....
b) 7/2 ....
c) 23/20 ....
d) 87/5 ....

23. ¿Cuál es la fracción generatriz de $3,5\overline{124}$?

a) 35124/9000
b) 35124/999
c) 35089/9990
d) 35089/999

24. Marca con un Sí los números decimales y explica brevemente tu respuesta:

-3,9		
0		
¼		
2		
$1+\sqrt{2}$		
10/5		
π		
-7/3		
0,666...		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\widehat{5}$		
1,73205008....		
$\pi-5$		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		
-1/3		
1,48		
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

25. Indica entre qué números enteros se encuentra cada uno de los siguientes números:

a) 2,7 …………………………..

b) -3,5 …………………………

c) -4,3 …………………………

d) 0,005 ……………………….

e) 0,7 ………………………….

f) 1,99 …………………………

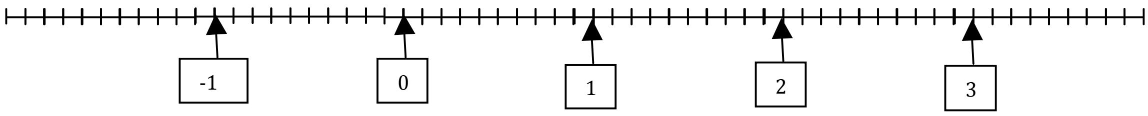
26. Intercala un decimal entre 1,23 y 1, 24.

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

28. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{2}$ b) 0,75 c) 0,333…. d) - $\sqrt{2}$ e) 11/4 f) 2,75 g) ¾

h) 2 $\sqrt{2}$



29. Rellena la tabla contestando SÍ o NO en cada cuadro, sin dejar ninguno en blanco.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062						
35.521						
3/5						
π						
-1/2						
0,63						
- $\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
$\sqrt{81}$						

30. Rodea en cada apartado la operación que dé resultado mayor.

a) 8 x 4 o 8 : 4

b) 8 x 0,4 o 8 : 0,4

c) 0,8 x 0,4 o 0,8 : 0,4

31. ¿La división de números decimales es siempre un número decimal?

32. Inventa una historia para esta suma: 6,4 + 2,3 = 8, 7.

33. Inventa una historia para esta división:1,5 : 0,6 = 2,5.

34. Realiza los siguientes cálculos:

a) 14,85 + 3,074 b) 200,01 – 32,007 c) 17,74 x 3,1416 d) 17, 74 : 3, 1416

35. Mediante fracciones efectúa:

a) 3,5 + 2,13 =

b) 2,7 – 3, 172 =

c) 7,23 x 3,6 =

d) 7,14 : 2,1 =

36. Un trozo de queso pesa 0,923 kg. Un kg cuesta 27, 50 euros. Halla el precio del queso. ¿Qué operación tienes que realizar?

a) 27,50 + 0,923 c) 27,50 : 0,923 d) 0,923 x 27,50 e) 27,50 – 0,923

37. Calcula los productos:

$0,\overline{73} \text{x} 0,\overline{4} =$

$0,\overline{362} \text{x} 0,\overline{84} =$

38. ¿Cuál es el resultado de la operación : 23,45 x 10^3 – 45000/10^3?

a) 23000

b) 23405

c) 23450

1.2 CUESTIONARIO (C2)

1. Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062						
35.521						
$\frac{3}{5}$						
2						
$-\frac{1}{2}$						
0,63						
- $\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
0						
1+$\sqrt{2}$						
π						
$\frac{10}{5}$						
$-\frac{7}{3}$						
0,666…						
$\left(\sqrt{2}\right)^2$						
$1{,}3\widehat{5}$						
1,73205008…						
π-5						
0,5						
3-$\sqrt{3}$						

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$						
$\dfrac{1}{3}$						

2. Marca con un Sí los números decimales y con un No los restantes, explica brevemente tus respuestas.

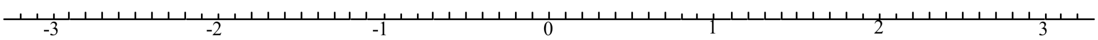
- 3,9		
0		
$\dfrac{1}{2}$		
2		
$1+\sqrt{2}$		
$\dfrac{10}{5}$		
π		
$-\dfrac{7}{3}$		
0,6666…		
$\left(\sqrt{2}\right)^2$		
-3		
$1,3\overline{5}$		
1,73205008…		

$\pi - 5$		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		
$-\frac{1}{3}$		
1,48		
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

3. Representa en la recta numérica y explica el procedimiento utilizado :

a) $\sqrt{2}$ b) 0,75 c) 0,333… d) $-2\sqrt{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 2,75 g) $\frac{3}{4}$

h) 2,2333…



ANEXO 2

ANEXO 2. TRANSCRIPCIONES DE ENTREVISTAS

Presentamos las transcripciones de las entrevistas audiograbadas, realizadas a algunos alumnos en las fases de diagnóstico y revisión. En estas entrevistas se profundiza en las respuestas de los estudiantes a las tres preguntas del cuestionario C2 (Anexo 1).

2.1 TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS EN LA FASE DE DIAGNÓSTICO

En este apartado mostramos las transcripciones de tres entrevistas audiograbadas de alumnos, codificados por [12], [17] y [20].

2.1.1 Transcripción de la entrevista del alumno A = [12]

Primera pregunta

E: ¿Necesitaste usar una calculadora para contestar a todo el cuestionario?

A: Sí, pero para pocas cosas.

E: Por ejemplo.

A: Sobre todo las de las raíces cuadradas para hallar el número entero, el número completo, o los quebrados, también.

E: ¿Recordabas los conjuntos numéricos que aparecían en la tabla?

A: Sí, pero vagamente.

E: ¿Un número puede pertenecer a varios conjuntos numéricos?

A: Sí.

E: Por ejemplo.

A: ¡Vamos a ver! A mí me enseñaron que, en forma de círculo, estaba el gran círculo, que eran los reales; luego, eran los naturales, dentro de los naturales estaban los enteros; luego los decimales y, así… Los irracionales estaban dentro de los números reales, pero no dentro de todos estos. Creo recordar.

E: ¿Qué criterios utilizaste para elegir (o excluir) un número como decimal?

A: Ahí sí que no tuve ningún criterio, sólo con la coma, fue el único criterio porque no me acordaba. Fue lo único que…

E: Vamos a analizar algunas respuestas, por ejemplo: 35.521, 2 y 0 no son decimales, ¿por qué?

A: Porque no tienen coma, pero, ahí, también yo pensaba que por ejemplo el 35.521 es 35.521,000, entonces me quedó la duda, pero lo puse que no porque…por ponerlo.

E: $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{10}{5}, -\frac{7}{3}\ y\ \frac{1}{3}$, son decimales. ¿Por qué?

A: Porque me dan una coma.

E: Explícate.

A: Por ejemplo, $\frac{3}{5}$, no es un número, por ejemplo, como 2 o 3, sino algo con coma.

E: 0,123456…, 0,666…, $1{,}3\bar{5}$ y 1,732… son decimales. ¿Por qué?

A: Por la misma razón, por la coma. Pero, no se por qué.

E: El 0,63 lo dejas en blanco. ¿Por qué?

A: Ahí, no sé que responderte. Se me habrá pasado.

E: ¿Sería decimal?

A: Sí, sería decimal.

E: $-\sqrt{7}$ es irracional. ¿Por qué?

A: ¡Ah! Ahí creo…Ahí la puse… Creo que me confundí, porque las raíces de menos algo, de menos cualquier número, siempre eran irracionales. Pero, creo que me confundí.

E: ¿En qué te confundiste?

A: En que creía que era la raíz de menos siete, acabo de ver que es menos la raíz de siete.

E: ¿Qué sería un irracional?

A: Los que no, por ejemplo, raíz de menos dos no es irracional.

E: ¿La raíz cuadrada de menos dos?

A: ¿Raíz cuadrada de menos dos? Sí, porque la raíz cúbica de -2, de un número entero, ¿no?...

E: Para ti no hay números racionales. ¿Por qué?

A: No sabía hacerlo.

E: ¿No tienes claro lo que es un número racional?

A: No.

E: $\frac{3}{5}$, es entero y natural. ¿Por qué?

A: Eso creo que lo hice con la calculadora. Pero, no sé que resultado me dio.

E: ¿Qué sería un número natural?

A: ¿Los naturales? Uno, dos, tres… hasta infinito.

E: ¿Y los enteros?

A: Desde $-\infty$ hasta ∞.

E: $1+\sqrt{2}$ y π no son decimales. ¿Por qué?

A:¡Me debió parecer! Pues no lo sé.

Segunda pregunta

En este caso, el alumno cambia la respuesta en algunos de los ítems comunes a las dos preguntas.

E: $1+\sqrt{2}$ ahora es decimal, ¿por qué?

A: Sí, porque $\sqrt{2}$ no da un número exacto, sino con decimales. Al sumarlo me da uno con algo y, por eso, puse que presentan números decimales.

E: ¿Qué significa que presentan números decimales?

A: Es por ejemplo la coma…

E: Aquí (0,666…) ¿Cuáles son los decimales?

A: 666…

E: π es decimal. ¿Por qué?

A: Porque es 3,14.

E: Comentas que $\frac{1}{2},\frac{10}{5},-\frac{7}{3},\frac{1}{3}\ y\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son decimales porque presentan decimales. Explícalo.

A: Lo mismo de antes. Al presentarme la coma con decimales, a lo mejor no estoy explicándome bien; bajo mi criterio, puse que eran números decimales al presentarme una coma, por ejemplo, entonces ese era mi criterio. Yo me acuerdo…Aquí utilicé una calculadora y, por ejemplo, aquí creo que me daban números con decimales.

Tercera pregunta

E: ¿Cómo representaste el 0,333…?

A: Aquí yo hice…Imaginemos que esto es de cero a uno: 0,1, 0,2, 0,3, 0,33. Así lo hice yo.

E: ¿2,2333…?

A: De 2 a 3, sería: 2,1, 2,2 y 2,23. Quizá está más de la mitad, pero ese sería aquí.

E: ¿Sería el mismo número el que representaste que 2,2333…?

A: Sí, ¿por qué no?

E: Explícame cómo representaste $\sqrt{2}$.

A: El resultado me dio 1,41 y, lo mismo que antes: de 1 a 2, sería la muestra esta…uno, dos, tres, cuatro y, luego, 1,41, puse el 41.

E: ¿$\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$?

A: Porque al hacerlo con la calculadora me daba 0,67, y de 0 a 1: uno, dos tres, cuatro, cinco, seis, 0,67.

E: ¿Conoces otra forma de representar los números: 0,333… y 2,2333…?

A: Creo que hay otra manera. Por ejemplo, los quebrados hay otra manera, pero, yo no me acuerdo.

Se le presentan otras respuestas, de las dos primeras preguntas, entre las que está la correcta. Se le pide su opinión.

E: 35.521 es decimal, para algunos. ¿Qué opinas?

A: ¡Vamos a ver! Yo es que no…Yo lo único que utilicé fueron recuerdos, ¿sabes? Conocimientos que tenía. Ningún criterio que fuera veraz.

E: Algunos alumnos utilizan los siguientes argumentos: Son decimales porque el número o el resultado tiene cifras decimales o lleva coma. Los enteros no son decimales. Los decimales no son un valor exacto. ¿Qué te parece, son correctos?

A: No, porque ahora mismo, reflexionando yo, creo que los enteros sí son decimales.

E: ¿Por qué?

A: A lo mejor no es correcto. Pero, a mí, por ejemplo, en el Bachillerato, al hacer aproximaciones, los números no eran totalmente exactos. Por ejemplo, 2 si se acercan por la derecha era 2,0000… y, por la izquierda, era 9,999….Creo.

E: Los enteros y las fracciones no son decimales.

A: Yo creo que sí son decimales.

E:¿Por qué?

A: Porque presentan coma y por los subconjuntos, también ¿no?

E: Explícame lo de los subconjuntos.

A: Por lo que te expliqué antes. ¿Me puede dejar un folio? (Realiza un diagrama). Así me lo enseñaron. Bajo este criterio yo fui…Algunas veces se me olvidaron un poco… A lo mejor estoy equivocado, pero…

E: Las expresiones que contienen raíces no son decimales.

A: Las raíces creo que son racionales, pero depende del resultado. Por ejemplo, $\sqrt{-2}$, creo que es irracional porque no da, no tiene resultado.

E: Sólo son decimales los enteros, las que tienen un número finito de cifras decimales y las fracciones decimales.

A: ¿Me lo puedes repetir?

E: (Se repite)

A: Yo creo que no.

E: ¿Los tres argumentos?

A: ¿Sólo son decimales los enteros? No, también pueden ser los naturales.

E: ¿Los que tienen un número finito de cifras decimales, después de la coma?

A: (Repite la pregunta) También.

E: ¿Las fracciones decimales?

A: También.

E: ¿Qué entiendes por fracción decimal?

A: Que el resultado me da decimal, quizá.

2.1.2 Transcripción de la entrevista del alumno A = [17]

Primera pregunta

E: ¿Necesitaste una calculadora para responder a todo el cuestionario?

A: No.

E: ¿Recordabas los conjuntos numéricos nombrados en la primera pregunta?

A: Había algunos que sí, los naturales y el entero sí lo recordaba, pero los demás se me habían prácticamente olvidado.

E: ¿Un número puede pertenecer a varios conjuntos numéricos?

A: Sí.

E: Pon un ejemplo

A: El uno es natural y también pertenece a los enteros.

E: ¿El número uno?

A: Sí, el número uno.

E: ¿Para contestar a la primera pregunta y, en la columna de los decimales, qué criterio utilizaste para elegir (o excluir) un número como decimal?
A: Cuando utilicé, el criterio aquí fue: miraba todos aquéllos que tuvieren coma y también los naturales o enteros que fueran exactos, yo pensaba que a lo mejor poniéndole coma y añadiéndole cero, pues ya podía decirse también que es un decimal. Así, más o menos, después los irracionales me parece que no los puse como decimales, ni los periódicos tampoco.

Se le pide concluir cuál es el criterio utilizado.

A: Me fijaba en que si tenía una coma y, entonces ya, si tenía coma sí era decimal, y no era periódico, un número finito de cifras era decimal y si los naturales y enteros, que no tenían coma, pensando que podían ser coma cero, seguí ese criterio, sería decimal.
E: $\frac{3}{5}, \frac{10}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}$ y $\frac{1}{3}$, son decimales para ti. ¿Por qué?
A: Porque al hacer la división en las fracciones pues daba un número decimal.
E: Los enteros son decimales, ¿por qué?
A: Pues, por lo mismo, porque le añado coma cero y entonces quedaría como decimal.
E: $-\sqrt{7}, 0{,}124567..., 3{,}14,\ 1+\sqrt{2},\ \pi,\ 0{,}666...,\ 1{,}3\bar{5},\ 1{,}7320...,\ \pi-5,\ 3-\sqrt{3}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, no son decimales. ¿Por qué?
A: Porque tienen infinitas cifras decimales, ya sean repetidas o sin repetir.
E: ¿Por qué 3,14 no es decimal?
A: Puede ser un fallo, una errata al escribirlo, yo pensaba que sí era decimal.

Segunda pregunta
E: Los señalas a todos como decimales; ¿por qué cambias de idea con respecto a la primera pregunta?
A: Estaba superliado ese día y, después de salir de la primera prueba, pensando y hablando con los compañeros, pues llegué a la conclusión de que no era ese criterio el que tenía que haber seguido para decir si eran decimales o no. Aquí intenté cambiar de criterio y parece ser que empeoré un poco las cosas.
E: ¿Qué criterio utilizaste?

A: Todo lo que tuviera coma le ponía que era decimal, además de que los números naturales y enteros, añadiéndole coma cero, pues también eran decimales.
E: Escribes que el cero es decimal porque es natural, y los naturales están dentro de los decimales. ¿Por qué?
A: Por la misma razón que le he dicho de que ponía un número natural coma cero y entonces ya eso, según el criterio mío, pues era decimal.
E: Ídem para el -3: -3 es decimal porque es entero, y los enteros son un subconjunto de los decimales. ¿Por qué?
A: Sí… por el criterio coma cero.
E: Pero ahora te parece que eso está mal, ¿por qué?
A: Ahora ya en este momento pues sí, porque al salir de allí otra vez volví a consultar con compañeros, esta vez consulté más porque me parecía que el arreglo que había hecho en el segundo ejercicio pues no había sido mejor, sino a peor, más bien, porque salí dudoso porque digo que no pueden haber sido todos sí decimales y no encontrarme ninguno no decimal, entonces, hablando con ellos, me acordé un poco mejor de cómo eran decimales y que no todos eran decimales.
E: ¿Para ti, las expresiones con infinitas cifras decimales periódicas o no, no son decimales?
A: Eso depende, porque en el primer ejercicio había puesto que no lo eran, pero aquí, ya, pongo que sí, porque como veo la coma y, a partir de ahí, ya pongo que son todos decimales.
E: ¿-3,9, 0,5, y 1,48 son decimales por la misma razón?
A: Por lo mismo.

Tercera pregunta

E: A la hora de representar 2,2333… representas a 2,23
A: Sí, bueno, represento 2,23 porque ya, a partir de 333…, pues ya la distancia, en esta recta, es tan pequeña que es casi despreciable.
E. ¿Es lo mismo?
A: ¡Hombre! lo mismo no es, pero al dibujarlo aquí, a esta escala, pues prácticamente es lo mismo dibujar 2,23 que 2,2333…
E: ¿No conoces otra manera de representar 2,233…?

A: Pues…me parece que había una forma, pero yo no la recuerdo. Lo que sí, pensando un poco, cuando estaba haciendo el ejercicio también me acordé de que a lo mejor podía pasarlo a forma de fracción. Como estaba en la duda lo puse así.
E: En el apartado c) 0,333…, observa cómo lo representaste: dividiendo la unidad en tres partes iguales y coges una, ¿por qué?
A: Sí, porque 0,3 viene siendo 1/3, aquí si hice lo que estaba pensando hacer aquí, pero aquí lo vi claro y dije esto es 1/3, pues dividí esto en tres. Aquí como es un número más difícil…
E: ¿0,333…= 1/3?
A: Sí, yo creo que sí es 1/3.
E: ¿Y eso mismo no pudiste verlo en el apartado h?
A:…Éste es que es el típico número que 0,3, el 0,6, pues siempre se te queda, pero ese lo vi así, no supe que fracción daría.

Se le presentan otras respuestas, algunas dadas por sus compañeros, donde está la correcta y se pide su opinión:

E: Para ti, los enteros son decimales, sin embargo, otros dicen que no. ¿Qué te parece?
A: ¡Hombre!, ahora mismo ya me parece que esos tendrían razón, porque si da exacto pues no entrarían entre los decimales, ¿no?. Es que todavía no estoy seguro si esto sería decimal o no, por eso mismo de coma cero si eso influiría a la hora de decir si es decimal o no.
E: $\frac{1}{3}$ y $-\frac{7}{3}$ sí son decimales para ti, pero otros piensan que no. ¿Qué opinas?
A: Opino que ellos, al no ver aquí una coma y verlo en fracción, pues piensan que no. Yo lo que hice para decir sí es hacer la división mentalmente y eso como no da exacto. Pues, aunque incluso, siguiendo el criterio éste, pues si diera exacto poniendo que fuera una fracción exacta y da un número natural o número entero, siguiendo el criterio que había dicho yo hubiera puesto que sí, pues como es coma cero.
E: π lo eliges como decimal y, otros dicen que no lo es. ¿Qué te parece?
A: Siguiendo yo el criterio que puse en el primer ejercicio, pues ese tendría razón, porque es un irracional y los irracionales no están dentro de los decimales.

El alumno reconoce, al ser preguntado por cada uno, que también $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{3}$, $\pi-5$, 0,123456.... y1,7320500.... son números irracionales y, por tanto, no decimales.

E: Los que llevan coma o tienen cifras decimales, son decimales. Los enteros no son decimales. Los decimales son los que coinciden con un valor no exacto.

A: Bastante parecido a estas dos, porque diferenciando la mía, pues ellos dicen que los enteros no son decimales, pero aquí me parece que no llevarían razón, aunque yo aquí tampoco la llevaría, pero los irracionales no entrarían dentro de los decimales.

E: Los enteros y las fracciones no son decimales.

A: Los enteros, ahí tengo la duda, las fracciones, algunas, las que dan inexactas, de seguro, y otras estoy en la duda de que si los enteros entrarían dentro de los decimales o no.

E: Los enteros y las expresiones que contienen raíces, no son decimales.

A: Las raíces si son irracionales, pues no.

E: ¿$\left(\sqrt{2}\right)^2$?

A: No lo consideré una raíz porque con el cuadrado, pues la raíz se anula y queda 2, se queda un número natural.

E: Sólo son decimales los enteros, las que tienen un número finito de cifras decimales y las fracciones decimales.

A: Ahora mismo para mí sería como la más acertada.

E: ¿Por qué?

A: Porque con la duda ésta que yo tengo, de qué si los enteros pertenecen o no, y ésta está diciendo que sí, y el número finito de cifras también estoy de acuerdo, y las fracciones decimales, me imagino que se refiere a las que darían inexacta, la que daría un número no entero, ¿no?

Se señalan en la tabla fracciones decimales y no decimales, respectivamente.

E: $\frac{1}{2}$, sí es decimal y, $-\frac{1}{3}$ no.

A: Quiero decir que no da un número entero, sino 0,5 y, entonces, pues ahí, sí sería decimal.

E: ¿Y eso sería una fracción decimal?

A: Yo creo que sí.

2.1.3 Transcripción de la entrevista del alumno A = [20]

Primera pregunta

E: ¿Usaste calculadora para responder a todo el cuestionario?

A: No

E: ¿Recordabas los conjuntos numéricos nombrados en la pregunta?

A: Sí, más o menos casi todos los recordaba o creía entender lo que significaba cada uno.

E: ¿Un número puede pertenecer a varios conjuntos numéricos?

A: Sí

E: ¿Por ejemplo?

A: El -2,062 puse que era natural, decimal y real.

E: Para contestar a la primera pregunta, en la columna de los decimales, ¿qué criterio aplicaste para elegir (o excluir) un número como decimal?

A: Si tenía coma directamente. Si tenía parte entera y parte decimal.

E: 3/5, -1/2, 10/5, -7/3 y 1/3 ¿los clasificaste como no decimales?

A: Los puse como no decimal, aunque su resultado era decimal. Sabía que su resultado era decimal, pero al no ser un número decimal 3/5, no sabía si ponerlo decimal.

E: ¿Cuándo miras 3/5 y lo comparas, por ejemplo, con 0,63 en qué te estás fijando?

A: En si tienen parte entera los números, si tienen parte entera y decimal los números. El 0,63 tiene parte entera, que es cero, y parte decimal que es 0,63. Sin embargo, 3/5 no tiene parte decimal, como resultado de la operación sí.

E: ¿Y no sería los mismo?

A: Sí, el resultado es lo mismo, al no saber que tenía que hacer la operación no sabía si dejarlo como número no decimal, al no salir como número decimal.

E: Después pones que 35521 y 0 no son decimales ¿por qué?

A: ¿35521? no es decimal, no tiene parte decimal.

E: $-\sqrt{7}$, $1+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{3}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ no son decimales, ¿por qué?

A: Por el mismo criterio, a lo mejor el resultado sí era decimal, pero al no ser el número decimal no lo puse.

E: π y π-5 no pertenecen a ningún conjunto numérico de la tabla, ¿por qué?

A: Pues… la verdad no sabía que poner, porque sé que es 3,14 y tal, pero π como número no lo entendía bien y puse que no era nada, pero porque si me hubieses puesto 3,14 te hubiese puesto las cosas diferentes.

E: ¿Qué entendías por número natural?

A: […] Los números, estoy dudando, vale, los números naturales son un número fijo. Los que tienen infinitos, éste, los periódicos mixtos no los puse natural porque no es un número fijo, exacto.

Se recapitula cuáles fueron excluidos como naturales y se concluye:

A: O sea, que tienen infinitos términos.

Segunda pregunta

E: ¿Aplicaste el mismo criterio en esta pregunta que en la primera para elegir un número como decimal?

A: Sí

Tercera pregunta

E: Realizas operaciones para representar algunos números, ¿por qué?

A: Por ejemplo, para representar $\sqrt{2}$ no sabía como representarla sin saber el número que poner en la recta numérica $\sqrt{2}$, a no ser que se ponga $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ como números en vez de 1, 2, 3, qué no sé si se puede hacer.

E: Lo mismo con los demás, ¿no?

A: Sí, los que eran operaciones hice el cálculo mental, intenté hacerlo para, más o menos intentar, con mayor exactitud, colocarlos en la tabla.

E: Explícame cómo representaste 0,333…

A: Dividí la tabla en 10 y cada parte la dividí en 3, que es $0,\overline{3}$, entonces al ser…, dividí cada cuadro en tres e intenté marcar…, intenté dividir cada cuadro de los 10 en tres partes iguales.

E: ¿Cómo representaste $\frac{2}{3}$?

A: Calculé el valor de $\frac{2}{3}$, que es también 0,3 y, al ser igual que el de arriba, hice lo mismo que el de arriba.
E: ¿Cómo representaste 2,2333…?
A: Lo dividí entre 10, igual que el 0,3, sí, hice lo mismo. Al ser 2,2333… puse dos, dos…la unidad es metro, por ejemplo, puse 2 dm y 3cm. Cada parte la dividí entre tres, dentro de las diez.
E: ¿Conoces otros procedimientos para representar 2,2333… y $\frac{2}{3}$, respectivamente?
A: No.

Se le presenta otras respuestas, algunas dadas por sus compañeros, donde está la correcta y se pide su opinión:

E: Para ti 35521, 2 y 0 no eran decimales. Fíjate como algunos, por ejemplo el 35521, sí consideran que son decimales ¿qué opinas de esa respuesta?
A: No lo sé, la verdad no sé que criterio usaron ellos para diferenciar el número decimal del no decimal. Yo pensaba que el número decimal era el que tenía parte entera y parte decimal, por eso escogí ese criterio y puse que no eran decimales… aunque, tiene parte decimal, entera, que es cero, por eso no los puse.
E: 0,12345… pones que sí es decimal y otros dicen que no, ¿qué opinas?
A: No lo sé, porque yo sí lo veo decimal porque tiene coma.
E: ¿Estaría mal o bien?
A: Yo creo que estaría mal la respuesta de que no es decimal.
E: 3/5, para ti, no es decimal y otros consideran que sí, ¿qué opinas?
A: Eso puede ser que usaron el criterio de hacer la operación para después decir si es un número decimal o no, sí.
E: Otros distinguen entre las fracciones y eligen, por ejemplo, 3/5 como decimal y 1/3 como no decimal, ¿qué opinas?
A: No lo sé porque no veo la diferencia (se ríe)
E: Entonces ¿estaría mal?
A: Sí, para mí son iguales.

Se le van presentando distintos argumentos, algunos dados por sus compañeros, para clasificar un número como decimal. Están también presentes sus argumentos y los que podemos considerar como correctos.

E: …Algunos alumnos consideran que los enteros son un subconjunto de los decimales, ¿estaría bien?
A: Sí.
E: ¿Por qué los enteros son un subconjunto de los decimales?
A: Porque, por ejemplo 2, para llegar a 2 ha tenido números decimales, tiene un subconjunto de decimales, aunque sea cero tiene un subconjunto de decimales.
Se le pide que explique lo que ha querido decir y contesta:
A: No sé si lo entendí bien.
E: Que los enteros son un subconjunto de los decimales.
A: ¿A qué se refiere cuando dice que es un subconjunto de los decimales?
E: A que los enteros son decimales.
A: Si lo ves como que su parte decimal es cero, sí son decimales, parte decimal aunque sea cero.
E: Son decimales porque el número o el resultado tiene cifras decimales o lleva coma. Los enteros no son decimales. No es un valor exacto.
A: No estoy de acuerdo porque, por ejemplo éste (-2,062) es decimal y es un valor exacto.
E: ¿Cómo defines un valor exacto?
A: …como el que no tiene infinitos términos.
E: Los enteros y las fracciones no son decimales.
A: Yo usé, por ejemplo más o menos esa diferencia… y las fracciones no las usé porque no; por eso, por el criterio de que a lo mejor su resultado sí, pero el número en sí, el 3/5, no.
E: Sólo son decimales los enteros, los que tienen un número finito de cifras decimales y las fracciones decimales.
A: No estoy de acuerdo porque, por ejemplo, el 0,666… yo creo que es decimal y tiene infinitos términos.
E: ¿Y las fracciones decimales?
A: ¿Por ejemplo 1/3? o ¿Por ejemplo 0,6 partido de…?
E: Depende de lo que será una fracción decimal.

A: Es que yo creo que aquí no hay ninguna fracción decimal. Fracción decimal yo lo entendería como que uno de los dos términos, el numerador o el denominador tenga un número decimal, tenga parte entera y parte decimal.

2.2 TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS EN LA FASE DE REVISIÓN

En este apartado mostramos las transcripciones de cuatro entrevistas audiograbadas de alumnos, codificados por [10], [17], [21] y [27].

2.2.1 Transcripción de la entrevista del alumno A = [10]

Primera pregunta

E: Has elegido como naturales 0, 2, $\frac{10}{5}$ y 35.521. ¿Por qué?

A: Porque son números que representan una cantidad exacta, no tienen decimales, y que son positivos.

E: (Se recapitulan los criterios para elegir un número como natural).

A: O que en su fracción no pueden tener un múltiplo de 10. No, eso son los decimales. Sí, los naturales son esos.

E: Como enteros señalas 0, 2, $\frac{10}{5}$ y 35.521. ¿Para elegir a $\frac{10}{5}$ como entero y natural dividiste 10 entre 5?

A: Sí.

E: Eliges a 0,5, 3,14, 0,63 y -2,062 como decimales ¿Por qué?

A: Porque no representan cantidades exactas, tienen una coma.

E: 0,666…, 0,1245567, 1,73205… y $1,3\overline{5}$, son decimales. ¿Por qué?

A: Porque tienen la coma, pero no lo son.

E: ¿Qué son?

A: Son irracionales.

E: ¿Todos?

A: No, los periódicos infinitos.

E: ¿0,123456…. y 1,73205…?

A: Decimales.

E: $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\ y\ \frac{10}{5}$ son decimales. ¿Por qué?

A: Hice la división y daba un número con coma.

E: ¿En $-\frac{7}{3}$ *y* $\frac{1}{3}$ hiciste la división?

A: ¿Puedo hacerla aquí?

E: Sí

A: (Usa la calculadora para el $-\frac{7}{3}$). Me da periódico.

E: ¿Incluyes al $-\frac{7}{3}$ como decimal?

A: No.

E: ¿Y el $\frac{1}{3}$?

A: ¿$\frac{1}{3}$? (Usa la calculadora).

E: ¿Si tiene infinitas cifras decimales y son periódicas, no son decimales?

A: No.

E: ¿Cuáles son los irracionales?

A: Eso fue de memoria. Recordaba que las raíces con un signo negativo delante son irracionales.

E: ¿Por qué los enteros no son decimales?

A: Porque representan una cifra exacta.

E: ¿Si son exactos, entonces no son decimales?

A: Sí.

E: ¿En $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$ *y* $\frac{10}{5}$ operaste y daban decimales?

A: No, no daban decimales, pero lo que usted explicó, si multiplicabas y te daba un múltiplo de la unidad seguida de ceros (Pone un ejemplo con el $\frac{3}{5}$).

Véase anotaciones.

E: ¿Y con $\frac{10}{5}$?

A: Igual.

E: Si divides 10 entre 5, se obtiene 2.

A: Me da 2, no es un número decimal, pero al hacer la fracción, sí.

E: ¿La fracción, sí es decimal?

A: Al hacer la división, sí, pero usted puso la fracción, entonces lo que yo tengo que mirar es la fracción.
Véase anotaciones.

E: ¿$\frac{10}{5} = 2$?

A: Sí, es igual.

Segunda pregunta

E: Escribes que el cero no es decimal porque representa una cantidad exacta. ¿Qué significa que representa una cantidad exacta?
A: Que no tiene coma. No se puede, no está dividido por nada.
E: ¿Te refieres a que no es una fracción?
A: No, bueno, no es que no esté dividido, es que es una cantidad exacta, no tiene partes más pequeñas.
E: ¿Y el 2?
A: Igual, es una cantidad exacta.
E: Vuelve a explicar lo que es una cantidad exacta.
A: Vale, según lo que nos han explicado, porque, por ejemplo, 0,5 está el cero y el uno, para mí, el cero y el uno son las cantidades exactas. No sé si está bien la respuesta que se hace, pero…
E: ¿Y el 2 no estaría entre el uno y el tres?
A: Sí, no está bien dicho eso de lo de la cantidad exacta, pero es verdad.

E: ¿Puedes leer lo que has puesto en $\frac{10}{5}$?

A: (Lee lo que escribió en $\frac{10}{5}$). La fracción es decimal.

E: ¿Ves distinto el 2 que la fracción $\frac{10}{5}$?

A: Sé que es lo mismo, pero, según lo que me han explicado, hay que mirar sólo el 2.

E: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ *y* $2 = \frac{10}{5}$ y $\frac{10}{5}$ es decimal. ¿Es $\left(\sqrt{2}\right)^2$ decimal?

A: No.
E: ¿Por qué?
A: No sale de una fracción, no es el resultado de una fracción.

E: ¿Tiene que ser el resultado de una fracción para que sea un número decimal?

A: No, no que sea el resultado, sino la fracción en sí.

E: (Se lee lo que la alumna tiene puesto en el -3). ¿Se puede poner en forma de fracción?

A: No, bueno, se puede dividir…

E: ¿$-\frac{30}{10}$, qué sería?

A: Lo mismo que -3.

E: ¿Se puede poner en forma de fracción?

A: Sí, pero no es lo mismo.

E: ¿No es decimal?

A: No, aunque sé que se puede poner en forma de fracción, pero no es una fracción.

E: π no es decimal porque no es exacto, es decir, tiene infinitas cifras decimales. Explica la respuesta.

A: Sí, no es periódico, sería irracional.

E: ¿Y $\pi - 5$?

A: Si a un número irracional le quitamos un número entero, sigue siendo irracional. Las infinitas cifras siguen estando.

E: (Se lee lo que la alumna escribe). ¿Para ti, si tienen infinitas cifras decimales que no forman periodo, son decimales?

A: Sí.

E: 1,73205008… es decimal porque tiene cifras después de la coma, pero el 0,6666… ¿no tiene infinitas cifras decimales?

A: Será porque éstas son iguales, yo puse que no.

E: ¿$3-\sqrt{3}$ es irracional?

A: Porque $-\sqrt{3}$ es irracional.

E: ¿Y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

A: Ese está mal, sería irracional.

Tercera pregunta

E: Explica cómo representas a $\frac{2}{3}$.

A: (Lee lo que escribió)

E: ¿Sabes representarlo sin hacer la división, con notación fraccionaria?

A: No.

E: ¿Y 0,333…?

A: Igual, todo eso lo puse aproximado.

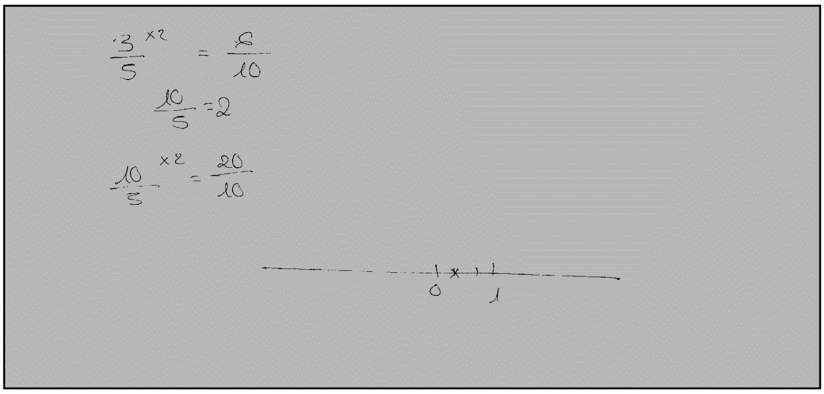
E: ¿No lo sabrías hacer si lo conviertes en fracción?

A: El problema es que no sé representarlo en forma de fracción.

E: Es $\frac{1}{3}$. ¿Sabes representarlo?

A: (El alumno la representa).

Véase anotaciones.



Anotaciones

2.2.2 Transcripción de la entrevista del alumno A = [17]

Primera pregunta

E: ¿Cuáles son los naturales?

A: Los naturales son aquellos números que sirven como para contar objetos, serían 0, 1, 2 … serían números, por decirlo así, completos, que no están partidos como si fuera una fracción, sino 1, por ejemplo, es un número completo, 2 y, entonces hasta el infinito, sería el conjunto de los naturales.

E: ¿Cuáles son los enteros?

A: Los enteros serían, este conjunto, los naturales, más los números negativos, es decir, es como mirar un espejo, es ir hacia atrás y poniendo -1, -2, -3, y, así, hasta el menos infinito.

E: ¿Cuáles son los decimales?

A: Los decimales serían los que llevan coma, pero que pudieran transformarse en fracciones con 10 en denominador o la unidad seguida de ceros o 2 o 5, que serían los divisores de 10.

E: ¿Los racionales?

A: Los racionales serían cuando tenemos un número con una coma e infinitos números decimales que se repiten formando ciclo, ya sea sólo un número o varios que se repiten formando siempre la misma…

E: ¿-2,062 es racional?

A: En este caso también, porque los racionales engloban a los naturales, a los enteros, a los decimales y, además, se le añade el grupo éste de los números que tienen periodo.

E: ¿Y las fracciones $-\frac{7}{3}\ y\ \frac{1}{3}$?

A: Sí, eso es que al realizar la división quedaría un número con periodo.

E: ¿Y los irracionales?

A: Los irracionales serían todos los que no están dentro del conjunto de los racionales, que serían aquellos números con infinitas cifras decimales que no se repiten, bueno, se repiten, pero no de forma cíclica.

E: Por ejemplo, ¿$3-\sqrt{3}$?

A: Sí, ese sería irracional porque $\sqrt{3}$ sería irracional, pero, por ejemplo, si tuviéramos una operación en la que hubieran raíces, que son irracionales, pero al realizar esa operación pues da un número natural o número entero y sería, dependiendo del resultado de la operación a lo mejor es o no irracional.

E: ¿Los reales?

A: Los reales serían el conjunto de los números racionales y los irracionales. Engloba los dos y, como los racionales, engloban a los anteriores: decimales, enteros y naturales, pues serían todos reales, en este caso.

Segunda pregunta

E: 0,666… comentas que no es decimal porque no se puede expresar por una fracción cuyo denominador sea 10. ¿El denominador de una fracción decimal es siempre 10?

A: Cuando dije diez querría referirme a la unidad seguida de ceros, 10, 100, 1000…. O también, podrían ser los divisores de 10 (2, 5), potencias de base 2 o de base 5 o multiplicaciones entre ellas.

Tercera pregunta

E: ¿Cómo representaste a 2,2333…?

A: Lo que hice fue pasar el número 2,23333… lo pasé a una fracción; para ello, pues en aquel momento, lo hice un poco calculando así, mentalmente, no seguí el proceso de siempre, sino que me puse a dividir. Primero cogí, transformé, rodé la coma, luego, paso a paso, así lo fui haciendo todo y, al final, pues llegué aquí. Fue después de un montón de cálculos porque no me acordaba de la fórmula para transformarlo…

E: ¿Del procedimiento para hallar la fracción generatriz?

A: Sí, más o menos fui haciendo unos cálculos y fui mirando si coincidía y, si veía que algo fallaba pues volvía otra vez, hasta que di con la fracción que es.

E: ¿Por qué consideras que -2,062 es un entero?

A: ¡Hombre! me imagino que sí es un fallo allí, de momento, no lo vería bien, porque está claro que si tiene coma, no es un número que no tiene una parte entera exacta. Pues, sería decimal, racional y real.

E: ¿A qué te refieres con que no tiene una parte entera exacta?

A: Sí, vamos, que tiene una parte decimal, que le falta para completar hasta llegar a 3 y no se queda en 2, sino que se queda ahí en medio del -2 y -3.

E: ¿El entero sería -3?

A: El entero sería el -3 o el -2.

2.2.3 Transcripción de la entrevista del alumno A = [21]

Primera pregunta

E: ¿Cuáles son los naturales?

A: Naturales, en realidad tanto positivos como negativos. A no ser que el resultado, por ejemplo de una fracción sea cero con …, o sea, decimal, con décimas. El primero -2,062 puse que es natural, pero si ahora mismo tengo que hacer el cuestionario lo cambiaría porque para mi los números naturales son prácticamente todos a no ser que sean fracciones.

E.: ¿Las fracciones no son para ti naturales?

A: Naturales no, por ejemplo -1 partido de 2 puse que no es natural, o una raíz cuadrada o, por ejemplo, 10/5, que también he puesto que no, también $\left(\sqrt{2}\right)^2$ que puse no.

E: ¿Por qué elegiste esos números como naturales?

A: Una, al principio cuando empecé a hacer la parte de la columna de los naturales empecé por los que creía que no eran naturales, si veía alguna raíz cuadrada ponía que no y, el resto, muchos en los que dudaba ponía, bajo la duda, que sí eran naturales y, en los que veía más o menos claro ponía que sí natural. Ya el tema de las fracciones tenía claro que no lo eran.

E: ¿Por qué las fracciones no son naturales?

A: Pues, en el momento ese no sabía, en realidad, que si a lo mejor sacaba el cálculo de las fracciones y me daba un número, por ejemplo, una fracción un 1 o 2, pues, en ese caso, a lo mejor, hubiera puesto que si es natural, pero si no, no.

E: Por ejemplo ¿10/5?

A: Ahí, en realidad, no hice la fracción y, por tanto, puse que no lo era.

E: ¿Y si la haces ahora?

A: 10/5 sí lo pondría como natural.

E: ¿Cuáles son los enteros? Se relatan los elegidos.

A: No puse ninguno negativo, fracciones, los que contienen raíces, π y π-5.

E: ¿Por qué excluyes el cero?

A: El cero, puse que no, sinceramente, ahora mismo, no sé porque puse aquí un no. Lo hubiera dejado igual que el 0,63 (en blanco).

Se recapitulan los elegidos como enteros.

E: Las fracciones, los que contienen raíces, π y π-5 los eliges como irracionales ¿por qué?

A: En realidad, ya esto como irracional o racional no me guié por un criterio muy convincente, por así decirlo.

El alumno enumera los números que ha elegido como irracionales y concluye:

A: El irracional sería justo lo contrario al tema de los números naturales y enteros. Creí, en su momento, que eran todos aquellos números que fueran fracciones o raíces cuadradas. Creo que no puse ningún no en fracciones o raíces cuadradas.

Se le pregunta por el criterio utilizado para elegir (o excluir) un número como decimal y el alumno responde:

A: En el primer cuestionario y en este último me basé en lo de las comas. No hice el cálculo en las fracciones.

E: ¿Por qué no hiciste el cálculo?

A: En algunos creo que sí lo hice, pero pensé que sólo se me estaba pidiendo eso, la fracción nada más, lo que estaba aquí figurado, o sea, no calculé el resultado para saber si el resultado era natural o qué, sino lo que figuraba si era decimal o no.

E: Por ejemplo, 3/5, que tú dices que no es decimal y que te fijaste en lo que figuraba ahí ¿cómo estás viendo a 3/5? ¿Cómo?

A: ¿Si es decimal o no?

E: Sí

A: Ahora mismo, yo diría que no sería decimal.

E: ¿Por qué no es decimal?

A: Porque es una fracción

E: ¿Por qué tú separas las fracciones…?

El alumno se anticipa.

A: Yo separo las fracciones, yo veo una fracción y veo el resultado de una fracción para mí son cosas distintas, aunque en sí el resultado va a provenir de esa fracción, pero visto así, yo lo veo diferente, entonces tendría que hacer el resultado para saber si es decimal, el resultado de 3 partido de 5 y, en este caso, no es decimal porque me fijo sólo en la fracción.

E: 3/5 da 0,6.

A: 0,6, el 0,6 sí lo pondría como decimal.

E: ¿Lo verías como que el resultado es decimal?

A: Como el resultado de la fracción, exacto.

E: Pero, ¿si está sola la fracción?

A: Si está sola la fracción lo pondría tal cual lo puse aquí, que no sería decimal.

E: Pero, ¿ahora ves que las dos cosas son lo mismo?

A: Sí, sí, ahora sí, ahora sí porque, y en cualquier, por ejemplo, en una raíz cuadrada, el resultado de una raíz me da 0,5 0 0,6 pondría que sería decimal, porque ya asimilo que el resultado proviene de la fracción o de la raíz cuadrada.
E: ¿Por qué el 2 y el 0 no son decimales? ¿Por qué 35521 sí lo es?
A: 35521, iba a poner que no era decimal puse el sí y, sinceramente no sé porque puse el sí, porque ahora mismo pondría que no era decimal si estuviera haciendo el cuestionario; ya, después el 2 puse que no y, bueno, sigo diciendo que para mí en ese momento no es decimal al no tener el tema de las comas, ¿no?, un número, por ejemplo -2,062, al tener coma, pues sí puse que es decimal. El único ilógico aquí es el 35521, ya que lo veo igual al 2 y al 0.
E: ¿No sabes por qué?
A: ¿Por qué al principio iba a poner el no y después puse sí? Pues no, ahora mismo no le podría decir el porqué… También, otra de las cosas es que yo rellené la tabla y después no la revisé. Fue un error mío pues, seguramente, si la hubiese revisado, hubiera hecho algunos cambios.
E: ¿Tú ves diferencias entre $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$, habíamos llegado a la conclusión de que cada uno da 2?
A: Al dar 2 cada uno, yo no lo vería diferente… porque viene, aunque ahora mismo no sabría que decirte, porque proviene de distintos cálculos, o sea, aquí se está dividiendo y aquí está esto elevado al cuadrado, elevado a 2, entonces no provienen del mismo sitio, por así decirlo, aunque den el mismo resultado.
E: ¿ $3\text{-}\sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …, todas estas expresiones las ves iguales? No iguales en cuanto al mismo valor, sino como expresiones.
A: Sí, la única diferencia es que hay un signo negativo delante de la raíz y aquí positivo y además está dividido por 2.
E: ¿Si realizas la operación $3\text{-}\sqrt{3}$ sería igual el resultado a $3\text{-}\sqrt{3}$?
A: …no sería lo mismo, como en el caso de las fracciones.

Segunda pregunta:

Se le muestra al alumno qué números ha elegido como decimales (y no decimales) y sus argumentos para realizar la elección (o exclusión). Se le pregunta si ha utilizado el mismo criterio que en la pregunta primera del cuestionario para clasificar los números y responde:

A: Sí, básicamente sí, en realidad todos los números que yo vi con comas los puse decimales y, después, explicando, por ejemplo, -3,9 la explicación que di es que aún siendo negativo posee decimales.
E: ¿Por qué pones "aún siendo negativo"?
A: Porque a lo mejor puede dar a error, bueno, no sé, que al ser negativo, que sólo los decimales son positivos. Aclaro que aunque sea negativo será decimal el que tiene coma y decimales.
E: En el cero pones que no y que "no es nada"…
El alumno se anticipa.
A: El cero no lo veo yo como, de momento, no lo veía como un número decimal, lo veía como un número, por así decirlo, neutro que…en realidad .yo no lo veía como decimal.
E: ¿Por qué pones que "no es nada"?
A: ¿El cero que valor tiene? Para mí el valor del cero, cero por algo no es nada, por eso pongo como que no tiene ningún valor.
E: ¿Por qué dices que 1/2 no es decimal por ser una fracción?
A: Ya, después, si hubiera calculado la fracción, pues hubiera visto que…Al dar decimales hubiera puesto que, al provenir de una fracción, sí hubiera puesto que sí es un número decimal. […] Aquí empiezo a dudar si el resultado…, claro, no calculé el resultado de ninguna fracción y de ahí, después, también deduje que si el resultado de la fracción tuviera un número coma y una serie de números sí hubiera sido decimal.
E: En el caso de π, pones que no es decimal porque no posee decimales ¿si te doy π igual a 3,1415…, ¿sería decimal?
A: Sí es decimal, al tener 3,14 y una siguiente serie de números, pues sí lo hubiera puesto como decimal.
E: ¿El mismo razonamiento hiciste en π - 5?
A: Sí, aunque π - 5 también hubiera hecho el cálculo ese, a lo mejor y, aún así, aunque me habría dado decimales… El caso es que, por generalizar, más o menos, por ejemplo, $3-\sqrt{3}$, si hubiera hecho el cálculo éste, igual que hubiera hecho el cálculo en una fracción, me hubiera dado decimales hubiera puesto, sin duda alguna, que es decimal, porque el resultado proviene de ese cálculo.

E: ¿Y si lo haces con la calculadora?

El alumno calcula.

A: En ese caso sí diría que es decimal, por ejemplo.

E: ¿La calculadora te ofrece un valor aproximado, no?

A: Sí.

E: ¿Si tuviera infinitas cifras decimales que no forman periodo, será decimal?

A: Sí, yo creo que sí seguiría siendo decimal.

E: ¿Porque te fijas en la coma?

A: Sí, en lo que me centro, prácticamente, es que los números que tuvieran coma eran decimales.

Tercera pregunta

Se le pide al alumno que explique el procedimiento utilizado para representar 2,75.

A: Se divide la recta desde +2 hasta +3 y en orden con la misma distancia tanto física como numérica.

E: ¿Qué significa "tanto física como numérica"?

A: …que tuviera una distancia proporcionada, por ejemplo, de +2 a 2,15, físicamente, que no hubiera una distancia de 1,5 cm y que de 2,15 a 2,25 hubiera 3 cm de diferencia, o sea, algo desproporcionado para verlo en una recta numérica. Eso es en cuanto a distancia física y, en cuanto a distancia numérica, un orden lógico 2,15, 2,25, 2,35 y, así ascendiendo, hasta +3 y, después representar 2,75 que daba el apartado f.

E: Para representar $\sqrt{2}$ calculaste la raíz cuadrada con la calculadora…

El alumno se anticipa.

A: Ahí calculé tanto las fracciones como las raíces cuadradas. ¿Cómo represento en una recta numérica una raíz cuadrada de 2? Tengo que hallar la raíz cuadrada, si no, no la podría representar…una que no sería, no podría representar una raíz cuadrada en una recta numérica, tendría que hallar el resultado para, después, según lo que me diera, representarlo en la recta numérica. Lo hice tanto en el apartado a como en e y g, que tienen fracciones.

A continuación, lee lo que escribió en el apartado e.

E: ¿Sabes representar 2/3, en la recta numérica, sin hacer la operación?

A: No.

E: ¿sabes representar $\sqrt{2}$, sin hallar la raíz, en la recta numérica?

A: No, sin calcularla, no.

2.2.4. Transcripción de la entrevista del alumno A = [27]

Primera pregunta

E: ¿Por qué 35.521 no es un entero?

A: 35.521, sí es un entero. El fallo que tuve con ese número es que pensé que el punto, yo lo vi como si fuese una coma, porque siempre he tenido una duda en cuanto a eso, pues las calculadoras, a veces ponen punto, a veces ponen coma y, para mí, hay gente que pone la coma arriba y hay gente que la pone abajo; yo la suelo poner abajo. El punto lo vi como si fuera una coma, no como un punto; yo pensé que era 35,521.

E: ¿Por qué $\left(\sqrt{2}\right)^2$ es entero?

A: Porque $\left(\sqrt{2}\right)^2$, al estar un número al cuadrado, al estar la raíz cuadrada de 2 al cuadrado, el cuadrado se va con la raíz cuadrada de dos y se queda el dos solo y, el 2, es un número natural y por eso también es un número entero.

E: Tienes marcado que $\frac{10}{5}$ es natural, pero no entero ¿Por qué?

A: ¡Eso es una gran duda! Porque yo creo cuando llegué más o menos a esa altura ya no empecé a guiarme de lo que pensaba en un principio. Pensé: bueno, para mí un número natural es lo mismo que un entero, entonces las cosas que ponía como natural también las tenía que poner como entero. Aunque no siempre me guié así, pues empecé a trabarme, a decir, bueno, bueno, porque pensé que si se supone que es una fracción no puede ser un entero. No sé si fue por un despiste o por eso, pero posiblemente fuese un despiste porque sí puse que era todo lo demás.

E: ¿$\frac{10}{5} = 2$?

A: ¿$\frac{10}{5}$?, no es lo mismo. Si tú resuelves $\frac{10}{5}$, sí te da 2, pero $\frac{10}{5}$ no es lo mismo que 2. $\frac{10}{5}$ es una fracción y 2 es un número.

E: ¿Una fracción que sería?

A: No entiendo.

E: $\frac{10}{5}$ lo resuelves y te da 2, pero comentas que no es lo mismo porque es una fracción. ¿Por qué?

A: También tuve esa duda en los ejercicios porque hubo cosas que yo veía sólo cómo estaban escritas y cosas que las resolví, por ejemplo, en $\frac{10}{5}$ era como estaba escrita. O sea, hubo momentos en los que no supe guiarme por una cosa o por otra; entonces, por ejemplo, $\frac{10}{5} = 2$ es un número natural por eso pero, ¿era un número entero? Pensé: si es una fracción no puede ser un número entero. A lo mejor fue que no me acordé, o sea que me equivoqué y por un despiste no me acordaba de que era.

E: ¿Cuáles son los enteros?

A: Para mí, cuando hice el ejercicio los enteros eran los números del cero al nueve. Al empezarlo hacer.

E: ¿A lo largo de la primera pregunta?

A: A lo largo de todo el ejercicio. Entonces, después dije: bueno, del cero al nueve, si es 100 tiene un uno, un cero y un cero, bueno, entra dentro de un entero. Yo conté del cero al nueve y todos los que se formasen con ellos y no tuviesen coma, eran enteros. ¿Un número natural?, pues dije: tiene que ser lo mismo que número entero. Ahí ya, fue cuando empecé a trabarme un poco, yo pensé que eran lo mismo, pero no tenía una definición clara de ellos.

E: ¿Has señalado que los naturales son los positivos?

A: Sí, porque eso sí lo tenía claro, los naturales no son negativos…. Para mí los negativos no eran reales, o sea eran imaginarios, entonces un número que es negativo, que no tienes, que no ves o no puedes tener, no es natural. Entonces, los naturales sí son positivos.

E: ¿Por qué el 0 y el 2 no son decimales?

A: Realmente, en Bachillerato me lo explicaron, me explicaron que el cero, en realidad, no es cero, sino es 1,999… que da cero, pero se pone como convenio cero. En el momento en el que lo hice no me acordé de eso, ni pensaba nada en ello. Para mi, cero, no era un número decimal porque no tenía coma. Tampoco sabía que si podía conseguir un denominador de base 10 y expresarlo en modo de fracción, pues sería un decimal, no me lo habían explicado nunca…

E: ¿Qué significa lo de “un denominador de base diez”?

Buscamos un ejemplo en sus respuestas, 0,5.

A: Sí, puse que era decimal porque tenía coma.

Se consideran todos los números seleccionados en la tabla como decimales aplicando el criterio de "llevar coma". (0,5, 3,14, -2,068 y 35521).

A: Básicamente me guié que todo lo que lleva coma era decimal.
E: ¿Y lo de "base 10", dónde lo aplicaste?
A: No, en este ejercicio no lo hice. Eso lo supe después, cuando hice el siguiente ejercicio y lo corregí. Supe que todos los que tuviesen base 10 eran decimales. Pero, este ejercicio, la primea vez que lo hice, no sabía nada de ello.
E: ¿Por qué $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\ y\ \frac{10}{5}$, son decimales?
A: Porque ahí sí dividí tres entre cinco y me dio el número con coma y decimales.
E: Pero, $\frac{10}{5} = 2$ y para ti no era decimal, ¿por qué?
A: Eso es el problema, creo que fue una confusión. A lo mejor dividí 10 entre 5 y, a lo mejor, dividí otro número y me equivoqué. Eso fue una confusión.
E: ¿Por qué 0,666…, $1{,}3\overline{5}$, 1,732… y 0,12345…, no son decimales?
A: A ver, no sé lo que puse, pues que no eran decimales porque pensé, creo que fue, es un número infinito y, realmente, no sé porque puse que eran decimales.
E: Pusiste que eran no decimales.
A: Realmente… puse que no son decimales, pero no sé porque lo puse. A lo mejor fue por rellenar, simplemente.
E: ¿Tenías claro los restantes y, los demás, para rellenar la columna, escribes que no?
A: Sí, posiblemente. No, sino que no sé. Siendo un número que no era racional, no sé. ¡Ahí sí que me pillaste!
E: ¿En $-\frac{7}{3}\ y\ \frac{1}{3}$ operaste?
A: ¡Claro! Ahí no operé y lo miré como una fracción. Muchos casos en los que sí miraba y en los que no miraba. Supongo que, a lo mejor, era que me convenía y era más fácil mirarlo así que de la otra forma.

E: ¿Por qué pones que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es decimal?

A: Ahí sí hice con la calculadora, lo resolví.

E: ¿Por qué señalas como no decimales a $1+\sqrt{2}$, $3-3\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$ *y* $\left(\sqrt{2}\right)^2$?

A: Posiblemente, $-\sqrt{7}$, me acuerdo que $-\sqrt{7}$ lo miré como $\sqrt{-7}$, no lo resolví, pues dije -7, y en aquel momento, que tuviese el signo menos me confundió con la raíz cuadrada de un signo negativo.

E: ¿Interpretaste $-\sqrt{7}$ como $\sqrt{-7}$?

A: Sí, eso me confundió un poco y dije, bueno aquí no y punto.

E: ¿Y $1+\sqrt{2}$?

A: Creo que fue porque dije que este número tiene una raíz cuadrada y, antes del examen, te oí decir que las raíces cuadradas son irracionales y, entonces, no pueden ser decimales, pero no porque yo lo supiera a ciencia cierta.

E: ¿Cualquier raíz cuadrada? ¿La $\sqrt{4}$ será decimal?

A: ¿$\sqrt{4}$?

E: Sí.

A: No sé, puse que era racional y no sé porque puse racional, si es irracional. Puse que era real aún siendo la raíz negativa de algo, no sé. Posiblemente, por el cansancio y el estrés de haber rellenado esa tabla, ya me daba igual y era intentar terminarlo.

Segunda pregunta

E: ¿Por qué $1,3\overline{5}$ es decimal?

El alumno lee lo que escribió.

A: Es un número racional, real, lo podemos pasar a fracción y tener un denominador de base 10. ¿Este es el primero o el segundo que hice? ¿El primero, no?

E: ¿Del cuestionario?

A: Sí.

E: El segundo, ¿recuerdas cómo hallar la fracción generatriz?

A: No, no recuerdo, porque ese día llegué, me lo explicaron, lo entendía, pero como no lo volví a hacer no me acuerdo. Pero, sabía que cuando un número tenía periodo se le podía quitar el periodo y se podría hacer en forma de fracción y, después, creo era cuando se sabía si era decimal o no, pero hay que quitarle primero el periodo.

E: ¿Con lo de la base 10 a qué te refieres?

A: Que si una fracción la podemos convertir…

E: Escribe una fracción con el denominador de "base 10".

A: En $\frac{10}{5}$, yo podría conseguir que en el denominador hubiese, por ejemplo, un 100, ¿no?, qué significaría, qué sería, el denominador sería 10^2.

E: ¿El denominador es una potencia de base 10?

A: Sí.

E: ¿por qué 0,666… no es decimal?

A: Puesto que es un número real, racional, pero no decimal, porque tiene infinitas cifras. Como tenía infinitas cifras, supongo que es lo mismo que pasó anteriormente con lo otro, pensé que no era decimal. ¿Por qué? No tiene lógica, no sé, supongo que pensaba, bueno, tiene infinitas cifras, no es decimal y, guiándome por ahí, hice todos los demás.

E: ¿Cuándo un número es irracional?

A: ¿Cuándo un número es irracional? Vale, bueno, los números racionales son todos aquéllos que se pueden dividir, que se pueden racionalizar y la confundía con la palabra racionalizar. En base a eso, busqué primero todos los racionales y, después, dije: bueno, si es racional, no puede ser irracional. Porque los racionales son racionales o nada y los irracionales son irracionales, no pueden ser racionales. Entonces, primero rellené las casillas de racional y, después, la de irracional. Tenía una ligera idea de que las raíces eran irracionales, de que las sumas con raíces cuadradas eran irracionales y demás. Por eso, los irracionales son los que no son racionales o las raíces cuadradas.

E: ¿Te fijaste en el periodo?

A: Para mí, 0,666 y los tres puntos suspensivos es exactamente igual que 1,732….Para mí el punto suspensivo es que tiene infinitos números, pero no que forman periodo. Para mí el periodo es la curvatura encima del número, pero que tuviera puntos suspensivos me daba a entender, digo, vale, 0,666 infinitos números más, pero que no fuese 666… periodo.

E: ¿Qué pueden ser distintos a 6?

A: Sí, distintos de 6.

E: Escribes: $\pi - 5,\ 1+\sqrt{2},\ y\ 3-\sqrt{3}$ no son decimales porque son operaciones con irracionales. ¿Qué significa esto?

A: Sí, vale, la idea que tenía, bueno, que si es una raíz cuadrada es un número irracional, entonces cualquier operación que dentro de sí consigue tener una raíz cuadrada va a ser un número irracional, ya que, si operas con un número irracional, la operación es irracional.

E: ¿Y $\left(\sqrt{2}\right)^2$?

A: No, porque ahí lo que hice fue simplificarlo.

E: ¿No ves una operación?

A: Sí, no la vi, ahí dije, bueno, simplifico y se me queda 2. No vi una operación, la simplificación no la vi como una operación.

E: ¿Y π?

A: Me equivoqué; para mí los irracionales eran tanto las raíces cuadradas y los símbolos como π. Es un irracional porque es un símbolo, no lo veía como 3,1415…, sino como si fuese símbolo, bueno, si es un símbolo lo voy a ver como símbolo y no como otra cosa.

E: ¿A qué te refieres al decir que es un símbolo?

A: No veía su valor, sino veía la grafía que estaba, o sea…

E: ¿Una letra?

A: Una letra.

Tercera pregunta

Se le solicita al alumno que explique lo que hizo en el apartado que corresponde a $\frac{2}{3}$.

A: Dividí en diez partes iguales y cogí el punto 0,6 y el 0,7. Acoté entre el 0,6 y el 0,7 , y entre 0,66 y 0,67 hice exactamente lo mismo que en el punto anterior, tendría que dividir entre 10 y coger el 0,666 y, así, infinitas veces hasta el periodo.

E: ¿Sabrías representarlo usando sólo la notación fraccionaria?

A: Sí, entre el cero y el uno dividimos en tres partes iguales y, de las tres partes, cogemos 2. Aquí está el punto $\frac{2}{3}$.

E: ¿Este método no lo conocías?

A: Se supone que lo sabía y lo intenté pensar, pero no sé, con el follón que tenía en la cabeza no llegué a decir: si es así de fácil, si es coger de tres partes…. Pero, vale, cómo lo divide del 0 al 1, que lo tengo dividido en 10 partes, cómo lo divido en sólo 3 partes.

E: ¿Cómo representas ahora 0,333… usando la notación fraccionaria?

A: La haría así.

E: ¿No sabes hallar la fracción generatriz?

A: No.

E: Es $\frac{1}{3}$.

A: ¿ $\frac{1}{3}$?, vale, pues se supone que una de las formas, si supiera lo haría así, porque es mucho más fácil, si no, aunque estuviera mal, a lo que llegaría mi mente, es decir, bueno, lo hago por aproximación y hago exactamente lo mismo que hice con el 0,666…

E: ¿Prefieres la notación decimal antes que la fraccionaria para realizar la representación?

A: Sí.

ANEXO 3

ANEXO 3. DATOS DE LOS ESTUDIOS

A continuación, se exponen los datos de la investigación que no recoge de forma explícita la memoria.

3.1 TABLAS DE DATOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

Se muestran dos tablas en las que se reflejan los porcentajes de las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario C1.

PREGUNTA (Sesión 1)	APARTADO	PORCENTAJES (Elección de la respuesta correcta)
1	A	-
	B	97 %
	C	97 %
	D	61 %
	E	50 %
2		89 %
3	A	92 %
	B	56 %
4	A	14 %
	B	14 %
	C	8 %
5		58 %
6	A	94 %
	B	86 %
7		86 %
8		92 %
9	A	100 %
	B	94 %
	C	100 %
	D	67 %
	E	67 %
10		69 %
11		83 %
12		92 %
13		100 %
14	A	89 %
	B	8 %
	C	100 %
	D	-
	E	-
	F	78 %
15		89 %
16	A	69 %
	B	75 %
	C	81%
	D	64 %
17	A	61 %
	B	58 %
	C	44 %
	D	28 %
18	A	92 %
	B	94 %
	C	69 %
	D	69 %

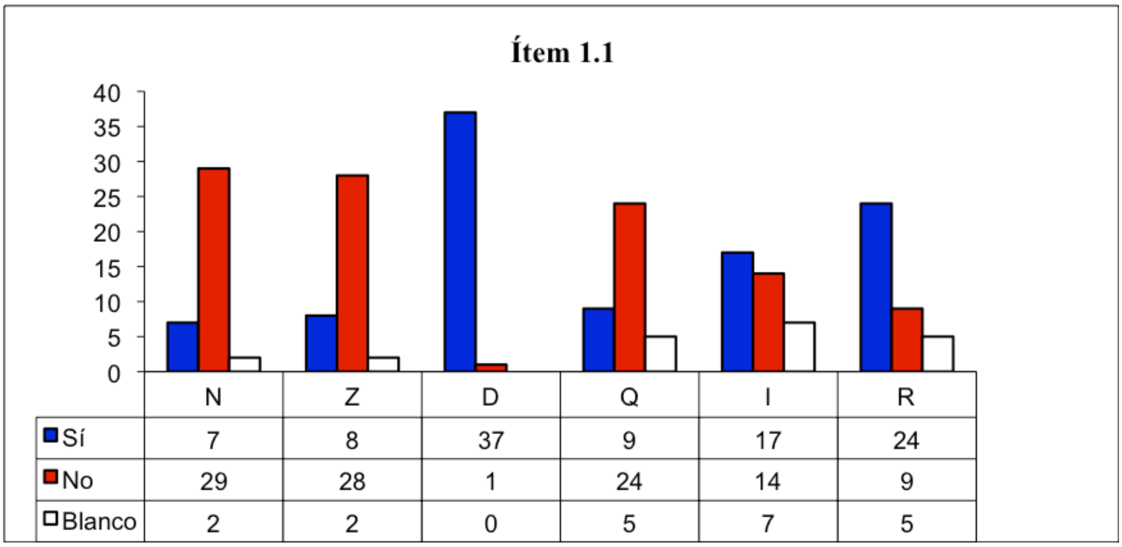
19	A	100 %
	B	94 %
	C	94 %
	D	92 %
	E	92 %

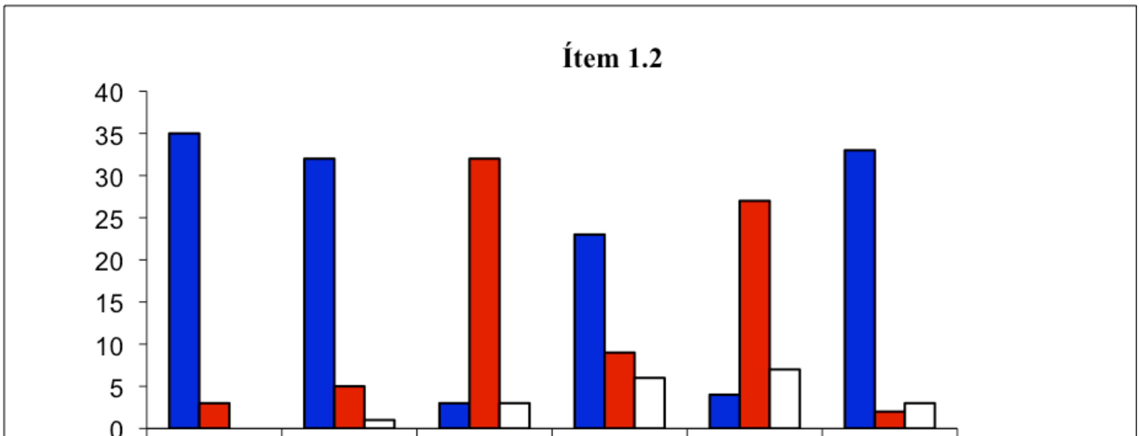
PREGUNTA (sesión 2)	**APARTADO**	**PORCENTAJES (Elección de la respuesta correcta)**
20		78 %
21		5,6 %
22	A	0 %
	B	0 %
	C	0 %
	D	53 %
23		58 %
24		0 %
25	A	89 %
	B	22 %
	C	28 %
	D	94 %
	E	94 %
	F	94 %
26		86 %
27		36 %
28	A	61 %
	B	86 %
	C	86 %
	D	44 %
	E	69 %
	F	83 %
	G	78 %
	H	36 %
29		0 %
30	A	100 %
	B	78 %
	C	56 %
31		3 %
32		53 %
33		22 %

34	A	94 %
	B	81 %
	C	42 %
	D	19 %
35	A	8 %
	B	8 %
	C	6 %
	D	8 %
36		72 %
37	A	67 %
	B	33 %
38		78 %

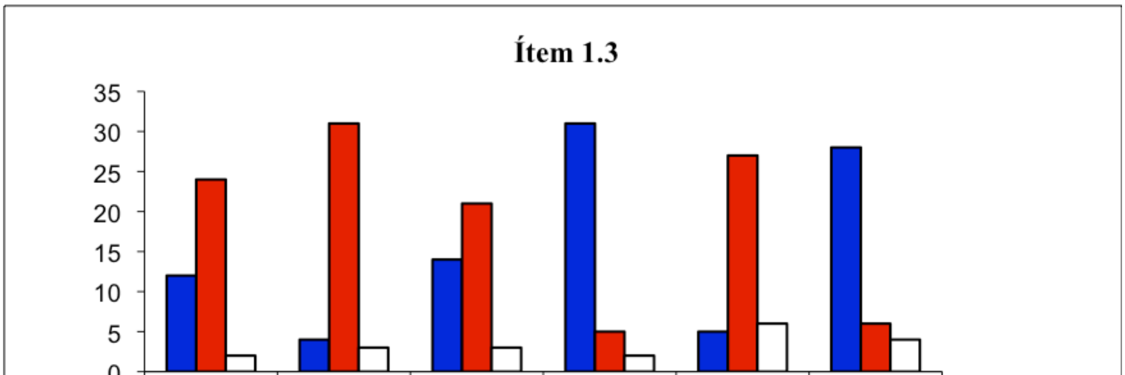
3.2 DATOS DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Diagramas de barras correspondientes a las respuestas, a la primera pregunta del cuestionario C2, dadas por los alumnos del Estudio experimental pertenecientes a la Facultad de Formación del Profesorado de ULPGC.

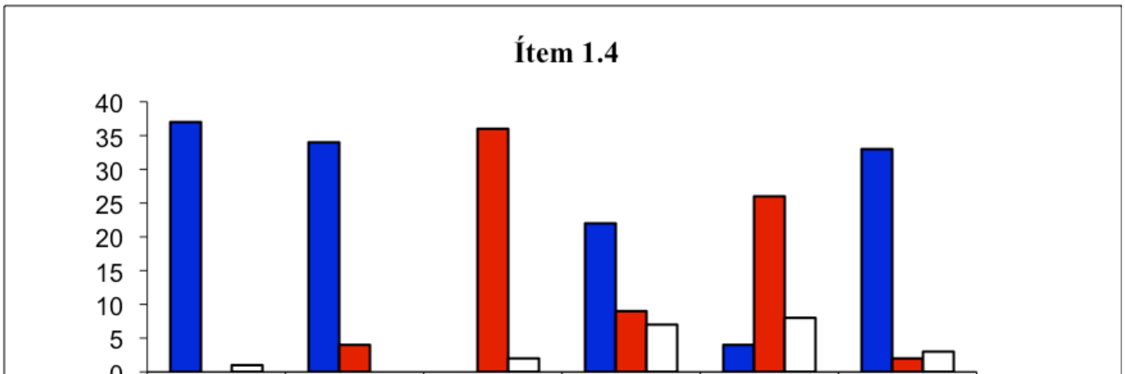




	N	Z	D	Q	I	R
Sí	35	32	3	23	4	33
No	3	5	32	9	27	2
Blanco	0	1	3	6	7	3

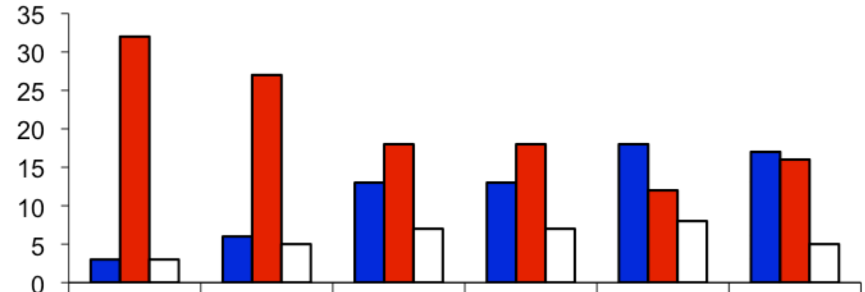


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	12	4	14	31	5	28
No	24	31	21	5	27	6
Blanco	2	3	3	2	6	4



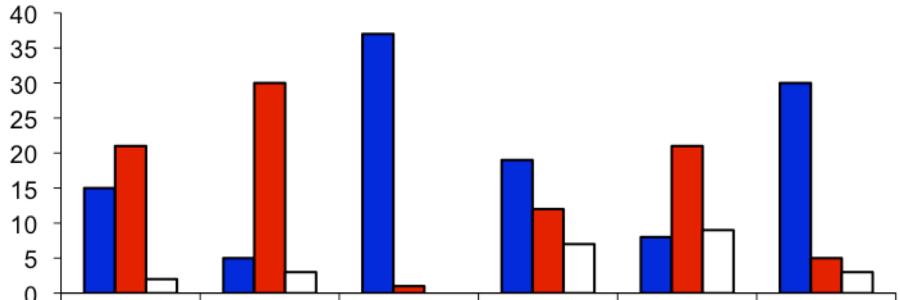
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	37	34	0	22	4	33
No	0	4	36	9	26	2
Blanco	1	0	2	7	8	3

Ítem 1.5



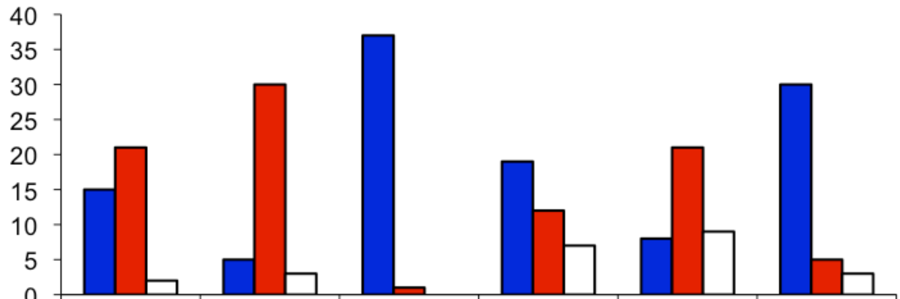
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	3	6	13	13	18	17
No	32	27	18	18	12	16
Blanco	3	5	7	7	8	5

Ítem 1.6

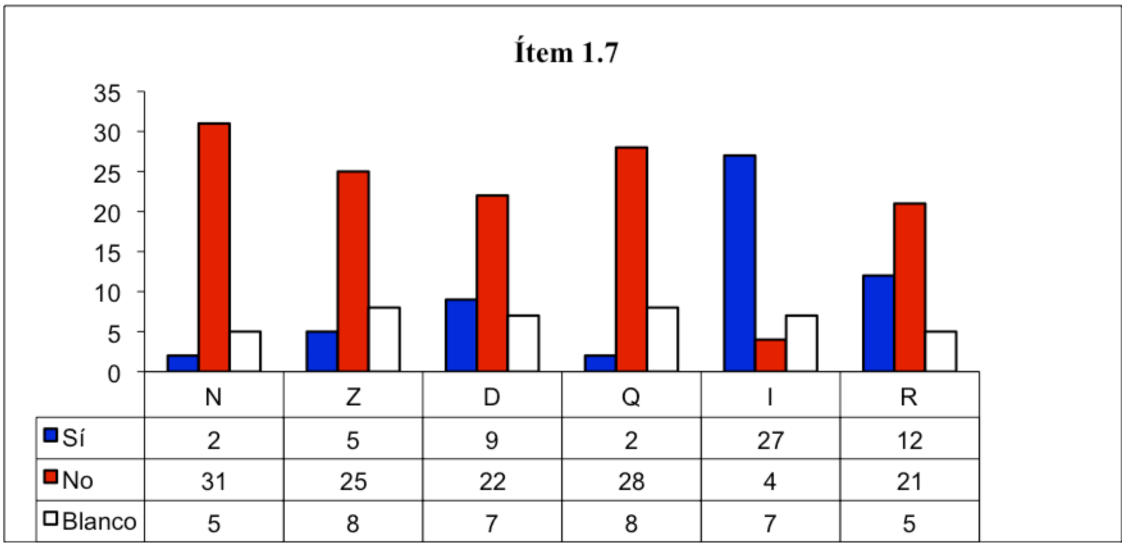


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	5	37	19	8	30
No	21	30	1	12	21	5
Blanco	2	3	0	7	9	3

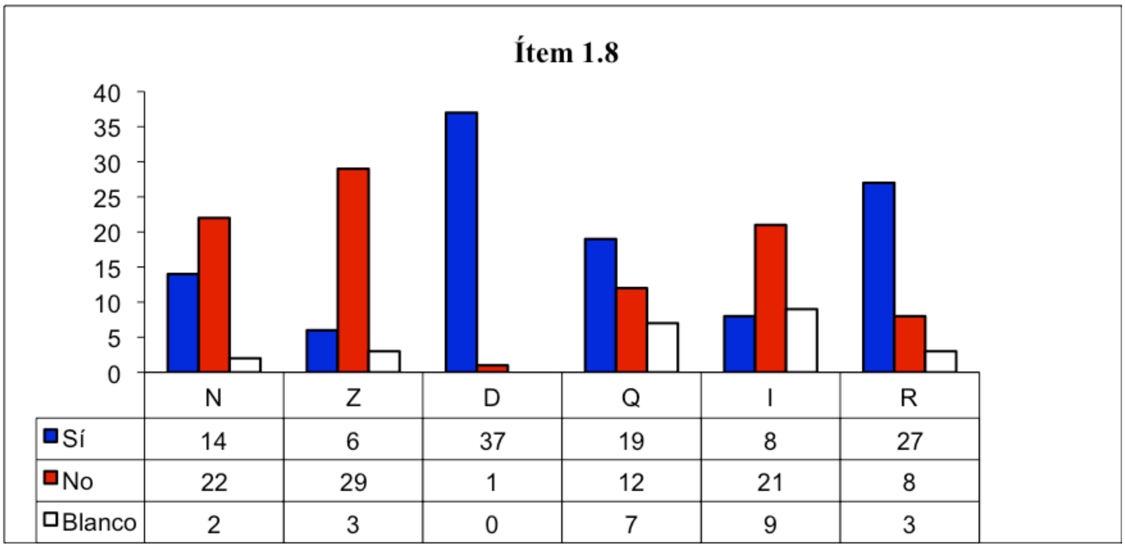
Ítem 1.6



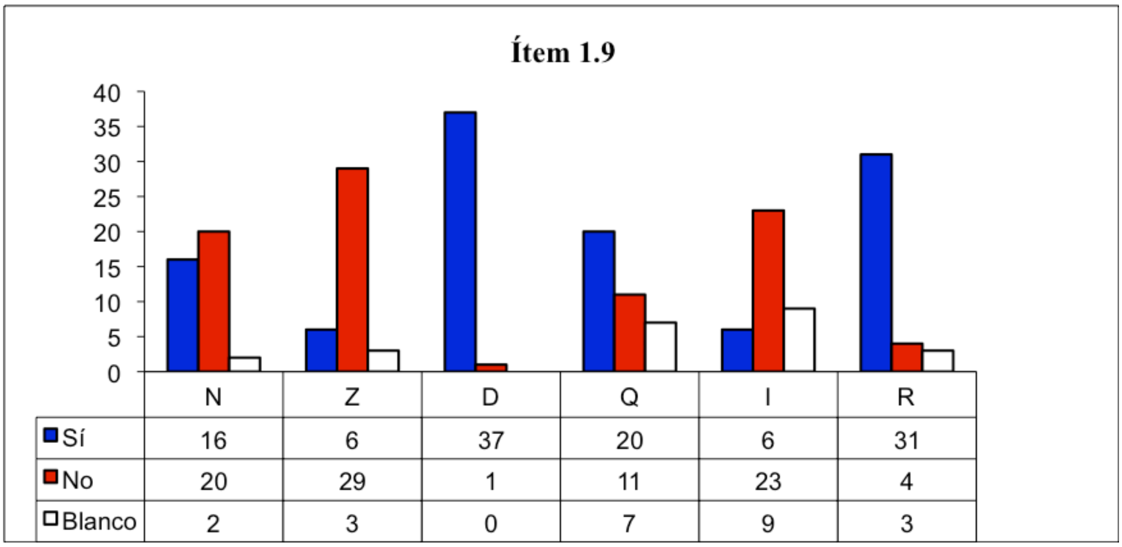
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	5	37	19	8	30
No	21	30	1	12	21	5
Blanco	2	3	0	7	9	3



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	2	5	9	2	27	12
No	31	25	22	28	4	21
Blanco	5	8	7	8	7	5

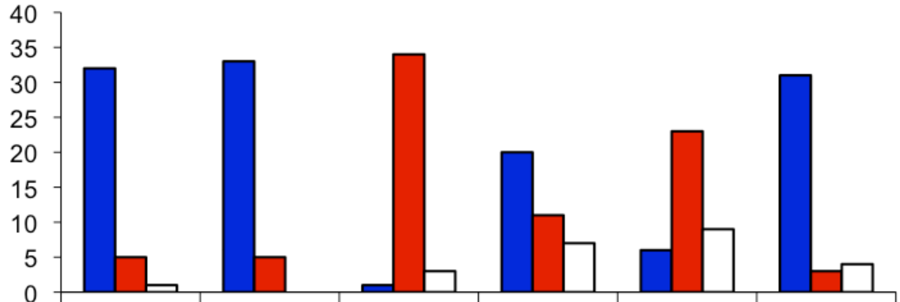


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	6	37	19	8	27
No	22	29	1	12	21	8
Blanco	2	3	0	7	9	3



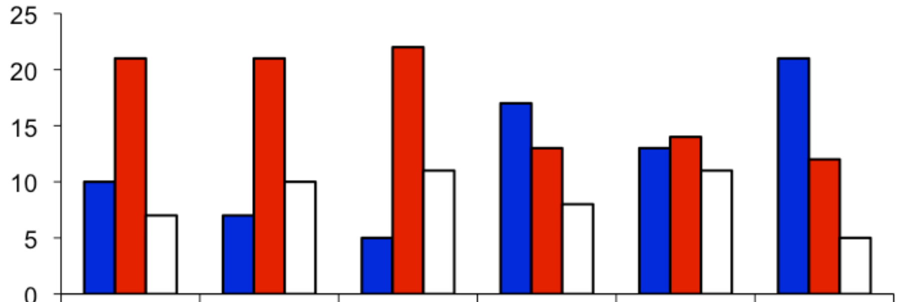
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	16	6	37	20	6	31
No	20	29	1	11	23	4
Blanco	2	3	0	7	9	3

Ítem 1.10



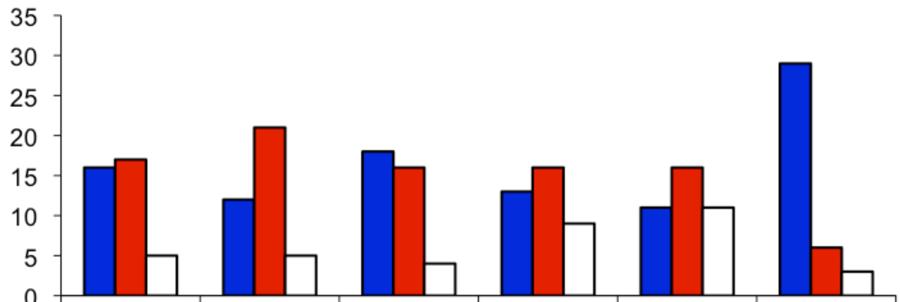
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	32	33	1	20	6	31
No	5	5	34	11	23	3
Blanco	1	0	3	7	9	4

Ítem 1.11



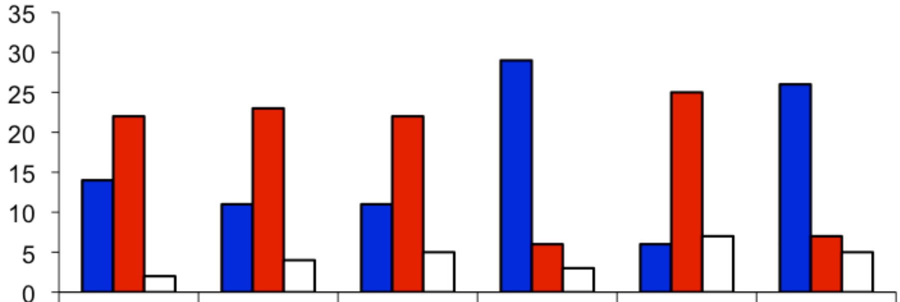
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	10	7	5	17	13	21
No	21	21	22	13	14	12
Blanco	7	10	11	8	11	5

Ítem 1.12



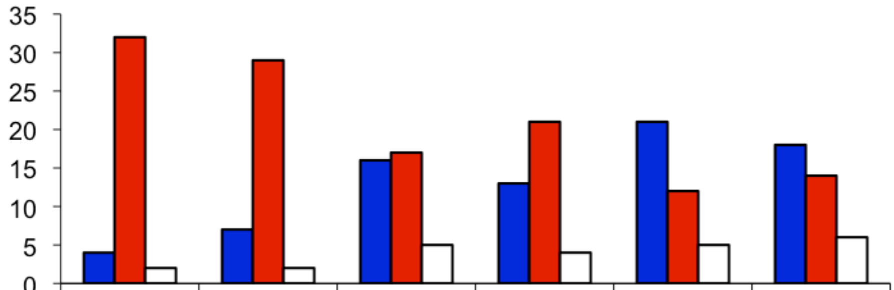
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	16	12	18	13	11	29
No	17	21	16	16	16	6
Blanco	5	5	4	9	11	3

Ítem 1.13



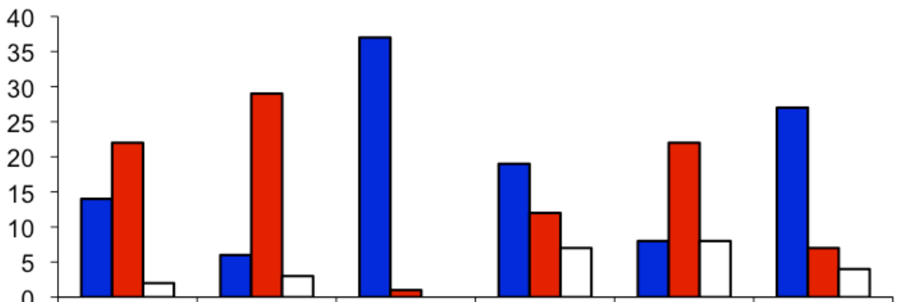
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	11	11	29	6	26
No	22	23	22	6	25	7
Blanco	2	4	5	3	7	5

Ítem 1.14

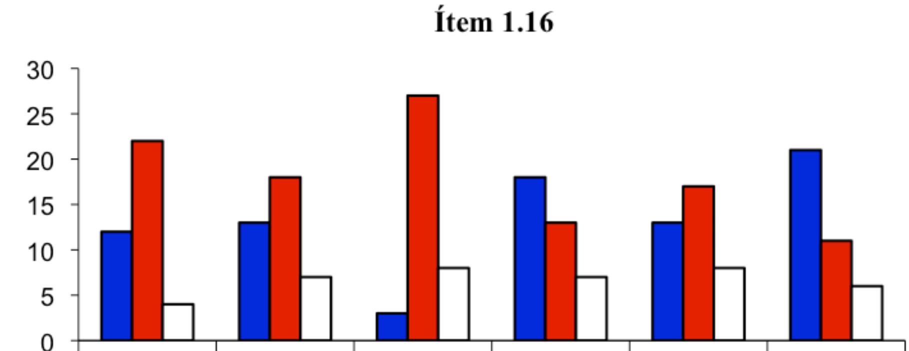


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	4	7	16	13	21	18
No	32	29	17	21	12	14
Blanco	2	2	5	4	5	6

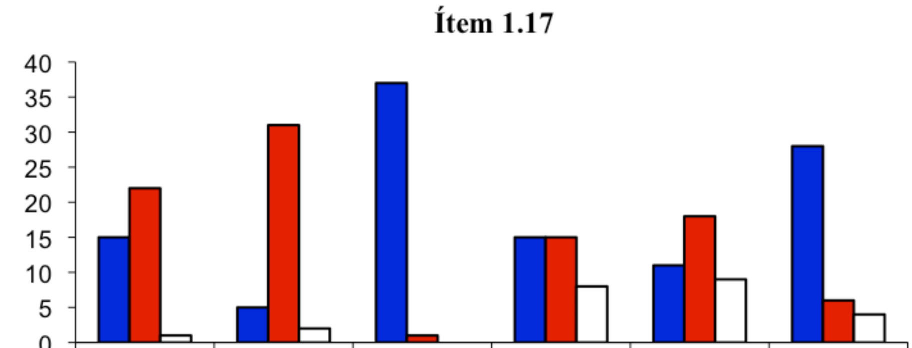
Ítem 1.15



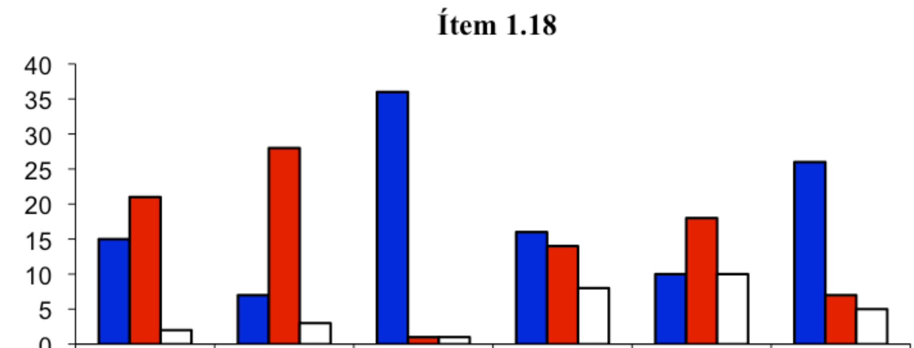
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	6	37	19	8	27
No	22	29	1	12	22	7
Blanco	2	3	0	7	8	4



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	12	13	3	18	13	21
No	22	18	27	13	17	11
Blanco	4	7	8	7	8	6

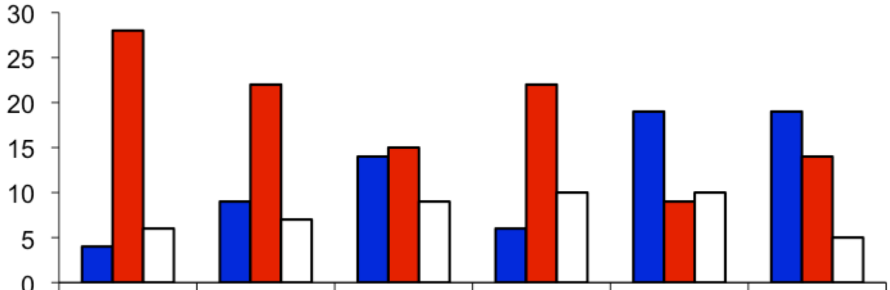


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	5	37	15	11	28
No	22	31	1	15	18	6
Blanco	1	2	0	8	9	4



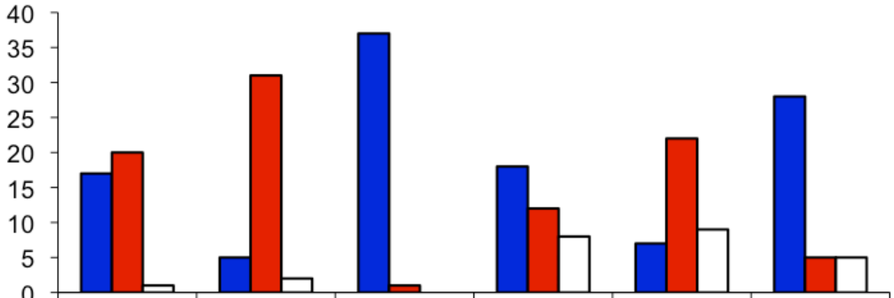
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	7	36	16	10	26
No	21	28	1	14	18	7
Blanco	2	3	1	8	10	5

Ítem 1.19



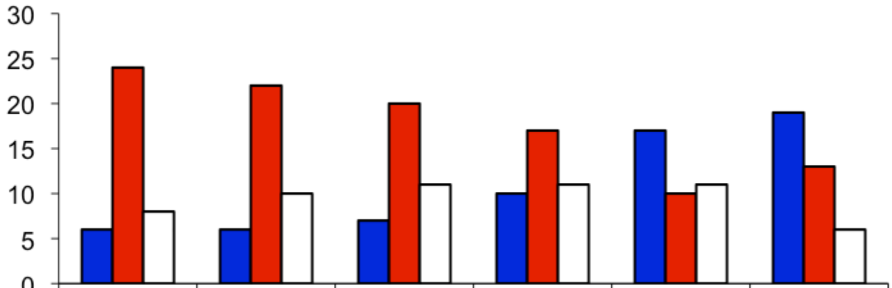
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	4	9	14	6	19	19
No	28	22	15	22	9	14
Blanco	6	7	9	10	10	5

Ítem 1.20

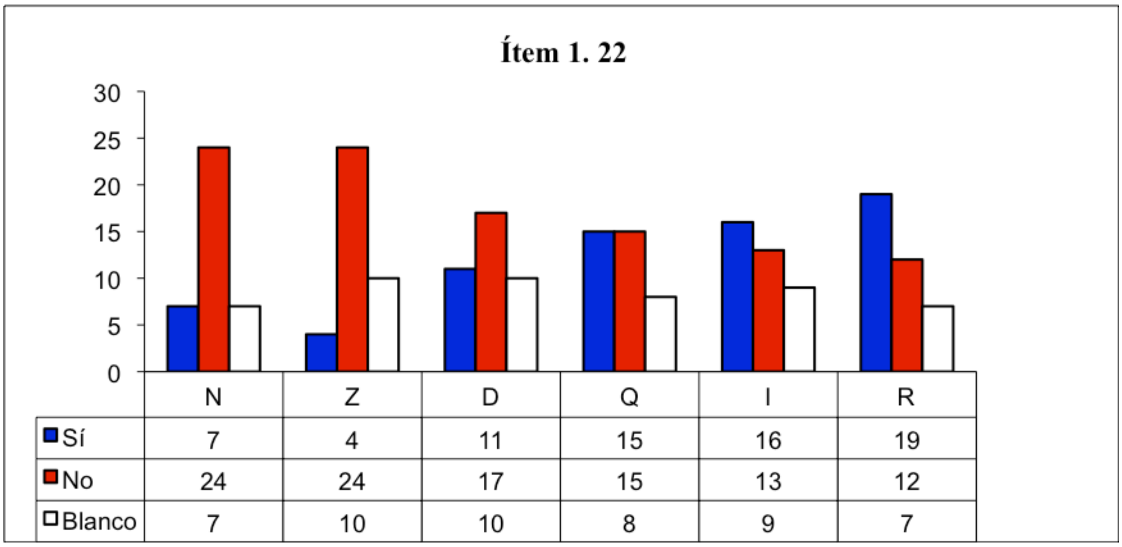


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	17	5	37	18	7	28
No	20	31	1	12	22	5
Blanco	1	2	0	8	9	5

Ítem 1.21



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	6	6	7	10	17	19
No	24	22	20	17	10	13
Blanco	8	10	11	11	11	6



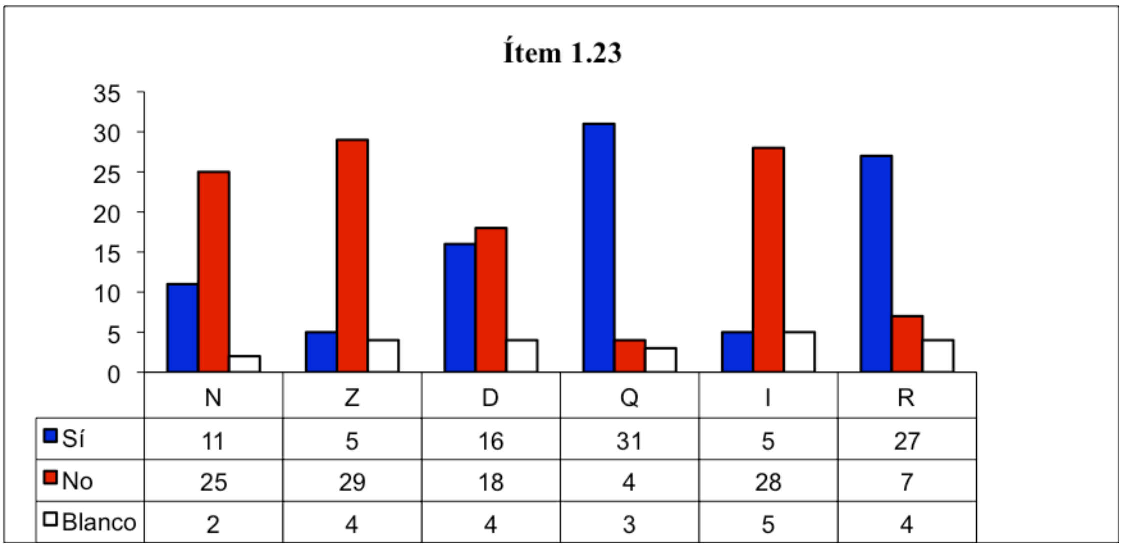


Tabla en la que se establece la correspondencia entre el ítem y la representación semiótica

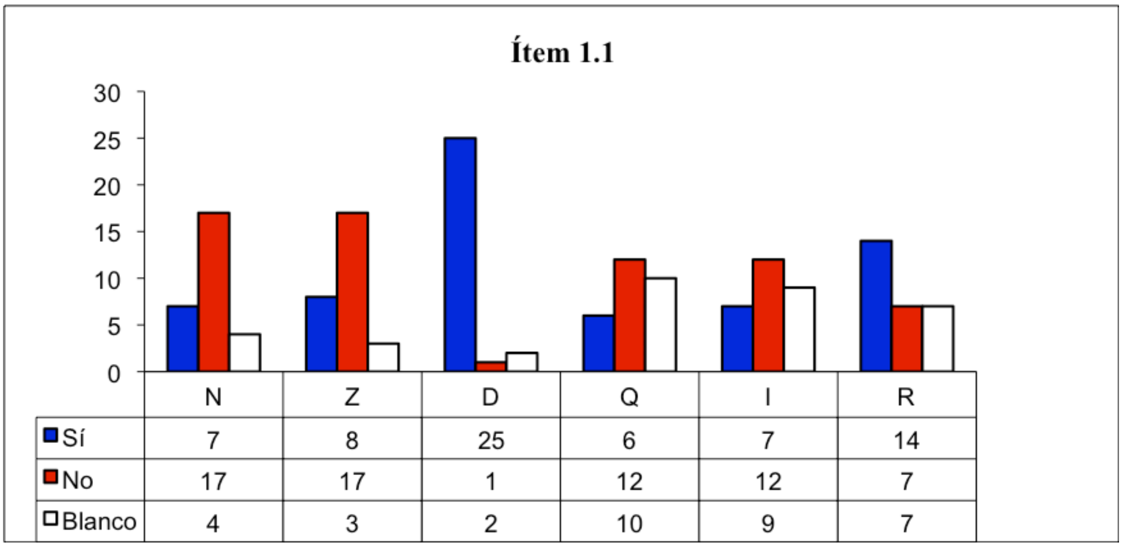
	Representación semiótica
1.1	- 2,062
1.2	35.521
1.3	$\frac{3}{5}$
1.4	2

1.5	$-\frac{1}{2}$
1.6	0,63
1.7	- $\sqrt{7}$
1.8	0,123456…
1.9	3,14
1.10	0
1.11	$1+\sqrt{2}$
1.12	π
1.13	$\frac{10}{5}$
1.14	$-\frac{7}{3}$
1.15	0,666…
1.16	$\left(\sqrt{2}\right)^2$
1.17	$1,3\overset{\frown}{5}$
1.18	1,73205008…
1.19	π-5
1.20	0,5
1.21	$3-\sqrt{3}$
1.22	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.23	$\frac{1}{3}$

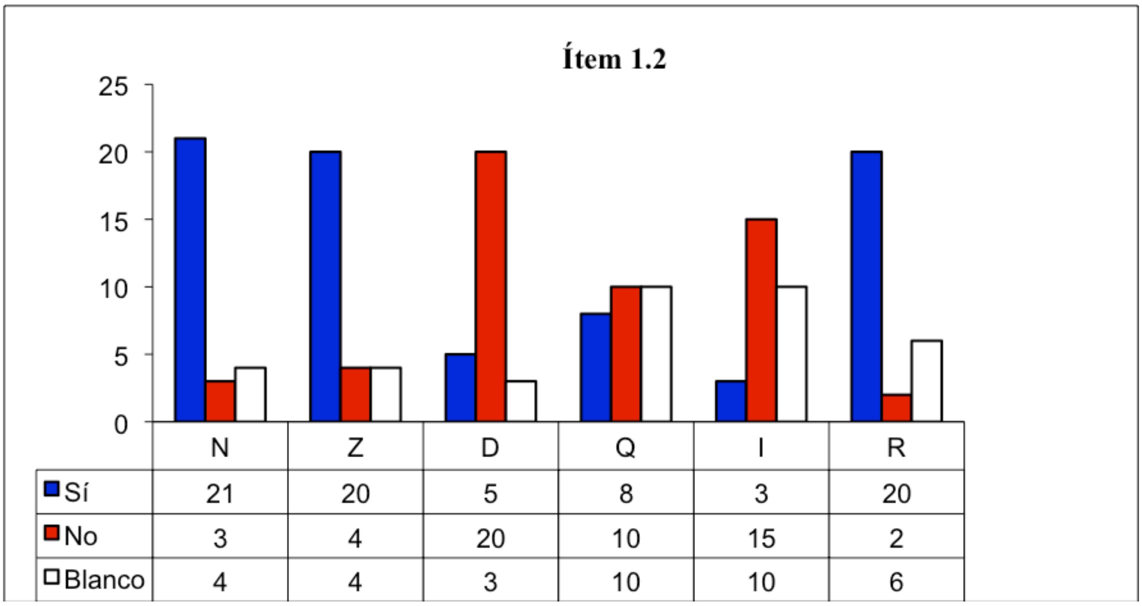
3.3 DATOS DEL ESTUDIO DEFINITIVO

Diagramas de barras correspondientes a las respuestas, a la primera pregunta del cuestionario C2, dadas por los alumnos del Estudio definitivo pertenecientes a la Facultad de Formación del Profesorado de ULPGC.

3.3.1 Diagramas de barras correspondientes a las respuestas a la primera pregunta del cuestionario C2 en la fase de diagnóstico

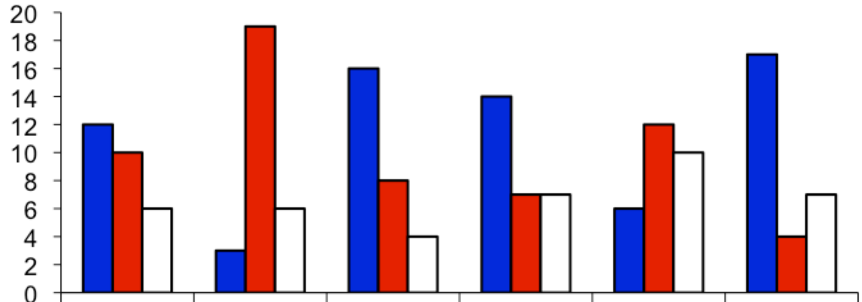


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	7	8	25	6	7	14
No	17	17	1	12	12	7
Blanco	4	3	2	10	9	7



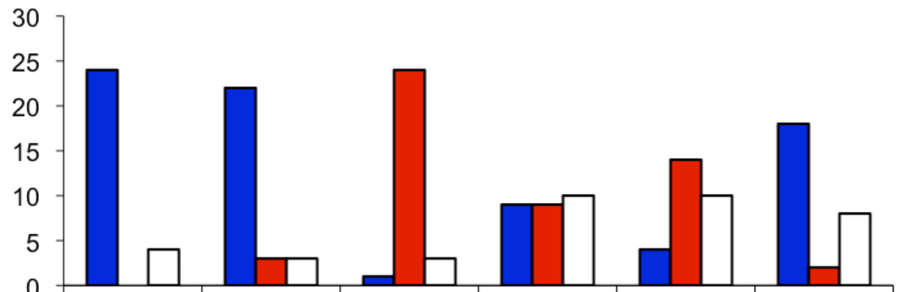
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	21	20	5	8	3	20
No	3	4	20	10	15	2
Blanco	4	4	3	10	10	6

Ítem 1.3



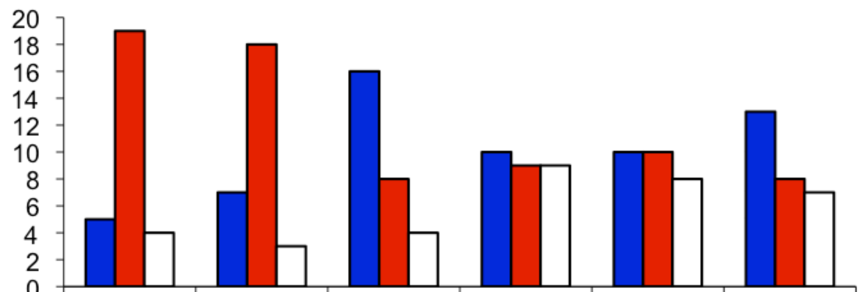
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	12	3	16	14	6	17
No	10	19	8	7	12	4
Blanco	6	6	4	7	10	7

Ítem 1.4



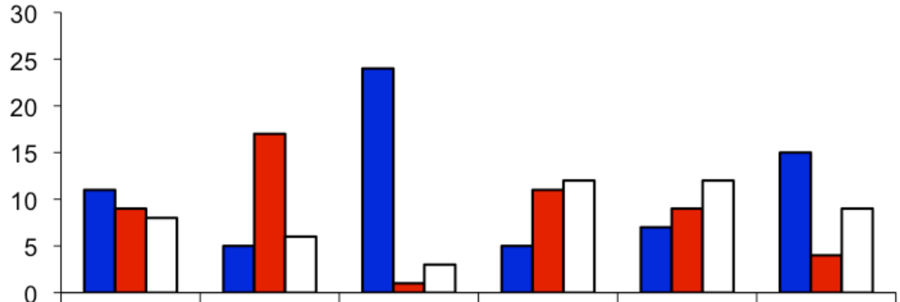
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	24	22	1	9	4	18
No	0	3	24	9	14	2
Blanco	4	3	3	10	10	8

Ítem 1.5



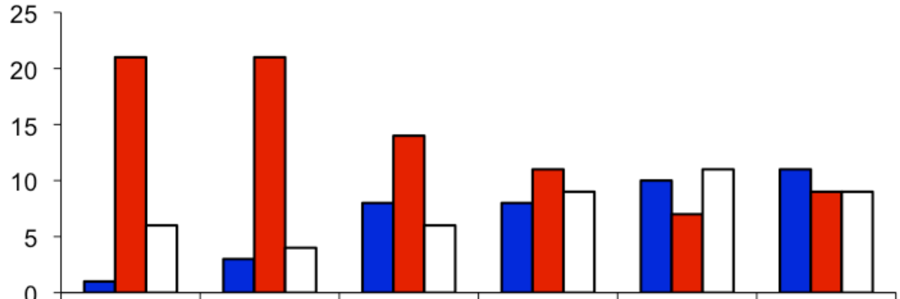
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	5	7	16	10	10	13
No	19	18	8	9	10	8
Blanco	4	3	4	9	8	7

Ítem 1.6



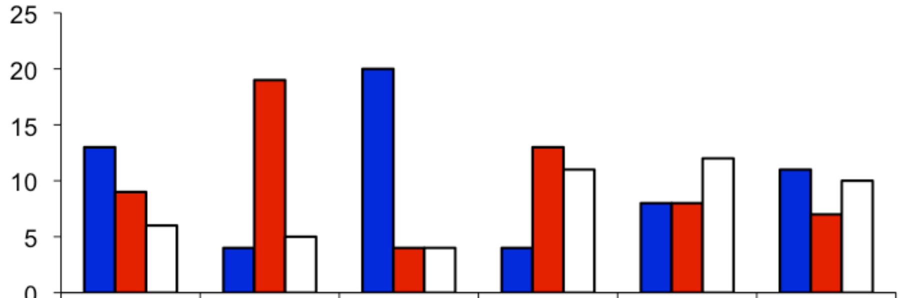
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	11	5	24	5	7	15
No	9	17	1	11	9	4
Blanco	8	6	3	12	12	9

Ítem 1.7



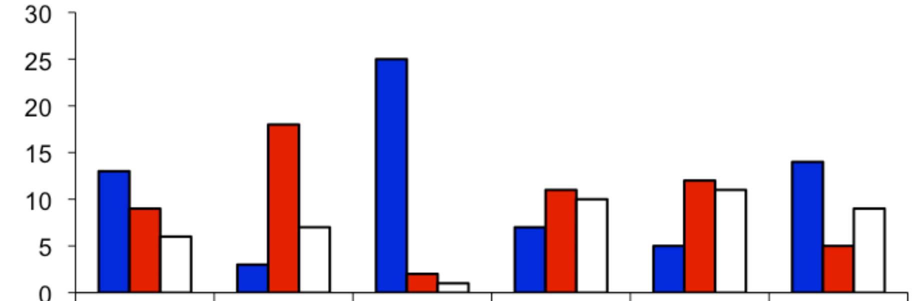
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	1	3	8	8	10	11
No	21	21	14	11	7	9
Blanco	6	4	6	9	11	9

Ítem 1.8



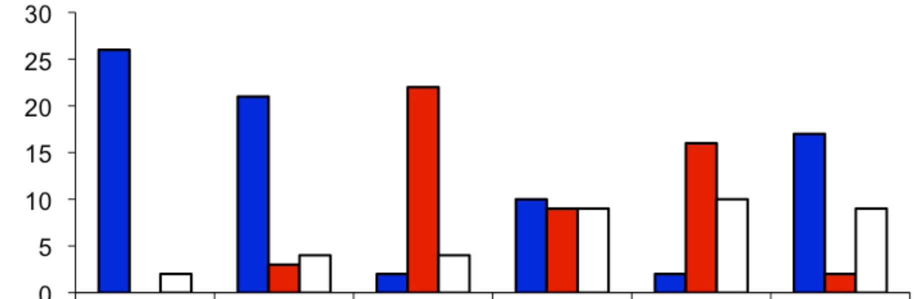
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	13	4	20	4	8	11
No	9	19	4	13	8	7
Blanco	6	5	4	11	12	10

Ítem 1.9



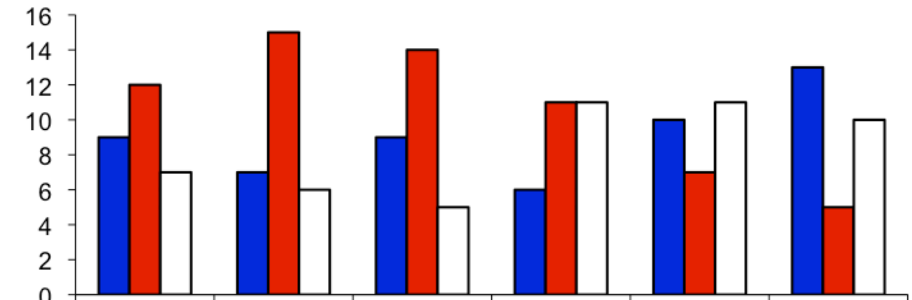
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	13	3	25	7	5	14
No	9	18	2	11	12	5
Blanco	6	7	1	10	11	9

Ítem 1.10



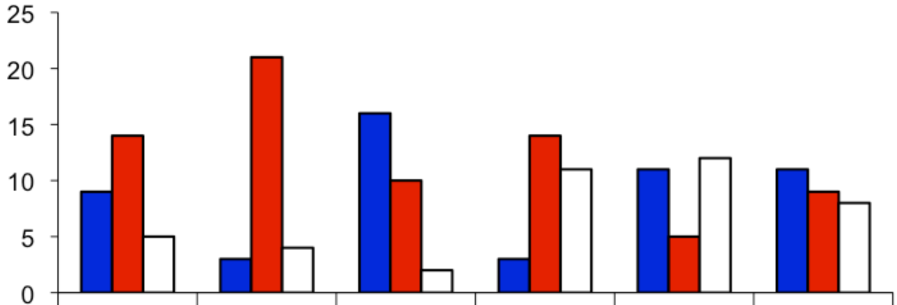
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	26	21	2	10	2	17
No	0	3	22	9	16	2
Blanco	2	4	4	9	10	9

Ítem 1.11



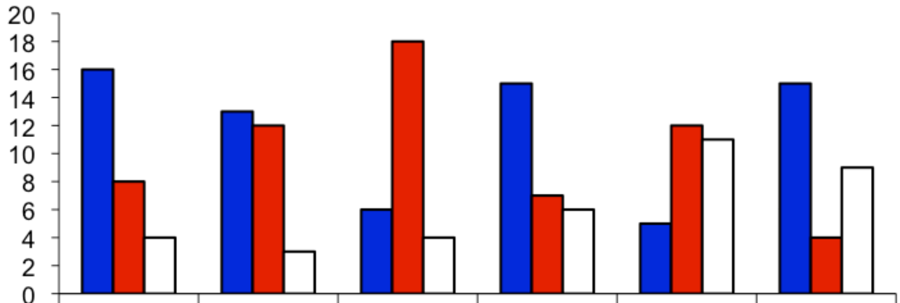
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	9	7	9	6	10	13
No	12	15	14	11	7	5
Blanco	7	6	5	11	11	10

Ítem 1.12



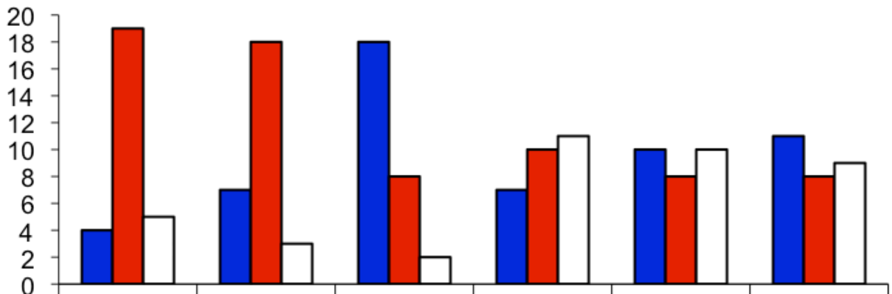
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	9	3	16	3	11	11
No	14	21	10	14	5	9
Blanco	5	4	2	11	12	8

Ítem 1.13

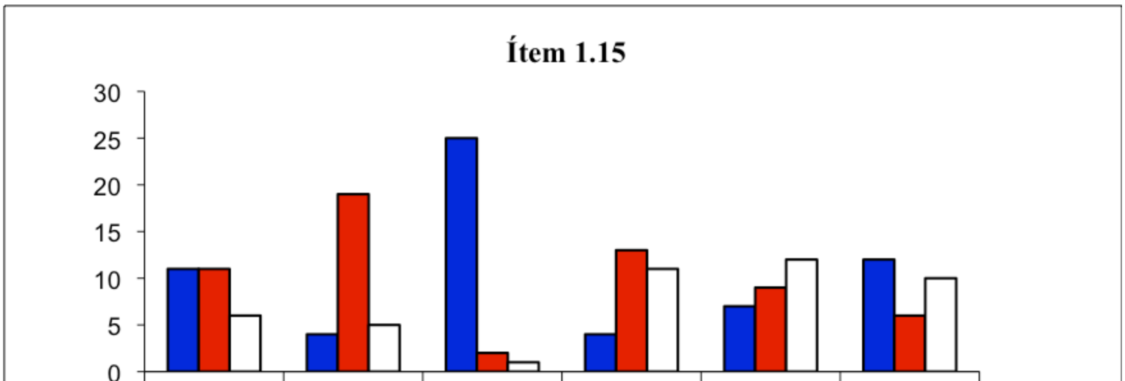


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	16	13	6	15	5	15
No	8	12	18	7	12	4
Blanco	4	3	4	6	11	9

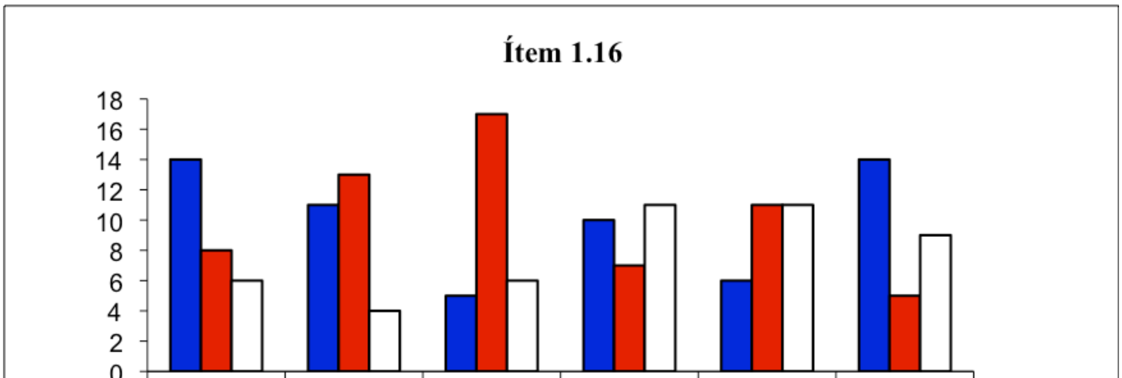
Ítem 1.14



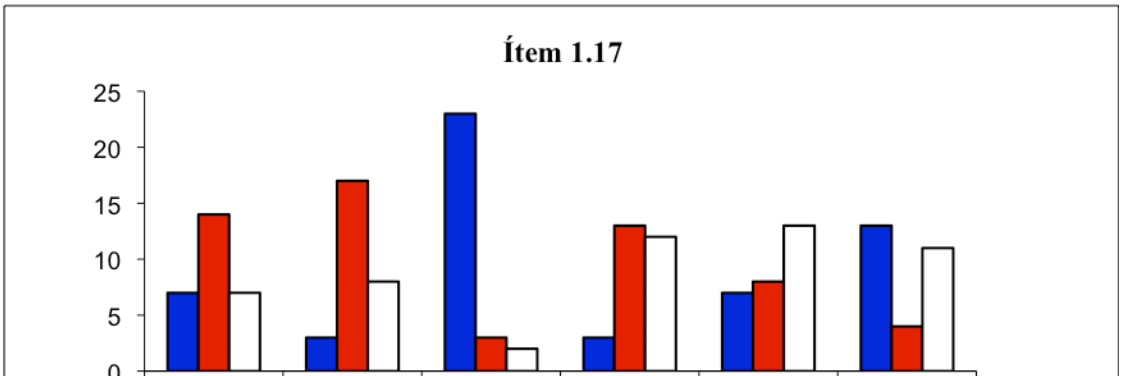
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	4	7	18	7	10	11
No	19	18	8	10	8	8
Blanco	5	3	2	11	10	9



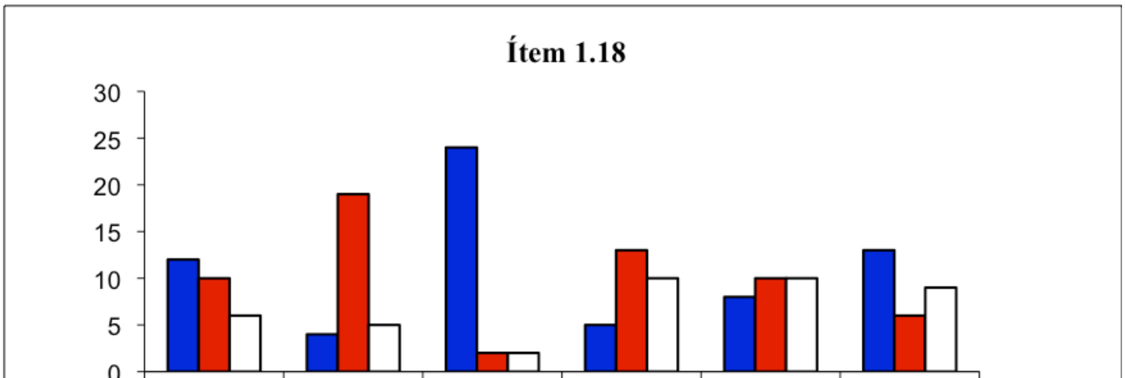
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	11	4	25	4	7	12
No	11	19	2	13	9	6
Blanco	6	5	1	11	12	10



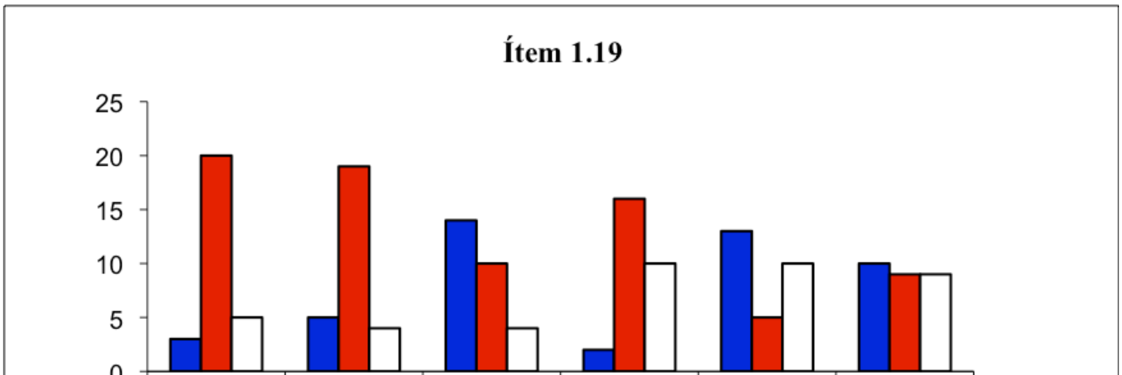
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	11	5	10	6	14
No	8	13	17	7	11	5
Blanco	6	4	6	11	11	9



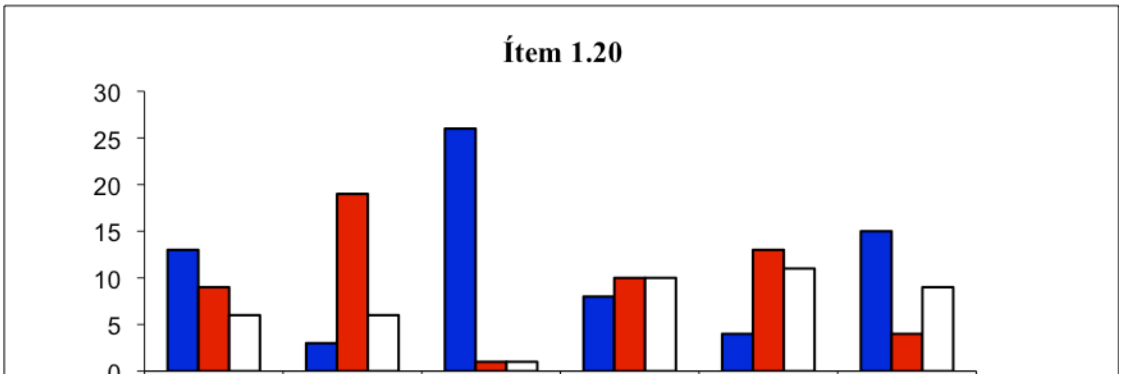
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	7	3	23	3	7	13
No	14	17	3	13	8	4
Blanco	7	8	2	12	13	11



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	12	4	24	5	8	13
No	10	19	2	13	10	6
Blanco	6	5	2	10	10	9

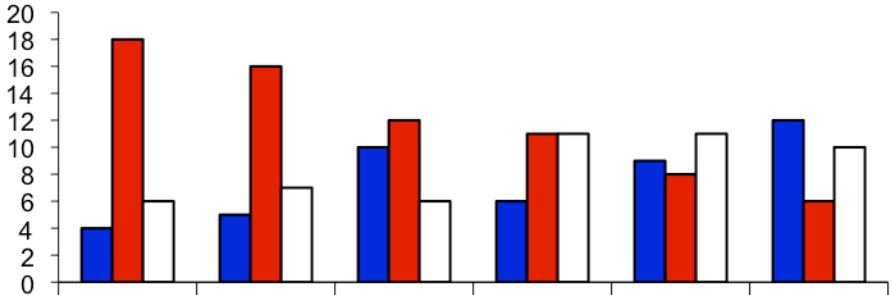


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	3	5	14	2	13	10
No	20	19	10	16	5	9
Blanco	5	4	4	10	10	9



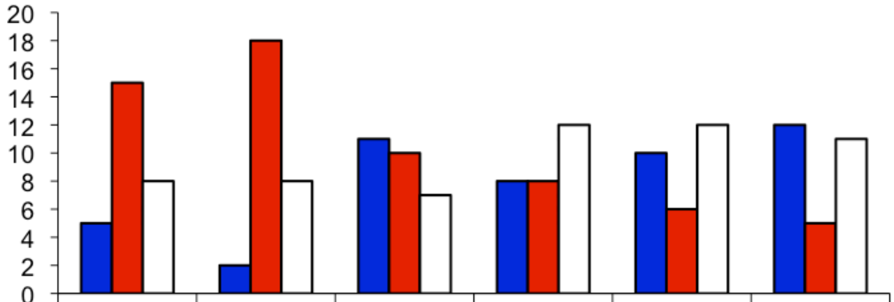
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	13	3	26	8	4	15
No	9	19	1	10	13	4
Blanco	6	6	1	10	11	9

Ítem 1.21



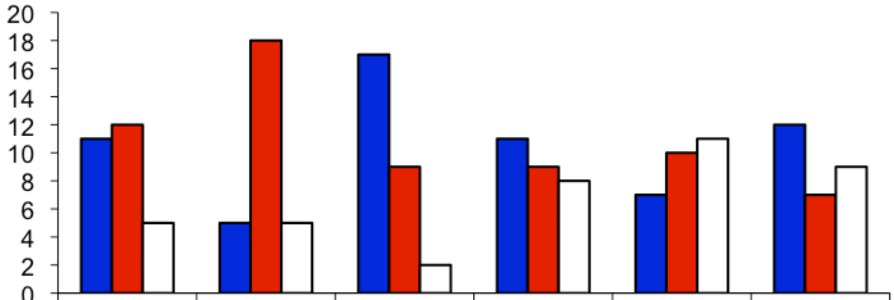
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	4	5	10	6	9	12
No	18	16	12	11	8	6
Blanco	6	7	6	11	11	10

Ítem 1. 22



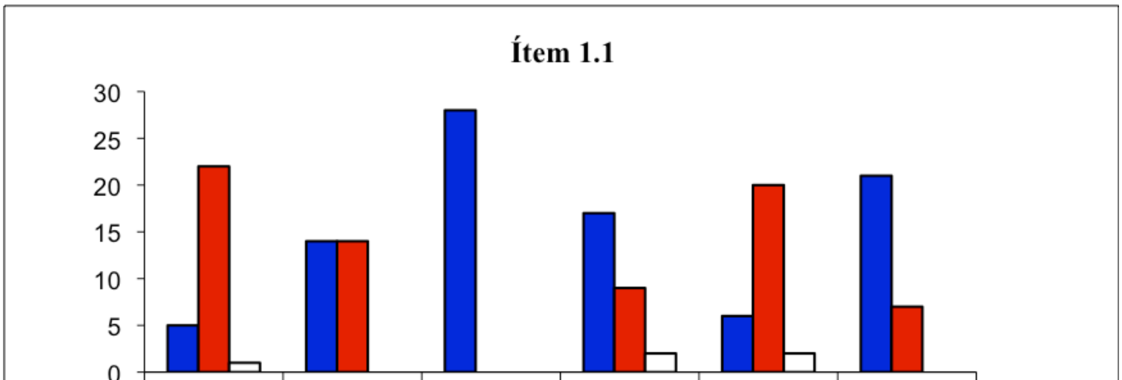
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	5	2	11	8	10	12
No	15	18	10	8	6	5
Blanco	8	8	7	12	12	11

Ítem 1.23

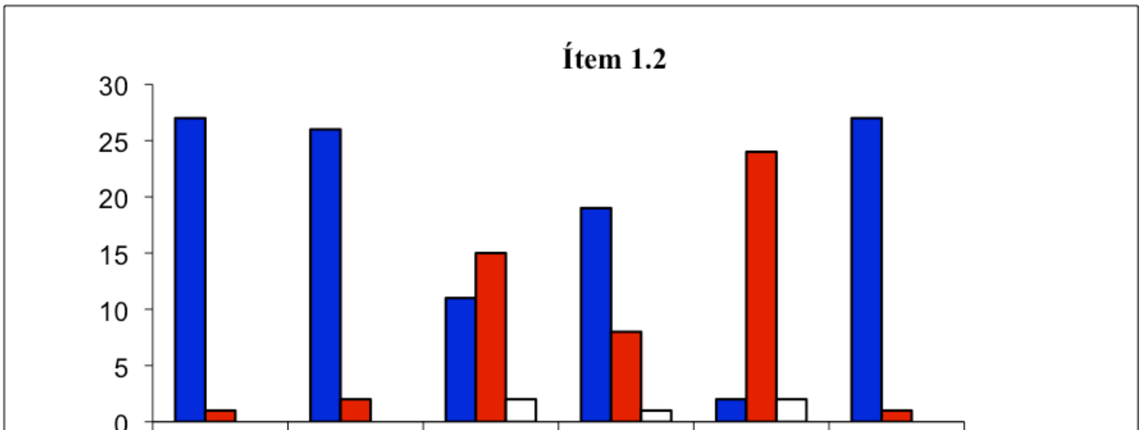


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	11	5	17	11	7	12
No	12	18	9	9	10	7
Blanco	5	5	2	8	11	9

3.3.2 Diagramas de barras correspondientes a las respuestas a la primera pregunta del cuestionario C2 en la fase de revisión

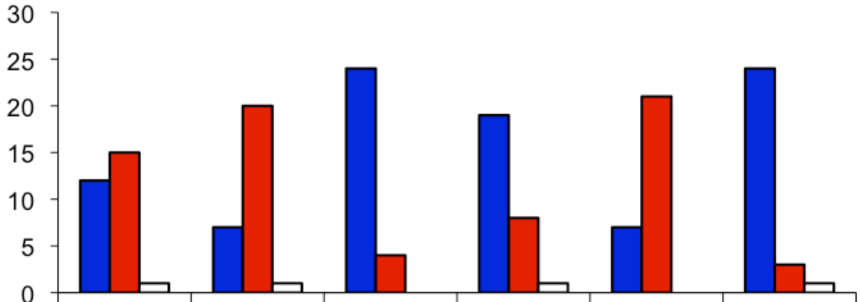


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	5	14	28	17	6	21
No	22	14	0	9	20	7
Blanco	1	0	0	2	2	0



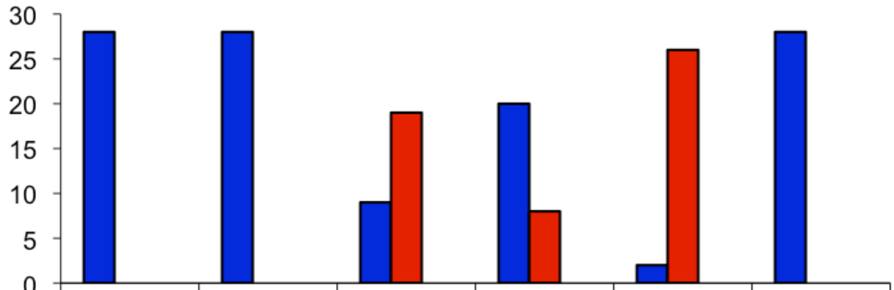
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	27	26	11	19	2	27
No	1	2	15	8	24	1
Blanco	0	0	2	1	2	0

Ítem 1.3



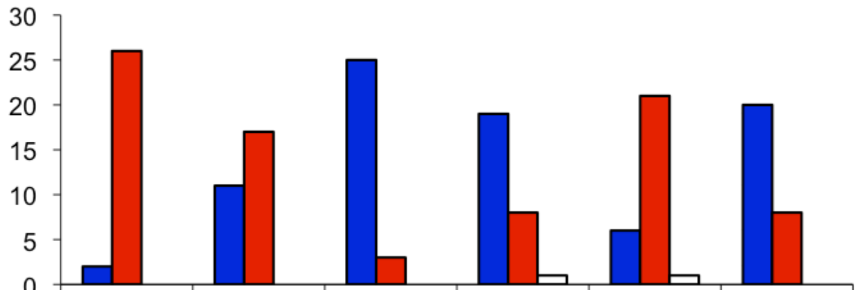
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	12	7	24	19	7	24
No	15	20	4	8	21	3
Blanco	1	1	0	1	0	1

Ítem 1.4



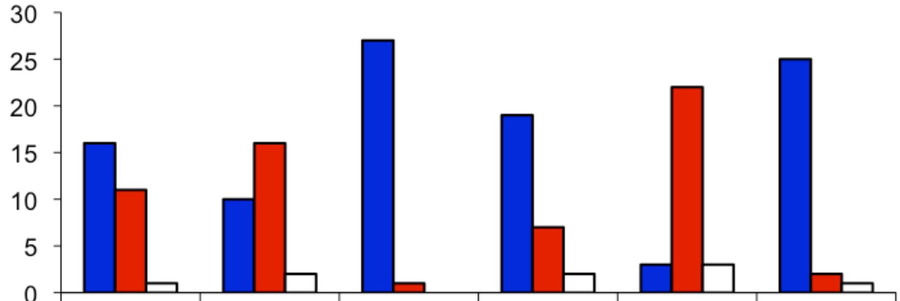
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	28	28	9	20	2	28
No	0	0	19	8	26	0
Blanco	0	0	0	0	0	0

Ítem 1.5



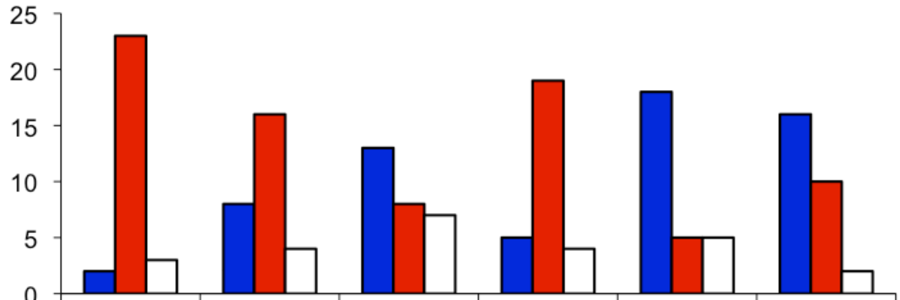
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	2	11	25	19	6	20
No	26	17	3	8	21	8
Blanco	0	0	0	1	1	0

Ítem 1.6



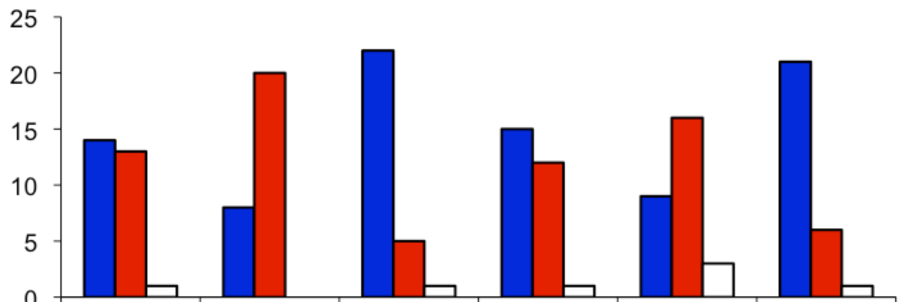
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	16	10	27	19	3	25
No	11	16	1	7	22	2
Blanco	1	2	0	2	3	1

Ítem 1.7

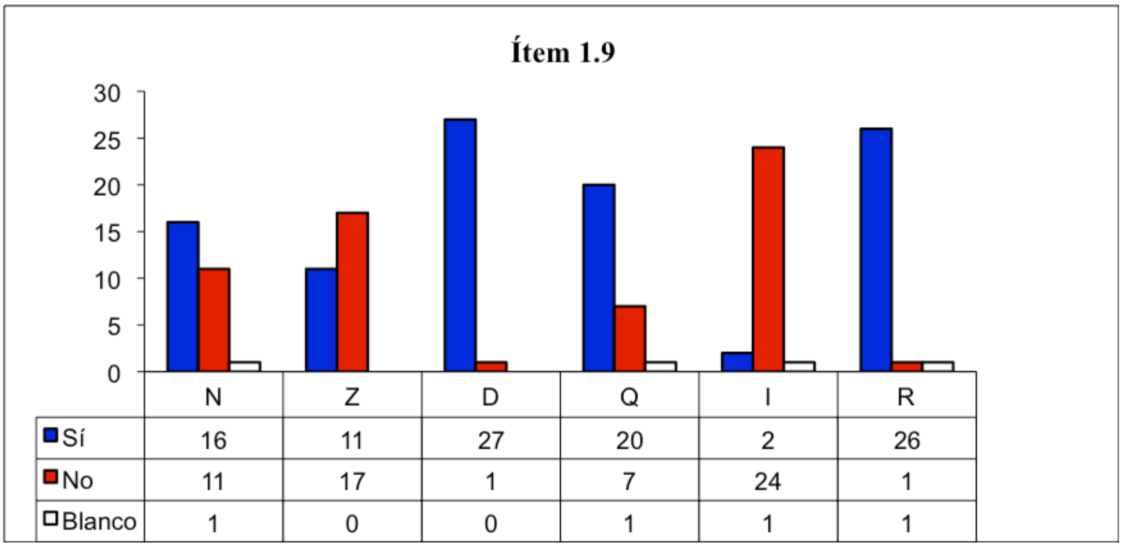


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	2	8	13	5	18	16
No	23	16	8	19	5	10
Blanco	3	4	7	4	5	2

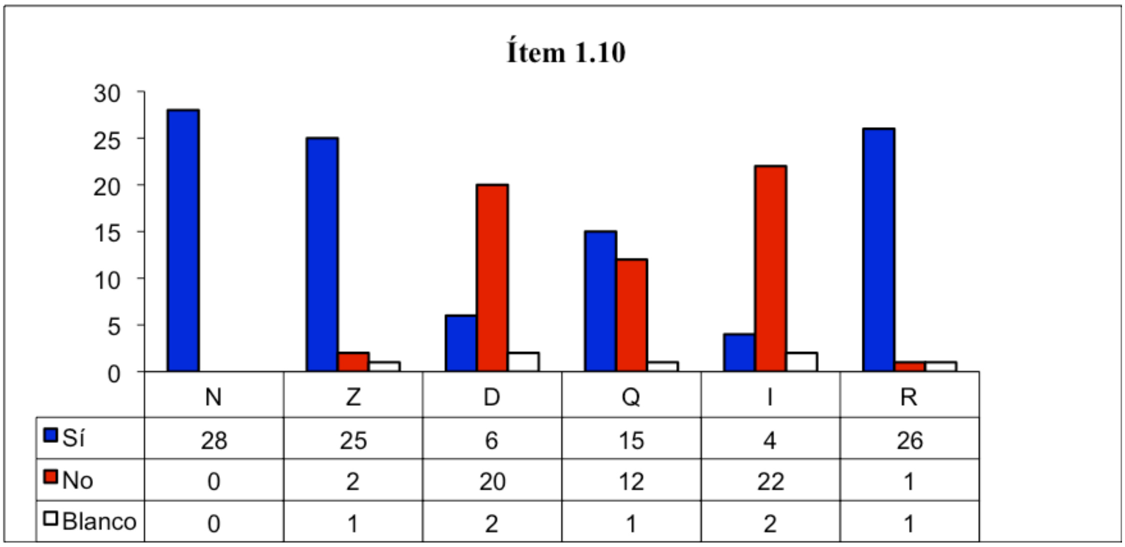
Ítem 1.8



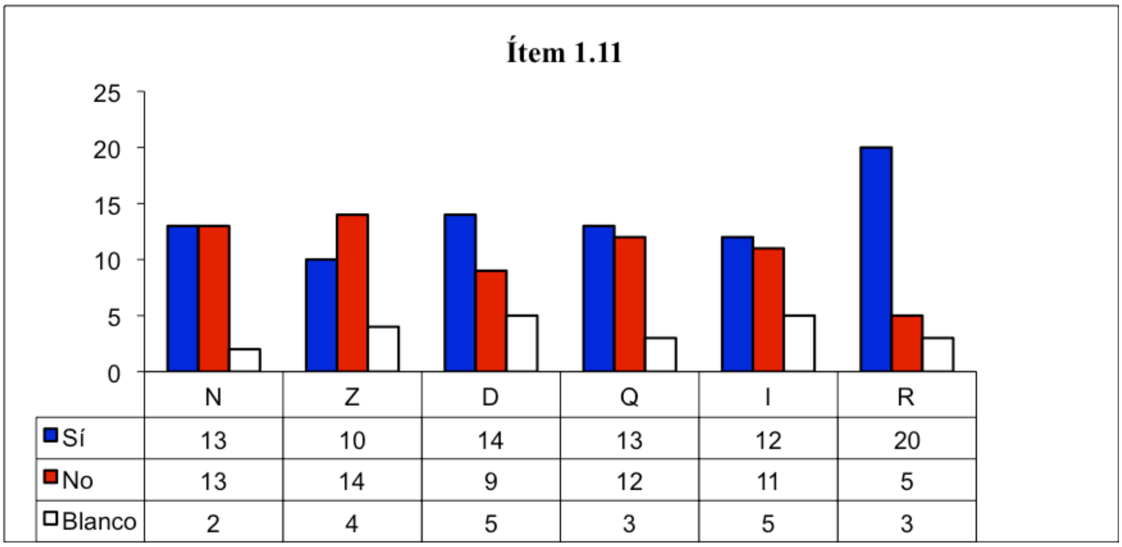
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	8	22	15	9	21
No	13	20	5	12	16	6
Blanco	1	0	1	1	3	1



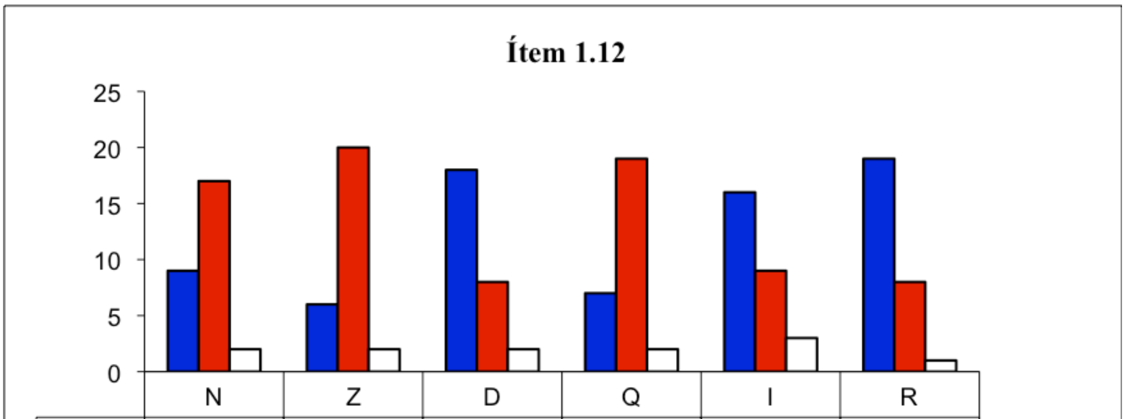
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	16	11	27	20	2	26
No	11	17	1	7	24	1
Blanco	1	0	0	1	1	1



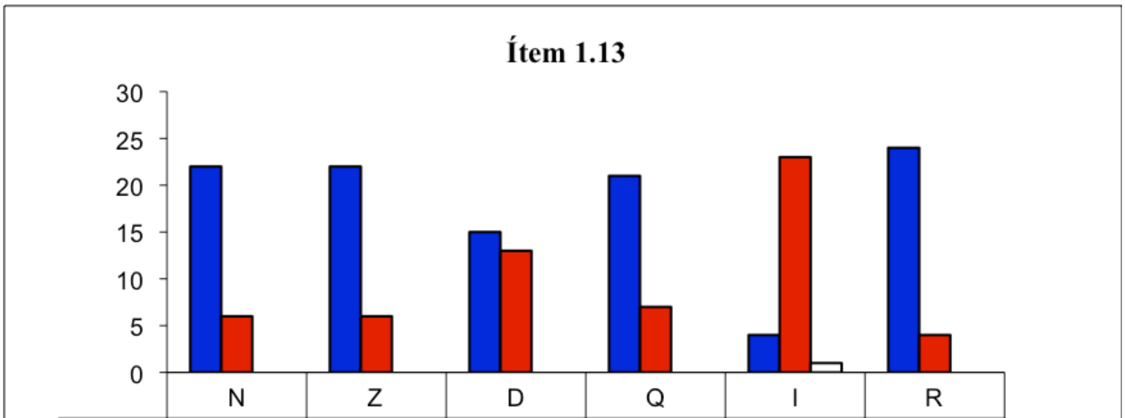
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	28	25	6	15	4	26
No	0	2	20	12	22	1
Blanco	0	1	2	1	2	1



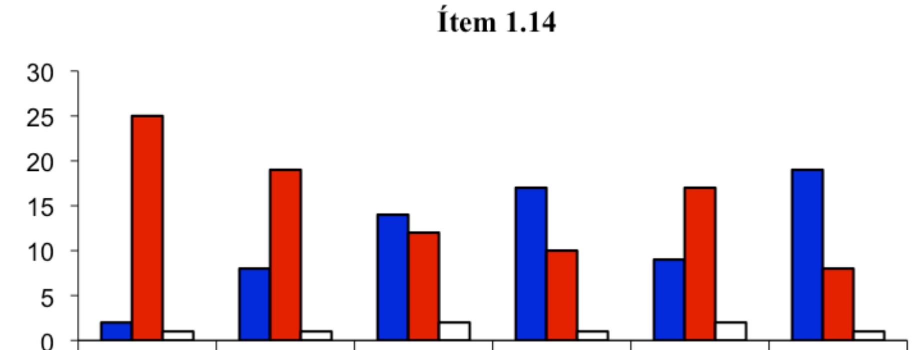
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	13	10	14	13	12	20
No	13	14	9	12	11	5
Blanco	2	4	5	3	5	3



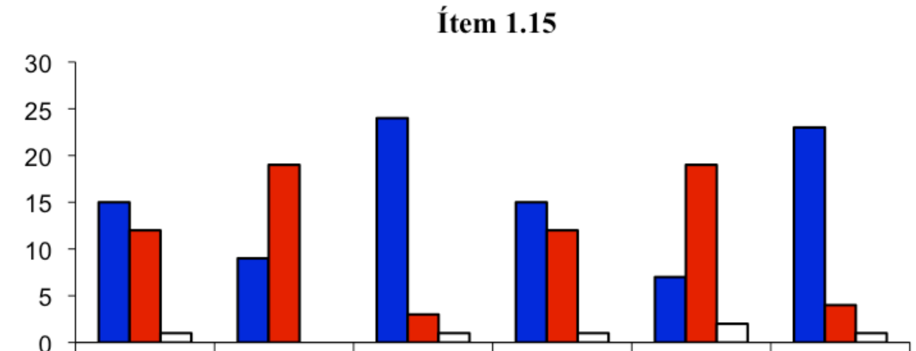
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	9	6	18	7	16	19
No	17	20	8	19	9	8
Blanco	2	2	2	2	3	1



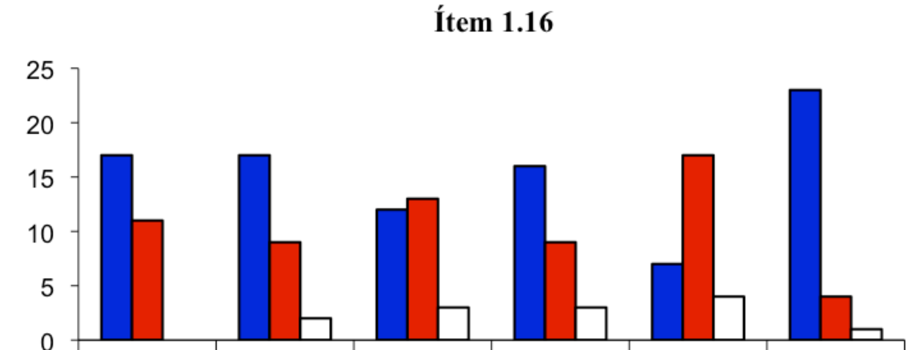
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	22	22	15	21	4	24
No	6	6	13	7	23	4
Blanco	0	0	0	0	1	0



	N	Z	D	Q	I	R
Sí	2	8	14	17	9	19
No	25	19	12	10	17	8
Blanco	1	1	2	1	2	1

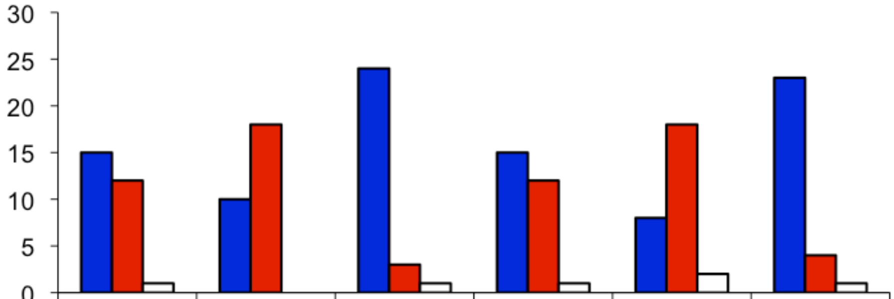


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	9	24	15	7	23
No	12	19	3	12	19	4
Blanco	1	0	1	1	2	1



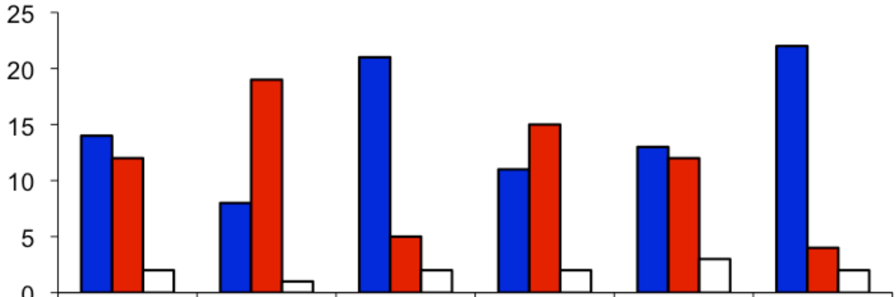
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	17	17	12	16	7	23
No	11	9	13	9	17	4
Blanco	0	2	3	3	4	1

Ítem 1.17



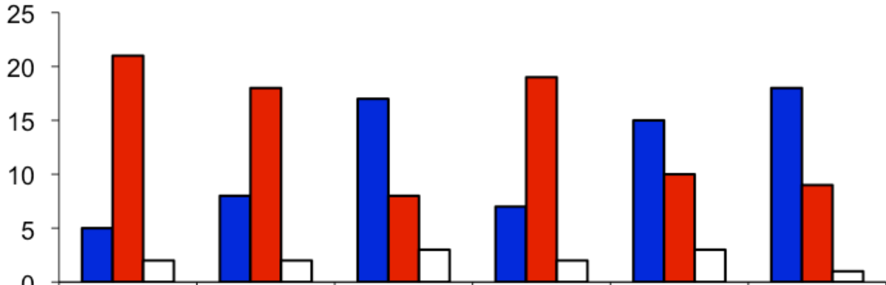
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	15	10	24	15	8	23
No	12	18	3	12	18	4
Blanco	1	0	1	1	2	1

Ítem 1.18



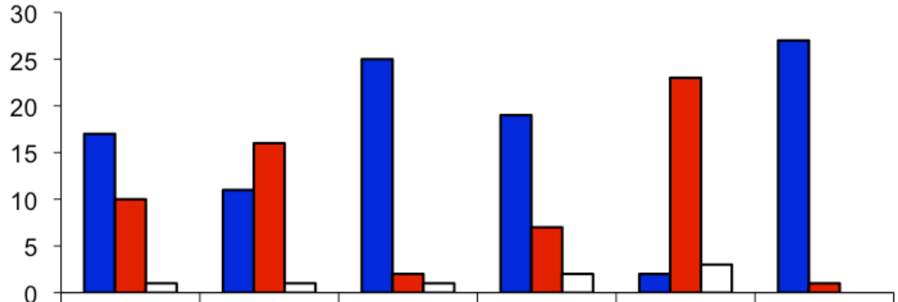
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	14	8	21	11	13	22
No	12	19	5	15	12	4
Blanco	2	1	2	2	3	2

Ítem 1.19



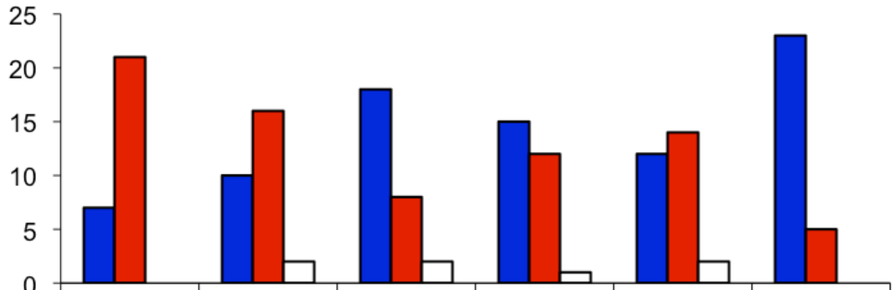
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	5	8	17	7	15	18
No	21	18	8	19	10	9
Blanco	2	2	3	2	3	1

Ítem 1.20



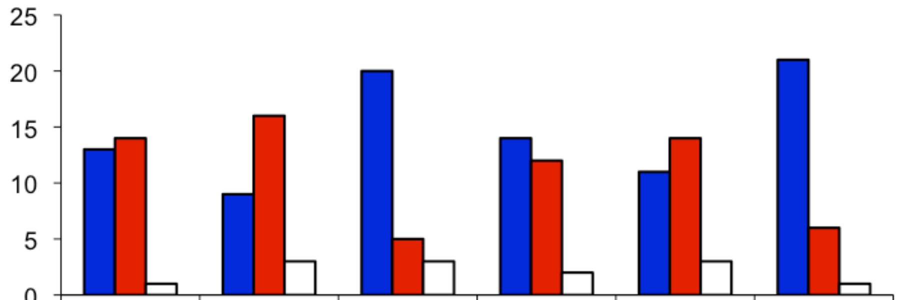
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	17	11	25	19	2	27
No	10	16	2	7	23	1
Blanco	1	1	1	2	3	0

Ítem 1.21

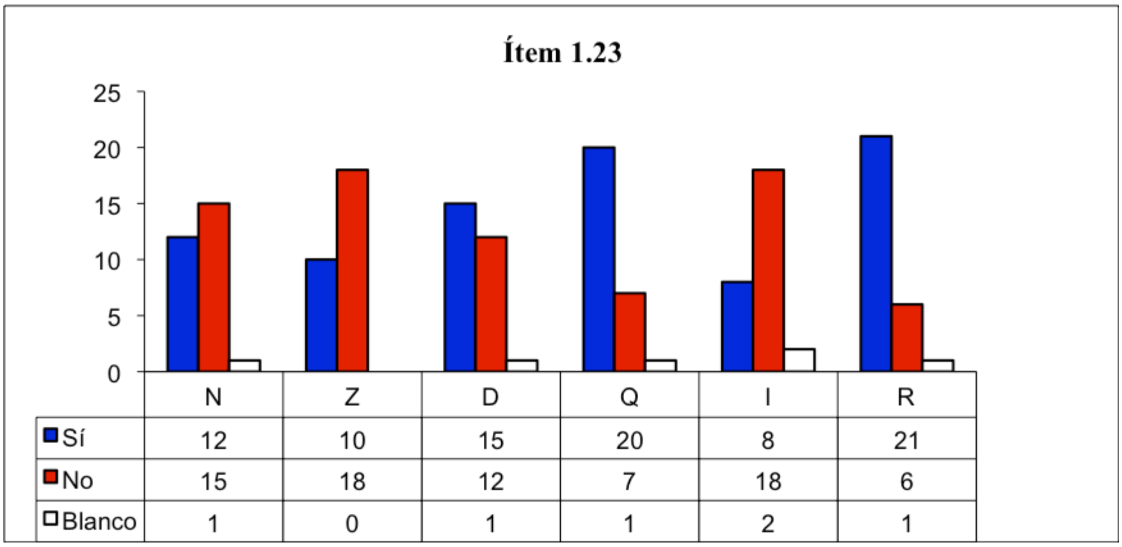


	N	Z	D	Q	I	R
Sí	7	10	18	15	12	23
No	21	16	8	12	14	5
Blanco	0	2	2	1	2	0

Ítem 1. 22



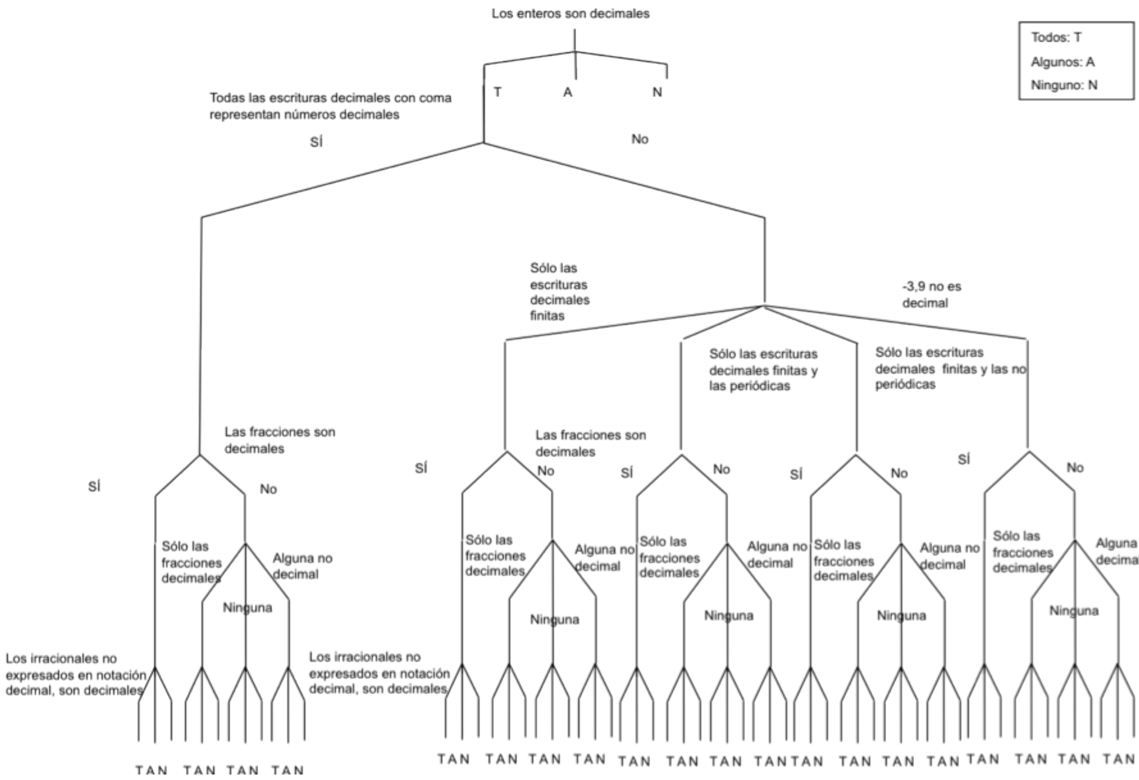
	N	Z	D	Q	I	R
Sí	13	9	20	14	11	21
No	14	16	5	12	14	6
Blanco	1	3	3	2	3	1

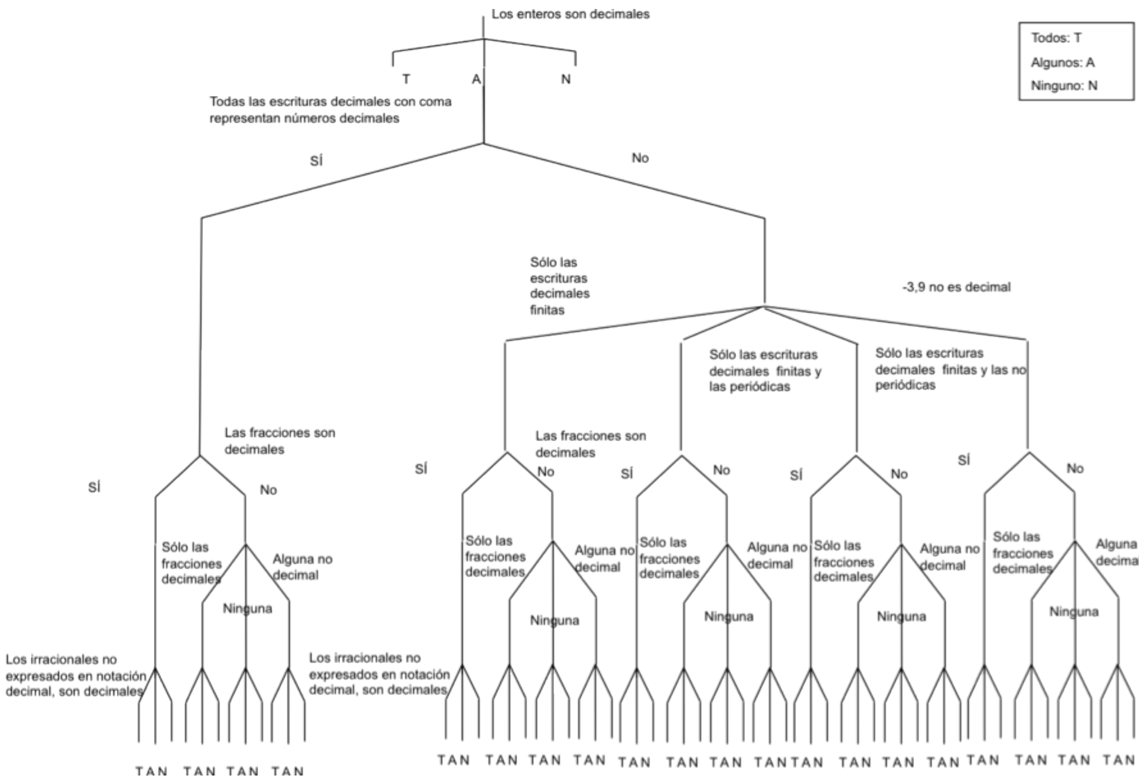

Ítem 1.23
25
20
15
10
5
0
N
Z
D
Q
I
R
Sí
12
10
15
20
8
21
No
15
18
12
7
18
6
Blanco
1
0
1
1
2
1

ANEXO 4

ANEXO 4. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Los siguientes diagramas de árbol se han utilizado para agrupar a los alumnos por comportamientos.





ANEXO 5

ANEXO 5. UNIDADES DE APRENDIZAJE

A continuación, se muestra el desarrollo de las unidades de aprendizaje impartidas en la fase de retroalimentación.

5.1 UNIDAD DE APRENDIZAJE: NÚMEROS, NUMERALES, SISTEMAS NUMÉRICOS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Seguidamente, se expone la relación de contenidos de esta unidad.

5.1.1 Introducción

5.1.2 Concepto de número decimal. Relación de los decimales con los enteros

5.1.3 Los números decimales expresados en el sistema de numeración decimal ampliado

5.1.4 Operaciones con números decimales

5.1.5 La representación de los números decimales en la recta numérica: la recta decimal

5.1.6 Comparación de decimales según otras representaciones

5.1.7 Relación de los números decimales con los racionales

5.1.8 Relación de los números decimales con los reales

5.1.9 Errores que cometen los escolares con los decimales

5.1.10 Algunos materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de los decimales

5.1.11 Actividades

5.1.1 Introducción

Desde el punto de vista histórico, la expresión de valores numéricos no enteros por medio de números decimales (fracciones decimales) es una costumbre que comenzó a introducirse en el último tercio del siglo XVI y que no se generalizó hasta el siglo XVII. Así, antes del siglo XVI, el cociente $3 \div 2$, posiblemente se escribía con el número mixto $1\frac{1}{2}$.

Para Centeno (1988), los árabes ya poseían los números decimales, que facilitaban los cálculos pero, durante toda la Edad Media, se utilizaban más las fracciones (con frecuencia sexagesimales) ordinarias en los cálculos. El redescubrimiento de los números decimales se produjo en el siglo XVI. La transformación social que se produjo en dicho siglo y en el siguiente, con el consiguiente auge del comercio, de la navegación, de los repartos de tierra, todo lo cual requería realizar abundantes cálculos, favoreció el citado redescubrimiento. Los protagonistas de éste y sobre todo de la extensión de los números decimales en Occidente fueron el francés Francois Viète (1540-1603), en su obra *Canon mathematicus seu ad triangula* y el belga Simon Stevin (1548-1620), con su obra *La Disme (La Décima)*, primer libro de la historia que trata únicamente de los números decimales. Para Stevin, *La Disme*, era una especie de Aritmética que permite efectuar todas las operaciones utilizando solamente números enteros. En ella, explica como se pueden hacer las cuatro operaciones básicas con números decimales, si bien indica que el único problema consiste en elegir bien, al final de la operación, la parte entera. También señala que en su Obra no hay ningún número "roto", es decir, no aparece ninguna fracción.

En 1616, en la traducción de una obra del escocés John Napier (1550-1617), las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria. Napier propuso un punto o una coma como signo de separación decimal: el punto se consagró en los países anglosajones, pero en muchos otros países europeos como, por ejemplo, España, se continúa utilizando la coma decimal.

Con respecto al tratamiento de los decimales en Primaria pueden argumentarse distintas razones que lo justifique, a saber:

a) La importancia social de estos números. Los decimales se han convertido en los últimos años en uno de los tópicos matemáticos con más presencia en la resolución de problemas de la vida cotidiana y laboral. Por ejemplo, basta abrir un periódico o una Web por las secciones de economía, deporte, salud, etc. para encontrarnos con información que contiene números decimales.

b) El creciente uso de calculadoras y ordenadores que proporcionan los resultados de los cálculos, en general, expresados con números decimales.

c) El contexto tan importante que constituyen, en el que se interconectan distintos ámbitos de la Matemática escolar (números y medida) y de otras áreas curriculares (Conocimiento del Medio).

d) El papel fundamental que desempeñan en la construcción de los sistemas numéricos y de representación decimal. Los números decimales se constituyen en aproximaciones de los números reales.

5.1.2 Concepto de número decimal. Relación de los decimales con los enteros

Hemos visto que la división de enteros, en general, no es posible. Sabemos que, por ejemplo, dividir 1 por 2, no es posible, ya que no existe un número entero que multiplicado por 2 dé 1. De igual manera, la ecuación, $b \cdot x = a;\ b \neq 0$, no tiene, en general, solución en **Z**. La solución es el cociente, $a \div b$.

Para solucionar este problema, nos proponemos extender el conjunto de los enteros añadiendo unos nuevos números que son los cocientes de esas divisiones.

En este tema vamos a considerar las ecuaciones de la forma $10^n \cdot x = a;\ a \in Z\ y\ n \in N$, que tienen solución en el Sistema de Representación Decimal.

Por ejemplo:

$10^2 \cdot x = 2$ tiene como solución el cociente $2 \div 10^2$. Pero, sabemos que hay otras ecuaciones con la misma solución que la del ejemplo. Basta con multiplicar ambos miembros de la ecuación por una potencia de 10. Las ecuaciones que se obtienen son equivalentes, es decir, tienen la misma solución:

$$10^2 \cdot x = 2;\ x = 2 \div 10^2$$

$$10^3 \cdot x = 20;\ x = 20 \div 10^3$$

$$10^4 \cdot x = 200;\ x = 200 \div 10^4$$

……………………..

Cada cociente anterior se puede representar mediante un símbolo, que denominamos fracción decimal, esto es:

$$10^2 \cdot x = 2\,;\ x = \frac{2}{10^2}$$

$$10^3 \cdot x = 20\,;\ x = \frac{20}{10^3}$$

$$10^4 \cdot x = 200\,; x = \frac{200}{10^4}$$

…………………..

Así, todas esas fracciones decimales representan al mismo cociente y, por tanto, se puede decir que son equivalentes entre sí. Nótese que si tomamos dos fracciones decimales de éstas, por ejemplo, $\frac{2}{10^2}\ y \frac{20}{10^3}$, se verifica que:

$$2 \cdot 10^3 = 10^2 \cdot 20.$$

El resultado anterior se puede expresar de la forma siguiente, y se dice que son fracciones equivalentes entre sí:

$$\frac{2}{10^2} = \frac{20}{10^3} \Leftrightarrow 2 \cdot 10^3 = 10^2 \cdot 20$$

De esta manera, todas las fracciones decimales equivalentes entre sí representan el mismo número, la solución de la ecuación $10^2 \cdot x = 2$, que llamaremos el número decimal $\left[\frac{2}{10^2}\right]$. Así:

$$\left[\frac{2}{10^2}\right] = \left\{\frac{2}{10^2}, \frac{20}{10^3}, \frac{200}{10^4}, \ldots\right\}$$

Se puede elegir como representante de las fracciones equivalentes cualquiera de las de la familia.

En general, la solución, $a \div 10^n$, de la ecuación de la forma $10^n \cdot x = a;\ a \in Z\ y\ n \in N$, la podemos representar por el símbolo denominado fracción decimal:

$$\frac{a}{10^n}; a \in Z\ \ y\ \ n \in N.$$

Los términos *a* y 10^n reciben el nombre de numerador y denominador de la fracción decimal, respectivamente.

El número decimal, $\left[\frac{a}{10^n}\right]$, será la familia de fracciones equivalentes a $\frac{a}{10^n}$,

o sea: $\left[\frac{a}{10^n}\right] = \left\{\frac{b}{10^m} \,/\, a \cdot 10^m = b \cdot 10^n\right\}$

Al conjunto de todos los números decimales lo denominaremos **D**.

Si *a* y 10^n tienen un divisor común (el mayor posible), la fracción puede reducirse a otra cuyo denominador será divisor de 10^n. Esta fracción recibe el nombre de fracción decimal irreducible. Por ejemplo:

$$\frac{4}{100} = \frac{4:4}{100:4} = \frac{1}{25}.$$

Se puede convenir en tomar como representante de la familia de fracciones decimales equivalentes entre sí a la fracción decimal irreducible. En nuestro ejemplo:

$$\left[\frac{2}{10^2}\right] = \frac{1}{50}$$

Los números enteros son también números decimales (Figura1). Basta considerar la solución de la ecuación de la forma: $10^0 \cdot x = a; \quad a \in Z$.

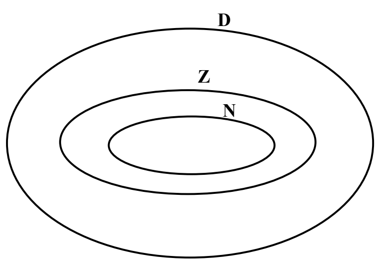


Figura 1

La explicación anterior está basada en el punto de vista algebraico. Sin embargo, desde el punto de vista histórico, los números racionales, y por tanto los decimales, tienen su origen en la medida de cantidades de magnitud. Se elige una unidad de medida de forma arbitraria y se cuenta el número de esas unidades contenidas en la cantidad que deseamos medir. Ese número puede ser un entero, pero en la mayoría de las ocasiones dicha cantidad está comprendida entre dos múltiplos consecutivos de la unidad. Cuando esto ocurra, se introducen nuevas subunidades por subdivisión de la unidad inicial en un cierto número n (potencias de 10 o divisores de éstas, para los decimales) de partes iguales. En el simbolismo de las Matemáticas una subunidad obtenida dividiendo la unidad inicial en n partes iguales se denota como $\frac{1}{n}$; y si una cantidad contiene exactamente m de estas subunidades, su medida se representa por el símbolo $\frac{m}{n}$. Este símbolo se llama fracción o razón. Cuando este símbolo quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medidas y a las cantidades medidas fue considerado como un número, en el mismo plano que los naturales. Si este hecho no ocurre en el aprendizaje de este concepto se da la situación de que algunos alumnos consideren sólo como decimales a los positivos. Observa que existen decimales negativos.

$$
\begin{array}{cccccc}
\cdots & -\frac{4}{10^0} & -\frac{3}{10^0} & -\frac{2}{10^0} & -\frac{1}{10^0} & \cdots \\
 & -\frac{4}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & \\
 & -\frac{4}{100} & -\frac{3}{100} & -\frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \\
 & -\frac{4}{1000} & -\frac{3}{1000} & -\frac{2}{1000} & -\frac{1}{1000} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Actividad

¿Es $\frac{1}{2}$ un número decimal?

En efecto: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, es solución de la ecuación $2 \cdot x = 1 \Leftrightarrow 10 \cdot x = 5$. También se puede decir que es decimal porque 2 es divisor de 10^n.

¿Es $\frac{1}{3}$ un número decimal?

No, porque no es solución de una ecuación de la forma:

$$10^n \cdot x = a;\ a \in Z \ \ y \ \ n \in N\,.$$

Asimismo, no es decimal porque 3 no es divisor de *10^n^*.

5.1.3 Los números decimales expresados en el sistema de numeración decimal ampliado

5.1.3.1 Notación decimal

En 1585 el matemático belga Simon Stevin, en su libro *La Disme*, propuso fraccionar la unidad en décimas, centésimas, milésimas, etc. Para medir cantidades de magnitud menores que la unidad. Así, el resultado de una medida se expresa mediante un número entero y fracciones decimales. Por ejemplo:

$5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2}$ metros, en el caso de la magnitud longitud.

Del mismo modo, Stevin consideró que, en lugar de usar los denominadores para expresar las partes de la unidad en la parte fraccionaria del número, se podría adoptar un criterio de posición. En la actualidad, se coloca una coma a la derecha de las unidades y se escriben a continuación los numeradores de las fracciones decimales siguiendo el orden de décimas, centésimas, milésimas, etc., poniendo ceros cuando falta alguna de esas fracciones. Por ejemplo:

$$5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{3}{10^4} = 5{,}1203$$

De esta manera para las fracciones decimales y, por tanto, para los números decimales, podemos usar un sistema de representación decimal posicional equivalente al definido para los números enteros. Cada orden de unidad es 10 veces mayor (o menor) que el orden inmediato inferior (o superior). La parte situada a la izquierda de la coma es “la parte entera” del número y la situada a la derecha de la coma “la parte decimal”.

Asimismo, todo número representado con notación decimal, $-3{,}25$, se puede expresar con notación fraccionaria, sin más que considerar como numerador el número sin la coma y, como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal, $\frac{-325}{100}$.

Los números enteros, todos ellos números decimales, se pueden representan en este sistema por expresiones decimales con parte decimal igual a cero. Por ejemplo: $$4 = \frac{4}{10^0} = 4,0 = 4,00 = 4,000$$ Sin embargo, en la práctica esta notación de los enteros es poco frecuente.

5.1.3.2 Obtención de expresiones decimales: técnica de la división decimal

Para obtener la expresión decimal de un número decimal vamos a utilizar la técnica de la división decimal. Este procedimiento se basa en la relación entre fracción y división entera. Veamos un ejemplo:

Supongamos el número decimal $\frac{15}{4}$. En este caso, como 15 es mayor que 4, podemos obtener la parte entera de la expresión efectuando la división entera de 15 por 4, es decir:

$$\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

El siguiente paso consiste en hallar las décimas y hacemos lo siguiente:

$$\frac{3}{4} = \frac{30}{40} = \frac{1}{10}\cdot\frac{30}{4} = \frac{1}{10}\left(\frac{28+2}{4}\right) = \frac{1}{10}\left(7+\frac{2}{4}\right) = \frac{7}{10} + \frac{2}{40}$$

Ahora calculamos las centésimas:

$$\frac{2}{40} = \frac{20}{400} = \frac{1}{100}\cdot\frac{20}{4} = \frac{1}{100}\cdot 5$$

Con lo que ya tenemos expresado el número decimal en notación decimal:

$$\frac{15}{4} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3,75$$

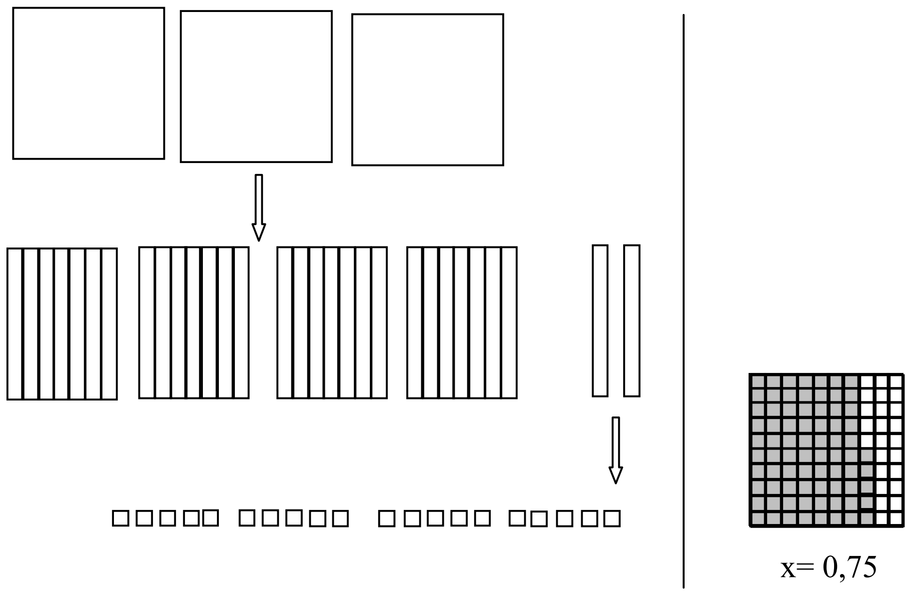
Esta es la justificación de la división decimal. Es el procedimiento conocido por el alumnado para obtener cifras decimales, añadiendo ceros a los restos para seguir dividiendo.

$$\begin{array}{l|l} 15 & 4 \\ \hline \;\;30 & 3,75 \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Observa que la expresión decimal, al igual que la fraccionaria, de un número son formas de representación, por lo que no hay que confundir el número con la representación.

Actividad

¿Cómo repartir equitativamente 3 tabletas de chocolate entre 4 compañeros? (La solución de la ecuación: $4 \cdot x = 3$)

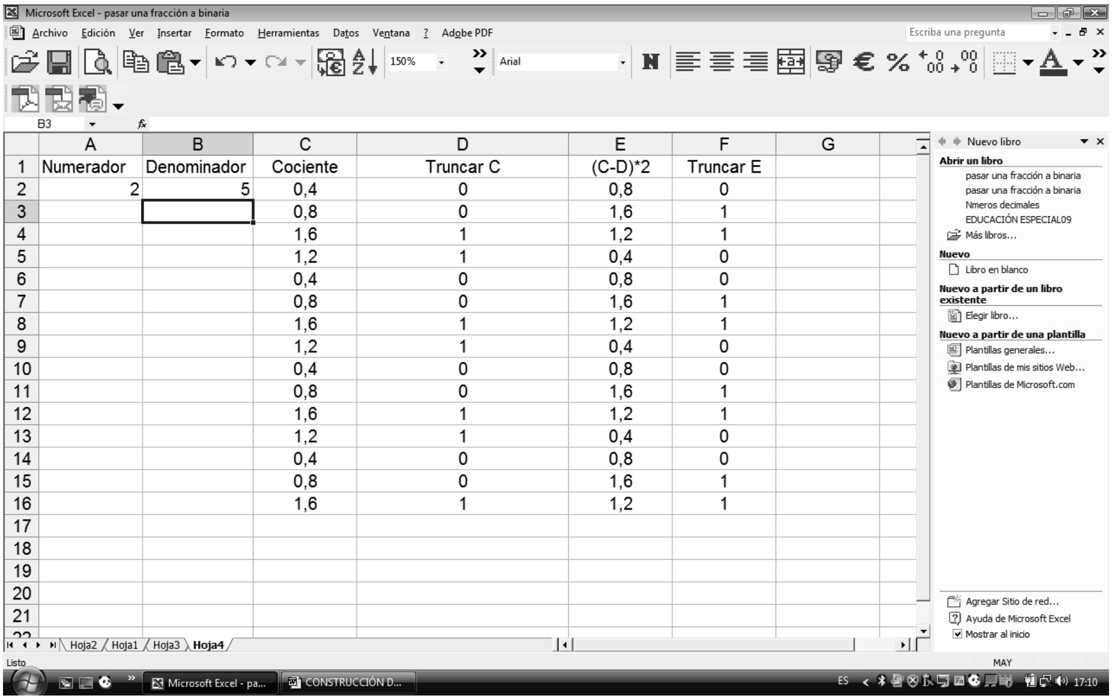


5.1.3.3 Interés de la notación decimal

El interés de esta notación se debe a la posibilidad de utilizar los algoritmos de cálculo definidos para los números naturales. Desde el momento en que la parte decimal de un número decimal se construye siguiendo las mismas reglas que se usan para la parte entera, podemos trasladar los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división entera al caso de los números decimales sin más que añadir algunas consideraciones acerca de la colocación de la coma. Esto permite abreviar los cálculos con fracciones decimales. Si además el sistema de unidades medida es decimal, todas las medidas pueden expresarse mediante números decimales y las operaciones entre ellas se hacen más fáciles (Véase el anexo).

5.1.3.4 Otras notaciones: ejemplos

En la tabla que se adjunta tenemos el resultado de convertir, mediante un convertidor programado con Excel, una fracción decimal menor que la unidad, $\frac{2}{5}$, en una expresión binaria, 0,0110011001100….. Las cifras que están a la derecha de la coma de la expresión coinciden con los elementos de la columna F. En este caso, hay infinitas cifras que forman periodo. Por lo tanto, mostramos otra forma de representación de un número decimal en el sistema binario de numeración.

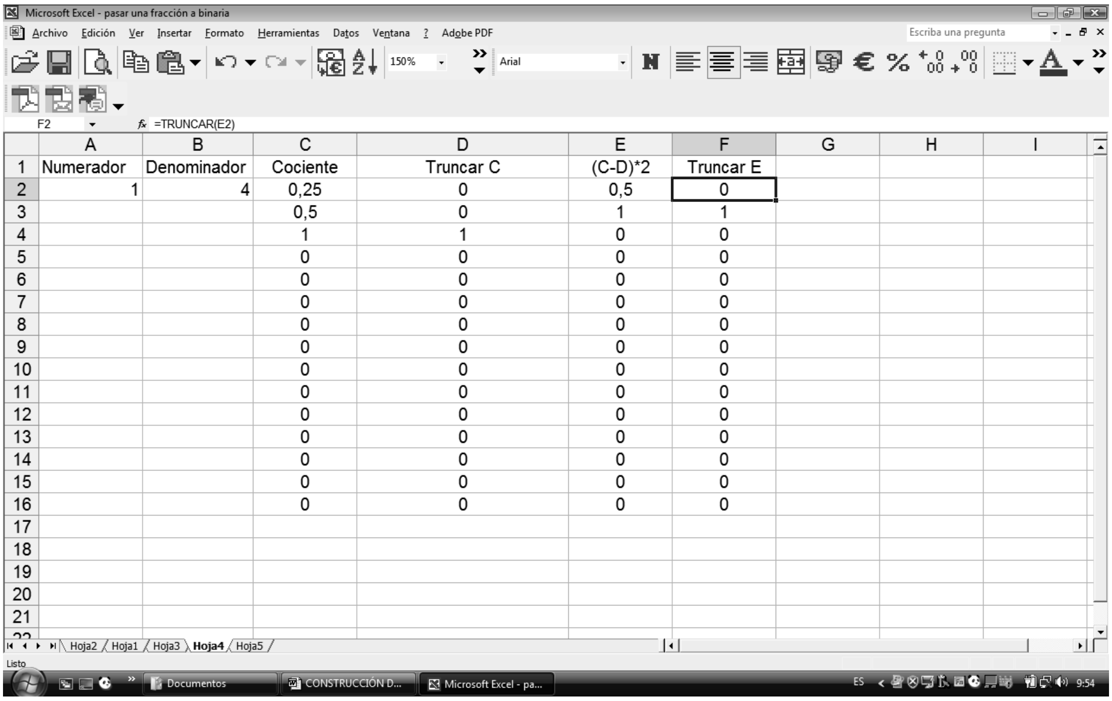


	A	B	C	D	E	F	G
1	Numerador	Denominador	Cociente	Truncar C	(C-D)*2	Truncar E	
2	2	5	0,4	0	0,8	0	
3			0,8	0	1,6	1	
4			1,6	1	1,2	1	
5			1,2	1	0,4	0	
6			0,4	0	0,8	0	
7			0,8	0	1,6	1	
8			1,6	1	1,2	1	
9			1,2	1	0,4	0	
10			0,4	0	0,8	0	
11			0,8	0	1,6	1	
12			1,6	1	1,2	1	
13			1,2	1	0,4	0	
14			0,4	0	0,8	0	
15			0,8	0	1,6	1	
16			1,6	1	1,2	1	
17							
18							
19							
20							
21							

Por ello:

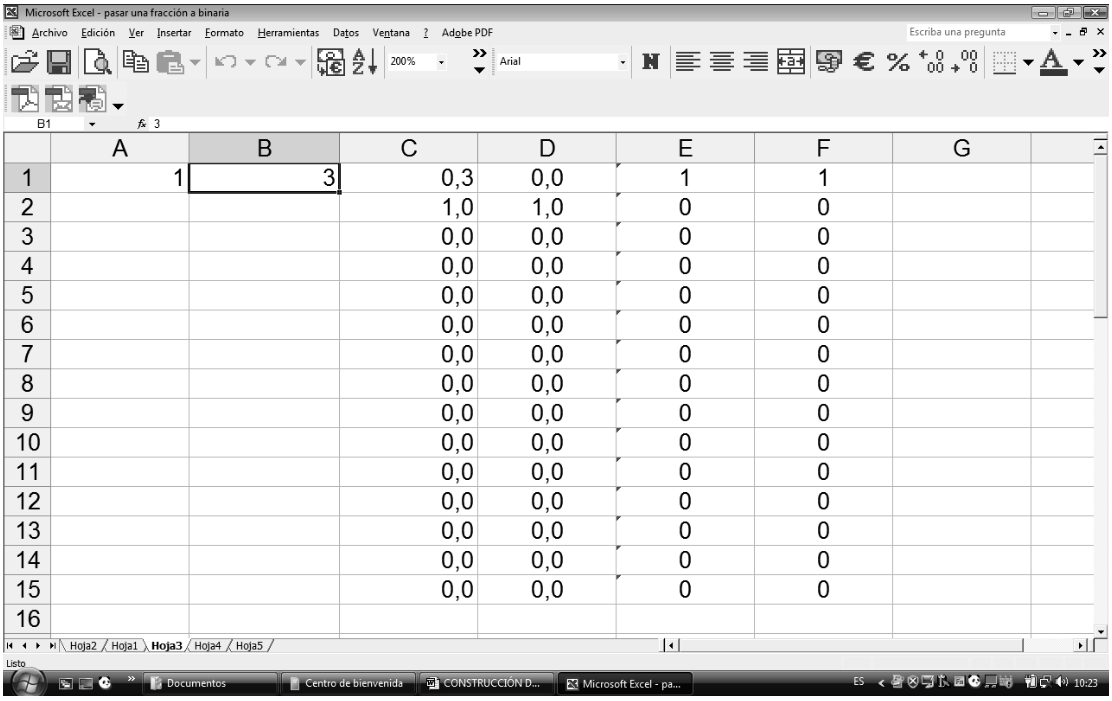
$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4 = 0,0110011001100... = 0,0\overline{1100}_{(2}.$$

Si ahora consideramos $\frac{1}{4}$, tenemos que su representación en el sistema binario de numeración es $0,01_{(2}$. Observa este resultado en la tabla siguiente.



	A	B	C	D	E	F
1	Numerador	Denominador	Cociente	Truncar C	(C-D)*2	Truncar E
2	1	4	0,25	0	0,5	0
3			0,5	0	1	1
4			1	1	0	0
5			0	0	0	0
6			0	0	0	0
7			0	0	0	0
8			0	0	0	0
9			0	0	0	0
10			0	0	0	0
11			0	0	0	0
12			0	0	0	0
13			0	0	0	0
14			0	0	0	0
15			0	0	0	0
16			0	0	0	0

Ahora, con un convertidor a una notación en base tres, expresamos el número no decimal, 0,3333…, con una expresión "ternaria" con un número finito de cifras: $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,1_{(3}$.



	A	B	C	D	E	F
1	1	3	0,3	0,0	1	1
2			1,0	1,0	0	0
3			0,0	0,0	0	0
4			0,0	0,0	0	0
5			0,0	0,0	0	0
6			0,0	0,0	0	0
7			0,0	0,0	0	0
8			0,0	0,0	0	0
9			0,0	0,0	0	0
10			0,0	0,0	0	0
11			0,0	0,0	0	0
12			0,0	0,0	0	0
13			0,0	0,0	0	0
14			0,0	0,0	0	0
15			0,0	0,0	0	0

Actividad

a) ¿Es correcto decir que un número es decimal porque lleva coma?

b) ¿ Es correcto decir que un número es decimal si tiene cifras después de la coma? y ¿si tiene un número finito de cifras después de la coma?
c) ¿ Es correcto que decir que un número no es decimal si después de la coma hay infinitas cifras que forman periodo?

5.1.4 Operaciones con números decimales

Supongamos inicialmente que las operaciones que se definen a continuación verifican la propiedad de que el resultado no depende de la fracción decimal que se elija como representante de la familia de fracciones equivalentes. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{10}+\frac{75}{100}=\frac{50}{100}+\frac{750}{1000}=\frac{50}{100}+\frac{75}{100}, \text{ etc.}$$

5.1.4.1 Definiciones

Las operaciones de adición y de multiplicación, que prolongan las de **Z,** se pueden definir de la manera siguiente:

$$\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^m}=\frac{a\cdot 10^m}{10^{n+m}}+\frac{b\cdot 10^n}{10^{n+m}}=\frac{a\cdot 10^m+b\cdot 10^n}{10^{n+m}}$$

$$\frac{a}{10^n}\cdot\frac{b}{10^m}=\frac{a\cdot b}{10^{n+m}}$$

5.1.4.2 Propiedades

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN **D**	
Conmutativa:	$\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^m}=\frac{b}{10^m}+\frac{a}{10^n}$
Asociativa:	$\left(\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^m}\right)+\frac{c}{10^p}=\frac{a}{10^n}+\left(\frac{b}{10^m}+\frac{c}{10^p}\right)$
Elemento neutro:	$\frac{a}{10^n}+\frac{0}{10^n}=\frac{0}{10^n}+\frac{a}{10^n}=\frac{a}{10^n}$
Elemento simétrico:	$\frac{a}{10^n}+\frac{-a}{10^n}=\frac{-a}{10^n}+\frac{a}{10^n}=\frac{0}{10^n}=0$

La sustracción de dos números decimales se define como:

$$\frac{a}{10^n}-\frac{b}{10^m}=\frac{a\cdot 10^m-b\cdot 10^n}{10^{n+m}}$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN **D**	
Conmutativa:	$\frac{a}{10^n}\cdot\frac{b}{10^m}=\frac{b}{10^m}\cdot\frac{a}{10^n}$
Asociativa:	$\left(\frac{a}{10^n}\cdot\frac{b}{10^m}\right)\cdot\frac{c}{10^p}=\frac{a}{10^n}\cdot\left(\frac{b}{10^m}\cdot\frac{c}{10^p}\right)$
Elemento neutro:	$\frac{a}{10^n}\cdot\frac{1}{10^0}=\frac{1}{10^0}\cdot\frac{a}{10^n}=\frac{a}{10^n}$
Distributiva de la multiplicación respecto de la adición	$\frac{a}{10^n}\cdot\left(\frac{b}{10^m}+\frac{c}{10^p}\right)=\frac{a}{10^n}\cdot\frac{b}{10^m}+\frac{a}{10^n}\cdot\frac{c}{10^p}$

Un concepto interesante en este tema es el del inverso de un número decimal. Un número decimal es el inverso de otro si al multiplicarlos se obtiene la unidad ($1=\frac{1}{10^0}$). Hay números decimales que no tienen inverso dentro del conjunto **D**. Por ejemplo:

$\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$; $\frac{75}{100}\cdot\frac{100}{75}=1$; pero, $\frac{100}{75}$ no es un decimal, porque 75 no es divisor de 10^n.

La división de dos números decimales se define de la forma siguiente:

$$\frac{a}{10^n}:\frac{b}{10^m}=\frac{a\cdot 10^m}{b\cdot 10^n};\quad b\neq 0$$

La división de números decimales no es una operación cerrada en **D**, esto significa que el resultado no es siempre un decimal. Por ejemplo:

$-\frac{2}{10}:\frac{15}{10}=-\frac{20}{150}$, porque 150 no es divisor de 10^n.

5.1.4.3 Las operaciones en el SND ampliado

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN	EJEMPLO	JUSTIFICACIÓN
El algoritmo consiste en transformar los dos números decimales para que tengan el mismo números de cifras después de la coma, añadiendo ceros a la derecha del número que tenga la parte decimal más corta. Por lo tanto, si se disponen los dos números en columnas, la coma debajo de la coma, sólo queda aplicar el algoritmo habitual de la adición o sustracción de números naturales.	$259,3+183,42=$ $\begin{array}{r} 259,30 \\ +183,42 \\ \hline 442,72 \end{array}$	$\frac{2593}{10}+\frac{18342}{100}=\frac{25930}{100}+\frac{18342}{100}=$ $=\frac{25930+18342}{100}=\frac{44272}{100}$

MULTIPLICACIÓN	EJEMPLO	JUSTIFICACIÓN
Consiste en realizar la multiplicación de los dos números como si fueran enteros, prescindiendo de la coma, para colocar ésta al final, contando, a partir de la derecha, el número de cifras igual a la suma de las cifras de las partes decimales de los dos factores.	$\begin{array}{r} 1 \\ 3,2 \\ x\ \ 0,5 \\ \hline 1,60 \end{array}$ Observa que la multiplicación de decimales no implica siempre aumento.	$3,2\cdot 0,5=\frac{32}{10}\cdot\frac{5}{10}=$ $=\frac{32\cdot 5}{10\cdot 10}=\frac{32\cdot 5}{100}$

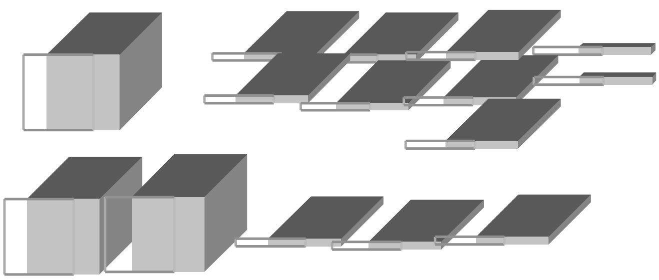
DIVISIÓN	EJEMPLO	JUSTIFICACIÓN
La división de dos decimales se puede reducir a la de un dividendo decimal y un divisor decimal entero, ya que si el divisor tuviera cifras decimales se puede transformar en entero multiplicando por la potencia de diez adecuada ambos números. El algoritmo que se aplica es el mismo que el de la división entera. Se traslada la coma al cociente cuando se la encuentra en el dividendo. Cuando se agotan las cifras del dividendo se puede continuar bajando ceros.	$253,2 \;\lfloor 40$ $132 \quad 6,33$ 120 00 $0,6 \;\lfloor 0,5 \Leftrightarrow 6 \;\lfloor 5$ $10 \quad 1,2$ 0 La división no implica disminución. $12\;0 \lfloor 1,5 \Rightarrow 1200 \;\lfloor 15$ $000 \quad 80$	Si multiplicamos el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía.

Actividad

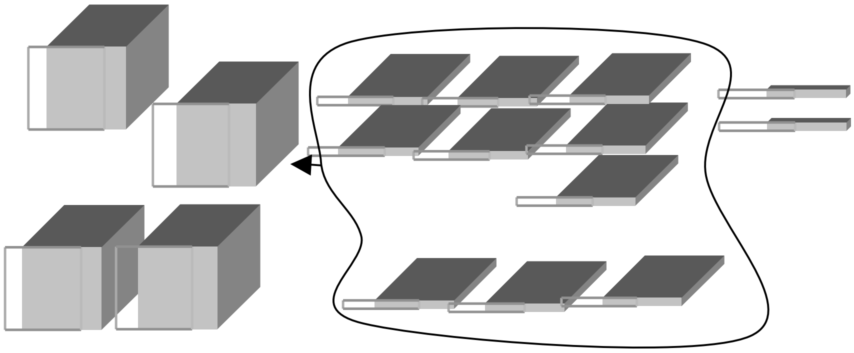
¿Cómo hacer una suma de decimales con los Bloques Multibásicos de Dienes?

Hay que considerar que la unidad está representada por el bloque. La placa representa a la décima, la barra a la centésima y el cubito a la milésima. Supongamos ahora que queremos realizar la suma: $2,3+1,72=$

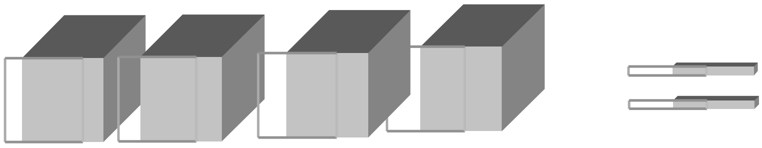
1er paso. Representamos los sumandos:



2º paso. Unir las piezas y reagrupar.



3$^{\underline{er}}$ paso. Se representa el resultado: 4,02.



Y si la unidad está ahora representada por la placa, ¿cómo se resuelve $2,3+1,72=?$

Prueba con otros ejemplos. Utiliza los Bloques de base diez virtuales de la página Web siguiente: http//nlvm.usu.edu.

¿Cómo se hace, con dichos Bloques, la resta: $2,24-1,05=?$

5.1.5 La representación de los números decimales en la recta numérica: la recta decimal

Tomemos sobre una recta un segmento de 0 a 1 (Figura 2) Elijamos dicho segmento como unidad de longitud, unidad que puede ser tomada arbitrariamente. Los enteros positivos y negativos se representarán por puntos equidistantes sobre la recta numérica, los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.

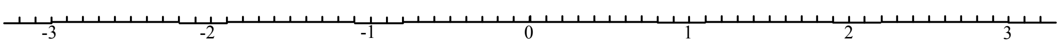


Figura 2

Para representar las fracciones decimales dividimos cada intervalo unidad en 10, luego en 100, 1000, etc., segmentos iguales. A cada punto obtenido por esta subdivisión le hacemos corresponder una fracción decimal. Si queremos situar en la recta numérica el número decimal representado por la fracción $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, o por la notación decimal 0,04, estará en el punto situado en el primer intervalo unidad, en el primer subintervalo de longitud $\frac{1}{10}$ y en el origen del quinto sub-subintervalo de longitud $\frac{1}{100}$ (Figura 3). Por lo tanto, de 100 partes iguales en que queda dividida la unidad hemos tomado cuatro.

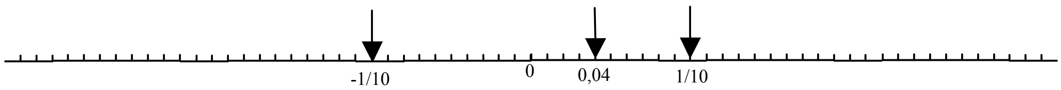


Figura 3

5.1.5.1 Comparación de decimales en la recta numérica

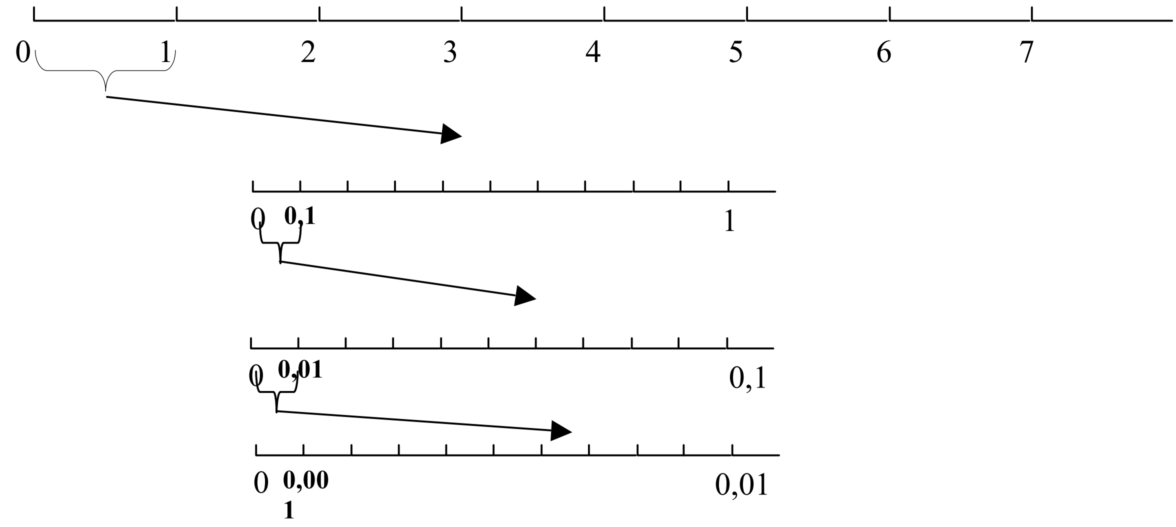
Del mismo modo que en los enteros, se prueba que, dados dos números decimales cualesquiera, el mayor siempre está a la derecha del menor, y cualquier número es menor que todos los que están a su derecha y mayor que todos los que están a su izquierda.

Una de las diferencias esenciales entre los enteros y los decimales es la propiedad de que el conjunto **D** es denso, es decir, que:

Entre dos números decimales desiguales, siempre se puede encontrar otro decimal distinto de ambos y, por tanto, existen una infinidad de tales números decimales intermedios.

Por ejemplo: ¿Cuántos números decimales hay entre 0 y 1? Infinitos.

Al considerar la recta decimal podemos hacer las siguientes subdivisiones:



…………………………………………………………………

Por lo que se obtiene la sucesión de números decimales:

0,1
0,01
0,001
0,0001
....

En la Figura 4 ejemplificamos otro proceso que nos permite hallar el número decimal que le corresponde a cada punto medio de una infinidad de intervalos, de origen y extremo decimales. A partir del segundo intervalo, el origen del siguiente es el mismo que el del anterior pero, el extremo es el punto medio del anterior.

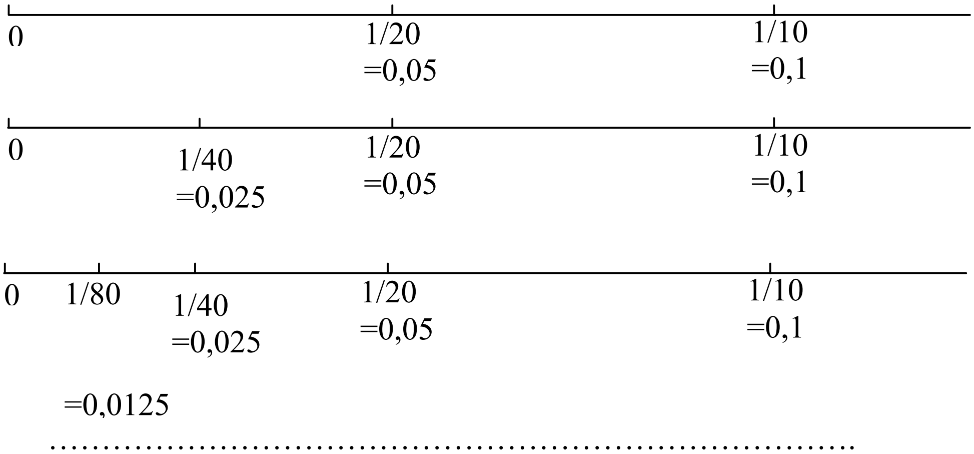


Figura 4

Sin embargo, este orden definido en el conjunto de los decimales determina que todo decimal carezca de siguiente, y que no exista ninguno que preceda a los demás. Tampoco existe en un intervalo abierto, por ejemplo en $(7,8)$, un número decimal menor o mayor que todos los comprendidos en dicho intervalo.

Entre dos números decimales existen números que no son decimales, véase las figuras siguientes (Figura 5):

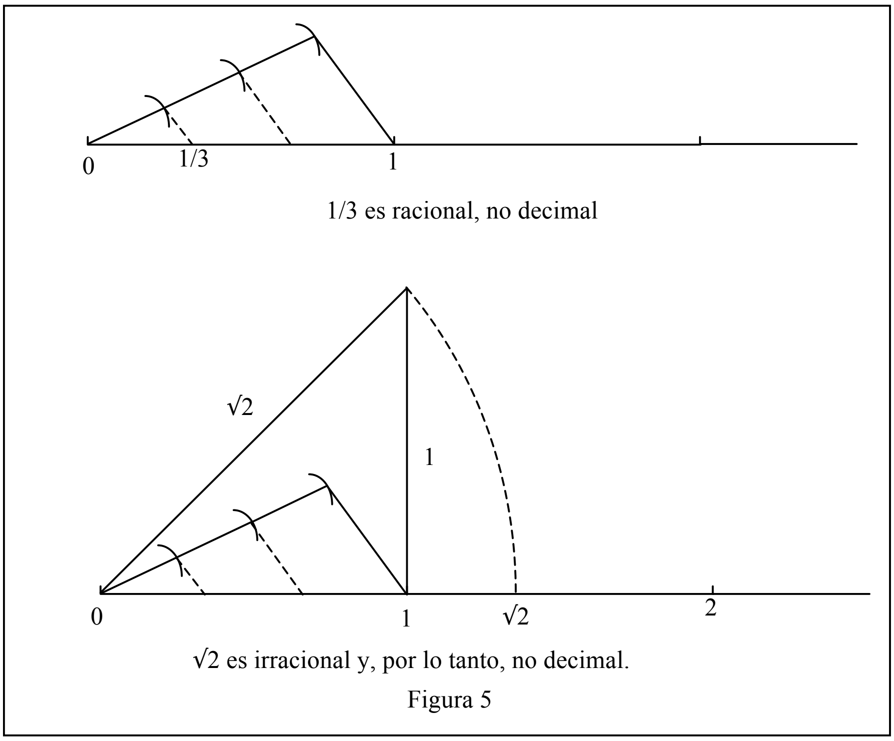


Figura 5

En la Figura 6 se muestra la demostración de que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Para que sirva de referencia esta demostración está tomada de un libro de texto de 1º de Bachillerato.

Demostración de que la raíz de 2 no es un número racional

2 *Demostrar que $\sqrt{2}$ es no es un número racional*

Para demostrarlo se parte de la suposición de que $\sqrt{2}$ es un número racional y, por tanto, puede expresarse como una fracción, $\sqrt{2} = p/q$. Esta fracción es irreducible, es decir, p y q son primos entre sí.

Se eleva al cuadrado la expresión anterior y resulta $2 = p^2/q^2$; lo cual es imposible, puesto que si p/q no es reducible, $p^2/q^2 = p \cdot p/q \cdot q$ tampoco lo es y por tanto $p^2/q^2 \neq 2$

El **método** usado en esta demostración, que consiste en llegar a una contradicción a partir de una **hipótesis,** se llama **reducción al absurdo.** Se demuestra que es falsa la hipótesis inicial y, por lo tanto, es verdadera la hipótesis contraria: $\sqrt{2}$ es un número irracional. Consulta las estrategias de la UNIDAD 15.

Figura 6

Esto significa que los números decimales no completan la recta, es decir, hay puntos cuyos números correspondientes no son números decimales.

Actividad

a) Situar números decimales en la recta numérica. Realizar las actividades propuestas en la página Web: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~41701547/Proyecto%20innovaciacion/temas/decimales_representacion.htm.

b) Estudiar cómo contribuye el uso de los Bloques de base diez de Dienes a la formación del concepto de densidad. ¿Cuántos números hay entre 2,46 y 2,47? Representarlos con los Bloques Multibásicos.

5.1.6 Comparación de decimales según otras representaciones

5.1.6.1 Comparación de decimales representados en notación fraccionaria

El conjunto **D** está ordenado por la relación:

$$\frac{a}{10^n} \leq \frac{b}{10^m} \Leftrightarrow a \cdot 10^m \leq 10^n \cdot b$$

Por ejemplo, para comparar $\frac{3}{100}$ con $\frac{12}{1000}$ hacemos: $3 \cdot 1000 \geq 12 \cdot 100$, por tanto, $\frac{3}{100} \geq \frac{12}{1000}$.

5.1.6.2 Comparación de decimales representados en notación decimal

Para comparar dos números decimales que tienen sus partes enteras diferentes es suficiente comparar éstas. Así: $2,3579 \leq 3,23$.

Si las partes enteras son iguales entonces, se comparan las partes decimales. En este caso, si las partes decimales tienen distinto número de cifras hay que completar con ceros para igualar el número de cifras y, después, se lleva a cabo la comparación. Por ejemplo: $2,356 \;\; y \;\; 2,42$

$$2,356 \leq 2,420$$

Actividad

a) Escribe distintas formas de justificar que la fracción $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{2}{25}$.

b) Escribe distintas formas de justificar que 0,375 y $\frac{3}{8}$ representan el mismo número.

c) Escribe distintas formas de justificar que el número 0,468 es mayor que 0,35.

5.1.7 Relación de los números decimales con los racionales

5. 1.7.1 Introducción del concepto de número racional

En el primer apartado de este tema hemos hecho referencia a la posibilidad de solucionar la ecuación $b \cdot x = a;\ b \neq 0$. Para ello, hemos considerado, en un principio, resolver la ecuación $10^n \cdot x = a;\ a \in Z \;\; y \;\; n \in N$, que constituye un caso particular de la anterior, y construimos el conjunto de los decimales. Ahora, nos proponemos extender el conjunto de los enteros añadiendo unos nuevos números que son los cocientes,

$a \div b$, soluciones de las ecuaciones $b \cdot x = a$; $b \neq 0$. Este nuevo conjunto contiene al de los decimales.

Sea la ecuación $7 \cdot x = 2$ cuya solución es el cociente $2 \div 7$. Sabemos que hay otras ecuaciones con la misma solución. Basta multiplicar ambos miembros por un entero no nulo. Estas ecuaciones se dicen que son equivalentes, es decir, tienen la misma solución:

$$\begin{array}{l} 7 \cdot x = 2; \quad x = 2 \div 7 \\ 14 \cdot x = 4; \;\; x = 4 \div 14 \\ 21 \cdot x = 6; \;\; x = 6 \div 21 \\ 28 \cdot x = 8; \;\; x = 8 \div 28 \\ 35 \cdot x = 10; \;\; x = 10 \div 35 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Cada cociente anterior se representa mediante un símbolo que denominamos fracción, esto es:

$$\begin{array}{l} 7 \cdot x = 2; \quad x = \dfrac{2}{7} \\ 14 \cdot x = 4; \;\; x = \dfrac{4}{14} \\ 21 \cdot x = 6; \;\; x = \dfrac{6}{21} \\ 28 \cdot x = 8; \;\; x = \dfrac{8}{28} \\ 35 \cdot x = 10; \;\; x = \dfrac{10}{35} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Así, todas esas fracciones representan al mismo cociente y, por tanto, se puede decir que son equivalentes entre sí. Nótese que si tomamos dos fracciones de éstas, por ejemplo, $\frac{2}{7}$ $y \frac{4}{14}$, se verifica que $2 \cdot 14 = 7 \cdot 4$

El resultado anterior se puede expresar de la forma siguiente, y se dice que son fracciones equivalentes entre sí: $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} \Leftrightarrow 2 \cdot 14 = 7 \cdot 4$

De esta manera, todas las fracciones equivalentes entre sí representan el mismo número, la solución de la ecuación, $7 \cdot x = 2$ que llamaremos el número racional $\left[\frac{2}{7}\right]$.

Por tanto, podemos escribir:

$$\left[\frac{2}{7}\right]=\left\{\frac{2}{7},\frac{4}{14},\frac{6}{21},\frac{8}{28},\ldots\right\}$$

Se puede elegir como representante de las fracciones equivalentes cualquiera de las de la familia.

En general, la solución, $a \div b$, de la ecuación de la forma, $b \cdot x = a;\ b \neq 0$, la podemos representar por el símbolo denominado fracción :

$$\frac{a}{b};\ a\ y\ b \in Z\ y\ b \neq 0.$$

Los términos a y b reciben el nombre de numerador y denominador de la fracción, respectivamente.

El número racional, $\left[\frac{a}{b}\right]$, será la familia de fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}\ \ y\ \ b \neq 0$, o sea:

$$\left[\frac{a}{b}\right]=\left\{\frac{c}{d}\ /\ a \cdot d = b \cdot c;\ b\ y\ d \neq 0\right\}$$

Al conjunto de todos los números racionales lo simbolizaremos por la letra **Q**.

La fracción, $\frac{a}{b}\ \ y\ \ b \neq 0$, en la que se verifica que el $m.c.d(a,b)=1$, recibe el nombre de irreducible. Se suele convenir en tomar esta fracción como representante de la familia: $\left[\frac{a}{b}\right]=\left\{\frac{c}{d}\ /\ a \cdot d = b \cdot c;\ b\ y\ d \neq 0\right\}$.

En este caso, los números decimales son los racionales, que tienen en su familia de fracciones equivalentes entre sí a una decimal. Así, el denominador de la fracción irreducible admite una descomposición de factores primos con sólo potencias de 2 y/o 5.

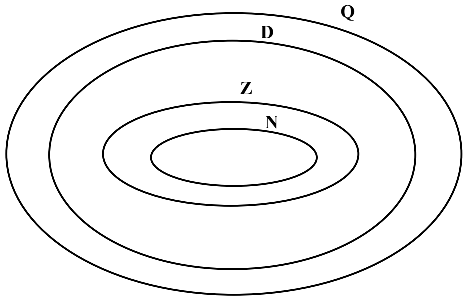


Fig.7.

5.1.7.2 Otra forma de representación de los números racionales: expresiones decimales infinitas periódicas

Si aplicamos el procedimiento de la división decimal a números racionales obtenemos de forma sucesiva la parte entera, décimas, centésimas, etc., correspondiente a la fracción representante.

Con los números racionales no decimales nunca se obtiene resto cero, por lo que la división podría proseguir indefinidamente. Sin embargo, sólo existe un número finito de restos diferentes, porque los restos tienen que ser menores que el divisor. Por ello, en algún momento habrá de repetirse un resto. De esta manera, una parte de la división se repetirá. Por lo tanto, se obtendrá un cociente en el que la parte situada a la derecha de la coma se compone de infinitas cifras que forman periodo.

Por ejemplo:

a)

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571...$$

$$\begin{array}{l|l} 3 & 7 \\ \hline 20 & 0,4285714 \\ \quad 60 & \\ \quad\quad 40 & \\ \quad\quad\quad 50 & \\ \quad\quad\quad\quad 10 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad 30 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 & \end{array}$$

b)

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666666...$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 6 \\ \hline
40 & 0{,}1666666 \\
\quad 40 & \\
\quad\; 40 & \\
\quad\quad 40 & \\
\quad\quad\; 40 & \\
\quad\quad\quad 40 & \\
\quad\quad\quad\; 4 &
\end{array}$$

Estas expresiones decimales infinitas periódicas se denotan escribiendo la parte no periódica y, a continuación, el periodo con pequeño arco encima, en nuestros ejemplos: $0,\overset{\frown}{428571}$ y $0,1\overset{\frown}{6}$.

La parte que está situada a la izquierda de la coma se denomina parte entera y, la que está a la derecha, parte decimal. Cuando la parte decimal de una expresión decimal periódica consiste únicamente en la repetición indefinida del periodo se llama *periódica pura* ($0,\overset{\frown}{428571}$). Si además existe una parte no periódica se dice que la expresión decimal es *periódica mixta* ($0,1\overset{\frown}{6}$).

Los racionales decimales, que hemos visto que tienen una expresión decimal finita, se pueden representar con expresiones decimales infinitas periódicas. Basta escribir una serie ilimitada de ceros después de la parte decimal finita, $0,25 = 0,25000000....$ También podemos comprobar que se pueden representar con expresiones decimales infinitas de periodo nueve: $0,25 = 0,250000000... = 0,2499999999.....$ Aunque se representan en la práctica con un número finito de cifras decimales.

Los números enteros, que son decimales y racionales, también se pueden representar con expresiones decimales infinitas periódicas.

Observa que:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111111...$$
$$\frac{2}{9} = 0{,}222222...$$
$$\frac{3}{9} = 0{,}333333...$$
$$.........................$$
$$\frac{8}{9} = 0{,}888888...$$
$$\textit{entonces}:$$
$$1 = \frac{9}{9} = 0{,}999999...$$

Así: $n = n - 1 + 1 = n - 1 + 0{,}9999...$.

La justificación de la igualdad 0,25=0,249999… puede hacerse así:

$$\frac{217}{900} = 0{,}2411111...$$
$$\frac{218}{900} = 0{,}2422222...$$
$$\frac{219}{900} = 0{,}2433333...$$
$$.............................$$
$$\frac{224}{900} = 0{,}2488888...$$
$$\textit{Entonces}:$$
$$0{,}25 = \frac{225}{900} = 0{,}2499999...$$

En conclusión:

> Todo número racional tiene una representación decimal finita o infinita periódica; todos los números cuya expresión decimal es finita o periódica son números racionales.

5.1.7.3 Conversión de una expresión decimal periódica a fracción: fracción generatriz

Llamamos fracción generatriz de una expresión decimal a la fracción que la genera, o sea, aquella fracción tal que dividido el numerador por el denominador, origina la expresión dada.

La fracción generatriz de una expresión decimal finita es una fracción con el numerador igual a la expresión decimal sin la coma y, el denominador, es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Por ejemplo:

$$2,301 = \frac{2301}{1000}$$

Para hallar la fracción generatriz de un número cuya expresión decimal es periódica se multiplica el número por potencias de diez elegidas de tal forma que al restar dos de esas expresiones la parte decimal sea nula. Por ejemplo:

a)

$$3,\overset{\frown}{25} = f$$

Multiplicamos por 100 para obtener otro número con la misma parte decimal:

$$3,\overset{\frown}{25} \cdot 100 = 100 \cdot f$$

Restamos ambas expresiones y despejamos *f*:

$$\begin{array}{l} 3,\overset{\frown}{25} \cdot 100 = 100 \cdot f \\ 3,\overset{\frown}{25} = f \\ \hline 325 - 3 = 99 \cdot f \\ f = \dfrac{325 - 3}{99} \end{array}$$

b)

$$2,2\overset{\frown}{152} = f$$

Multiplicamos por una potencia de diez para convertir la expresión a una periódica pura, en este caso por 10:

$$2,2\overset{\frown}{152}\cdot 10 = 10\cdot f$$
$$22,\overset{\frown}{152} = 10\cdot f$$

Seguidamente aplicamos el método anterior:

$$\begin{array}{l} 22,\overset{\frown}{152}\cdot 1000 = 10000\cdot f \\ 22,\overset{\frown}{152} = 10\cdot f \\ \hline 22152 - 22 = 9990\cdot f \\ f = \dfrac{22152-22}{9990} \end{array}$$

Actividad

Resuelve:

a) $0,3\overset{\frown}{814} + 2,\overset{\frown}{32} =$

b) $4,\overset{\frown}{2}\cdot 0,\overset{\frown}{543} =$

5.1.7.4 Aproximaciones decimales de un número racional

El hecho que hace que los números decimales sean útiles es que permiten aproximar cualquier número racional con el grado de precisión que se desee. Para ello, se trunca la serie ilimitada de la expresión decimal periódica en un punto más o menos alejado a la derecha de la coma. Así, se obtiene un número decimal que aproxima al racional cuanto queramos.

En la práctica, se puede evitar el uso de expresiones decimales infinitas realizando los cálculos con aproximaciones decimales finitas. Esto es debido a la propiedad de que **D** es denso en **Q**, esto es:

Hay un número decimal tan próximo como se quiera a cualquier número racional.

5.1.7.5 Operaciones con números racionales

Operaciones		
ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN	DENOMINADO-RES IGUALES	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
	DENOMINADO-RES DISTINTOS	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$ $3 + \frac{4}{7} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 3} = \frac{89}{21}$
MULTIPLICA-CIÓN	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\qquad \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{30}{28}$	
DIVISIÓN	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, c \neq 0$ $\qquad \frac{2}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$	

Propiedades de las operaciones con números racionales		
Propiedades	Adición	Multiplicación
Uniforme	La suma es independiente de los representantes elegidos en cada familia.	El producto es independiente de los representantes elegidos en cada familia.
Conmutativa	$\forall a, b \in Q, a + b = b + a$	$\forall a, b \in Q, a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$\forall a, b, c \in Q,$ $a + (b + c) = (a + b) + c$	$\forall a, b, c \in Q,$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a , \forall a \in Q$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in Q$
Elemento simétrico	$a + (-a) = (-a) + a = 0,$ $\forall a \in Q$	$a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a =1,$ $\forall a \in Q$ y $a \neq 0.$

Distributiva de la multiplicación respecto de la adición	$\forall$a, b, c $\in$ Q, a · (b + c) = a · b + a · c

Para operar números racionales expresados en notación decimal infinita periódica se hallan sus fracciones generatrices y se operan con ellas. La notación decimal en este caso no resulta conveniente, ya que los cálculos se complican y algunos son difíciles de realizar.

Observa que ahora la división de números racionales es una operación cerrada.

5.1.7.6 Los racionales en la recta numérica

Para representar en la recta numérica un número racional, expresado en notación fraccionaria, podemos utilizar el teorema Thales, cuya aplicación nos permite dividir un segmento en un número de partes iguales.

Supongamos que queremos representar el racional $\frac{3}{7}$; para ello debemos dividir el segmento unidad en 7 partes iguales y tomar 3.

Como $\frac{3}{7}$ es menor que la unidad se señala en la recta el punto correspondiente al cero y se traza una recta auxiliar con una cierta inclinación, la que se desee, que parte de dicho punto (Figura 8).

Con el compás se marcan sobre la recta auxiliar siete subdivisiones iguales. Se une mediante un segmento el punto que determina la séptima división con el punto que determina al 1.

Basándonos en el teorema de Thales se traza una paralela al segmento anterior por el punto que determina la sexta división de la recta auxiliar y, así, hasta la primera división. Los puntos de intersección de estas paralelas con la recta representan a $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ y $\frac{7}{7} = 1$.

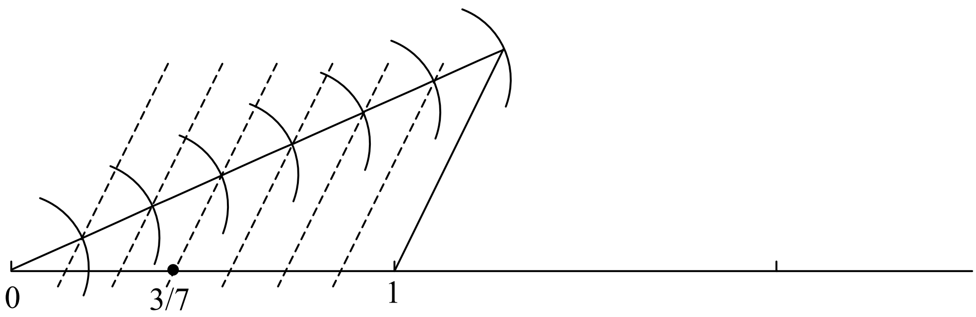


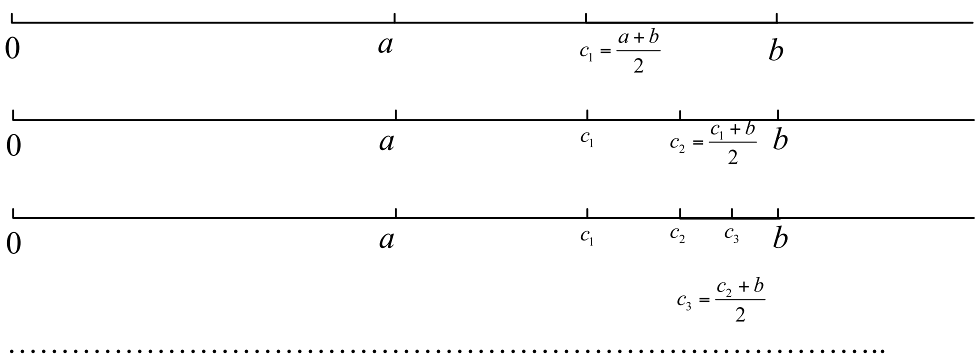
Figura 8

Si el número racional viene representado en notación decimal se puede convertir en notación fraccionaria y aplicar el método anterior.

Se verifica que:

a) Dados dos números racionales cualesquiera, siempre el mayor está a la derecha del menor, y cualquier número es menor que todos los que están a su derecha y mayor que todos los que están a su izquierda.

b) Entre dos números racionales distintos, siempre se puede encontrar otro distinto y, por tanto, existe una infinidad de tales números intermedios.



c) Entre dos números racionales existen números que no son racionales (véase Figura 5). Los números racionales no completan la recta.

Actividad

Representa el racional $-1,\overset{\frown}{6}$.

5.1.8 Relación de los números decimales con los reales

Sabemos que existen números que se representan con expresiones decimales infinitas y no periódicas. Por ejemplo: $0,626226222622226...$, después del 6 se pone de forma sucesiva un número dos más que en el anterior.

Supongamos la sucesión de números decimales, ordenados de menor a mayor:

$$0,6 \leq 0,62 \leq 0,626 \leq 0,6262 \leq ...$$

Esta sucesión está acotada por *0,63*. Asimismo, por muchos términos que escribamos no podemos encontrar un número racional al que corresponda la expresión, ya que ni es finita ni periódica. Estos números no se pueden expresar mediante fracciones.

De esta manera, como resultado de continuar potencialmente una sucesión acotada de números decimales, surge un número que se denomina irracional. Estos números se pueden representar con expresiones decimales con coma, infinitas, pero no periódicas. El conjunto de los irracionales se denota como **I**.

Como vemos los números decimales permiten también aproximar, con el grado deseado, los números irracionales.

Llamaremos conjunto de los números reales, **R**, al conjunto que se obtiene al unir los números racionales e irracionales y R=Q$\cap$I (Figura 9.). De este modo, número real es una manera abreviada de referirnos a las sucesiones estrictamente crecientes o decrecientes acotadas de números decimales (Cid E., Godino D. y Batanero C. (2004)).

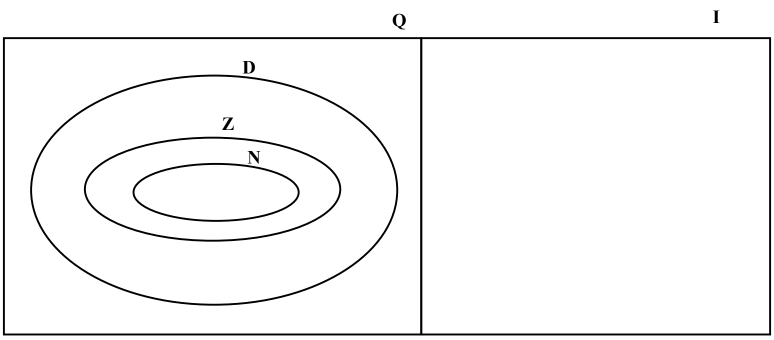


Figura 9

En relación con la representación de números irracionales en la recta se suele decir que éstos, juntos con los racionales, completan la recta. Los irracionales tienen su representación en los huecos de la recta que dejan los racionales.

Actividad

Representación de algunos irracionales que proceden de radicales cuadráticos ($\sqrt{2}, \sqrt{3}\ y\ \sqrt{5}$) en la recta.

5.1.9 Errores que cometen los escolares con los decimales

a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición

Algunos alumnos manifiestan un comportamiento en el que parecen pensar que los dígitos situados después de la coma decimal representan un número distinto, que también tiene decenas, centenas, etc. Así, a la cuestión en la que se pide sumar una décima a 4,254 responden 4,265. Con respecto al origen de esta confusión Dickson y otros (op.cit.) señala:

Parece posible que esta confusión puede deberse al empleo de dinero decimal, en cuyo caso es posible y lícito leer 3,54 como "3 libras, cincuenta y cuatro", siendo más frecuente interpretar las cifras situadas después de la coma decimal como un número entero de peniques que como una fracción de libra.

			Porcentaje			
	Cuestión	*Respuesta*	12 años	13 años	14 años	15 años
0,126 ↑	El 2 denota 2 ↑ CENTÉSIMAS					
0,260 ↑	El 2 denota 2 ↑ …………..	Décimas (Centésimas o centenas)	53 (23)	65 (14)	64 (14)	72 (9)
0,412 ↑	El 2 denota 2 ↑ …………..	Milésimas (Unidades/unos)	48 (21)	58 (15)	53 (17)	63 (11)
	Suma una décima →	4,354	42	49	48	54

	4,254	(4,264)	(17)	(12)	(17)	(9)
	Seis décimas, en decimal, es 0,6. ¿Cómo escribirías tú en decimal tres centésimas?	0,03	50	60	59	67

Tabla 1: Datos de Brown (1981)

b) Errores relacionados con el cero

Errores ocasionados por:

- Ignorar el cero en la notación decimal: 0,036 se interpreta como 36.
- No ignorar el cero en la notación decimal: 1,27 se considera distinto de 1,270.
- El cero no es considerado como número decimal porque tal y como algunos alumnos manifiestan el cero carece de valor.

c) Errores relacionados con el orden entre decimales

Nos encontramos con los siguientes comportamientos:

- Los números decimales son interpretados como pares de enteros, y son ordenados por criterios que en algunos casos pueden dar lugar a respuestas correctas. Por ejemplo: al pedir que se ordene de menor a mayor los números, 4,05, 4,5 y 4,15, se dan respuestas como la siguiente: *el más pequeño es el que tiene el cero, y luego 5 es más pequeño que 15.*
- Los números se ordenan según el número de cifras decimales que tienen después de la coma decimal. Así, a mayor número de cifras, mayor es el número: 3,125 > 3,2.
- Se selecciona como mayor entre varios, el decimal que tenga un menor número de dígitos después de la coma. La explicación más generalizada dada por los estudiantes es que, por ejemplo 4,3 > 4,65, porque las décimas son mayores que las centésimas.
- Intercalar un decimal entre otros dos: *entre 1,23 y 1,24 no hay ningún número, 1,24 es el número que sigue a 1,23*.

d) Errores relacionados con las operaciones

- 0,70 + 0,30 + 0,20 = 0,120; 17,3 + 21,8 = 38,11.
- Hacer el número 437,56 diez veces mayor. Responden: 437,560.
- 3,15 x 10 = 30, 150.
- 3,15 x 10 = 3,150.
- 2,3 x 2,3 = 4,9.
- 4 x 2,3 = 8,12.
- 2,12 : 2 = 1,6.
- A la pregunta, ¿cuál de los pares de operaciones siguientes da la respuesta mayor?

8,4 x 4; 8 : 4

8 x 0,4; 8 : 0,4

0,8 x 0,4; 0,8 : 0,4

Centeno (op.cit.) señala que:

Un buen número de alumnos de todas las edades justifica que multiplicar es hacer un número más grande y dividir es hacerlo más pequeño.

Todos estos errores revelan que las reglas que siguen persistiendo para estos alumnos en el trabajo con los decimales son las de los números naturales. En este caso, los números con escritura decimal con coma se perciben como pares de números naturales.

- En relación con las aplicaciones de los decimales a situaciones prácticas, reales o menos familiares para los niños, Centeno explica que a la pregunta realizada a 500 alumnos de 5º y 6º de EGB en la que se pedía enunciar un problema que se resolviera con la operación 0,75 : 5, las respuestas se correspondían con situaciones de reparto, lo que revela los problemas aritméticos que aprendieron con números naturales.

Asimismo, en otras cuestiones relacionadas con este apartado, se observó una desconexión entre los números y la realidad:

¿Tengo una cuerda de de 0,800 m de larga. Deseo hacer cuerdas de 0,8 m de largo. ¿Cuántas cuerdas puedo hacer? El 23,76 % dan como respuesta 100 después de hacer la división de 0,800 entre 0,8.

5.1.10 Algunos materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de los decimales

Para el estudio de este apartado solicitamos al alumnado consultar el capítulo 7 del libro de Centeno (1988): *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?.* Se puede hacer hincapié en los siguientes materiales:

a) Bloques de base diez de Dienes (véase apartado 4.3 de este tema)

b) Regletas de Cuisenaire.

c) Ábaco.

d) Calculadora.

5.1.11 Actividades

1. Escribe:

a) Seis décimas 0,6

b) Tres centésimas ………..

c) Cuatro milésimas ………..

d) Treinta y siete milésimas ………..

e) Cuarenta centésimas ………...

2. Elige la respuesta correcta:

735,6125 = 735 x 10000 + 6125

735,6125 = 735 + 6/10000 + 1/1000 + 2/100 + 5/10

735, 6125 = 735 + 6/10 + 1/100 + 2/1000 + 5/10000

3. Efectúa:

a) 0,1 · 5,13=

b) 3,17 : 0, 01 =

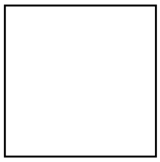
4 El número de habitantes de una ciudad es de 4727986. Si tomamos como unidad:

el millar, el número de habitantes se expresará ....

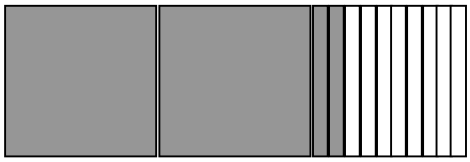
el millón, el número de habitantes se expresará ....

la decena de millón, el número de habitantes se expresará ....

5.



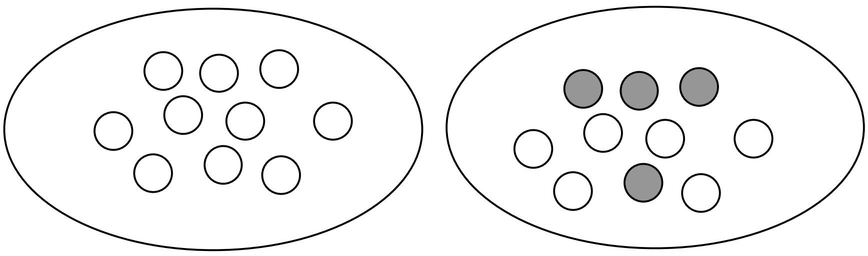
Ésta es la unidad



El área sombreada es: .... (En escritura decimal)

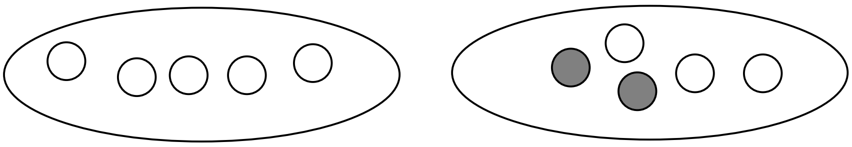
6. ¿Qué parte de la unidad representa el número de bolas negras en cada apartado?

a)



Ésta es la unidad ……………………..

b)



Ésta es la unidad ………………………….

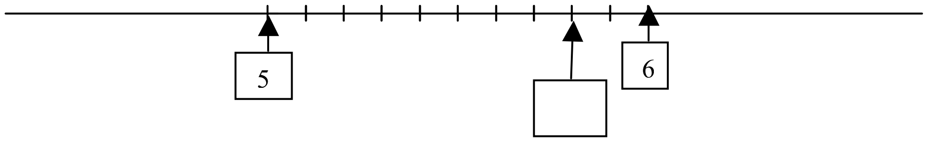
7. ¿Cuál es el mayor de los números: 0,09; 0,385; 0,1814?

8. Señala el número más próximo a 0,18 entre los siguientes:

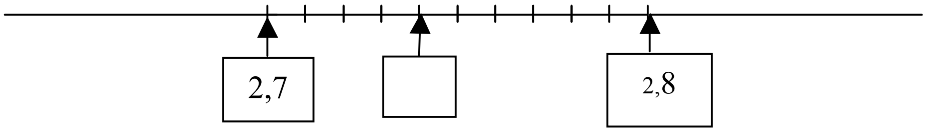
0,1 10 0,2 20 0,01 2

9. Escribe el número que corresponde en la casilla en blanco en cada apartado:

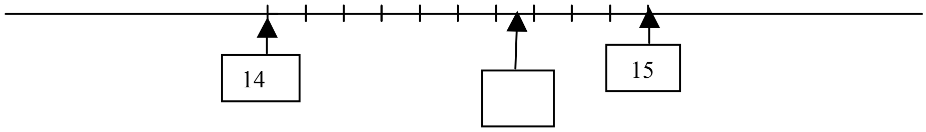
a)



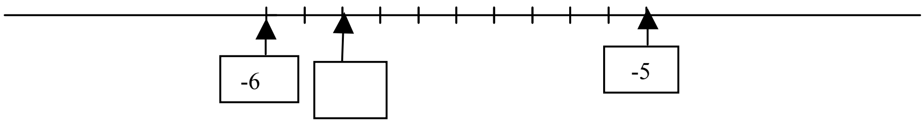
b)



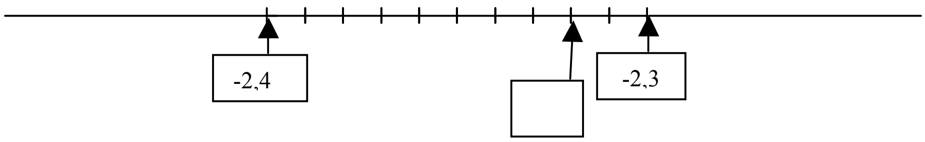
c)



d)



e)



10. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

-0,99 0,63 -1,5 1,4 -1,6 0,1524

………………………………………………………………………………………….

11. ¿Cuál es el número más próximo a 59:190?

0,003 0,03 0,3 3 30 300 300

12. ¿Cuáles de los siguientes números son iguales a 0,5?

a. 0,500
b. 0,49999...
c. 1/2
d. 0,49
e. 5×10^{-2}
f. 50%

13. Dado el número 4,256197. Se pide:
    a. Redondea a unidades...
    b. Redondea a centésimas..
    c. Redondea a milésimas..
    d. Redondea a cienmilésimas...

14. Redondea a centésimas los siguientes números:
    a. 13/17 …………………
    b. 127/438 …………………
    c. 11/3 …………………
    d. 1/13 …………………

15. Obtén la expresión decimal de cada fracción:
    a) 475/100 …………………………………………..
    b) -208/1000 ………………………………………..
    c) $2/10^5$ ……………………………………………..
    d) $-13/10^2$ …………………………………………..

16. Relaciona la expresión decimal con la fracción correspondiente.

218,73	
0,075	
3,5	
0,056	
0,375	

a) 75/1000 b) 7/2 c) 21873/100 d) 3/8 e) 7/125

17. Dos chicos tienen la misma cantidad de dinero en el bolsillo. Uno piensa ahorrar 1/4 de su dinero; el otro, 5/20 del suyo. Marca la respuesta correcta:
    a. 5/20 y 1/4 son iguales
    b. 1/4 es más que 5/20
    c. 5/20 es más que ¼
18. ¿Cuál de las siguientes fracciones le corresponde una expresión decimal?
    a. 17/60
    b. $21/(7 \cdot 5)^2$
    c. 31/20
    d. 3/28
19. Encuentra una fracción decimal equivalente a cada una de las siguientes:
    a. 5/4 ....
    b. 7/2 ....
    c. 23/20 ....
    d. 87/5 ....
20. Indica entre qué números enteros se encuentra cada uno de los siguientes números:
    a) 2,7 …………………………..
    b) -3,5 …………………………
    c) -4,3 …………………………
    d) 0,005 ……………………….
    e) 0,7 ………………………….
    f) 1,99 …………………………
21. Intercala un decimal entre 1,23 y 1, 24.

22. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

23. Rodea en cada apartado la operación que dé resultado mayor.

    a) 8 x 4 o 8 : 4
    b) 8 x 0,4 o 8 : 0,4
    c) 0,8 x 0,4 o 0,8 : 0,4

24. ¿La división de números decimales es siempre un número decimal?

25. Realiza los siguientes cálculos:

a) 14,85 + 3,074 b) 200,01 – 32,007 c) 17,74 x 3,1416 d) 17, 74 : 3, 1416

26. Mediante fracciones efectúa:

a. 3,5 + 2,13 =
b. 2,7 – 3, 172 =
c. 7,23 x 3,6 =
d. 7,14 : 2,1 =

27. Un trozo de queso pesa 0,923 kg. Un kg cuesta 27, 50 euros. Halla el precio del queso. ¿Qué operación tienes que realizar?

a) 27,50 + 0,923 c) 27,50 : 0,923 d) 0,923 x 27,50 e) 27,50 – 0,923

5.2 UNIDAD DE APRENDIZAJE: DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Martín Socas

Adaptación de este capítulo, realizada por María Dolores Moreno Martel, para el alumnado de Educación Musical.

A continuación, se presenta la relación de contenidos de esta unidad.

5.2.1. Introducción

5.2.2. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

5.2.3. Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

5.2.4. Errores en las matemáticas

5.2.5. Errores en el aprendizaje de las matemáticas: evaluación y diagnóstico

5.2.6. Estrategias de prevención y remedios

5.2.1 Introducción

El aprendizaje de las Matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturalezas distintas. Algunas tienen su origen en el macrosistema[1] educativo, pero, en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de Matemáticas y métodos de enseñanza.

Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. Tomaremos como contenidos matemáticos la Aritmética y el Lenguaje algebraico y a ellos nos remitiremos para ilustrar de manera concreta las cuestiones que se van planteando a lo largo del capítulo.

El propósito de este capítulo es hacer una reflexión general sobre este tema central en el aprendizaje de las Matemáticas y poner en contacto al lector con los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en la construcción del conocimiento matemático. Para ello, analizaremos el origen de estas dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las Matemáticas; también comentaremos las razones por las que se originan. Al conocer de manera general o específica estas razones, podemos propiciar una enseñanza adecuada y facilitar un mejor aprendizaje de las Matemáticas.

5.2.2 Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

La presencia de dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las Matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las Matemáticas.

Estas dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas son de distinta naturaleza y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas.

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las Matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las Matemáticas.

De manera más explícita, en líneas generales, estas dificultades se pueden organizar en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Parece necesaria una reflexión más detallada de cada uno de estos tópicos para situarnos mejor en la naturaleza de estas dificultades.

5.2.2.1 Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos.

Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación. Sin embargo, el lenguaje de las Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto, involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.

Otro problema del lenguaje en Matemáticas es el originado por el vocabulario común. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada.

Hay también algunas palabras usadas en ciertos contextos que pueden ocasionar confusiones de conceptos y que, probablemente, podrían ser evitadas, particularmente, cuando se emplean connotaciones del lenguaje diario para atraer la atención sobre un signo. Se puede oscurecer así su significado más que destacar el concepto subyacente; por ejemplo, "añadir un cero" en la multiplicación por 10, "reducir una fracción" o "reducir una expresión algebraica" en la simplificación, que connota hacerla más pequeña, identificar una letra con un significado algebraico como una determinada "fruta" ($3x + 2y$, igual a tres peras más dos manzanas),....

Igualmente, en relación con los conceptos, tenemos palabras específicamente Matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc. que, por ser poco familiares y frecuentemente mal entendidas, suelen presentar al alumno dificultades considerables, pues únicamente se encuentra con ellas en sus lecciones de Matemáticas.

Las palabras de igual significado en la lengua común y en Matemáticas tienen su principal problema en saber que, en efecto, el significado es el mismo. A veces, los alumnos pueden pensar que una palabra de lenguaje habitual toma un significado distinto y a veces "misterioso", cuando se emplea en Matemáticas. Estas dificultades pertenecen a otro dominio del lenguaje matemático que es la Pragmática[2], que se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia. Hay una infinidad de cuestionamientos por parte de los alumnos según que la palabra se encuentre en un contexto o en otro. Se presentan por la influencia que tiene el contexto en la palabra. De igual manera, las preguntas o cuestiones que planteamos a nuestros alumnos están también influenciadas por el contexto. Recordemos el ya clásico ejemplo: ¿Cuál es la edad del capitán?, que tiene su origen en una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble (Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas) que se publicó en el Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública en 1980 y que dio origen a un libro del mismo título, realizado por Stella Baruk en 1985.

El problema al que nos hemos referido se enuncia como sigue: hay un barco que tiene tanto de largo y tanto de ancho, que transporta tantas ovejas y tantas toneladas de trigo..., y después se pregunta: ¿Cuál es la edad del capitán? Se propusieron problemas de este tipo y se vio que la mayor parte de los alumnos daba la edad del capitán.

Se podría pensar que se trata de un hecho excepcional. Sin embargo, cuando se está reunido con profesores de Matemáticas para seleccionar y hacer ejercicios y se proponen ejemplos análogos en los que aparecen situaciones mal formuladas como: encontrar x, medida de uno de los catetos de un triángulo rectángulo, en el que el otro cateto mide 12 y la hipotenusa 10. Todos podemos estar sometidos a dar respuestas parecidas, si estamos en una situación escolar.

Otros aspectos del lenguaje de las Matemáticas que difieren de la lengua común, que son fuente de confusión en muchos alumnos, son los que hacen referencia al lenguaje de los signos, de modo que, por ejemplo, su sintaxis (reglas formales de las operaciones) puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio propio de sus aplicaciones. Esto pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos que debe ser entendida como un proceso de abstracción caracterizado por diferentes etapas.

Para situar mejor las dificultades y los errores que se originan en el desarrollo de los signos matemáticos, conviene analizar los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, tomando como ejemplo algunos objetos matemáticos. Así, en el proceso de aprender a usar correctamente los exponentes, podemos diferenciar tres etapas distintas.

Primeramente, el sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo, ya conocido por los alumnos, que es en este caso el conjunto de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir; de esta manera, se definen los elementos del sistema nuevo 3^4 o a^4 como:

$$3^4 = 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \qquad \text{o} \qquad a^4 = a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a$$

Se trata éste de un estadio, que se denomina semiótico, en el que los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos.

En un segundo estadio, el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo y, así, mediante procesos como:

$$3^4 \cdot 3^3 = ? = 3^7 \Leftrightarrow (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$$

llegamos al esquema general, $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$, que puede ser expresado simbólicamente como $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Asimismo, empleando los métodos de manipulación de fracciones Aritméticas y algebraicas, se puede obtener, mediante el sistema antiguo, un esquema para la división:

$\dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = a\cdot a = a^2$, que puede ser expresado simbólicamente como

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, obteniendo así la ley de los exponentes. Es este segundo estadio, el denominado estadio estructural, donde el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo. Comienzan a aparecer, en este estadio estructural, diferentes problemas que nos obligan en un primer momento a poner restricciones, por ejemplo, m > n, ya que a0 o a-2 no tienen explicación en el sistema antiguo; por el contrario, situaciones como $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}$, sí tienen significado en el sistema antiguo. Aparecen en este estadio estructural verdaderas dificultades cognitivas que, al no ser explicadas por el sistema antiguo, para dotarlos de significado se recurre a la observación de regularidades y comportamientos patrones; por ejemplo, en este caso:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$3^1 = 3$$
$$3^0 = 1$$
$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Hemos eliminado algunas restricciones pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones; en este momento, estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior; es el estadio autónomo del sistema nuevo, en nuestro ejemplo:

$$(2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(2)^2}$$

Es este el proceso de generalización de las Matemáticas y es una característica de esta ciencia, como parte inherente del desarrollo de sus signos. El sistema nuevo es, por tanto, una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo. Hemos analizado con cierto detalle el caso de las potencias, pero este desarrollo descrito antes no es exclusivo del proceso de aprender el uso de exponentes.

Vemos cómo el lenguaje de las Matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico (los signos son dados con un significado claro y preciso), y el nivel sintáctico (los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado). Por tanto, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos integrantes del objeto de la Matemática. Son estos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

5.2.2.2 Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las Matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático.

Siempre se ha considerado el aspecto deductivo formal como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. El abandono de las demostraciones formales en los programas de Matemáticas de la Secundaria se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico, es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico y es esta incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia. El abandonar ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico, por ser éste una destreza de alto nivel que resulta necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

El fomentar esta capacidad para seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, que también permiten obtener resultados y métodos correctos, sino que, más bien, esta capacidad se desarrolla con la práctica de estos métodos informales; sin embargo, sí estaría en contra de la intención ingenua de los métodos rutinarios, de las conjeturas aleatorias, etc.

Este enfoque lógico de las Matemáticas debe conducir a resolver los problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente y, en este sentido, desarrolla una idea más amplia que la propia deducción formal. La deducción lógica no debe confundirse ni con la deducción formal ni con los procedimientos algorítmicos. El pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas.

¿Qué ocurre con las Matemáticas escolares? ¿Están organizadas y desarrolladas con estos principios lógicos? En general, la "lógica" de las matemáticas escolares depende muchas veces de la situación en la que se encuentre el alumno. Ya hemos mencionado la Pragmática como un dominio del lenguaje, donde el sentido de la palabra está en función del contexto en que se enuncia; en un sentido más general, podemos hablar de la influencia de lo social sobre lo lógico. Generalmente, cuando planteamos cuestiones, buscamos el interés matemático, el planteamiento de la ecuación, pero, a veces, el contexto escogido es socialmente absurdo.

A este respecto, consideremos el siguiente problema: "Dos obreros instalan doce metros de tubería en nueve horas. Completa el cuadro:

Número de obreros	Número de metros de tubería instalados	Tiempo (horas)
2	12	9
?	24	9
6	12	?
1	?	18

Parece de lo más normal, esperamos que se aplique la proporcionalidad, esto se comprende bien. Sin embargo, profundizando, tampoco es razonable aplicarla en esta situación ya que sabemos bien que el trabajo en equipo no genera un trabajo proporcional al número de personas, sino al ritmo de cada una de ellas. Podría ocurrir que alumnos con una actitud crítica no respondieran, como esperamos, a la última pregunta.

Parece que en el ámbito escolar generamos con las Matemáticas una "lógica escolar" diferente de la "lógica social", y esta lógica escolar lleva al alumno a responder, no a la pregunta que realizamos en el problema, sino a una meta-pregunta: ¿qué espera el profesorado que yo haga?

Por ello, a efectos de aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, parece necesario potenciar el pensamiento lógico inherente a éstas y conjugar esta lógica interna de la Matemática con la "lógica social" en la que está inmerso el alumno.

Otras veces esta "lógica social" dificulta el verdadero sentido de los objetos matemáticos. Veamos algunos ejemplos. Los números decimales se presentan en la vida corriente como parejas de números enteros; así, decimos: Víctor mide un metro ochenta y no se trata del número 1,80, sino de dos números enteros, 1 y 80, con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. Este modelo del número decimal como pareja de números enteros es de naturaleza social y queda en la mente del alumno, y podemos encontrarnos con errores que se justifican vía esta "lógica social":

1,3 < 1,28 porque 3 < 28, o

0,3 x 0,3 = 0,9 porque 0 x 0 = 0 y 3 x 3= 9,

o entre 1,3 y 1,4 no hay otro número porque no hay número entre 3 y 4.

Otro ejemplo lo podemos encontrar en el modelo social más utilizado para clasificar, la partición, es decir, en la formación de conjuntos de intersección vacía. De esta manera, para el artesano que hace baldosas, una baldosa cuadrada no es rectangular. Nos encontramos, así, con errores asociados a esta forma clasificar.

Los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo. Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas en la mente de los estudiantes, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

Veamos, a título de ejemplo, dos rupturas importantes que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático: el modelo aditivo crea dificultades al modelo multiplicativo y lineal y éste, a su vez, crea dificultades a otros modelos. Como hemos visto en el apartado anterior, en la escuela primaria, se introduce la multiplicación como una adición que se repite:

$$a + a + ..^{b\,veces}. + a + a = b \cdot a \text{ (estado semiótico)}$$

Esta adición que se repite no puede dar sentido a la multiplicación con otros números (enteros negativos o racionales) y constituye una fuente de dificultades, ya que conduce únicamente a una ley externa. Se hace, por tanto, necesario dotar de significado a la multiplicación dentro de Z y Q y facilitar las identificaciones sucesivas entre los números.

Hemos de cambiar el punto de vista muchas veces a propósito del número: el número sirve para contar (conjunto N), para medir (conjuntos Q+ y R+) y para operar (Z y Q).

Cuando el modelo lineal queda implícito, éste constituye un conflicto para los demás modelos. Así, por ejemplo, a los modelos $x^2; \sqrt{x}$ o $\frac{1}{x}$ se le suelen aplicar las propiedades de linealidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$y$$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Con relación al comportamiento exponencial, en actividades de resolución de problemas nos encontramos en situaciones análogas; por ejemplo, si pedimos a nuestros alumnos que tomen una hoja de papel y la doblen, una vez, dos veces, etc., y preguntamos: ¿si doblo n veces cuántos pedazos de papel tengo? Muchos alumnos contestarán "2n", es decir, recurrirán al modelo lineal. Con bastante reflexión llegarán a determinar el resultado verdadero: 2^n.

Vemos como los modelos implícitos que generan ciertos modos de pensamiento se convierten en dificultades para el proceso en el conocimiento matemático, dificultades que, por otro lado, no se pueden evitar. Los profesores deben conocer y reflexionar sobre estos modelos, con el fin de no facilitar en la enseñanza la formación de estas dificultades.

5.2.2.3 Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de Matemáticas y con los métodos de enseñanza.

La institución escolar debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Esta organización afecta tanto a los elementos espacio-temporales como a los agrupamientos en clases homogéneas o heterogéneas, de acuerdo con sus habilidades en Matemáticas.

La organización curricular en Matemáticas puede originar diferentes dificultades en su aprendizaje. Cuatro serían los elementos básicos que se pueden considerar como dificultades en el currículo de Matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en Matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las Matemáticas escolares.

Por último, nos referimos a los métodos de enseñanza que deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar como a la organización curricular. Varios son los aspectos que podemos considerar; por ejemplo, el lenguaje, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los alumnos; la secuenciación de las unidades de aprendizaje, que debe estar adaptada a la lógica interna de las Matemáticas; el respeto a las individualidades, que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase y, por último, los recursos y la representación adecuada.

5.2.2.4 Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos

La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. Nos encontramos, sin embargo, con diferentes teorías generales sobre el desarrollo cognitivo que por distintas razones no han tenido un efecto claro y directo en las aulas de Matemáticas de Secundaria; también es verdad que muy pocas de estas teorías se han ocupado de manera específica de las Matemáticas.

Los enfoques que podemos considerar son muchos: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre otros muchos. Un texto de interés en el que se pueden considerar algunos de estos enfoques es el libro de L.B. Resnick y W.W. Ford (1990): *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.*

5.2.2.5 Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas

Sabemos que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gustan las Matemáticas. Muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas.

Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., genera bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

Buxton (1981), en su libro *Do you Panic about Maths?*, cita las principales creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas y que son transmitidas de padres a hijos:

Las Matemáticas son:

1. Fijas, inmutables, externas, intratables, irreales.
2. Abstractas y no relacionadas con la realidad.
3. Un misterio accesible a pocos.
4. Una colección de reglas y hechos que deben ser recordados.
5. Una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que asegura.
6. Un área en la que se harán juicios, no sólo sobre el intelecto, sino sobre la valía personal.
7. Sobre todo, cálculo.

Esta perspectiva externa de las Matemáticas las trata como la realización de una aventura arriesgada a la que uno se enfrenta con pocas herramientas. En esta situación es lógico que aparezcan la ansiedad y el miedo.

Los aspectos afectivos comienzan a ser objeto de las investigaciones en Educación Matemática. Una obra interesante es: *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective*, de D.B. McLeod y V.M. Adams (1989).

5.2.3 Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

Presentadas en términos generales las dificultades que se dan en el proceso de enseñanza aprendizaje, analizamos el segundo aspecto que tiene que ver en la organización de los errores: los obstáculos.

El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por el filósofo francés Gaston Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. El autor señala el sentido en que debe entenderse y dice:

> [...] *Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.*

Identifica varias clases de obstáculos que surgen desde:

- la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas,
- la tendencia a generalizar, que puede ocultar la particularidad de la situación,
- el lenguaje natural.

El traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de las Matemáticas es objeto de debate, ya que plantea dificultades que han sido descritas por autores como Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989), y aunque coincidimos con Brousseau (1983) en que, *la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso*. Una revisión y organización de este concepto y de sus posibles implicaciones en el análisis de errores, nos puede ayudar a tener una visión más amplia en el tema que nos ocupa.

Este autor considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

De origen *ontogénico o psicogénico*, debidos a las características del desarrollo del niño.

De origen *didáctico*, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.

De origen *epistemológico*, intrínsecamente relacionados con el propio concepto.

A todos ellos se los puede encontrar en la historia de los mismos conceptos, aunque esto no quiere decir que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido.

Tall (1989), en su trabajo "Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm", no hace distinciones entre los obstáculos y los llama, simplemente, obstáculos cognitivos. Distingue dos tipos:

a) Obstáculos basados en la secuencia de un tema: afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del Álgebra, en el que las destrezas operatorias se enseñan con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

b) Obstáculos basados sobre casos simples: indica que, posiblemente, tienen su causa en el hecho de limitar al estudiante a la consideración de casos simples por un período sustancial de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Observamos que la idea de obstáculo parte de la misma fuente: el "obstáculo epistemológico" de Bachelard.

Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como "aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que, por esta razón, se fija en la mente de los estudiantes pero que, posteriormente, este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas".

Podemos precisar expresando que: un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, constituye un verdadero conocimiento.

Cada obstáculo tiene un dominio de eficacia; el alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.

El obstáculo es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez; resulta indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

A pesar de haber notado su inexactitud, el alumno continúa manifestándolo esporádicamente. De todo ello podemos obtener como primera reflexión que, en el contexto del desarrollo del pensamiento matemático, éste está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos. Sin embargo éstos, no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante, aceptamos que tales organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como didácticos. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicada de obstáculos que podemos considerar como cognitivos.

Estas consideraciones teóricas no están exentas de discusión, pero nos ayudarán a organizar e interpretar mejor los errores que manifiestan nuestros alumnos, así como a organizar las lecciones de Matemáticas, que es de lo que se trata.

Por ejemplo, para bastantes alumnos de Secundaria las representaciones gráficas de las funciones parecen haber perdido su valor de representación de la función y son tomadas como si fueran a la vez significante y significado. Así la función no sería para ellos, una relación entre dos magnitudes x e y; una ordenada positiva f (x) ya no sería la longitud de un segmento que representa una magnitud. El concepto de función se reduce, en cierta manera, a la imagen visual que su curva genera; la expresión analítica y = f (x) sirve únicamente para designar esta curva y para identificarla entre otras formas distintas; de esta manera, el par (x, f (x)) sería el nombre dado a tal o cual punto particular de la curva; este hecho genera errores, entre otros, el suponer que las gráficas son siempre continuas debido a que las situaciones manejadas por los estudiantes siempre tienen esta propiedad.

Aquí cabe preguntarse si la misma enseñanza no es la que origina esta concepción parcial de la noción de función. En efecto, con demasiada frecuencia se considera a la curva que la representa como un objeto de estudio en sí mismo, y no como un modo de representación de una ley de variación.

La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la presencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy.

5.2.4 Errores en las matemáticas

Algunos matemáticos han encontrado en los errores una gama de problemas dignos de estudio, ya sea porque plantean acertijos o pasatiempos o porque sugieren teoremas interesantes. En este apartado consideramos el papel de los errores en el desarrollo del conocimiento matemático, mostramos algunos procedimientos erróneos, aprovechables didácticamente, y analizamos algunas pseudo- demostraciones.

Lakatos (1981), en algunos de sus artículos, muestra como la discusión de los errores detectados en algunas teorías matemáticas permite su transformación o enriquecimiento

Las respuestas a las preguntas surgidas en la discusión permiten explicar el desarrollo de ciertos conceptos y el nacimiento de nuevas teorías, que tal vez no se hubieran desarrollado sin el análisis crítico de las concepciones vigentes.

En relación con los errores cometidos en el desarrollo histórico del conocimiento matemático, algunos autores, como Lakatos, hacen referencia a "concepciones limitadas", matiz totalmente válido, pues decimos que algún procedimiento es correcto o no, a partir de los elementos que conforman las teorías actuales, pero con ello cometemos el error de hacer juicios con marcos de referencia que no corresponden a la situación que se analiza.

Este matiz de "concepción limitada" que se le da a los errores en la historia de las Matemáticas, puede ser válido también en el caso de los errores cometidos por los estudiantes, puesto que muchos de éstos pueden explicarse a través de los métodos que ellos desarrollan con el tiempo, aunque dichos métodos son válidos en algunos casos solamente. Queda claro que no todos los errores de los alumnos pueden explicarse de esta forma; por lo tanto, este matiz no es válido, en general, para reflexionar sobre los errores cometidos por los estudiantes, pero constituye un elemento más que debemos tener en cuenta.

5.2.4.1 Procedimientos erróneos

En este apartado analizamos algunos procedimientos erróneos que suelen cometer los alumnos de Primaria o Secundaria.

a) Nos encontramos, a veces, con alumnos que realizan la suma de fracciones como sigue: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, es decir, sumar por separado los numeradores y los denominadores. Este procedimiento, incorrecto en general, no lo es en algunos casos. Si despejamos "a" obtenemos: $a=\frac{-b^2\cdot c}{d^2}$.

Algunas soluciones enteras de ésta nos conducen a las siguientes soluciones: $\frac{-18}{3}+\frac{8}{2}=\frac{-18+8}{2}$; $\frac{-12}{2}+\frac{3}{1}=\frac{-12+3}{2+1}$;…

b) Un error muy conocido y discutido en diversos artículos y libros de curiosidades o paradojas Matemáticas es la cancelación:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

Si consideramos el caso general con *a, b, c*, dígitos no nulos, obtenemos:

$$\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c}=\frac{a}{c}$$

que se puede escribir de la forma $\frac{10\cdot a+b}{10\cdot b+c}=\frac{a}{c}$, de la que, después de algunas transformaciones algebraicas sencillas, obtenemos:

$$9\cdot a\cdot c=b\cdot\left(10\cdot a-c\right),$$

si a = b o a = c, se obtienen a = c o a = b, respectivamente, lo que nos conduce a:

$$\frac{11}{11}=\frac{1}{1};\frac{22}{22}=\frac{2}{2};...$$

Si consideramos b = 6, la ecuación anterior se convierte en $a=\frac{2\cdot c}{20-3\cdot c}$, que admite algunas soluciones que corresponden a los siguientes casos:

a = 1, b = 6, c = 4 ; a = 2, b = 6, c = 5 ; a = 6 , b=6, c=6 de ahí que algunas soluciones son:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4};\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5};\frac{6\cancel{6}}{\cancel{6}6}=\frac{6}{6}$$

Análogamente se puede ir considerando otras posibilidades. Un estudio detallado se encuentra en Johnson (1987).

c) Otro ejemplo sobre cancelación, recogido en Carman (1971), es el siguiente:

sen a+sen 2a+...+sen na = sen (n + 1) a/2 . sen n a /2 / sen a/2

"Cancelando sen" obtenemos:

a+2a+...+na = (n + 1) a /2 . n a /2 / a /2

"cancelando a "se llega a:

1+2+...+n = (n + 1)/2. n/2 / 1/2, esto es: 1+2+...+n = (n + 1) . n /2

d) Sucede a veces que la suma de dos errores da como resultado un acierto. Por ejemplo:

Algunos alumnos desarrollan la expresión $\left(\frac{4}{9}\cdot 2+1\right)^2=$, de la forma siguiente:

$$\left(\frac{4}{9}\cdot 2+1\right)^2=\left(\frac{4}{9}\cdot 2+\frac{4}{9}\right)^2=\left(\frac{12}{9}\right)^2=\frac{16}{9}$$

Otros lo hacen como sigue:

$$\left(\frac{4}{9}\cdot 2+1\right)^2=\left(\frac{4}{9}\cdot 2\right)^2+1^2$$

Se puede comprobar que la respuesta correcta es la suma:

$$\left(\frac{4}{9}\cdot 2+1\right)^2=\left(\frac{4}{9}\cdot 2\right)^2+1^2+\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{9}\cdot 2\right)^2+1^2+2\cdot\frac{4}{9}\cdot 2$$

En el caso de las fracciones, nos podemos encontrar una situación similar, dos errores consecutivos dan un acierto. Algunas veces el alumnado, por un lado, considera que la división de números enteros tiene la propiedad conmutativa y, por otro, se suele confundir el algoritmo de la división de fracciones con el de la multiplicación. Así:

$$\frac{1}{2}:\frac{3}{6}=\frac{3:1}{6:2}=\frac{3}{3}=1$$

5.2.4.2 Las pseudo-demostraciones

Con frecuencia, nos encontramos en Matemáticas con demostraciones aparentemente correctas, pero que chocan con la intuición y el sentido común: se trata de curiosidades o acertijos como: puedo probar matemáticamente que "4 es igual a 5" o que "2 es igual a 1" y, para el ejemplo: "4 es igual a 5", se plantean demostraciones como la que sigue:

$$\begin{gathered} -20 = -20, \\ 16 - 36 = 25 - 45, \\ 16 - 36 + (9/2)2 = 25 - 45 + (9/2)2, \\ (4 - 9/2)2 = (5 - 9/2)2, \\ 4-9/2 = 5-9/2, \text{ y entonces } 4=5 \end{gathered}$$

Análogamente, para el ejemplo: "2 es igual a 1".

$$\begin{gathered} x = 1, \\ x^2 = x, \\ x^2 - 1 = x - 1, \\ x + 1 = 1,\ 1 + 1 = 1 \ \text{ y, entonces, } 2 = 1. \end{gathered}$$

El aprovechamiento de los casos anteriores en el contexto escolar puede realizarse atendiendo a la serie de propiedades ocultas que generan estos errores y permiten ampliar la comprensión de algunos contenidos matemáticos. Pueden ser entonces de gran utilidad en nuestras clases de Matemáticas, tanto en el trabajo individual como en grupo.

Por ejemplo, si algún alumno comete el error: $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c}$, se puede plantear: ¿en qué casos es válido?, e indagar en los casos en que es posible realizar un "procedimiento erróneo" para, posteriormente, animar al alumno a confiar en sus propios recursos para salir de dudas. Análogamente, en las pseudodemostraciones, podemos desarrollar cuestiones relacionadas con la igualdad y las potencias y analizar que:

$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$; pero que: $a = b \not\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$, y potenciar la búsqueda de situaciones familiares como:

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1;$$

o con la igualdad y las operaciones de +, -, x, /, donde:

$$a = b \Rightarrow a \pm k = b \pm k \text{, y } a \cdot k = b \cdot k \text{, y } a : k = b : k \left(k \neq 0\right)$$

Este uso de los errores en la clase de Matemáticas consiste en plantear el propio error como un problema matemático.

5.2.5 Errores en el aprendizaje de las matemáticas: evaluación y diagnóstico

Un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta. En general, aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tiene una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, oculta probablemente serios errores conceptuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente los errores de los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.

La interpretación y análisis de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas puede enriquecerse con el apoyo de algunas teorías de la Psicología Educativa, algunas de las cuales se refieren a determinados procesos que se dan en la Matemática. La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco; éste tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en su mente un cierto equilibrio.

Dos parecen las razones básicas que deben tenerse en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento. En primer lugar, que el nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo o, por lo menos, recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. En segundo lugar, que el saber anterior produce modelos implícitos que, a veces, son favorables para la adquisición del nuevo conocimiento matemático y que, por tanto, hay que explicitarlos y, otras veces, al contrario, son un obstáculo. En ningún caso, el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, sino que se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

A nuestro juicio, podemos caracterizar en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas: errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas: una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático y, otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En todo caso, desde la perspectiva de la enseñanza tener elementos de análisis de estos errores, parece útil recordar algo que parece obvio aceptar: por una parte, la complejidad de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas, y que estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y, por otra, que éstos se producen por causas muy diversas que muchas veces se refuerzan en redes complejas. Una manera eficaz de abordarlos es considerar las tres direcciones antes mencionadas, a modo de tres ejes de coordenadas, lo que nos situaría con más precisión en los orígenes del error y nos permitiría, como profesores, arbitrar procedimientos y remedios más efectivos para nuestro propósito.

Estos tres ejes están determinados por:

I. Errores que tienen su origen en un obstáculo.

II. Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.

III. Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales. A modo de ejemplo y tomando como referencias la Aritmética y el Lenguaje algebraico, con relación a los primeros ejes, tenemos:

I. Errores que tienen su origen en un obstáculo.

Como ejemplo de éstos citamos el que señalan Vargas-Machuca y otros (1990), que está relacionado con el tópico de los números enteros. La idea de número como expresión de cantidad constituye un obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo. A la pregunta *¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido - (-3)?,* un estudiante de Magisterio respondió de la siguiente manera:

No, porque no es posible quitar una cosa que no existe (-3).

En el mismo orden de cosas, nos hemos encontrado con alumnos que manifiestan duda sobre la posibilidad de formular un problema aritmético, de estructura aditiva, de cambio con aumento, que se resuelva mediante una resta. Ellos se preguntan: *¿Cómo es posible?, si es de cambio aumentando, no puede ser una resta.* Este comportamiento, pero considerando que la resta siempre implica disminución, lo hemos observado para el caso de los problemas de cambio con disminución que se resuelven mediante una suma. Estos alumnos aplican un conocimiento que poseen sobre las operaciones Aritméticas con números naturales en un contexto donde éste ya no es válido.

Otro caso que presentamos está relacionado con el orden entre decimales. Según la encuesta del INRP 1977 (Ermel, 1982), en Centeno (1988), para el 37% de alumnos de edades comprendidas entre 10 y 11 años, el número 3,2 es inferior a 3,135. Los números decimales son interpretados como pares de enteros y se ordenan con los mismos criterios que éstos (2 < 135).

Asimismo, podemos citar el que indica Collis (1974) que relaciona las dificultades que los niños tienen en el Álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. Este autor apuntó la idea de que los estudiantes que comienzan a estudiar esta materia consideran las expresiones algebraicas como enunciados que, algunas veces, están incompletos. Por ejemplo, si se les requiere para que reemplacen dos números conectados por una operación por el resultado de ésta y, posteriormente, se les introduce al Álgebra con expresiones tales como x + 7 y 3x para ser remplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden "cerrarse", pues son expresiones "incompletas", los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que "no hay aceptación de la falta de clausura".

Davis (1975), por su parte, también plantea algunas situaciones a los estudiantes en las que se les hace difícil dar respuestas "legítimas". Esta dificultad está relacionada con la distinción entre la adición Aritmética, donde "+" es una pregunta o un problema (3 + 7), y la adición algebraica, como en x + 7, donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Esto necesita por parte de los alumnos un "reajuste cognitivo", que Davis ha llamado dilema proceso-producto donde, simultáneamente, se describe el proceso y se nombra la respuesta.

La "concatenación", esto es, la yuxtaposición de dos símbolos, es otra fuente de dificultad para el estudiante principiante de Álgebra (Herscovics, 1989). También Matz (1980), había observado que, en Aritmética, la concatenación denota adición implícita, como en la numeración de valor posicional y en la notación numérica mixta. Sin embargo, en Álgebra, concatenación denota multiplicación. Esto explica por qué varios estudiantes, cuando se les pidió sustituir 2 por a en 3a, pensaron que el resultado sería 32. Sólo cuando específicamente se les requirió responder "en Álgebra", respondieron "3 veces 2" (Chalouh y Herscovics, 1988).

II. Errores que tienen su origen en ausencia del sentido. Dado que estos errores se originan en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo), podemos diferenciar errores en tres etapas distintas.

A) Errores del Álgebra que tienen su origen en la Aritmética.

El significado de los signos usados es el mismo en ambas ramas de las Matemáticas. El Álgebra no está separada de la Aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de Aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean asimilados anteriormente dentro del contexto aritmético. Por eso, a veces, las dificultades que los estudiantes encuentran en Álgebra no son tanto dificultades en el Álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la Aritmética; por ejemplo, en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc. Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x\cdot y}$$

También surgen muchos errores en la suma o la resta de fracciones. Por ejemplo, para calcular $\frac{3}{28}+\frac{8}{35}$, escriben:

$$\frac{3}{28}+\frac{8}{35}=\frac{3+8}{4\cdot 7\cdot 5}$$

que, traducido al lenguaje algebraico, da lugar a:

$$\frac{x}{y\cdot z}+\frac{k}{y\cdot p}=\frac{x+k}{y\cdot z\cdot p}$$

Otras veces, con la preocupación de no olvidar los factores por los que hay que multiplicar los numeradores primitivos, omiten éstos. Así:

$$\frac{3}{28}+\frac{8}{35}=\frac{5+4}{4\cdot 7\cdot 5}$$

Y, de forma análoga:

$$\frac{x}{y\cdot z}+\frac{k}{y\cdot p}=\frac{z+p}{y\cdot z\cdot p}$$

El signo " - ", sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores:

$$-(3+5)=-3+5\Rightarrow-(a+b)=-a+b$$
$$-\frac{(3+5)}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\Rightarrow-\frac{(a+b)}{c}=-\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

B) Errores de procedimientos.

El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos" también da lugar a errores de este tipo. Consisten en el hecho de que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la aplican tal cual la conocen o la adaptan a una situación nueva. Tienden así un "puente" para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se origina como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores. La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes de forma independiente. Un operador es empleado linealmente, cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada parte y combinando luego los resultados parciales. La linealidad resulta bastante natural para muchos alumnos, ya que sus experiencias anteriores son compatibles con hipótesis de linealidad.

Entre los errores derivados, distinguimos:

1. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción) al caso de la multiplicación:

$$3\cdot(4+5)=3\cdot 4+3\cdot 5 \Rightarrow a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$3\cdot(4\cdot 5)=3\cdot 4\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot a\cdot c$$

y también nos encontramos que

$$\frac{3+4}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5} \text{ se extiende a } \frac{3}{4+5}=\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$$

y, de manera análoga,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}, \text{ se extiende a } \frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

b) La estructura $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$, en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma, $(a+b)^2=a^2+b^2$, de un modo inconsciente para los alumnos como algo muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado. Es la misma situación que en el trabajo con números, aunque en el caso de la suma, y si se trata de números pequeños en valor absoluto, suelen resolver primero la operación indicada entre paréntesis. Y, también:

$$2^{2+3}=2^2\cdot 2^3 \Rightarrow 2^{a+b}=2^a\cdot 2^b$$
$$2^{2.3}=2^2+2^3 \Rightarrow 2^{a\cdot b}=2^a+2^b$$

c) De la misma forma que con las potencias, sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad de la radicación respecto a la adición o sustracción.

2. Errores relativos al uso de recíprocos

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5+3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5+3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5\cdot 3} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x\cdot y}$$

3. Algunos errores de cancelación

Indicaremos sólo la versión aritmética:

$$\frac{2\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{5}{3}, \text{ se extiende a } \frac{2+5}{2+3}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5 + 7} = 2 \text{, se extiende a } \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5 + 7} = 2 + 3$$

Tanto los errores de cancelación como los cometidos al trabajar con recíprocos se podrían haber evitado si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la situación. Por ejemplo, para el error de recíprocos, la solución podría ser igualar una fracción a otra, encontrar el denominador común y, después, expresar la suma de fracciones en una sola fracción.

C) Errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la Aritmética. Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo "=" en su paso de la Aritmética al Álgebra. En el sentido de este signo aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el Álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como 4 x - 3 = 2 x + 7, que sólo es verdadera cuando x = 5. A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen que la igualdad se verdadera.

Esta distinción de los errores en tres ejes, obviamente no disjuntos, nos hace posible centrar la atención en tres direcciones que permiten una evaluación y diagnóstico más eficaz para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia las Matemáticas.

Desde luego que la evaluación y el diagnóstico de los errores de los alumnos es importante, pero el profesor ha de usar este conocimiento para promover un mejor aprendizaje del alumno. Desde un punto de vista práctico, esto supone pasar de una enseñanza caracterizada por dos fases: contenidos y aplicaciones, donde el error tiene sólo una función negativa cuando realizamos la evaluación del alumno, a una enseñanza caracterizada por tres fases, donde la primera (evaluación y diagnóstico) es la más importante, y en la cual se tiene que hacer la explicitación de los errores.

La evaluación diagnóstica es un conjunto de situaciones de aprendizaje diseñadas para identificar las dificultades específicas del aprendizaje, que tratan de determinar su naturaleza. Esta evaluación diagnóstica tiene lugar al comienzo de las unidades didácticas, pero la detección de errores y la determinación de su naturaleza también tiene lugar en el desarrollo de la unidad didáctica, es decir, en el curso del aprendizaje. El objeto de la evaluación diagnóstica es claro: determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio.

5.2.6 Estrategias de prevención y remedios

Analizar las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas en términos de prevención y remedio supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas. La prevención requiere arbitrar estrategias generales de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas con estrategias específicas que dependen del contenido concreto de que se trate. La prevención, al tender a minimizar las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, debe estar orientada de manera general por las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, a los procesos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia las Matemáticas (analizadas en el párrafo 1 de este capítulo) y, de manera específica, por los obstáculos y errores concretos de cada uno de los bloques temáticos objeto de aprendizaje.

Los remedios tienen que ver más con el día a día, con la interacción diaria en clase entre el profesor y el alumno. Su eficacia viene determinada, en gran medida, por una buena evaluación y diagnóstico. El análisis de errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y, de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección. En este sentido, el profesor debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades de las Matemáticas, que requiere un esfuerzo preciso en las dos direcciones anteriores. Las estrategias de prevención deben ir dirigidas a evitar o minimizar los obstáculos para que puedan ser superados, a dotar de sentido a los objetos y al pensamiento matemático y a crear un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia las Matemáticas.

Las estrategias de remedio vienen determinadas por el diagnóstico inicial del error y también, conviene recordarlo una vez más, por el posicionamiento del profesor. Situados dentro del paradigma conceptual influenciado por la teoría de la absorción, el remedio para un error de concepto o de procedimiento pasa por hacer que el alumno olvide este concepto o procedimiento para lo cual, el profesor le debe facilitar, con ejemplos adecuados, una buena definición del concepto o procedimiento correctos. El alumno subsanará este error mediante la realización de ejercicios donde use el concepto o el procedimiento. El profesor situado en el paradigma cognitivo se coloca en la posición de que el error lo ha construido el alumno y es, por tanto, una estructura cognitiva de su dominio. La estrategia de remedio pasa porque el alumno modifique esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta; para ello, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflictos que hagan tambalear esa estructura cognitiva errónea.

Aceptado el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las Matemáticas.

¿Cómo superar un obstáculo en este sentido de conocimiento anterior que se revela inadaptado en un momento determinado del aprendizaje? Brousseau (1983) se manifiesta en los siguientes términos:

> *[...] para superar un obstáculo se requiere un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento, es decir interacciones repetidas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento. Esta observación es fundamental para distinguir un verdadero problema; es una situación que permite esa dialéctica y que la explica.*

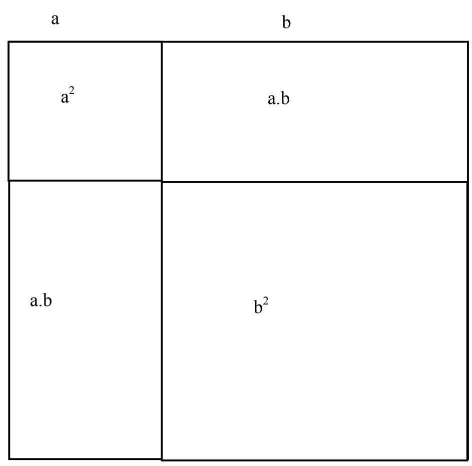
Nos interesa poner de manifiesto los conocimientos adquiridos por el alumno, que responden a una "lógica personal" y que en este momento producen errores. Se trata de superar ese obstáculo, y de aceptarlo, no como algo que no debiera haber aparecido, sino como algo cuya aparición es interesante, ya que su superación nos va a permitir la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. Debemos entender, como señala Bachelard que es, con la superación de ese obstáculo, como vamos a conseguir el conocimiento nuevo.

¿Cómo superar la falta de sentido en los objetos matemáticos?

Tomando como referencia los tres estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva, tenemos que la falta de sentido va desde el estadio semiótico, en el que el sistema nuevo toma todo su significado en el sistema antiguo y no tiene aún ningún tipo de estructura, hasta el estadio autónomo donde el sistema nuevo adquiere significado en sí mismo, a veces adoptando ciertas convenciones, pasando por el estadio estructural donde el sentido unas veces se obtiene con ayuda del sistema antiguo y otras, donde el sistema antiguo es insuficiente para dotar de significado a ciertos aspectos del sistema nuevo como ya hemos mostrado en ejemplo de las potencias en el párrafo 1.

Algunas experiencias llevadas a cabo con nuestros alumnos ponen de manifiesto cómo es posible poner en conflicto el error en diferentes situaciones. Con frecuencia consideramos la situación que en apariencia es más fácil, pero que a veces para el alumno se puede convertir en muy difícil. Pensamos que el alumno entiende que, para establecer la falsedad de la proposición $\sqrt{a^2+b^2}=a+b, \forall a,b \in R$, basta probar que $\exists a,b \in R : \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ es verdadera.

Ciertamente, esto es lo que tratamos de hacer pero, a pesar de que cuando los alumnos cometen el error $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ los profesores les ofrecen un contraejemplo ($\sqrt{16+4}=\sqrt{4^2+2^2} \neq 4+2$) para convencerlos, se sabe que el error se sigue cometiendo sistemáticamente, lo que es un indicador de que sólo un argumento de esta naturaleza no convence realmente. Sería interesante recurrir también a otras situaciones, tal vez más familiares o que creen esquemas más fáciles de recuperar, por ser argumentos apoyados en sistemas de representación visual y no solamente en argumentos formales, como la que sigue: observa cómo no se puede descomponer un cuadrado de lado a + b en dos cuadrados de lados a y b, respectivamente.



Parece razonable pensar que la falta de sentido se recupera poniendo a los alumnos en una situación de conflicto que genere esquemas que doten de sentido al concepto o proceso erróneo que presentan; que estas situaciones son variadas, y van desde considerar un ejemplo numérico más simple, hasta usar diferentes contextos o sistemas de representación que pongan en evidencia que existe un defecto en la comprensión del concepto o en el procedimiento de la actuación del alumno.

Los errores que cometen éstos por falta de una actitud racional hacia las Matemáticas son errores que llamamos casuales o de descuido, y se manifiestan de formas diversas, que van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que les incapacita para la citada tarea, pasando por situaciones intermedias que están mediatizadas por las creencias sobre la tarea en el contexto escolar. Uno de estos errores es el que se origina por los cuestionamientos que generamos en nuestros alumnos (aspecto comentado en el apartado 1).

Para intentar paliar los errores que se dan por los diferentes cuestionamientos que generamos en los alumnos al inducirles en el ámbito escolar una "lógica escolar" diferente a la "lógica social", podemos comenzar por incorporar problemas que tengan algún dato inútil, que carezca de algún dato útil y no limitarnos a los que tradicionalmente se plantean, problemas que sólo tienen datos útiles, tradición que por otra parte no es preceptiva en la institución escolar.

También podemos incorporar preguntas como: ¿Podemos con estos datos obtener el resultado pedido? El propósito es lograr que los alumnos descubran que hay datos que no sirven, que aprendan a hacer, si no un razonamiento matemático formal, sí algo un poco menos formal y cerca del sentido común, es decir, de la "lógica social".

Es probablemente el intento de potenciar un automatismo matemático basado en el adiestramiento, el que conduce a comportamientos automáticos que son las respuestas a la metapregunta, en la que utilizan simplemente combinaciones de todos los datos sin pensar en lo que eso significa.

La superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje que genera grandes dificultades. Las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por aquéllos y que no son de fácil eliminación. Incluso en muchos casos, parece ser que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos, con desilusión, resurgir al poco tiempo. Por ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual de una parte de la Matemática es incorrecta y darles entonces una explicación es, a menudo, insuficiente para eliminar el error.

El estudiante debe participar activamente en el proceso de superar sus propios errores; para ello, el profesor debe provocar conflicto en su mente a partir de la inconsistencia de sus propios errores, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada. El profesor rara vez indica a los alumnos cuál es la respuesta correcta, sino que simplemente les pide comprobaciones y pruebas que intentan provocar contradicciones que resultan de los falsos conceptos de los estudiantes. Ellos están dirigidos a conseguir la resolución de la contradicción mediante la solicitud de más comprobaciones y pruebas. El objetivo no es tanto hacer escribir a los estudiantes la fórmula o regla de procedimiento adecuada, como hacerlos enfrentarse con la contradicción y eliminar sus falsos conceptos de forma que éstos no vuelvan a aparecer.

Otra ventaja de esta forma de tratar el problema, dado que es muy poco probable que todo el grupo-clase esté de acuerdo al mismo tiempo con la respuesta correcta, es que en la clase se generen discusiones que son excelentes, no sólo para mostrar los diferentes conceptos falsos que los estudiantes puedan tener, sino también para ayudarles a superarlos a través de sus propias interacciones. En otro nivel de reflexión sobre los errores, podríamos pensar no sólo en usarlos para poner el énfasis en el desarrollo del currículo; para mejorar la enseñanza de las

Matemáticas, con especial interés en la complejidad de los objetos matemáticos y en los procesos de pensamiento (simbolización, generalización, ...); para evitar los errores de los alumnos; sino para partir desde un punto de vista diferente, es decir, tomar los mismos errores de los alumnos en Matemáticas como punto de partida y plantearnos cómo debe ser dirigida la enseñanza para diagnosticar y después eliminar esos errores. Todo ello supondría colocar a los alumnos en situación de reflexionar sobre sus ideas erróneas, y pensando por sí mismo, a partir de esa reflexión, orientarse hacia conceptos más amplios y correctos.

Es esta una concepción del aprendizaje que considera al alumno como un aprendiz activo, que intenta comprender y darle significado a los objetos matemáticos y que posee un sistema estable de ideas matemáticas que cambia sólo cuando el conflicto entre ellas llega a ser lo suficientemente persistente y poderoso. Por tanto, las estrategias de enseñanza deben ir encaminadas a detectar los errores y provocar el conflicto en los alumnos, fomentando ideas que permanezcan activas más allá de la clase de Matemáticas y a capacitarle para evaluar si sus ideas o métodos son o no correctos en una determinada tarea matemática.

A modo de resumen, vemos como las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de esta ciencia que se manifiestan en sus simbolismos y en sus procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales.

Establecidas las hipótesis:

a) Los errores de los alumnos en Matemáticas son producto de su experiencia previa y del desarrollo interno de esas experiencias,

b) Los errores pueden tener tres orígenes distintos: obstáculo, carencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales, que entrelazan entre sí,

podemos concluir que secuencias alternativas del currículo, donde éstas sean factibles, podrían cambiar la naturaleza y comprensión de los errores y que una buena propuesta de estrategias de prevención y remedio comienza por parte del profesor con un conocimiento mejor de sus alumnos. En la medida en que el profesor conozca mejor a cada uno de sus alumnos, podrá intervenir mejor en su aprendizaje. Debe aceptarse que los errores, más que indicadores del fracaso en Matemáticas, deben ser considerados como elementos que nos ayuden en nuestro trabajo como profesores de Matemáticas, guiados por el siguiente principio: *Todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje.*

BIBILOGRAFÍA

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V, pp. 125 – 154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori, Barcelona.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

(1): Microsistema: conjunto de esquemas institucionales de la cultura o subcultura (sistema político, legal, social, educativo) del cual el microsistema, entre otros, son manifestaciones concretas.
(2): Pragmática: parte de la lingüística que estudia el lenguaje en su relación con los hablantes y con las circunstancias de la comunicación.