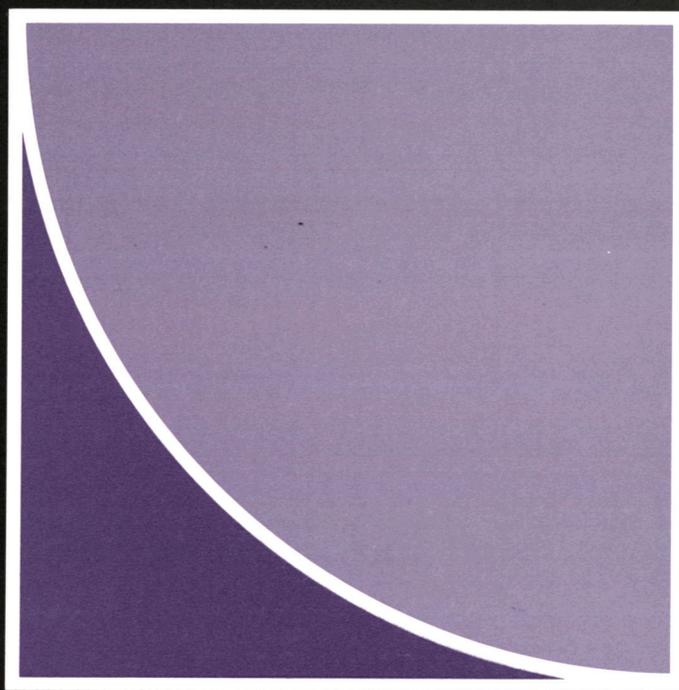


Juan García Boza

PRÉSTAMOS SUBVENCIONADOS:
ANÁLISIS FINANCIERO



Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
SERVICIO DE PUBLICACIONES

X

PRÉSTAMOS SUBVENCIONADOS
ANÁLISIS FINANCIERO

**Colección Monografías, Serie Ciencias Económicas
y Empresariales, N° 1**



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.º Documento <u>67130</u>
N.º Copia <u>632432</u>

Juan García Boza

PRÉSTAMOS SUBVENCIONADOS
ANÁLISIS FINANCIERO



Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
SERVICIO DE PUBLICACIONES

GARCÍA BOZA, Juan

Análisis financiero de las operaciones de amortización con
subsidiación en los tipos de interés / Juan García Boza
[Las Palmas de Gran Canaria] : Universidad, D.L. 1994
IV, 203 p. ; 22 cm.
ISBN 84-88412-03-7

1. Análisis financiero. 2. Tipos de interés - Previsión
I. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, ed. II. Título
657.372.3

Diseño de la colección: Emilio M. Ayuso
© ULPGC. Servicio de Publicaciones, 1993. Las Palmas G.C.
Depósito Legal: G.C. 1.329-1994
Printed in Spain.
Realización: Filmarte.Las Palmas de G.C.

I N D I C E

INTRODUCCION

Objetivos y metodología de la investigación	2
---	---

CAPITULO I: CONCEPTUALIZACION DE LAS OPERACIONES

1.1.- Introducción	8
1.2.- Concepto	11
1.3.- Modalidades	13

CAPITULO II: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES CON INTERESES POSPAGABLES

2.1.- Introducción	23
2.2.- Operaciones con subvención final	26
2.3.- Operaciones con subvención inicial	30

CAPITULO III: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES CON INTERESES PREPAGABLES

3.1.- Introducción	53
3.2.- Operaciones con subvención inicial	56
3.3.- Operaciones con subvención final	61

CAPITULO IV: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COMPUESTAS CON INTERESES POSPAGABLES

4.1.- Introducción	73
4.2.- Operaciones con subvención periódica simple	76
4.3.- Operaciones con subvención periódica diferida	81
4.4.- Operaciones con subvención inicial	90
4.5.- Operaciones con subvención final	121

**CAPITULO V: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES
EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COMPUESTAS CON
INTERESES PREPAGABLES**

5.1.- Introducción	152
5.2.- Operaciones con subvención periódica simple	153
5.3.- Operaciones con subvención periódica diferida	158
5.4.- Operaciones con subvención inicial	164
5.5.- Operaciones con subvención final	169
CONCLUSIONES	174
BIBLIOGRAFIA	201

INTRODUCCION

OBJETIVOS Y METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION

Como es sabido, las diversas operaciones financieras tienen una conceptualización común como operaciones de intercambios no simultáneos de capitales financieros¹, efectuados entre dos sujetos distintos, teniendo especial importancia, dentro del amplio marco del concepto citado, **las operaciones de amortización**, pues a través de ellas se posibilita un traspaso de los recursos financieros de los agentes económicos con superávit hacia los agentes económicos con déficit, y necesitados, pues, de capitales financieros con los que acometer sus proyectos, bien de consumo o de inversión. Constituye además, característica fundamental de dicha clase de operaciones, la obligación, por parte del agente económico que percibe los recursos, de devolver éstos, satisfaciendo, además, un precio financiero por su utilización.

En el conjunto de las operaciones de amortización, resultan importantes las relativas a los préstamos subvencionados u **operaciones de amortización con subsidiación en los tipos de interés**. Esta importancia lo es tanto por el volumen de capitales financieros involucrados en tales operaciones como por la función social que desarrollan, posibilitando la financiación de una parte considerable de las operaciones llevadas a cabo en el mercado inmobiliario.

No obstante la importancia de tales operaciones, estas se llevan a cabo en la realidad económica sin que exista una correcta conceptualización financiera de las mismas, así como de las distintas modalidades inherentes a ellas, careciéndose, igualmente, de un análisis que ponga de manifiesto su valoración financiera, aportando la metodología de cuantificación no sólo de las subvenciones, sino del coste o rentabilidad financiera de tales operaciones. Existen, pues, diversos interrogantes en relación con las citadas operaciones, entre los que podemos destacar los siguientes:

¹ Gil Peláez, L. (1987): *Matemática de las Operaciones Financieras*; Madrid, Ed. AC., p. 25.

a) Desde el punto de vista financiero y atendiendo a su coste o rentabilidad, ¿por cuál modalidad de subvención (inicial, periódica, final), ha de optar cualquiera de los sujetos intervinientes en la operación?

b) Pactada una determinada modalidad de subsidiación, ¿qué sujeto económico (prestamista o prestatario) ha de ser el receptor óptimo de la subvención?

c) ¿Qué expresiones analíticas posibilitan la valoración financiera de la subvención correspondiente en cualquiera de las modalidades pactadas?

d) En las operaciones en las que la cuantía total de la subvención sea percibida en el origen de la operación por el acreedor inicial de la misma, ¿cómo se valora financieramente la contraprestación del sujeto pasivo?

En las operaciones indicadas centraremos nuestro objeto de investigación, a fin de responder a los interrogantes anteriores y de cubrir los siguientes objetivos:

Primero: **Conceptualización** de las operaciones de amortización con subsidiación en el precio financiero. Ello supone:

a) Definir y clasificar con precisión las operaciones objeto de análisis, estableciendo las distintas modalidades de las mismas, poniendo de manifiesto sus características financieras definidoras y más sobresalientes.

b) Definir y clasificar las diversas modalidades de subsidiación, señalando las características principales.

Segundo: **Valoración financiera** de la cuantía de la subvención global, o bien de las parciales, según las modalidades. Ello supone que, de acuerdo con la conceptualización realizada, y a través de un proceso lógico-deductivo, mediante el establecimiento de diversas hipótesis en cuanto a la modalidad de subsidiación y/o a la de cuantificación de la misma, es posible valorar financieramente, y de acuerdo con la metodología propia de la Matemática de las Operaciones Financieras, la cuantía del capital financiero asociado a la subvención correspondiente, relativa a las diversas modalidades objeto de análisis.

Tanto en la conceptualización de las operaciones como en la valoración financiera de la subvención, es preciso desarrollar un detallado proceso de análisis, introduciendo un conjunto de nuevos conceptos, así como distintas hipótesis en relación con las modalidades de las operaciones, que posibiliten el correcto análisis financiero de las mismas.

De acuerdo con lo expuesto, en el capítulo I, analizaremos las características fundamentales de las operaciones objeto de estudio, y procederemos a efectuar su conceptualización y clasificación en distintas modalidades, definiendo con precisión cada una de ellas, y poniendo de manifiesto los aspectos más sobresalientes que caractericen a cada modalidad. Así, definiremos las operaciones con subvención inicial; con subvención final; y con subvención periódica, la cual da origen a las subvenciones periódicas simples, periódicas diferidas con acumulación aritmética y periódicas diferidas con acumulación financiera.

El capítulo II, lo dedicaremos a la valoración financiera de las subvenciones en las operaciones financieras con contraprestación única,

pactadas con intereses pospagables. Así, estudiaremos las modalidades de operaciones con subvención en su final y aquellas otras con subvención en el inicio, deduciendo, de acuerdo con las hipótesis que se expliciten, y a través de una metodología lógico-deductiva, las expresiones analíticas a fin de cuantificar la subvención correspondiente.

En el capítulo III, analizaremos la valoración financiera de las subvenciones correspondientes en las operaciones financieras simples pactadas con intereses anticipados, estudiando las modalidades con subvención inicial y con subvención en el final de la operación, deduciendo, a través de un proceso lógico-deductivo, las expresiones analíticas que permiten cuantificar la subvención correspondiente.

En el capítulo IV se estudian las operaciones de amortización con contraprestación múltiple, pactadas con intereses periódicos vencidos. Así, y de acuerdo con las modalidades de subvención descritas en el capítulo I, analizaremos distintas operaciones: con subvención periódica simple, con subvención periódica diferida, con subvención inicial y con subvención final. En cada modalidad, deduciremos la expresión analítica que permite valorar la correspondiente subvención.

En el capítulo V, analizaremos la valoración financiera de las operaciones de amortización compuestas, pactadas con intereses periódicos prepagables, distinguiendo, de acuerdo con la clasificación expuesta en el primer capítulo, entre distintas modalidades de subvención, obteniendo, para cada una de ellas la expresión analítica que posibilita la valoración financiera de la subvención correspondiente.

CAPITULO I

CONCEPTUALIZACION DE LAS OPERACIONES

CAPITULO I: CONCEPTUALIZACION DE LAS OPERACIONES

1.1.- INTRODUCCION

1.2.- CONCEPTO

1.3.- MODALIDADES

1.1.- INTRODUCCION

En general, los préstamos constituyen operaciones financieras por las que un determinado sujeto, prestamista o acreedor inicial, cede un cierto capital financiero a otra persona, llamada prestatario o deudor inicial, comprometiéndose éste a su amortización, o lo que es lo mismo, al abono de los intereses pactados y a la devolución del principal en el plazo estipulado².

Las formas típicas de concertar un préstamo son dos³: a) préstamo simple o de amortización única y b) préstamo compuesto o con amortización periódica. En cualquiera de los dos casos, los intereses pueden abonarse por anticipado, dando origen a las operaciones con intereses prepagables, o bien por vencido, dando origen a las operaciones con intereses pospagables.

En la modalidad de préstamo simple, y en la hipótesis de intereses pospagables, llegado el momento del vencimiento del préstamo, el prestatario abona al prestamista el capital recibido junto con los intereses devengados. En la hipótesis de intereses prepagables, los mismos deben ser satisfechos en el origen de la operación, por lo que en su final sólo debe abonar el prestatario el capital objeto del préstamo.

² Para un estudio general desde el punto de vista financiero de las operaciones de préstamo, puede consultarse:

Gil Peláez, L. (1987): *Op. cit.*

González Catalá, V.T. (1984): *Introducción a las operaciones financieras, bancarias y bursátiles*; Madrid, Ed. Tebar Flores.

Rodríguez Rodríguez, A. (1984): *Matemática de la Financiación*; Barcelona, Ed. Romargraf, S.A.

³ González Catalá, V.T. (1984): *Op. cit.*, p. 121.

En la modalidad de préstamo compuesto, tanto en la hipótesis de intereses prepagables como en la de intereses pospagables, el prestatario ha de abonar periódicamente al prestamista ciertas cuantías, llamadas términos amortizativos, cuya misión es satisfacer intereses y devolver parte del capital recibido⁴.

El coste total de estas operaciones financieras viene determinado por los siguientes elementos: el tipo o tipos de interés pactados; los gastos⁵ y el sistema concreto de amortización⁶.

De acuerdo con la ley financiera de valoración estipulada y según el sistema concreto de amortización pactado, se determina, bien la cuantía del pago único, o las de los términos amortizativos.

⁴ En general, se puede demostrar que cualquier término amortizativo cumple una doble misión: abonar los intereses devengados desde el vencimiento del término amortizativo anterior y, asimismo, devolver una parte del capital recibido. O lo que es lo mismo, cada término amortizativo se puede descomponer en dos sumandos: cuota de interés y cuota de amortización. Cuando los intereses se abonan al final de cada período, y sobre el capital pendiente al principio del mismo, se tiene la operación con intereses pospagables. En cambio, si los intereses se abonan por anticipado al principio de cada período, y sobre el saldo pendiente en ese momento, se tiene la operación con intereses prepagables. Puede verse en este sentido:

Gil Peláez, L. (1987): Op. cit. p. 381.

Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., p. 212.

⁵ Los gastos pueden ser iniciales y finales. Entre los iniciales cabe citar la comisión a favor de la entidad que concede el préstamo, y el corretaje del agente mediador. En este sentido, téngase en cuenta que los contratos de préstamos suelen documentarse en "pólizas de préstamos", "escritura pública" o en letras de cambio. Entre los finales se incluyen, por ejemplo, los de cancelación de hipotecas, si las hubiere.

⁶ Las distintas formas de cancelación, o sistemas de amortización, tienen su origen en las diversas hipótesis que se pueden formular en relación con los términos amortizativos, las cuotas de amortización, o respecto a cualquier otra de las variables que intervienen en la operación de préstamo. Así, como sistemas más conocidos, se tiene "el sistema francés", "el sistema de cuota constante de amortización", y "el sistema alemán". Puede consultarse a este respecto:

Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 399.

González Catalá, V. T. (1984): Op. cit., p. 124.

Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., p. 197.

Estas operaciones se realizan en la práctica aplicando la ley de capitalización compuesta, determinando según sus normas, y de acuerdo con el sistema concreto de amortización pactado, las cuantías de los capitales que ha de devolver el prestatario⁷.

Cabe distinguir entre la operación "pura o normal" y la operación "con características comerciales"⁸. La operación pura o normal está integrada por el importe del préstamo y por las cuantías que ha de satisfacer el prestatario con el único fin de abonar intereses y devolver el capital recibido. Una vez incorporadas las características comerciales a la operación pura, se tiene la operación con características comerciales⁹. Entre tales características comerciales, cabe citar la subvención en los tipos de interés, dando origen a los **préstamos subvencionados**¹⁰, o con subsidiación en los tipos de interés.

⁷ Con tal objetivo, se plantea la "ecuación de equivalencia financiera" entre la prestación y contraprestación "puras", o sea, entre la cuantía del préstamo y las de los capitales que ha de devolver el prestatario, sin tener en cuenta, a estos efectos, las características comerciales que inciden sobre la operación.

⁸ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 522

⁹ En general, las características comerciales se traducen en unas entradas o salidas adicionales de capitales, o bien en una modificación de los vencimientos.

¹⁰ A fin de potenciar al máximo la actividad empresarial en general, se ha desarrollado en los últimos tiempos un conjunto de ayudas financieras, puestas en marcha tanto por la Administración Central como por las Comunidades Autónomas con competencia en estas materias. Entre estas modalidades se encuentra la subvención en los tipos de interés. Asimismo, y como política de apoyo a la vivienda se ha desarrollado un conjunto de subvenciones directas, es decir, subvenciones que afectan directamente a los intereses que aplican las entidades de crédito a los préstamos que, vinculados al sector inmobiliario, conceden. Véase en este sentido:

Freixas, X. (1991): El mercado hipotecario español: situación actual y proyecto de reforma; Madrid, Federsa, pp. 39-46 y 269-271.

1.2.- CONCEPTO

La característica de subvención¹¹ se concreta en la obligación, por parte de un tercero distinto del prestamista y del prestatario, de abonar parte de los intereses del préstamo objeto de subvención¹², por lo que el precio financiero total de la operación se ha de distribuir entre el prestatario y un tercero¹³, consiguiéndose así el objetivo básico de la subvención: la disminución para el prestatario del coste financiero total de la operación.

De acuerdo con lo expuesto, las operaciones de amortización con subsidiación en los tipos de interés son aquellas operaciones de préstamo en las que las cargas financieras derivadas de las mismas se distribuyen entre dos sujetos distintos: el sujeto prestatario y el sujeto que subvenciona. En consecuencia, en estas operaciones, junto al acreedor inicial o prestamista nos encontramos con dos sujetos: el prestatario o deudor inicial, y el otorgante de

¹¹ Desde el punto de vista jurídico, la subvención "es la entrega de dinero a fondo perdido efectuada por un ente público a favor de un particular". Véase en este sentido: Díaz Lema, J. M. (1985): Subvenciones y crédito oficial en España; Madrid, Instituto de Estudios Fiscales, p. 23.

¹² En la práctica empresarial, estos préstamos son concedidos como consecuencia de la existencia de un convenio entre ciertas Entidades de Crédito y algún Ente Público. Mediante este tipo de convenios, las Entidades de Crédito se comprometen a la concesión de préstamos a las empresas y para las actividades que cumplan las condiciones señaladas en el convenio. Por su parte, el ente administrativo firmante se compromete a que los préstamos concedidos en base a estos convenios tengan unos determinados puntos de subvención en el tipo de interés. Puede verse en este sentido:

Carrasco Carrasco, M. (1988): El coste efectivo de la financiación empresarial; Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, p. 331.

¹³ El tercero que subvenciona el préstamo ha de señalar los puntos de subvención concedidos, de tal forma que para un período cualquiera, detrayendo del tipo de interés correspondiente al préstamo, los puntos de subvención, se obtenga el tipo de interés subvencionado. Así, para el período s , si el tipo de interés del préstamo es i_s y d_s representa los puntos de subvención, el tipo de interés subvencionado será: $r_s = i_s - d_s$.

la subvención, que es sujeto pasivo parcial en tanto en cuanto asume la obligación de satisfacer una parte de los costes financieros.

Podemos señalar, pues, como las operaciones de amortización con subsidiación en los tipos de interés, o préstamos subvencionados, se conceptualizan por su característica financiera diferenciadora, en relación con otras operaciones de amortización. Dicha característica es la existencia en la operación de un tercer sujeto, el otorgante de la subvención¹⁴, que asume la obligación de satisfacer una parte del precio financiero de tales operaciones.

De acuerdo con lo expuesto, estas operaciones quedan caracterizadas, desde el punto de vista financiero, por la existencia de tres conjuntos de capitales financieros: prestación y contraprestación, que definen la operación pura; y el conjunto subvención, definido por el sujeto otorgante de la subsidiación en base al tipo de subvención que concede, o sea, a la parte del precio financiero que se obliga a satisfacer, y a la modalidad concreta de la misma.

¹⁴ Fernández Farreres, G. (1983): La subvención: concepto y régimen jurídico; Madrid, Instituto de Estudios Fiscales, pp. 132-161.

1.3.- MODALIDADES

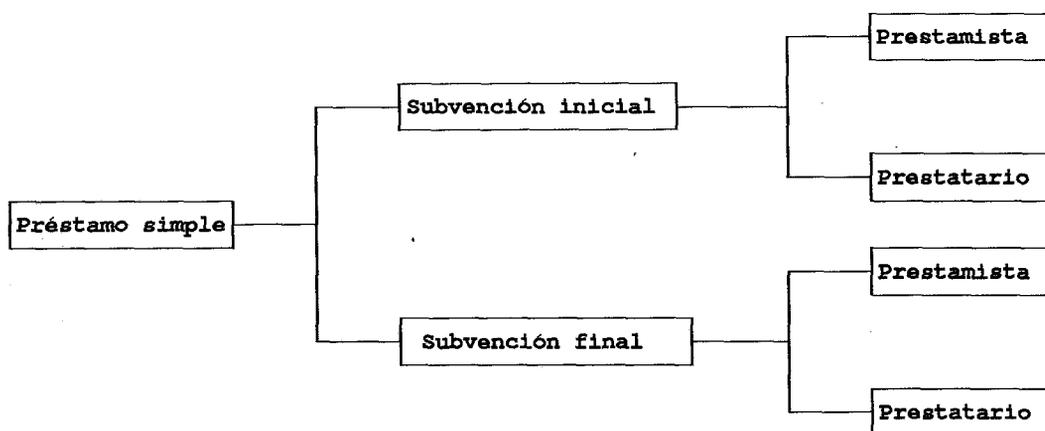
De acuerdo con el concepto enunciado, y en función de la modalidad concertada¹⁵, se pueden plantear diversas opciones de préstamos subvencionados, dando lugar asimismo, a distintas formas de valorar el importe de la subvención¹⁶. Así, es preciso distinguir:

a) Préstamo simple. En este caso, el préstamo se amortiza con contraprestación única en el plazo estipulado, pudiéndose abonar la subvención en el origen o en el final de la operación, y bien al prestatario o al prestamista, dando origen a las operaciones con subvención inicial y operaciones con subvención final:

¹⁵ Tales modalidades pueden ser: préstamo elemental o simple, y préstamo compuesto o de contraprestación múltiple.

¹⁶ Cabría pensar en principio que sólo existe una forma de cuantificar la subvención, o sea, que de la cuantía periódica de los intereses, el tercero que subvenciona, abone al prestamista la parte correspondiente determinada por los puntos de subvención. Esta es, evidentemente una forma, pero no la única, como veremos en los apartados siguientes. Además, esta modalidad plantea problemas prácticos, ya que para un préstamo a largo plazo, el tercero que subvenciona (normalmente un ente administrativo), ha de ir dotando anualmente las partidas presupuestarias correspondientes a todas las subvenciones concedidas, con lo cual, y en la hipótesis de existir varios préstamos subvencionados, se podrían plantear diversos problemas de control sobre tales préstamos. Por ello, el sistema descrito, que nosotros definiremos posteriormente como "operaciones con subvención periódica simple", no es el usado en la práctica. Por el contrario, lo habitual es que la subvención sea abonada íntegramente de una sola vez. Puede verse en este sentido:

Carrasco Carrasco, M. (1987): Las subvenciones: un sistema indirecto de transferencias de fondos de las Comunidades Autónomas a la Administración Central; Revista de Economía y Empresa, nº. 19, pp. 319-341.



Hipótesis a.1.) El préstamo simple se pacta con intereses pospagables. En tal caso, y en el supuesto de subvención final, llegado el vencimiento del préstamo, el tercero que lo ha subvencionado, ha de abonar la misma. Si lo hace al prestamista, éste debe percibir del prestatario la cuantía neta que cancela la operación, teniendo en cuenta el importe percibido por subvención. En el caso de que le sea abonada la subvención al prestatario, éste debe reintegrar al prestamista el montante del préstamo como si no existiese la característica de subvención.

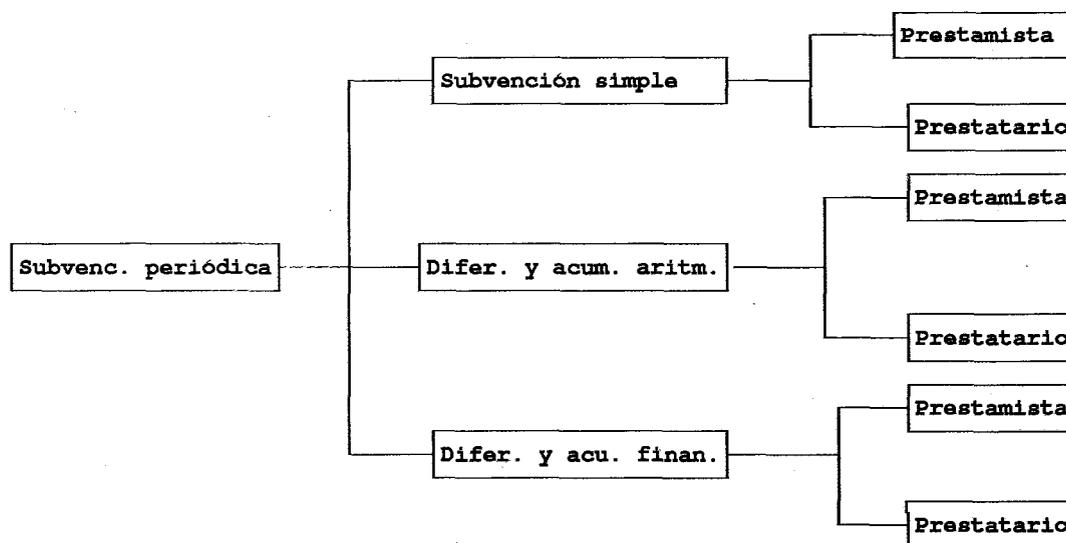
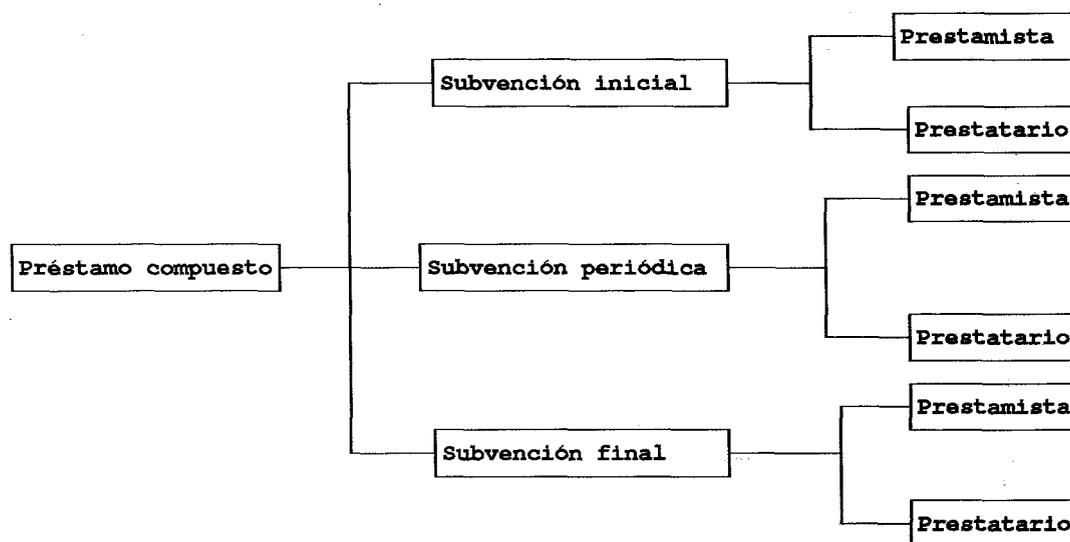
En la hipótesis de subvención inicial, el importe de la misma es percibido bien por el prestatario o bien por el prestamista, en el origen de la operación. Si la subvención la percibe el prestatario, éste debe amortizar el préstamo como si no existiese la característica de subvención. En cambio, si la subvención es percibida por el prestamista, se plantea no sólo el problema, común a cualquier hipótesis, de calcular la cuantía de la subvención, sino el de determinar la contraprestación a que tiene derecho, en el momento de finalizar la operación, el prestamista, y que ha de abonar el prestatario.

Hipótesis a.2.) El préstamo simple se pacta con intereses prepagables. En consecuencia, la totalidad de los intereses debe ser satisfecha en el origen de la operación, devolviéndose la cuantía del préstamo en el final de la misma. En la hipótesis de subvención inicial, su importe es percibido bien por el prestatario o bien por el prestamista, en el origen de la operación. Si la subvención la percibe el prestatario, éste debe amortizar el préstamo como si no existiese la característica de subvención. En cambio, si la subvención es percibida por el prestamista, se plantea no sólo el problema, común a cualquier hipótesis, de calcular la cuantía de la subvención, sino el de determinar la contraprestación a que tiene derecho, en el momento de finalizar la operación, el prestamista, y que ha de abonar el prestatario.

En el supuesto de subvención final, llegado el vencimiento del préstamo, el tercero que lo ha subvencionado, ha de abonar la misma. Si lo hace al prestamista, éste debe percibir del prestatario la cuantía neta que cancela la operación, teniendo en cuenta el importe percibido por subvención. En el caso de que le sea abonada la subvención al prestatario, éste debe reintegrar al prestamista el importe del préstamo como si no existiese la característica de subvención.

b) Préstamo compuesto. En esta hipótesis, el préstamo será amortizado con contraprestación múltiple, abonando periódicamente el prestatario los términos amortizativos correspondientes, comprensivos de cuota de interés y de amortización. Esta modalidad, al igual que la anterior, puede ser pactada con intereses pospagables o bien con intereses prepagables. En cuanto a la subvención, la misma puede ser abonada bien al prestatario o al prestamista, y en el origen de la operación, dando origen a la subvención inicial; periódica-

mente, junto con los términos amortizativos, dando origen a la subvención periódica simple, o bien con diferimiento, dando origen a las operaciones con subvención periódica diferida; o en el final de la operación, según se especifica en los siguientes esquemas:



En la hipótesis de subvención inicial, en el origen de la operación se ha de abonar la totalidad de la subvención, bien al prestamista o al prestatario. Si se abona al prestatario, sólo se plantea el problema de su cuantificación,



debiendo éste amortizar el préstamo como si no existiese tal característica. En cambio, si se abona al prestamista, se plantea no sólo el problema de su cuantificación, sino asimismo, el de la determinación de los términos amortizativos que debe abonar el prestatario.

En la hipótesis de subvención periódica, la misma es abonada por el tercero que subvenciona, y puede hacerlo:

a) En cada uno de los vencimientos de los términos amortizativos, bien al prestamista o al prestatario, dando origen a la subvención simple. En el caso de que sea abonada directamente al prestamista, el prestatario debe satisfacer los correspondientes términos amortizativos, disminuidos en el importe de la subvención respectiva. En el caso de que la misma sea abonada al prestatario, éste amortizará el préstamo como si no existiese la característica de subvención.

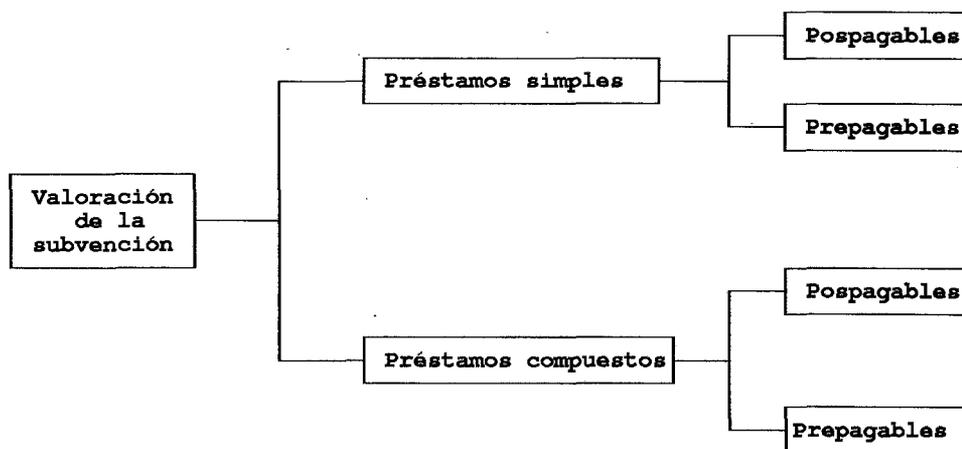
b) Con diferimiento en relación al vencimiento de los términos amortizativos, pactándose un único vencimiento en el que se abona un grupo de subvenciones correspondientes a varios términos amortizativos vencidos. Esta modalidad da origen a dos casos: uno, que las subvenciones se acumulen aritméticamente, sin que exista devengo de intereses por el tiempo transcurrido entre el vencimiento de cada uno de los términos amortizativos y el vencimiento único pactado como fecha de abono de la subvención; y dos, que sí exista el devengo de los intereses mencionados. Los casos citados constituyen las modalidades de subvención periódica diferida con acumulación aritmética, y la subvención periódica con acumulación financiera, respectivamente. Asimismo,

cabe hablar en los dos casos mencionados, de subvención al prestamista o al prestatario.

En la hipótesis de subvención final, llegado el vencimiento del último término amortizativo, se debe satisfacer el importe total de la subvención. En el caso de que el mismo sea abonado al prestatario, sólo se plantea al problema de su cuantificación. Para el caso de que sea abonada al prestamista, se plantea no sólo el problema de su cuantificación, sino asimismo, el de la determinación de los términos amortizativos que debe abonar el prestatario.

De acuerdo con lo que hemos señalado, desde el punto de vista financiero, el problema fundamental que plantean los préstamos subvencionados, es el de cuantificar el importe de la subvención, pues las restantes variables financieras que intervienen en los mismos no ofrecen dificultades en cuanto a su determinación.

Teniendo en cuenta lo expuesto, y a fin de valorar la subvención, realizaremos el análisis distinguiendo entre los préstamos simples y compuestos, y en cada una de tales modalidades, entre las hipótesis de préstamos pospagables y préstamos prepagables, teniendo en cuenta, asimismo, que la subvención puede ser inicial, periódica o final:



CAPITULO II

VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES CON INTERESES POSPAGABLES

**CAPITULO II: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVEN-
CIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES
CON INTERESES POSPAGABLES**

2.1.- INTRODUCCION

2.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

2.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

2.1.- INTRODUCCION

En las operaciones de amortización simples con intereses vencidos, tal y como hemos señalado, la característica fundamental es el vencimiento único de la contraprestación, produciéndose, al final de la operación, el reintegro del capital objeto del préstamo y de sus intereses. Por ello, el montante a satisfacer por el prestatario, antes de considerar la característica de subvención, viene dado por la expresión:

$$C_n = C \prod_{s=1}^n (1+i_s) \quad [1]$$

siendo:

C: cuantía del préstamo.

i_s : tipo de interés del préstamo aplicable al período s.

n: plazo de amortización.

C_n : cuantía de la contraprestación final.

Con el fin de facilitar el desarrollo analítico de los apartados siguientes, podemos obtener¹⁷ el tipo medio de interés i de la operación, a través de la siguiente ecuación¹⁸:

$$(1+i)^n = \prod_{s=1}^n (1+i_s) \Rightarrow i = \sqrt[n]{\prod_{s=1}^n (1+i_s)} - 1 \quad [2]$$

Por otra parte, en la hipótesis de que para el período s los puntos de subvención sean d_s , el tipo de interés subvencionado de dicho período será: $r_s = i_s - d_s$, pudiéndose obtener también el tipo de interés medio subvencionado, a través de la expresión:

$$(1+r)^n = \prod_{s=1}^n (1+r_s) \Rightarrow r = \sqrt[n]{\prod_{s=1}^n (1+r_s)} - 1 \quad [3]$$

De acuerdo con las expresiones anteriores, el tipo medio de subvención viene dado por la expresión: $d = i - r$, representativa de la diferencia entre el tipo medio de interés del préstamo y el tipo medio de interés subvencionado.

¹⁷ Véase por ejemplo:
 Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 70.
 Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., p. 101.

¹⁸ La obtención del mencionado tipo de interés medio no resta generalidad a nuestros planteamientos, sino que únicamente hace que las expresiones matemáticas correspondientes sean más sencillas. Ello es debido a que simplemente sustituimos un producto de n factores distintos entre sí, por otro producto equivalente pero de n factores constantes.

En función de lo expuesto, y a fin de obtener la valoración financiera de la subvención, hemos de diferenciar entre la hipótesis de subvención final y la de subvención inicial. Analizaremos en primer término el supuesto de subvención final, pues así se posibilita un mejor tratamiento de la hipótesis de subvención inicial, ya que como veremos, ésta es función de aquélla. Por ello, la cuantía de la subvención final puede ser considerada como subvención primaria, y la cuantía de la subvención inicial, como subvención derivada.

2.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

En esta modalidad de operaciones, tal y como hemos señalado, llegado el momento del vencimiento del préstamo, el tercero que lo ha subvencionado, ha de abonar el importe correspondiente a la subvención. Para cuantificar dicho importe es indiferente que el mismo sea abonado directamente al prestamista, o que lo sea al prestatario. En cualquier caso, dicho importe vendrá dado por la diferencia entre el montante del préstamo, calculado con el tipo medio de interés del mismo, y el correspondiente con el tipo medio subvencionado. Cuantificada la subvención de esta forma, se está siguiendo el siguiente razonamiento: si el préstamo fuese sin subvencionar, al tipo medio i , su montante sería $C(1+i)^n$. Como se subvenciona el interés, el tipo medio a satisfacer por el prestatario debe ser r , con lo que el montante ascenderá a $C(1+r)^n$. La cuantía de la subvención vendrá dada por la diferencia entre los montantes anteriores. De esta forma, el tipo medio de interés de cada período, es el tipo medio r subvencionado, acumulándose, de acuerdo con las hipótesis

de la capitalización compuesta, los intereses de un período a otro en base a dicho tipo. De acuerdo con lo expuesto, se tiene:

$$S_n = C[(1+i)^n - (1+r)^n] \quad [4]$$

siendo:

S_n : cuantía de la subvención final.

C: cuantía del préstamo.

i: tipo medio de interés del préstamo.

n: plazo de amortización.

r: tipo medio de interés subvencionado.

Es preciso señalar que el razonamiento anterior difiere de este otro: si el tipo medio de subvención es d , la cuantía total en concepto de subvención debe ser igual a los intereses del préstamo con dicho tipo d . Con ello, la cuantía de la subvención ascendería a $C[(1+d)^n - 1]$. Este razonamiento no es correcto, pues con el mismo, la subvención no sería en el tipo de interés, sino en una cuantía igual a los intereses producidos por el nominal del préstamo y al tipo medio d que, naturalmente y de acuerdo con la hipótesis de acumulación de los intereses al capital para producir nuevos intereses, al estarse calculando éstos a un tipo $d < r < i$, su importe sería menor que el citado en primer término. En consecuencia, no es este último procedimiento el que debe utilizarse para el correcto cálculo de la subvención.

En la hipótesis de subvención percibida por el prestamista, el prestatario ha de abonarle al mismo la cuantía M tal que:

$$M = C(1+i)^n - S_n \Rightarrow M = C(1+r)^n \quad [5]$$

En la hipótesis de subvención percibida por el prestatario, éste debe abonar al prestamista la cuantía total que permite extinguir la deuda: $C(1+i)^n$. Dicha cuantía está formada por el capital y sus intereses acumulados.

En cualquiera de las dos alternativas de percepción de la subvención final analizadas, y sin considerar las restantes características comerciales que pudieran existir¹⁹, el tipo de interés efectivo, i_p , al que al prestatario²⁰ le resulta el préstamo es el tipo de interés medio subvencionado: $i_p = r$. Igual-

¹⁹ Tales como gastos de estudio de la operación, gastos de escritura o comisiones, etc. Dichas características no las consideramos, pues nos interesa poner de manifiesto únicamente la incidencia de la subvención.

²⁰ En efecto, para el prestatario se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Prestación recibida} &= \{ (C, 0) \} \\ \text{Contraprestación entregada} &= \{ [C(1+i)^n - S_n, n] \} \end{aligned}$$

En consecuencia, el tipo i_p de interés efectivo, viene dado por la ecuación:

$$C(1+i_p)^n = C(1+i)^n - S_n$$

Teniendo en cuenta que $S_n = C[(1+i)^n - (1+r)^n]$, se llega a que la solución de la ecuación anterior es $i_p = r = i - d$.

mente, el tipo de interés efectivo, i_a , para el prestamista²¹ es el tipo medio del préstamo: $i_a = i$.

Lo expuesto en cuanto a la percepción de la subvención final, queda resumido en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	C	C
Recibe en el final:	$C(1+i)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	C	C
Entrega en el final:	$C(1+r)^n$	$C(1+r)^n$
Tipo efectivo pasivo:	$i_p = r$	$i_p = r$

²¹ Para el prestamista o acreedor inicial se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Prestación entregada} &= \{ (C, 0) \} \\ \text{Contraprestación recibida} &= \{ [C(1+i)^n, n] \} \end{aligned}$$

En consecuencia, el tipo efectivo es: $i_a = i$.

2.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

De acuerdo con lo señalado, en esta hipótesis el importe de la subvención es abonado íntegramente en el origen de la operación. Con independencia del sujeto que la perciba (prestamista o prestatario), el primer problema a resolver es el de la determinación del importe de la citada subvención.

En la modalidad de préstamo que estamos analizando, el capital y los intereses acumulados, se abonan en el final de la operación. En consecuencia, si la subvención de intereses tiene como vencimiento el origen de la operación, su importe debe ser el valor actualizado equivalente de la correspondiente cuantía con vencimiento al término de la operación. El problema que se plantea para dicha actualización es el de especificar el tipo medio de interés t correspondiente²². En relación con el mismo, es preciso distinguir entre que sea fijado, como un valor medio general t , por el ente que subvenciona²³; que se tome como valor de t el tipo de interés medio del préstamo, o sea, $t = i$; o bien que se tome como valor de t el tipo medio de interés subvencionado, o sea, $t = r$.

²² En la hipótesis de que el tipo de actualización fuese variable, t_s para el período s , determinaríamos, tal y como hemos señalado anteriormente, el tipo medio constante equivalente.

²³ En esta hipótesis, el ente que subvenciona, ha de fijar entre las condiciones de subvención, no sólo los puntos d_s de interés que subvenciona, sino igualmente, el tipo de actualización t_s a aplicar a la subvención futura para obtener la inicial.

Hipótesis a). Supuesto un tipo t fijado por el ente que subvenciona, el importe de la subvención viene dado por la expresión²⁴:

$$S_0 = S_n(1+t)^{-n} = C[(1+i)^n - (1+r)^n](1+t)^{-n} \quad [6]$$

Hemos de distinguir, asimismo, entre las hipótesis de que la subvención la perciba el prestamista o el prestatario.

Hipótesis a.1). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión $(C - S_0)$. Este capital aumenta en función de que S_0 disminuya, y S_0 disminuye cuando aumenta t . Por tanto, $(C - S_0)$ aumenta cuando lo hace t , siendo pues, una función creciente de t .

El capital de cuantía $(C - S_0)$ es el que genera intereses durante la vida del préstamo²⁵, por lo que el prestatario debe reintegrarle al final de la operación la cuantía $(C-S_0)(1+i)^n$.

De acuerdo con lo expuesto, se tiene:

²⁴ Obsérvese como la subvención inicial es decreciente con t , ya que al aumentar el valor de t , el de S_0 disminuye.

²⁵ Estos intereses son función creciente de la cuantía del capital. Y como éste también es creciente con t , se tiene que la cuantía total a devolver por el prestatario es función creciente de t .

Prestamista	—	Entrega en el origen: $C - S_0$
	—	Recibe en el final: $(C - S_0)(1 + i)^n$
Prestatario	—	Recibe en el origen: C
	—	Entrega en el final: $(C - S_0)(1 + i)^n$

Con las hipótesis señaladas, el tipo efectivo del prestamista²⁶ coincide con el tipo medio del préstamo, $i_a = i$, y en función del valor medio del tipo t de actualización de la subvención final, se obtendrá el tipo efectivo del prestatario, a través de la ecuación:

$$C(1+i_p)^n = (C-S_0)(1+i)^n \quad [7]$$

Hemos señalado que la contraprestación a abonar por el prestatario es función creciente de t . En consecuencia, el tipo efectivo del prestatario también será creciente con t .

Hipótesis a.2). La subvención es percibida por el prestatario²⁷, por lo que debe reintegrar al final de la operación la cuantía $C(1+i)^n$.

De acuerdo con lo expuesto se tiene:

²⁶ En efecto, de la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía entregada en el origen, $(C-S_0)$, y la percibida en el final, $(C-S_0)(1+i)^n$, se deduce que $i_a=i$.

²⁷ Obsérvese como con las hipótesis señaladas, el prestatario recibe en el origen de la operación una cuantía total de $(C + S_0)$, superior a la del préstamo.

Prestamista	—	Entrega en el origen: C
	—	Recibe en el final: $C(1+i)^n$
Prestatario	—	Recibe en el origen: $C + S_0$
	—	Entrega en el final: $C(1+i)^n$

Con las hipótesis indicadas, el tipo efectivo del prestamista es $i_a = i$, y en función del valor de t se obtendrá el tipo efectivo del prestatario, a través de la ecuación:

$$(C+S_0)(1+i_p)^n = C(1+i)^n \quad [8]$$

Considerando como única variable el tipo medio t de actualización, de la expresión anterior se deduce que el tipo efectivo pasivo i_p es función de la cuantía S_0 de la subvención inicial. Como el importe a reintegrar por el prestatario, $C(1+i)^n$, es fijo, no dependiendo del valor del tipo de actualización t , sino que depende de la cuantía de la subvención inicial S_0 , a medida que aumente S_0 , disminuye i_p . Y como S_0 aumenta al disminuir t , se concluye que i_p disminuye al disminuir t , y aumenta al aumentar t , por lo que podemos señalar que el tipo efectivo pasivo es función creciente del tipo medio t de actualización de la subvención final.

De lo expuesto, se deduce que tanto en la hipótesis de que la subvención inicial la perciba el prestamista como en la de que la perciba el prestatario, el tipo efectivo del prestamista, i_a , coincide con el tipo medio i del préstamo. En cambio, el tipo efectivo del prestatario, i_p , es función creciente del tipo medio de actualización t .

Podemos plantearnos qué incidencia tiene la modalidad de percepción de la subvención (subvención inicial percibida por el prestamista o percibida por el prestatario) sobre el tipo efectivo del prestatario²⁸. Al comparar los valores obtenidos para i_p , de acuerdo con las ecuaciones [7] y [8] anteriores, se deduce que el tipo efectivo del prestatario para la modalidad de percepción de subvención por parte del prestamista es inferior al correspondiente en la modalidad de percepción de la subvención por parte del prestatario. En efecto, de acuerdo con la expresión [7], el tipo efectivo del prestatario para la modalidad de subvención percibida por el prestamista, es el tipo i_{p1} , que verifica:

$$C(1+i_{p1})^n = (C - S_0)^n \quad [9]$$

Igualmente, y de acuerdo con la expresión [8], el tipo efectivo del prestatario en el caso de subvención percibida por dicho sujeto, es el tipo i_{p2} , que verifica:

²⁸ Tal y como hemos señalado, con independencia de que la subvención inicial la perciba el prestamista o el prestatario, el tipo efectivo del prestamista, i_a , coincide con el tipo del préstamo, i .

$$(C+S_0)(1+i_{p2})^n = C(1+i)^n \quad [10]$$

Despejando de la primera expresión el valor $(1+i)^n$, sustituyéndolo en la segunda y realizando operaciones se llega a obtener:

$$(1+i_{p2})^n = \frac{C^2}{C^2 - S_0^2} (1+i_{p1})^n \quad [11]$$

Y al ser $C^2 > C^2 - S_0^2$, se deduce que $i_{p1} < i_{p2}$. En consecuencia a lo expuesto, en función del tipo efectivo del prestatario, a este sujeto le interesa que la subvención sea percibida por el prestamista, pues así soporta un tipo de coste inferior al caso de que la subvención sea percibida directamente por él.

El siguiente cuadro sintetiza lo expuesto en cuanto a las dos hipótesis de percepción de la subvención inicial:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C - S_0$	C
Recibe en el final:	$(C - S_0)(1+i)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	C	$C + S_0$
Entrega en el final:	$(C - S_0)(1+i)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} = f(t)$	$i_{p2} = f(t)$
i_p es creciente con t		
$i_{p2} > i_{p1}$		

Tanto en las operaciones con subvención inicial como en las de subvención final, y de acuerdo con lo expuesto, hemos demostrado la neutralidad de la modalidad de percepción de la subvención, en cuanto a su incidencia sobre el tipo efectivo activo, pues, con independencia del sujeto que la perciba, dicho tipo coincide con el tipo medio del préstamo: $i_a = i$. En cambio, sobre el tipo efectivo pasivo sí tiene incidencia tanto la modalidad de vencimiento de la subvención (subvención inicial o final) como la modalidad de percepción de la misma. Lo expuesto queda sintetizado en el cuadro siguiente:

	Subvención inicial	Subvención final
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
Tipo efectivo pasivo:		
- subvención percibida por el prestamista:	$i_{p1} = f(t)$	$i_p = r$
- subvención percibida por el prestatario:	$i_{p2} = f(t)$	$i_p = r$
$i_{p2} > i_{p1}$		

Desde otra perspectiva, y en función de lo señalado, la cuantía total, $(C+S_0)$, percibida por el prestatario en el origen de la operación, supera a la cuantía del préstamo, C . En consecuencia, se plantea el problema de que en esta modalidad, el prestatario se encuentra con un exceso de recursos, de importe S_0 , sobre la cuantía solicitada del préstamo. Por ello, podemos plantearnos cuál debe ser el importe X a solicitar en préstamo para que unido a la cuantía Y de la subvención inicial percibida por el prestatario, éste reciba en total una cuantía igual a la del préstamo. De acuerdo con lo expuesto se ha de verificar:

$$\text{Prestatario} \begin{cases} \text{Recibe en el origen: } X + Y = C \\ \text{Entrega en el final: } X(1 + i)^n \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la ecuación [6] por la que se obtiene la cuantía de la subvención inicial en función de la cuantía concedida en préstamo, se tiene:

$$Y = X[(1+i)^n - (1+r)^n](1+i)^{-n} \quad [12]$$

Y en consecuencia, tras las oportunas operaciones se llega a la siguiente expresión:

$$S_0 = \frac{C}{1 + [(1+i)^n - (1+r)^n](1+i)^{-n}} \quad [13]$$

Hipótesis b). En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio del préstamo, o sea, $t = i$. El importe de la subvención viene dado por la expresión:

$$S_0 = S_n(1+i)^{-n} = C[1 - (1+r)^n(1+i)^{-n}] \quad [14]$$

Analicemos las hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista y por el prestatario.

Hipótesis b.1). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión:

$$C' = (C - S_0) = C(1+r)^n(1+i)^{-n} \quad [15]$$

Este capital es el que genera intereses durante la vida del préstamo, por lo que el prestatario debe reintegrarle al final de la operación la cuantía

$$M = (C - S_0)(1+i)^n = C(1+r)^n \quad [16]$$

De acuerdo con lo expuesto, se tiene:

Prestamista — { Entrega en el origen: $C(1+r)^n(1+i)^{-n}$
 Recibe en el final: $C(1+r)^n$

Prestatario — { Recibe en el origen: C
 Entrega en el final: $C(1+r)^n$

Con las hipótesis señaladas, el tipo efectivo del prestamista²⁹ es $i_a = i$, y en función del valor i se obtendrá el tipo efectivo del prestatario, siendo³⁰: $i_p = r = i - d$.

²⁹ Con el valor genérico t como tipo de actualización, hemos demostrado que se verifica $i_a = i$. En consecuencia, en este caso al ser $t=i$, también se verificará $i_a = i$.

³⁰ En efecto, teniendo en cuenta la prestación y contraprestación para el prestatario, se plantea la ecuación $C(1+i_p)^n = C(1+r)^n$, de la que se deduce $i_p = r$.

Hipótesis b.2). La subvención es percibida por el prestatario, por lo que debe reintegrar al final de la operación la cuantía $C(1+i)^n$.

La cuantía total, $(C + S_0)$, percibida por el prestatario en el origen de la operación viene dada por la expresión:

$$C'' = C + S_0 = C[2 - (1+r)^n(1+i)^{-n}] \quad [18]$$

De acuerdo con lo expuesto se tiene:

Prestamista	— [Entrega en el origen: C
	—]	Recibe en el final: $C(1+i)^n$
Prestatario	— [Recibe en el origen: $C[2 - (1+r)^n(1+i)^{-n}]$
	—]	Entrega en el final: $C(1+i)^n$

Con las hipótesis indicadas, el tipo efectivo del prestamista es $i_a = i$, y en función del valor i se obtendrá el tipo efectivo del prestatario, a través de la ecuación:

$$C[2 - (1+r)^n(1+i)^{-n}](1+i_p)^n = C(1+i)^n \quad [19]$$

Hemos visto como con las condiciones de la hipótesis b.1), según las cuales el prestamista percibe la subvención, el tipo efectivo del prestatario toma

un valor coincidente con el tipo medio de interés subvencionado, o sea, $i_p = r$. Por otra parte, y según demostramos en el análisis del valor de i_p para el caso general de que el tipo de actualización tomase un valor t (hipótesis a), el tipo efectivo del prestatario en el caso de subvención percibida por dicho sujeto, supera al correspondiente tipo para el caso de subvención percibida por el prestamista. En consecuencia, al estar ahora analizando la hipótesis de $t = i$, también se verificará igual conclusión, por lo que podemos indicar que la solución para i_p en la ecuación [17] anterior verifica: $i_p > r$.

Podemos sintetizar lo expuesto en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C(1+r)^n(1+i)^{-n}$	C
Recibe en el final:	$C(1+r)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	C	$C[2-(1+r)^n(1+i)^{-n}]$
Entrega en el final:	$C(1+r)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo pasivo:	$i_p = r$	$i_p = f(i) \geq r$

De acuerdo con la ecuación [17] anterior, la cuantía total, $(C + S_0)$, percibida por el prestatario en el origen de la operación, supera a la cuantía del préstamo, C . En consecuencia, se plantea el problema de que en esta modalidad, el prestatario se encuentra con un exceso de recursos, en cuantía S_0 , sobre la cuantía solicitada del préstamo. Por ello, podemos plantearnos cuál debe ser el importe X a solicitar en préstamo para que unido a la cuantía Y de la subvención inicial percibida por el prestatario, éste reciba en total una cuantía igual a la del préstamo. De acuerdo con lo expuesto se ha de verificar:

$$\text{Prestatario} \left\{ \begin{array}{l} \text{Recibe en el origen: } X + Y = C \\ \text{Entrega en el final: } X(1 + i)^n \end{array} \right.$$

De acuerdo con la expresión [14] anterior, la cuantía de la subvención, en función de la cuantía del préstamo, es:

$$Y = X[1 - (1+r)^n(1+i)^{-n}] \quad [20]$$

En consecuencia se obtiene:

$$X = \frac{C}{1 + [1 - (1+r)^n(1+i)^{-n}]} \quad [21]$$

Hipótesis c). En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio subvencionado, o sea, $t = i - d = r$. El importe de la subvención viene dado por la expresión:

$$S_0 = S_n(1+r)^{-n} = C[(1+i)^n(1+r)^{-n} - 1] \quad [22]$$

Analicemos las hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista y por el prestatario.

Hipótesis c.1). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión:

$$C' = (C - S_0) = C[2 - (1+i)^n(1+r)^{-n}] \quad [23]$$

Este capital es el que genera intereses durante la vida del préstamo, por lo que el prestatario debe reintegrarle al final de la operación la cuantía:

$$M = (C - S_0)(1+i)^n = C(1+i)^n[2 - (1+i)^n(1+r)^{-n}] \quad [24]$$

De acuerdo con lo expuesto, se tiene:

Prestamista	{	Entrega en el origen: $C[2 - (1+i)^n(1+r)^{-n}]$
		Recibe en el final: $(C-S_0)(1+i)^n$
Prestatario	{	Recibe en el origen: C
		Entrega en el final: $(C-S_0)(1+i)^n$

Con las hipótesis señaladas, el tipo efectivo del prestamista³¹ es $i_a = i$, y en función del valor r se obtendrá el tipo efectivo del prestatario³², a través de la ecuación:

$$C(1+i_p)^n = C(1+i)^n[2 - (1+i)^n(1+r)^{-n}] \quad [25]$$

Hipótesis c.2). La subvención es percibida por el prestatario, por lo que debe reintegrar al final de la operación la cuantía $C(1+i)^n$.

La cuantía total, $(C + S_0)$, percibida por el prestatario en el origen de la operación viene dada por la expresión:

$$C'' = C + S_0 = C(1+i)^n(1+r)^{-n} \quad [26]$$

De acuerdo con lo expuesto se tiene:

Prestamista	{	Entrega en el origen: C
	}	Recibe en el final: $C(1+i)^n$
Prestatario	{	Recibe en el origen: $C(1+i)^n(1+r)^{-n}$
	}	Entrega en el final: $C(1+i)^n$

³¹ Con el valor genérico t como tipo de actualización, hemos demostrado que se verifica $i_a = i$. En consecuencia, en este caso también se verificará $i_a = i$.

³² Este tipo, en algunos supuestos puede ser negativo.

Con las hipótesis indicadas, el tipo efectivo del prestamista es $i_a = i$, y el tipo efectivo del prestatario se obtendrá a través de la ecuación:

$$C(1+i)^n(1+r)^{-n}(1+i_p)^n = C(1+i)^n \quad [27]$$

Se obtiene como solución: $i_p = r$.

Según demostramos en el análisis del valor de i_p para el caso general de que el tipo de actualización tomase un valor t (hipótesis a), el tipo efectivo del prestatario en el caso de subvención percibida por dicho sujeto, supera al correspondiente tipo para el caso de subvención percibida por el prestamista. En consecuencia, al estar ahora analizando la hipótesis de $t = r$, también se verificará igual conclusión, por lo que podemos indicar que la solución para i_p en la ecuación [26] anterior, o sea, $i_p = r$, supera al valor de i_p obtenido como solución de la ecuación [24]. Por lo tanto, el tipo efectivo del prestatario, para subvención percibida por el prestamista, será inferior al tipo de interés medio subvencionado r .

Podemos sintetizar lo expuesto en el cuadro siguiente:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C[2-(1+i)^n(1+r)^{-n}]$	C
Recibe en el final:	$(C-S_0)(1+i)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	C	$C(1+i)^n(1+r)^{-n}$
Entrega en el final:	$(C-S_0)(1+i)^{-n}$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} = f(r)$	$i_{p2} = r > i_{p1}$

De acuerdo con la ecuación [25] anterior, la cuantía total, $(C + S_0)$, percibida por el prestatario en el origen de la operación, supera a la cuantía del préstamo, C . En consecuencia, se plantea el problema de que en esta modalidad, el prestatario se encuentra con un exceso de recursos, en cuantía S_0 , sobre la cuantía solicitada del préstamo. Por ello, podemos plantearnos cuál debe ser el importe X a solicitar en préstamo para que unido a la cuantía Y de la subvención inicial percibida por el prestatario, éste reciba en total una cuantía igual a la del préstamo. De acuerdo con lo expuesto se ha de verificar:

Prestatario — { Recibe en el origen: $X + Y = C$
 Entrega en el final: $X(1 + i)^n$

De acuerdo con la ecuación [21] anterior, la cuantía de la subvención en función de la cuantía del préstamo, es:

$$Y = X[(1+i)^n(1+r)^{-n} - 1] \quad [28]$$

Y por tanto se obtiene:

$$X = \frac{C}{(1+i)^n(1+r)^{-n}} \quad [29]$$

Una vez estudiadas las tres hipótesis propuestas en cuanto al valor del tipo medio t de actualización, procede preguntarse acerca del intervalo en el cuál debe estar situado el valor de t a utilizar. En este sentido, y teniendo en cuenta que el valor del tipo t va a permitir la actualización de la subvención final para convertirla en inicial, entendemos que su valor debe estar en función de, por una parte, el tipo medio que fije el mercado para las operaciones de préstamo, y por otra, del tipo medio que resulte de los que el ente que subvenciona fije como tipos de interés subvencionados. En consecuencia, consideramos que los valores medios, mínimo y máximo para t han de ser, respectivamente, el tipo medio r de interés subvencionado, y el tipo medio i de interés del préstamo:

En la hipótesis de que el valor de t sea el máximo indicado, el tipo efectivo del prestatario tiene un valor igual al del tipo medio subvencionado, en la hipótesis de que la subvención sea percibida por el prestamista. Si la subvención la percibe el prestatario, el tipo efectivo del mismo supera al correspondiente en la hipótesis de subvención percibida por el prestamista.

En la hipótesis de que el valor de t sea el mínimo indicado, el tipo efectivo del prestatario tiene un valor igual al del tipo medio subvencionado, en la hipótesis de que la subvención sea percibida por el prestatario. Si la subvención la percibe el prestamista, el tipo efectivo del prestatario resulta inferior al correspondiente en la hipótesis de subvención percibida por el prestatario.

De lo expuesto se concluye que siempre que la subvención la perciba el prestatario, el tipo efectivo del mismo supera al correspondiente que se obtendría en la hipótesis de que la subvención la percibiese el prestamista. En consecuencia, y tomando como variable de decisión el tipo efectivo del prestatario, la subvención debe ser percibida siempre por el prestamista, con el fin de que el tipo efectivo del prestatario sea el mínimo. Por otra parte, y en este contexto, como el tipo efectivo del prestatario es creciente con el tipo medio t de actualización, si el valor máximo de t es el tipo medio i del préstamo, el valor máximo del tipo efectivo del prestatario es el tipo medio r de interés subvencionado.

Por otra parte, en todas las hipótesis estudiadas, el tipo efectivo del prestamista coincide con el tipo medio del préstamo, $i_a = i$. Por ello, las distintas hipótesis en cuanto al valor de t y a la percepción de la subvención por parte del prestamista o del prestatario, son neutrales en relación con el tipo efectivo del prestamista, resultándole, a dicho sujeto, indiferente cualquier hipótesis, no sólo en cuanto al valor de t sino a la modalidad de percepción de la subvención.

En el siguiente cuadro sintetizamos lo expuesto:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
<u>a) Valor genérico de t</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo: i_p es creciente con t	$i_a = i$ $i_{p1} = f(t)$	$i_a = i$ $i_{p2} = f(t) > i_{p1}$
<u>b) Hipótesis: $t = i$</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo:	$i_a = i$ $i_p = r$	$i_a = i$ $i_p = f(i) > r$
<u>c) Hipótesis: $t = r$</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo:	$i_a = i$ $i_{p1} = f(r)$	$i_a = i$ $i_p = r > i_{p1}$

CAPITULO III

VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES CON INTERESES PREPAGABLES

**CAPITULO III: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVEN-
CIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION SIMPLES
CON INTERESES PREPAGABLES**

3.1.- INTRODUCCION

3.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

3.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

3.1.- INTRODUCCION

En las operaciones de préstamo simple e intereses anticipados, tal y como hemos señalado, la totalidad de los intereses debe ser satisfecha en el origen de la operación, por lo que su importe es minorado por el prestamista de la cuantía total del préstamo, pudiéndose distinguir entre cuantía nominal del préstamo C^* y cuantía neta C percibida por el prestatario. En consecuencia, al haberse satisfecho la totalidad de los intereses en el origen de la operación, en el final de la misma el prestatario sólo ha de devolver la cuantía nominal del préstamo.

La ecuación que relaciona las cuantías citadas es la siguiente³³:

$$C = C^* \prod_{s=1}^n (1 - i_s^*) \quad [31]$$

siendo:

C^* : cuantía nominal del préstamo.

C : cuantía neta del préstamo.

i_s^* : tipo de interés anticipado aplicable al período s .

n : plazo de amortización.

³³ Un tratamiento general de las operaciones con intereses anticipados puede verse en: Gil Peláez, L. (1987): Op. cit. p. 390. Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., p. 97 y 212.

La cuantía total de los intereses prepagables se obtiene de acuerdo con la ecuación:

$$I^* = C^* [1 - \prod_{s=1}^n (1 - i_s^*)] \quad [33]$$

A fin de facilitar el desarrollo analítico de los apartados siguientes, podemos obtener el tipo medio constante de la operación, equivalente al conjunto de tipos variables, a través de la ecuación:

$$(1 - i^*)^n = \prod_{s=1}^n (1 - i_s^*) \Rightarrow i^* = 1 - \sqrt[n]{\prod_{s=1}^n (1 - i_s^*)} \quad [34]$$

Supuesto que para el período s los puntos de subvención sean d_s^* , el tipo de interés subvencionado de dicho período será $r_s^* = i_s^* - d_s^*$, obteniéndose el tipo anticipado de interés medio subvencionado a través de la expresión:

$$(1 - r^*)^n = \prod_{s=1}^n (1 - r_s^*) \Rightarrow r^* = 1 - \sqrt[n]{\prod_{s=1}^n (1 - r_s^*)} \quad [37]$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, el tipo medio de subvención viene dado por la expresión: $d^* = i^* - r^*$, representativa de la diferencia entre el tipo medio de interés anticipado del préstamo y el tipo medio de interés anticipado subvencionado.

Es posible distinguir en esta modalidad de préstamo entre las operaciones con subvención final y con subvención inicial. Por facilidad operativa, analizaremos en primer término las operaciones con subvención inicial, para posteriormente, y en base a las mismas, estudiar las de subvención final. Por ello, en esta modalidad de préstamo, la cuantía de la subvención inicial puede ser considerada como subvención primaria, y la cuantía de la subvención final, como subvención derivada.

3.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

De acuerdo con lo señalado, en el origen de la operación deben ser satisfechos los intereses de la misma, así como la cuantía de la subvención, pudiendo ser ésta entregada al prestamista o al prestatario. Para cuantificar su importe es indiferente que el mismo sea abonado directamente al prestamista, o que lo sea al prestatario. En cualquier supuesto, el mismo vendrá dado por la diferencia entre los intereses totales, calculados con el tipo medio de interés del préstamo, y los correspondientes cuantificados con el tipo medio subvencionado:

$$I_1^* = C^*[1 - (1-i^*)^n] \quad [38]$$

$$I_2^* = C^*[1 - (1-r^*)^n]$$

En consecuencia, el importe de la subvención se obtiene a través de la ecuación:

$$S_0 = C^*[(1-r^*)^n - (1-i^*)^n] \quad [39]$$

siendo:

S_0 : cuantía de la subvención inicial.

C^* : cuantía nominal del préstamo.

i^* : tipo medio de interés prepagable del préstamo.

n : plazo de amortización.

r^* : tipo medio prepagable subvencionado.

Tal y como hemos señalado, desde el punto de vista de su cuantificación, es indiferente qué sujeto perciba la subvención inicial. Ahora bien, cabe preguntarse si la percepción por un sujeto u otro tiene incidencia sobre las cuantías netas percibidas y desembolsadas por cada sujeto o sobre los tipos efectivos de la operación. Para analizar tales incidencias, estudiaremos por separado las hipótesis de percepción de la subvención por el sujeto prestatario, para a continuación analizar la hipótesis de percepción por parte del prestamista.

Hipótesis a). La subvención es percibida en el origen por el prestatario, con lo que la cuantía neta obtenida R , se obtiene al detraer del importe nominal del préstamo, sus intereses, y añadiendo la cuantía de la subvención. Analíticamente:

$$R = C^* - I_1^* + S_0 = C^*(1-r^*)^n \quad [40]$$

Llegado el final de la operación, el prestatario ha de devolver la cuantía nominal del préstamo C^* . De acuerdo con lo expuesto, pues, el tipo efectivo del prestatario coincide con el tipo medio subvencionado: $i_p^* = r^*$.

En cuanto al sujeto prestamista, en el origen entrega la cuantía neta C del préstamo, pues cobra por anticipado los intereses, percibiendo en el final de la misma la cuantía nominal C^* , por lo que el tipo efectivo coincide con el tipo medio anticipado del préstamo: $i_a^* = i^*$

Hipótesis b.). La subvención es percibida en el origen por el prestamista. En consecuencia, los intereses a percibir han de computarse al tipo medio subvencionado r^* , y no al tipo medio del préstamo. Por lo tanto, la cuantía neta E desembolsada en el origen por el prestamista, se obtiene detrayendo de la cuantía nominal, los intereses prepagables al tipo medio subvencionado, así como la cuantía de la subvención. Analíticamente:

$$E = C^* - I_2^* - S_0 = C^*(1 - i^*)^n \quad [43]$$

Llegado el vencimiento de la operación, ha de percibir la cuantía nominal C^* . Por lo tanto, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo.

En cuanto al sujeto prestatario, en el origen de la operación percibe la cuantía neta del préstamo, una vez detraída de la cuantía nominal los intereses prepagables cuantificados con el tipo medio subvencionado, de acuerdo con la expresión:

$$R = C^* - I_2^* = C^*(1-r^*)^n \quad [44]$$

Por lo tanto, y de acuerdo con lo expuesto, el tipo efectivo del prestatario coincide con el tipo medio subvencionado.

Podemos sintetizar en el siguiente cuadro lo expuesto en cuanto a las dos hipótesis de percepción de la subvención inicial:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Recibe en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	$C^*(1-r^*)^n$	$C^*(1-r^*)^n$
Entrega en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo pasivo:	$i_p^* = r^*$	$i_p^* = r^*$

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos señalar que en cualquier modalidad de percepción de la subvención inicial, bien por el sujeto activo o prestamista, o bien por el sujeto pasivo inicial o prestatario, cada sujeto de la operación entrega y recibe idéntica cuantía, no viéndose alterado, en consecuen-

cia, el tipo medio efectivo. Por ello, la modalidad de percepción, en relación con el sujeto que la recibe, es neutral en cuanto a su incidencia tanto sobre el tipo efectivo activo como sobre el tipo efectivo pasivo.

De acuerdo con lo señalado y teniendo en cuenta que en esta hipótesis que estamos analizando, la cuantía de la subvención es percibida en el origen de la operación, así como que el importe total total R percibido por el prestatario en el origen de la operación, con independencia de qué sujeto haya percibido la subvención, supera a la cuantía neta C que percibiría si no existiese la característica de subvención, se plantea el problema de que en esta modalidad, el prestatario se encuentra con un exceso de recursos, de importe S_0 , sobre la cuantía líquida del préstamo C. Por ello, podemos plantearnos cuál debe ser el importe nominal X^* a solicitar en préstamo, para que unido a la cuantía de la subvención inicial correspondiente Y, percibida por el prestatario, éste reciba en total una cuantía igual a la que percibiría sin la característica de subvención, o bien, aún existiendo tal característica, pero que su cuantía no la percibiese. De acuerdo con lo expuesto, se verifica $X^* + Y = C$, y teniendo en cuenta la ecuación por la se obtienen la cuantía de la subvención inicial en función de la cuantía nominal del préstamo, se llega, una vez realizadas las oportunas operaciones, a la siguiente expresión para obtener la cuantía nominal a solicitar en préstamo:

$$X^* = \frac{C(1-i^*)^n}{1 + (1-r^*)^n - (1-i^*)^n} \quad [45]$$

3.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

De acuerdo con lo señalado, en estas operaciones el importe de la subvención es abonado íntegramente en el final de la operación.

En la modalidad de préstamo que estamos analizando, los intereses son abonados al inicio de la operación, venciendo el importe nominal de la misma en el final, por lo que el prestamista abona en el origen la cuantía C neta del préstamo, que es percibida íntegramente por el prestatario.

En cuanto a la subvención de los intereses, al tener vencimiento en el final de la operación, su importe, derivado del de la subvención inicial, debe ser el valor equivalente a ésta en el final de dicha operación. El problema que se presenta, planteada de esta forma la cuestión de la valoración de la subvención final, es el de especificar el tipo medio³⁴ de interés prepagable t^* , a fin de cuantificar el capital equivalente en el final de la operación al de la subvención inicial en el origen. En relación con el mismo, puede ser fijado, como un valor medio prepagable general t^* , por el ente que subvenciona, en cuyo caso dicho ente ha de fijar entre las condiciones de subvención, no sólo los puntos d_s^* de interés anticipado que subvenciona, sino igualmente, el tipo de interés prepagable t_s^* , a aplicar con el fin de obtener, partiendo de la subvención inicial, la subvención final. Asimismo, puede tomarse como valor medio de t^* el tipo medio anticipado del préstamo, o sea: $t^* = i^*$. Igualmente, también puede tomarse como valor medio el tipo medio de interés prepagable subvencionado: $t^* = r^*$.

³⁴ En la hipótesis de que el tipo de interés fuese variable, t_s^* , para el período s , determinaríamos, tal y como hemos señalado anteriormente, el tipo medio constante equivalente t^* .

Analizaremos en los párrafos siguientes cada una de las hipótesis señaladas, distinguiendo entre que la cuantía de la subvención sea percibida por el prestamista, o bien lo sea por el prestatario.

Hipótesis a). Supuesto un tipo medio prepagable t^* , fijado por el ente que subvenciona, y de acuerdo con lo señalado anteriormente, el importe S_n de la subvención se deduce de la expresión:

$$S_0 = S_n(1-t^*)^n \Rightarrow S_n = S_0(1-t^*)^{-n} \quad [46]$$

De la expresión anterior, al derivar S_n con respecto a t^* , se llega a una expresión positiva, por lo que la cuantía de la subvención final es creciente con t^* :

$$\frac{d S_n}{d t^*} = n(1-t^*)^{-(n+1)}S_0 > 0 \quad [47]$$

El valor de la subvención final, en función del valor de la cuantía nominal del préstamo, es el siguiente:

$$S_n = \frac{C^*[(1-r^*)^n - (1-i^*)^n]}{(1-t^*)^n} \quad [48]$$

Hipótesis a.1.). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que dicho sujeto recibe en el final de la operación una cuantía total compuesta por la agregación de la cuantía que desembolsa el prestatario, igual a la cuantía nominal del préstamo, C^* , y el importe de la subvención, que desembolsa el ente correspondiente que subvenciona: $C^* = M + S_n$.

El problema que se presenta, en este contexto, es el de valorar no sólo la cuantía de la subvención, sino igualmente, la correspondiente cuantía a abonar por el prestatario. De acuerdo con lo expuesto, la cuantía M a abonar por el prestatario verifica: $M = C^* - S_n$, siendo la misma decreciente con S_n . Ahora bien, según hemos puesto de manifiesto anteriormente, la cuantía S_n de la subvención final, es creciente con t^* , por lo que al aumentar (o disminuir) t^* , también aumenta (o disminuye) S_n , y, en consecuencia el valor de M , disminuye (o aumenta), siendo, pues, M función decreciente con t^* .

La cuantía M a abonar por el prestatario se obtiene, de acuerdo con lo expuesto, y realizando las oportunas transformaciones algebraicas, a través de la ecuación:

$$M = \frac{C^* [(1-t^*)^n - (1-r^*)^n + (1-i^*)^n]}{(1-t^*)^n} \quad [49]$$

En función de lo señalado, se tiene:

Prestamista — { Entrega en el origen: $C^*(1-i^*)^n$
 Recibe en el final: C^*

Prestatario — { Recibe en el origen: $C = C^*(1-i^*)^n$
 Entrega en el final: $M = C^* - S_n$

Con las hipótesis mencionadas, el tipo efectivo del prestamista³⁵, coincide con el tipo medio del préstamo, obteniéndose el tipo efectivo del prestatario en función de la cuantía M desembolsada por dicho sujeto en el final de la operación, y de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$C^*(1 - i^*)^n = M(1 - i_p^*)^n \quad [50]$$

En la ecuación precedente, el primer miembro es el valor C de la cuantía neta del préstamo, y al despejar se obtiene como expresión del tipo efectivo pasivo la siguiente:

$$i_p^* = 1 - \sqrt[n]{\frac{C}{M}} \quad [51]$$

Al tomar derivadas en la igualdad anterior, considerando la cuantía M como variable independiente, se llega a:

³⁵ En efecto, de la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía neta entregada en el origen, y la percibida en el final, se deduce que $i_a^* = i^*$.

$$\frac{d i_p^*}{d M} = \frac{C}{n M^2 \sqrt[n]{\left(\frac{C}{M}\right)^{n-1}}} > 0 \quad [52]$$

En consecuencia, el tipo efectivo del prestatario es creciente con M . Ahora bien, hemos demostrado que M es decreciente con el tipo medio t^* , por lo que al aumentar (o disminuir) t^* , el valor de M disminuye (o aumenta), lo que implica que, al ser i_p^* creciente con M , disminuye (o aumenta), por lo que podemos señalar que el tipo efectivo del prestatario es función decreciente con el tipo medio t^* , disminuyendo cuando t^* aumenta, y aumentando cuando t^* disminuye: $i_p^* = f(t^*)$.

Hipótesis a.2.). La subvención es percibida por el prestatario, por lo que no existe posible incidencia sobre el sujeto prestamista, percibiendo éste en el final de la operación la cuantía C^* abonada por el prestatario. En cambio, este último sujeto de la operación, al percibir la cuantía S_n de la subvención, realmente abona una cuantía neta M que verifica: $M = C^* - S_n$.

De acuerdo con lo expuesto, se tiene:

Prestamista	— [Entrega en el origen: $C^*(1-i^*)^n$
		Recibe en el final: C^*
Prestatario	— [Recibe en el origen: $C = C^*(1-i^*)^n$
		Entrega en el final: $M = C^* - S_n$

Con las hipótesis señaladas, el tipo efectivo del prestamista³⁶, coincide con el tipo medio del préstamo, obteniéndose el tipo efectivo del prestatario en función de la cuantía M desembolsada por dicho sujeto en el final de la operación, y de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$C^*(1 - i^*)^n = M(1 - i_p^*)^n \quad [53]$$

Ahora bien, según hemos señalado anteriormente, la cuantía M es función del tipo medio t^* , por lo que podemos señalar que el tipo efectivo del prestatario se obtendrá también como función del tipo medio t^* .

³⁶ En efecto, de la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía neta entregada en el origen, y la percibida en el final, se deduce que $i_a^* = i^*$.

Teniendo en cuenta lo expuesto en cuanto a la subvención final, podemos sintetizar en el siguiente cuadro, tanto lo relativo a la hipótesis de subvención percibida por el prestamista como lo referente a la hipótesis de subvención percibida por el prestatario:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Recibe en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Entrega en el final:	$C^* - S_n = M$	$C^* - S_n = M$
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1}^* = f(t^*)$	$i_{p2}^* = f(t^*)$
$i_{p1}^* = i_{p2}^* = i_p^*$ i_p^* es decreciente con t^*		

De acuerdo con lo expuesto, podemos señalar que en cualquier modalidad de percepción de la subvención final, bien por el sujeto activo o prestamista, o bien por el sujeto pasivo inicial o prestatario, cada sujeto de la

operación entrega y recibe idéntica cuantía, no viéndose alterado, en consecuencia, el tipo medio efectivo. Por ello, la modalidad de percepción, en relación con el sujeto que la percibe, es neutral en cuanto a su incidencia tanto sobre el tipo efectivo activo como sobre el tipo efectivo pasivo. En cambio, sí tiene incidencia sobre el tipo efectivo pasivo, el valor concreto utilizado como tipo medio de interés prepagable t^* , el cual posibilita, como hemos señalado, valorar la subvención final en función de la correspondiente cuantía de la subvención inicial.

Tanto en las operaciones con subvención inicial, como en las operaciones con subvención final, hemos demostrado la neutralidad de la modalidad de percepción de la subvención, en cuanto a su incidencia sobre el tipo efectivo de cada sujeto de la operación, siendo, en ambos casos, para el sujeto activo el mismo, coincidente con el tipo medio del préstamo: $i_a^* = i^*$. En cambio, para el sujeto pasivo, no se produce tal coincidencia entre las hipótesis de subvención inicial y final, siendo en el primer caso, coincidente con el tipo medio subvencionado, y en el segundo, función del tipo medio t^* . Lo expuesto se sintetiza en el siguiente cuadro:

	Subvención inicial	Subvención final
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
Tipo efectivo pasivo:	$i_p^* = r^*$	$i_p^* = f(t^*)$

Hipótesis b). En este caso, el tipo medio t^* , coincide con el tipo medio del préstamo, o sea, $t^* = i^*$, siendo de aplicación las conclusiones y expresiones deducidas en la hipótesis a) anterior, sustituyendo t^* por i^* . Así, el valor de la subvención final, en función del valor de la cuantía nominal del préstamo, es el siguiente:

$$S_n = C^* \left[\left(\frac{1-r^*}{1-i^*} \right)^n - 1 \right] \quad [54]$$

Por otra parte, la cuantía M a abonar por el prestatario, se obtiene, de acuerdo con lo expuesto, según la expresión:

$$M = C^* \left[2 - \left(\frac{1-r^*}{1-i^*} \right)^n \right] \quad [55]$$

Finalmente, en cualquiera de las dos hipótesis de percepción de la subvención, bien por el sujeto activo o por el pasivo, el tipo efectivo activo

coincide con el tipo medio del préstamo; y el tipo efectivo pasivo es función decreciente del tipo medio del préstamo i^* .

Hipótesis c). En este caso, el tipo medio t^* , coincide con el tipo medio subvencionado, o sea, $t^* = r^*$, siendo de aplicación las conclusiones y expresiones deducidas en la hipótesis a) anterior, sustituyendo t^* por r^* . Así, el valor de la subvención final, en función del valor de la cuantía nominal del préstamo, es el siguiente:

$$S_n = C^* \left[1 - \left(\frac{1-i^*}{1-r^*} \right)^n \right] \quad [56]$$

Por otra parte, la cuantía M a abonar por el prestatario, se obtiene, de acuerdo con lo expuesto, según la expresión:

$$M = C^* \left(\frac{1-i^*}{1-r^*} \right)^n \quad [57]$$

Finalmente, en cualquiera de las dos hipótesis de percepción de la subvención, bien por el sujeto activo o por el pasivo, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo; y el tipo efectivo pasivo es función decreciente del tipo medio subvencionado r^* .

CAPITULO IV

VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COMPUESTAS CON INTERESES POSPAGABLES

CAPITULO IV: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVEN- CIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COM- PUESTAS CON INTERESES POSPAGABLES

4.1.- INTRODUCCION

4.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA SIMPLE

4.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA DIFERIDA

4.4.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

4.5.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

4.1.- INTRODUCCION

En la modalidad de préstamo compuesto, caracterizada por la existencia de contraprestación múltiple, el prestatario abona periódicamente los términos amortizativos comprensivos de cuota de interés y cuota de amortización.

Como es sabido, la descomposición de cada término amortizativo en los dos sumandos mencionados, posibilita el reembolso del capital objeto del préstamo, a través de las cuotas de capital o de amortización, y además, el abono de los intereses devengados desde el vencimiento del término amortizativo precedente, cuantificados dichos intereses, por ser pospagables, sobre el saldo vivo al principio del período respectivo y de acuerdo con el tipo de interés vigente para tal período³⁷.

En consecuencia a lo señalado, la subvención correspondiente a cada período, asociada, pues, al respectivo término amortizativo, debe ser cuantificada de la misma forma que la correspondiente cuota de interés y en función del tipo de subvención concedido.

Valorada la subvención de la forma señalada, se tiene la modalidad de **subvención periódica**, que puede ser satisfecha por el ente correspondiente en cada uno de los vencimientos de los términos amortizativos, dando origen a la **subvención periódica simple**. También puede ser abonada la citada subvención periódica con diferimiento, dando origen a las modalidades de **subvención periódica con acumulación aritmética** y **subvención periódica con acumula-**

³⁷ Puede verse en este sentido:

Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 381.

Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., p. 212.

ción financiera. En tales hipótesis, la modalidad de **diferimiento** implica que en determinados vencimientos, pactados entre el ente que subvenciona y el sujeto que percibe la subvención, se abona un grupo de subvenciones correspondientes a varios términos amortizativos vencidos.

En la modalidad de **diferimiento con acumulación aritmética**, las cuantías de las subvenciones asociadas a determinados términos amortizativos vencidos, se acumulan aritméticamente, sin que exista devengo de intereses por el tiempo transcurrido entre el vencimiento de cada uno de los términos amortizativos y el vencimiento único pactado como fecha de abono de la subvención.

En la modalidad de **diferimiento con acumulación financiera**, las cuantías de las subvenciones asociadas a los términos amortizativos vencidos, se acumulan financieramente, por lo que sí existe el devengo de intereses entre el tiempo transcurrido desde el vencimiento de cada término amortizativo y el vencimiento único pactado como fecha de abono de la subvención. Obviamente, esta última modalidad implica que el ente que subvenciona pacte con el sujeto que percibe la subvención, el tipo de interés correspondiente a abonar por los diferimientos relativos a las percepciones de las subvenciones.

De igual forma a lo que sucede en los préstamos simples, la subvención puede ser abonada íntegramente en el origen de la operación, o bien en su final, dando lugar a las modalidades respectivas de subvención inicial y de subvención final. Tales modalidades constituyen un diferimiento total con acumulación financiera, pues todas las subvenciones periódicas se sustituyen por la subvención única, bien inicial o final.

En la modalidad de préstamo que estamos estudiando, la cuantía de la subvención periódica simple puede ser considerada como subvención primaria, y las restantes modalidades (subvención inicial; subvención periódica con acumulación aritmética; subvención periódica con acumulación financiera y subvención final), como subvenciones derivadas, ya que cualquiera de las cuantías asociadas a tales subvenciones, se obtiene en función de la correspondiente a la subvención periódica simple. Por lo tanto, analizaremos en primer término las operaciones con subvención periódica simple, o subvención primaria, ya que así se posibilita un mejor tratamiento para las modalidades de operaciones con subvención derivada, las cuales estudiaremos con posterioridad.

4.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA SIMPLE

En estas operaciones, y de acuerdo con lo anteriormente expuesto, llegado el vencimiento de cada término amortizativo, el tercero que lo ha subvencionado, ha de abonar el importe correspondiente de la subvención. Para cuantificar dicho importe es indiferente que el mismo sea abonado directamente al prestamista, o que lo sea al prestatario. En cualquier hipótesis, el citado importe vendrá dado por el interés producido por el saldo vivo del préstamo, al principio del período de que se trate, y de acuerdo con el tipo de subvención concedido:

$$S_s = d_s C_{s-1} \quad [58]$$

siendo:

S_s : cuantía de la subvención correspondiente al período s .

d_s : tipo de subvención del período s concedido por el ente correspondiente.

C_{s-1} : cuantía del saldo vivo al principio del período s .

En la hipótesis de subvención percibida por el prestamista, el prestatario debe abonarle la diferencia entre el correspondiente término

amortizativo³⁸ y la cuantía de la subvención: $b_s = a_s - S_s$, con lo que la cuantía neta correspondiente a la cuota de interés viene dada por la expresión correspondiente a la cuota de interés antes de la subvención, y ésta:

$$\left. \begin{aligned} I_s &= i_s C_{s-1} \\ S_s &= d_s C_{s-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I'_s = (i_s - d_s) C_{s-1} = r_s C_{s-1} \quad [59]$$

De acuerdo con lo señalado, la cuantía neta abonada por el prestatario viene dada por la expresión: $b_s = r_s C_{s-1} + A_s$.

En la hipótesis descrita, la cuantía total percibida por el prestamista, como agregación de la percibida del prestatario y del ente que subvenciona, coincide con la del término amortizativo sin subvencionar. Por ello, el tipo efectivo activo coincide con el tipo de interés medio del préstamo, definido por la siguiente ecuación³⁹:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^s (1+i_h)^{-1} = \sum_{s=1}^n a_s (1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s (1+i_e)^{-s} \quad [60]$$

³⁸ Las cuantías de los términos amortizativos, antes de considerar la característica de subvención, han de verificar, como es conocido, la ecuación de equilibrio, representativa de la equivalencia entre la suma financiera de la prestación y la de la contraprestación. Es precisamente en base a dicha ecuación de equivalencia, expresiva del postulado de equivalencia financiera, como es posible determinar tales cuantías y, en base a distintas hipótesis acerca de las mismas así como al tipo de interés de la operación, surgen diversos sistemas de amortización. Véase en este sentido: Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp. 399-422.

³⁹ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 518.

En cuanto al prestatario, de acuerdo con lo señalado anteriormente, la contraprestación que abona viene definida por el conjunto de capitales siguiente:

$$\{ (b_s, s) \} = \{ (r_s C_{s-1} + A_s, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

En concordancia con lo expuesto, el tipo efectivo del prestatario coincide con el tipo medio de interés subvencionado, definido por la expresión:

$$C = \sum_{s=1}^n b_s \prod_{k=1}^s (1+r_k)^{-1} = \sum_{s=1}^n b_s (1+r)^{-s} = \sum_{s=1}^n b_s (1+i_p)^{-s} \quad [61]$$

En la hipótesis de subvención percibida por el prestatario, éste debe abonar al prestamista la cuantía total de los correspondientes términos amortizativos, que da origen al siguiente conjunto de capitales financieros:

$$\{ (a_s, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

De acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis, también se verifica la igualdad entre el tipo medio del préstamo y el tipo efectivo activo o del prestamista, y entre el tipo medio subvencionado y el tipo efectivo pasivo o del prestatario:

$$i_a = i$$

$$i_p = r$$

Una vez analizadas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, cabe particularizar el estudio para algunos métodos de amortización, de importante utilización en la realidad. Nos centraremos en las modalidades de: sistema francés, sistema de cuota de amortización constante y sistema americano⁴⁰. Para la valoración de la subvención en los métodos citados, consideraremos la hipótesis de que el tipo de interés del préstamo es constante, así como el tipo de subvención concedido.

⁴⁰ El análisis general de los métodos particulares señalados, puede hacerse en las siguientes obras:
Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp. 399-422.
González Catalá, V. T. (1984): Op. cit., pp. 121-145.
Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., pp. 197-240.

a) **Sistema francés.** Como es sabido, en este sistema, los términos amortizativos son de cuantía constante, por lo que teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, así como la expresión correspondiente del saldo por el método prospectivo⁴¹, se llega a la siguiente expresión para cuantificar la subvención asociada a un determinado período:

$$S_s = dC_{s-1} = \frac{dCa_{\overline{n-s+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \quad [63]$$

b) **Sistema americano.** Al ser nulas las cuotas de amortización, el saldo permanece constante, por lo que la cuantía de la subvención periódica es de :
 $S_s = dC$.

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** En este caso, y de acuerdo con la expresión correspondiente del saldo⁴², se obtiene como cuantía de la subvención:

$$S_s = \frac{dC(n - s + 1)}{n} \quad [64]$$

⁴¹ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 402.

⁴² Gil peláez, L. (1987): Op. cit., p. 413.

4.3- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA DIFERIDA

De acuerdo con lo señalado anteriormente, la hipótesis de diferimiento en cuanto al abono de la subvención periódica, implica que la misma no es abonada en su vencimiento, sino que se produce un diferimiento hacia la derecha en el tiempo. Por ello, bien la subvención correspondiente a un vencimiento, o las correspondientes a varios vencimientos, son abonadas con posterioridad a tales vencimientos, dando origen a las modalidades de acumulación aritmética y acumulación financiera.

En consecuencia, supongamos que las subvenciones correspondientes a los vencimientos pertenecientes al intervalo cerrado $[s, s+h]$, se abonan íntegramente en el punto $s+h$, siendo, pues, el siguiente conjunto de capitales el que es objeto de diferimiento:

$$\{ (S_q, q) / q = s, s+1, \dots, s+h \}$$

siendo S_q la cuantía de la subvención con vencimiento en q .

4.3.1.- Operaciones con subvención periódica diferida y acumulación aritmética

En tal hipótesis, en el vencimiento $s+h$, único para el grupo de subvenciones asociadas al intervalo $[s, s+h]$, el ente que subvenciona ha de abonar la suma aritmética de los correspondientes capitales financieros que se han diferido. Por ello, la cuantía a abonar, T_{s+h} verifica:

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_q = \sum_{q=s}^{s+h} d_q C_{q-1} \quad [65]$$

En la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista, el diferimiento señalado, así como la acumulación descrita, implican que el tipo efectivo activo de la operación sea inferior al que obtendría sin la característica de subvención, o, aun existiendo ésta, si la misma fuese sin tal diferimiento. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁴³:
 $i_a < i$.

Si la subvención la percibe el prestatario, la hipótesis de diferimiento señalada, implica que el tipo efectivo pasivo de la operación sea superior al

⁴³ Para el sujeto prestatario, al recibir el prestamista la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁴⁴: $i_p > r$.

Una vez deducidas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, vamos a particularizar el estudio para las siguientes modalidades de sistemas de amortización de préstamos: sistema francés, sistema de cuota de amortización constante y sistema americano.

a) **Sistema francés.** Teniendo en cuenta la expresión deducida en la hipótesis de subvención periódica simple, se llega a la siguiente ecuación que posibilita el cálculo de la cuantía de la subvención:

$$T_{s+h} = \frac{Cd}{a_{n|i}} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q+1|i} \quad [66]$$

b) **Sistema americano.** Al ser constante la cuantía de la subvención periódica, se obtiene :

$$T_{s+h} = (h + 1)dC \quad [67]$$

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** De acuerdo con lo expuesto para esta modalidad de sistema de amortización y en la hipótesis de subvención

⁴⁴ Para el sujeto prestamista, al recibir el prestatario la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

periódica simple, tenemos que la cuantía de la subvención con acumulación aritmética se obtiene a través de la expresión:

$$T_{s+h} = \frac{\sum_{q=s}^{s+h} dC(n - q + 1)}{n} \quad [68]$$

Al realizar operaciones algebraicas en la expresión precedente, y teniendo en cuenta que la expresión $\sum_{q=s}^{s+h} q$ constituye la suma de $(h + 1)$ términos de una progresión aritmética de razón unitaria, se llega a :

$$T_{s+h} = \frac{dC}{2n} [h(4n - 2s + 3 - h) - 2s] \quad [70]$$

4.3.2.- Operaciones con subvención periódica diferida y acumulación financiera

En la hipótesis enunciada, en el vencimiento único $s+h$, correspondiente al grupo de subvenciones asociadas al intervalo $[s, s+h]$, el ente que subvenciona ha de abonar la suma financiera⁴⁵ de los respectivos capitales que se han diferido. Por ello, la cuantía a abonar, T_{s+h} verifica:

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_q \prod_{p=1}^h (1+i'_{s+p}) \Rightarrow$$

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_q (1+i)^{s+h-q} = \sum_{q=s}^{s+h} d_q C_{q-1} (1+i)^{s+h-q}$$
[71]

siendo $i'_{s+1}, i'_{s+2}, \dots, i'_{s+h}$, los tipos de interés pactados entre el ente que subvenciona y el sujeto receptor de la subvención⁴⁶.

En la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista, el diferimiento señalado, así como la acumulación descrita, implican que el tipo

⁴⁵ La suma aritmética de varios capitales, implica el no cómputo de intereses por la renuncia a un capital presente a cambio de otro futuro. En cambio, la suma financiera supone considerar el tiempo como un bien económico negativo, por cuanto que "el alejamiento de la disponibilidad de un bien debe ser compensado con un aumento de cuantía para que sean indiferentes". Ello implica en este caso, la acumulación de intereses. Véase :
Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 23.

⁴⁶ El tipo i es el tipo de interés medio equivalente a los tipos pactados para los distintos subperíodos.

efectivo activo de la operación sea distinto al que obtendría sin la característica de subvención, o, aun existiendo ésta, si la misma fuese sin tal diferimiento⁴⁷. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁴⁸: $i_a \neq i$. Ahora bien, si el tipo de interés medio i' pactado para valorar las subvenciones, supera al tipo de interés medio del préstamo, el tipo medio efectivo también superará a dicho tipo medio, siendo inferior en el caso opuesto:

$$\text{Si } i' > i \Rightarrow i_a > i$$

$$\text{Si } i' < i \Rightarrow i_a < i$$

Si la subvención la percibe el prestatario, la hipótesis de diferimiento señalada, implica que el tipo efectivo pasivo de la operación sea distinto al correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁴⁹: $i_p \neq r$. Ahora bien, si el tipo de interés medio i' pactado para valorar las subvenciones, supera al tipo de interés medio subvencionado, el tipo medio efectivo resulta inferior a dicho tipo medio, siendo superior en el caso opuesto:

⁴⁷ Dicho tipo efectivo se obtendrá a través de la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real entregada por el prestamista y la contraprestación real recibida.

⁴⁸ Para el sujeto prestatario, al recibir el prestamista la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

⁴⁹ Para el sujeto prestamista, al recibir el prestatario la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

$$\text{Si } i' > r \Rightarrow i_p < r$$

$$\text{Si } i' < r \Rightarrow i_p > r$$

Analizaremos a continuación las modalidades particulares de los sistemas de amortización siguientes: sistema francés, sistema americano y sistema de cuota de amortización constante.

a) **Sistema francés.** De acuerdo con lo expuesto para este sistema en relación con la subvención periódica, tenemos que la cuantía correspondiente en la hipótesis de subvención periódica con acumulación financiera, se obtiene a través de la expresión:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{a_{n|i}} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q+1|i} (1+i)^{s+h-q} \quad [75]$$

b) **Sistema americano.** De acuerdo con lo expuesto, siendo constante la cuantía de la subvención periódica, el valor financiero de las (h+1) subvenciones viene dado por la siguiente expresión:

$$T_{s+h} = dC s_{h+1|i} \quad [76]$$

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** De acuerdo con lo expuesto, la cuantía total de la subvención viene dada por la expresión:

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} \frac{dC(n - q + 1)}{n} (1 + i)^{s+h-q} \quad [77]$$

De la ecuación precedente, se deduce:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{n} \left[\sum_{q=s}^{s+h} (n+1)(1+i)^{s+h-q} - \sum_{q=s}^{s+h} q(1+i)^{s+h-q} \right] \quad [78]$$

Ahora bien, el minuendo correspondiente a la expresión del corchete constituye el valor final de una renta pospagable de (h+1) términos de cuantía constante (n+1). En cuanto al sustraendo, el mismo es el valor final de una renta pospagable de (h+1) términos variables en progresión aritmética de razón unitaria. En consecuencia, y teniendo en cuenta las expresiones analíticas correspondiente para valorar tales rentas⁵⁰, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=s}^{s+h} (n+1)(1+i)^{s+h-q} &= (n+1)s_{\overline{h+1}|i} \\ \sum_{q=s}^{s+h} q(1+i)^{s+h-q} &= (s+h+1 + \frac{1}{i'})s_{\overline{h+1}|i'} - \frac{(h+1)(1+i)^{h+1}}{i'} \end{aligned} \right\} \quad [79]$$

Y al realizar las correspondientes operaciones se llega a:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{n} \left[(n - s - h - \frac{1}{i'})s_{\overline{h+1}|i'} + \frac{(h+1)(1+i)^{h+1}}{i'} \right] \quad [80]$$

⁵⁰ Tales expresiones pueden ser consultadas, por ejemplo, en: Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 250 y pp. 261-263.



4.4- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

En la hipótesis enunciada, y de acuerdo con lo expuesto, el importe total de la subvención es abonado en el origen de la operación, tratándose, pues, de una subvención diferida total, con acumulación financiera, en la que el diferimiento lo podemos considerar negativo.

Con independencia del sujeto receptor de la subvención, el primer problema a resolver en esta modalidad es el de la cuantificación del importe de la misma. Para ello es posible seguir dos vías de solución: primera, considerar que la subvención inicial está vinculada a las subvenciones periódicas simples, y en consecuencia su importe es función de los importes de las mismas; segunda, considerar que, al no existir subvenciones periódicas, se debe realizar la valoración de la subvención inicial considerando que su cuantía no es función de las cuantías de las subvenciones periódicas simples. Analizaremos separadamente ambas hipótesis de valoración.

4.4.1- Operaciones con subvención inicial función de las subvenciones periódicas simples

En las operaciones enunciadas, al ser la subvención en el origen una función de las subvenciones periódicas simples, la subvención global está representada por un solo capital que sustituye al conjunto de capitales financieros representativo de las citadas subvenciones periódicas, siendo su

cuantía la de un capital financiero equivalente al conjunto de capitales financieros asociados a las subvenciones periódicas simples:

$$\{(T_0, 0)\} \sim \{(S_q, q) / q = (1, 2, \dots, n)\} \quad [81]$$

siendo:

T_0 : cuantía de la subvención global en el origen o subvención inicial.

S_q : cuantía de la subvención que correspondería asociar al vencimiento q , en la hipótesis de subvención periódica simple.

En consecuencia a lo expuesto, la cuantía T_0 ha de ser el valor actualizado equivalente de tales subvenciones periódicas. El problema que se plantea para dicha actualización es el de especificar el tipo medio de interés t correspondiente⁵¹. En relación con el mismo, es preciso distinguir entre que sea fijado, como un valor medio general t , por el ente que subvenciona⁵²; que se tome como valor de t el tipo de interés medio del préstamo, o sea, $t = i$; o bien que se tome como valor de t el tipo medio de interés subvencionado, o sea, $t = r$.

⁵¹ En la hipótesis de que el tipo de actualización fuese variable, t_s para el período s , determinaríamos, tal y como hemos señalado anteriormente para los préstamos simples, el tipo medio constante equivalente t .

⁵² En esta hipótesis, el ente que subvenciona, ha de fijar entre las condiciones de subvención, no sólo los puntos d_s de interés que subvenciona, sino igualmente, el tipo de actualización t_s a aplicar a las subvenciones periódicas a fin de obtener la inicial.

Hipótesis a). Supuesto un tipo medio t fijado por el ente que subvenciona, el importe de la subvención viene dado por la expresión⁵³:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} \prod_{h=1}^s (1 + t_h)^{-1} = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + t)^{-s} = \sum_{s=1}^n S_s (1 + t)^{-s} \quad [82]$$

De la expresión precedente se deduce como la cuantía de la subvención inicial es función decreciente del tipo medio t , pues al aumentar (o disminuir) dicha variable, la cuantía correspondiente de la subvención disminuye (o aumenta).

Hemos de distinguir, asimismo, entre las hipótesis de que la subvención la perciba el prestamista o bien la reciba el prestatario.

Hipótesis a.1). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión $(C - T_0)$. Este capital aumenta en función de que T_0 disminuya, y T_0 disminuye cuando aumenta t . Por tanto, $(C - T_0)$ aumenta o disminuye cuando lo hace t , siendo pues, una función creciente de t .

En las condiciones expuestas, cabe preguntarse acerca de cuáles deben ser las cuantías a abonar por el prestatario a fin de amortizar el préstamo. En principio, caben dos opciones: una, que abone periódicamente los términos amortizativos correspondientes, una vez deducida la respectiva cuantía de

⁵³ En la ecuación indicada se relaciona el tipo medio constante t con los tipos variables t_h .

subvención periódica; otra, que al ser realmente la cuantía del préstamo $C - T_0$, en función de ésta y considerando el tipo medio i del préstamo, cuantificar los términos amortizativos que realmente debe satisfacer. Analizaremos separadamente ambas posibilidades .

Hipótesis a.1.1). Si el prestatario abona los términos amortizativos una vez deducida la respectiva subvención, el conjunto financiero que debe satisfacer es el siguiente:

$$\{ (b_s, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

siendo:

$$b_s = a_s - S_s = i_s C_{s-1} + A_s - d_s C_{s-1} = r_s C_{s-1} + A_s \quad [83]$$

En las condiciones expuestas, el rédito medio efectivo activo o del prestamista, se obtendrá de la ecuación de equivalencia entre la prestación real entregada y la contraprestación real recibida:

$$C - \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + t)^{-s} = \sum_{s=1}^n (a_s - S_s) (1 + i_a)^{-s} \quad [84]$$

En la ecuación precedente, y tal y como hemos señalado anteriormente, la diferencia del primer miembro, $(C - T_0)$ es creciente con t , y al ser $(a_s - S_s)$ invariante con t , i_a ha de ser decreciente con t . En efecto, al aumentar t , el

primer miembro aumenta, con lo que, para que se verifique la igualdad precedente, el segundo miembro también ha de aumentar, y sólo podrá hacerlo si cada uno de los factores $(1 + i_a)^{-s} = \frac{1}{(1 + i_a)^s}$ también aumenta, lo que se produce sólo en el caso de una disminución de i_a . Análogo razonamiento es posible seguir para verificar como al disminuir el valor de t , el correspondiente de i_a aumenta, quedando, pues, demostrado, que el tipo medio activo i_a es función decreciente de t .

En cuanto al prestatario, el correspondiente tipo efectivo pasivo no es función del valor medio t , tomando como valor: $i_{pl} = r = i - d$, de acuerdo con la ecuación⁵⁴:

$$C = \sum_{s=1}^n b_s (1 + i_{pl})^{-s} \quad [86]$$

De la ecuación precedente, por sustitución se obtiene:

$$C + \sum_{s=1}^n S_s (1 + r)^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s (1 + r)^{-s} \quad [87]$$

Hipótesis a.1.2). Al ser realmente la cuantía del préstamo $C - T_0$, en función de ésta y considerando el tipo medio i del préstamo, podemos cuantificar los

⁵⁴ En efecto, pues los términos b_s verifican: $b_s = r_s C_{s-1} + A_s$.

términos amortizativos b_s que realmente debe satisfacer el prestatario, los cuales, obviamente, serán distintos de las cuantías $a_s - S_s$. De acuerdo con la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, ha de cumplirse:

$$C - \sum_{s=1}^n S_s(1 + t)^{-s} = \sum_{s=1}^n b_s(1 + i)^{-s} \quad [88]$$

Resulta evidente que de la forma descrita, el tipo efectivo activo, si bien vinculado al valor medio del tipo t de actualización de las subvenciones periódicas simples, resulta independiente del mismo, al poder cuantificar en función del correspondiente valor de t , las cuantías de los términos amortizativos b_s que debe percibir el prestamista. Así, se verifica: $i_a = i$, o sea, el tipo efectivo del prestamista coincide con el tipo medio del préstamo, con lo que la subvención resulta neutral para dicho sujeto. Ahora bien, analizando el conjunto de hipótesis descritas, se tiene: la operación se pacta entre prestamista y prestatario sin tener en cuenta la característica de subvención, cuantificando de acuerdo con la ecuación de equivalencia financiera, las cuantías de los términos amortizativos a_s que, de acuerdo con el tipo medio i del préstamo, permiten la amortización de éste; a continuación, y de acuerdo con los tipos de subvención d_s concedidos por el ente correspondiente, se valoran las subvenciones periódicas simples, las cuales, y de acuerdo con un tipo medio t fijado también por el ente que subvenciona, se actualizan a fin de obtener la cuantía total T_0 de la subvención inicial; por diferencia entre la cuantía del préstamo y la subvención inicial, se obtiene la cuantía real concedida en préstamo, y de nuevo, se vuelve a cuantificar la contraprestación a abonar por el prestatario. De la forma descrita: a) existe una gran complejidad en todos los cálculos, que

no redundando en claridad alguna; b) los términos amortizativos que abona el prestatario no son la diferencia entre los que debía abonar sin subvención y el importe de ésta. Por lo tanto, consideramos que la hipótesis descrita no debe ser utilizada.

Hipótesis a.2). La subvención es percibida por el prestatario⁵⁵, por lo que éste, periódicamente, debe abonar los términos amortizativos que, al tipo medio i del préstamo, posibilitan su amortización.

En las condiciones expuestas, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo: $i_a = i$, y el tipo efectivo pasivo se deducirá de la ecuación de equilibrio entre la prestación real percibida por el prestatario y la contraprestación real entregada:

$$C + T_0 = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i_{p2})^{-s} \quad [89]$$

Según hemos expuesto, la cuantía T_0 es decreciente con t , aumentando al disminuir t . Como las cuantías a_s son invariantes con t , al aumentar $(C + T_0)$, por disminuir t , i_{p2} debe disminuir para que se siga verificando la ecuación de equilibrio precedente. De forma análoga, al aumentar la variable t , la suma $(C + T_0)$ disminuye, pues lo hace el sumando T_0 . Para que la ecuación de equilibrio continúe verificándose, es necesario, en este caso, que el segundo miembro también disminuya, y lo hace al aumentar i_{p2} . En consecuencia a lo

⁵⁵ De acuerdo con esta hipótesis, el prestatario percibe en el origen de la operación una cuantía total de $(C + T_0)$, superior a la del préstamo C .

expuesto, se tiene que el tipo medio efectivo pasivo i_{p2} es función creciente de t .

Lo expuesto lo podemos sintetizar en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a decrec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} creciente con t

Una vez analizadas las ecuaciones generales correspondientes a las hipótesis descritas, es posible particularizar el estudio para algunos métodos particulares de amortización, de importante utilización práctica. Concretaremos el análisis en las modalidades de: sistema francés, sistema americano y sistema de cuota de amortización constante, considerando, igualmente, que tanto el tipo de interés del préstamo como el tipo de subvención concedido, son constantes.

a) Sistema francés. Teniendo en cuenta las expresiones de T_0 y de S_s , deducida esta última para la hipótesis de subvención periódica simple, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \sum_{s=1}^n S_s (1 + t)^{-s} \\ S_s &= \frac{dC a_{\overline{n-s+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \end{aligned} \right\} \quad [90]$$

De donde al realizar operaciones se obtiene la siguiente expresión analítica para cuantificar la subvención inicial:

$$T_0 = \frac{dC}{a_{\overline{n}|i}} \sum_{s=1}^n a_{\overline{n-s+1}|i} (1 + t)^{-s} \quad [91]$$

b) Sistema americano. En este método, al ser constante la cuantía de la subvención periódica, se obtiene como expresión de la subvención inicial:

$$T_0 = dC a_{\overline{n}|t} \quad [92]$$

c) Sistema de cuota de amortización constante. Al sustituir la expresión de la subvención periódica:

$$S_s = \frac{dC(n - s + 1)}{n} \quad [93]$$

en la ecuación de la subvención inicial, se obtiene:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n \frac{dC(n - s + 1)}{n} (1 + t)^{-s} \quad [94]$$

Y al realizar operaciones se llega a:

$$T_0 = \frac{dC}{n} \left[(n + 1)a_{\overline{n}|t} - \sum_{s=1}^n s(1 + t)^{-s} \right] \quad [95]$$

Ahora bien, el sustraendo correspondiente a la diferencia del corchete, constituye el valor actual de una renta pospagable de n términos variables en progresión aritmética de razón unitaria. En consecuencia, y teniendo en cuenta la expresión analítica correspondiente para valorar dichas rentas⁵⁶, se tiene:

⁵⁶ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 250 y pp. 261-263.

$$T_0 = \left\{ (n + 1)a_{n|t} - \left[\left(1 + n \frac{1}{t}\right)a_{n|t} - \frac{n}{t} \right] \right\} \quad [96]$$

Al realizar las correspondientes simplificaciones se obtiene como expresión analítica de la subvención inicial:

$$T_0 = \frac{dC(n - a_{n|t})}{nt} \quad [97]$$

Hipótesis b). En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio del préstamo, o sea, $t = i$. En consecuencia, realizando la correspondiente sustitución, se llega a que el importe de la subvención viene dado por la siguiente expresión:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + i)^{-s} = \sum_{s=1}^n S_s (1 + i)^{-s} \quad [98]$$

Analicemos las hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista y por el prestatario.

Hipótesis b.1.) La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión $(C - T_0)$.

En las condiciones expuestas, y tal y como hemos señalado en la hipótesis general a) inicialmente estudiada, los términos amortizativos que debe abonar el prestatario se obtienen como diferencia entre los inicialmente cuantificados sin considerar la característica de subvención, y la cuantía periódica de ésta:

$$\{ (b_s, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

siendo:

$$b_s = a_s - S_s = i_s C_{s-1} + A_s - d_s C_{s-1} = r_s C_{s-1} + A_s \quad [99]$$

En función de lo expuesto, el rédito medio efectivo activo se obtiene de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$C - \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + i)^{-s} = \sum_{s=1}^n (a_s - S_s) (1 + i)^{-s} \quad [100]$$

En cuanto al prestatario, el correspondiente tipo efectivo pasivo no es función del valor medio t , tomando como valor: $i_{p1} r = i - d$, de acuerdo con la ecuación⁵⁷:

⁵⁷ En efecto, pues los términos b_s verifican: $b_s = r_s C_{s-1} + A_s$.

$$C = \sum_{s=1}^n b_s (i + i_{p1})^{-s} \quad [101]$$

Hipótesis b.2.) La subvención es percibida por el prestatario, por lo que éste, periódicamente, debe abonar los términos amortizativos que, al tipo medio i del préstamo, posibilitan su amortización.

En las condiciones expuestas, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo: $i_a = i$, y el tipo efectivo pasivo se deducirá de la ecuación de equilibrio entre la prestación real percibida por el prestatario y la contraprestación real entregada:

$$C + T_0 = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i_{p2})^{-s} \quad [102]$$

Podemos particularizar las ecuaciones generales expuestas para algunos métodos concretos de amortización.

a) **Sistema francés.** Teniendo en cuenta las expresiones de T_0 y de S_s , deducida esta última para la hipótesis de subvención periódica simple, se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 T_0 &= \sum_{s=1}^n S_s (1+i)^{-s} \\
 S_s &= \frac{dC a_{\overline{n-s+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}}
 \end{aligned} \right\} \quad [103]$$

De donde al realizar operaciones se obtiene la siguiente expresión analítica para cuantificar la subvención inicial:

$$T_0 = \frac{dC}{a_{\overline{n}|i}} \sum_{s=1}^n a_{\overline{n-s+1}|i} (1+i)^{-s} \quad [104]$$

b) **Sistema americano.** En este método, al ser constante la cuantía de la subvención periódica, se obtiene como expresión de la subvención inicial:

$$T_0 = dC a_{\overline{n}|i} \quad [105]$$

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** Teniendo en cuenta la expresión deducida para este sistema en el análisis de la hipótesis general a), y al realizar la sustitución: $t = i$, se obtiene:

$$T_0 = \frac{dC(n - a_n \cdot i)}{ni} \quad [106]$$

Hipótesis c) En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio subvencionado, o sea, $t = i - d = r$, por lo que la cuantía de la subvención viene dada por la siguiente expresión:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + r)^{-s} = \sum_{s=1}^n S_s (1 + r)^{-s} \quad [107]$$

Siguiendo idéntica metodología a la expuesta, y realizando en las ecuaciones deducidas para la hipótesis general a), la sustitución $t = r$, se obtienen las expresiones particulares para la hipótesis enunciada.

4.4.2- Operaciones con subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples

En la hipótesis de subvención inicial, no existen, tal y como hemos señalado, las subvenciones periódicas simples, por lo que, en contraposición al análisis realizado en el apartado precedente, procede en este epígrafe estudiar la metodología a aplicar para valorar la cuantía total de la subvención en el origen, la cual consideramos que es independiente de las subvenciones periódicas simples teóricas⁵⁸.

De acuerdo con la hipótesis enunciada, el problema que se presenta es el de cuantificar la subvención inicial, para a continuación valorar las cuantías de los términos amortizativos a_s que realmente debe abonar el prestatario, los cuales han de ser inferiores a los a_s que correspondería abonar si no existiese la característica de subvención, debiendo verificar éstos, tal y como hemos señalado, la ecuación de equivalencia financiera siguiente:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^n (1 + i_h)^{-1} \quad [108]$$

De acuerdo con lo expuesto, los términos amortizativos que realmente debe abonar el prestatario, han de obtenerse, pues, en función de la cuantía T_0 de la subvención en el origen. Ahora bien, al no existir subvenciones periódicas simples, es preciso introducir hipótesis que permitan valorar T_0 . Las hipótesis

⁵⁸ Damos el calificativo de "teóricas" a aquellas subvenciones periódicas simples que corresponderían en la hipótesis de que la modalidad fuese de tales características.

lógicas que deben introducirse han de hacer referencia al tipo efectivo de la operación.

Si no existe la característica de subvención, el rédito medio activo i_a coincide con el tipo medio del préstamo. Además, como es evidente, la introducción de la característica de subvención no tiene por finalidad alterar dicho tipo efectivo, sino, por el contrario, disminuir el tipo efectivo pasivo o del deudor, situándolo en el tipo medio subvencionado. En consecuencia, las hipótesis a introducir señalan que el tipo efectivo activo ha de coincidir con el tipo medio del préstamo, y el tipo medio efectivo pasivo ha de tomar idéntico valor que el tipo medio subvencionado:

$$i_a = i$$

$$i_p = r$$

Teniendo en cuenta lo señalado, hemos de distinguir entre las hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista o bien por parte del prestatario.

Hipótesis a). La subvención es percibida por el prestamista, con lo que la cuantía neta del préstamo que concede viene dada por la expresión $(C - T_0)$.

Si tal y como hemos señalado, ha de verificarse que $i_a = i$, podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real entregada por el prestamista y la contraprestación real recibida por dicho sujeto:

$$C - T_0 = \sum_{s=1}^n a'_s (1 + i_p)^{-s} = \sum_{s=1}^n a'_s (1 + i)^{-s} \quad [109]$$

En cuanto al sujeto prestatario, y teniendo en cuenta que ha de verificarse la igualdad entre el rédito medio efectivo pasivo y el tipo medio de interés subvencionado, $i_p = r$, podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida por dicho sujeto, y la contraprestación real entregada:

$$C = \sum_{s=1}^n a'_s (1 + i_p)^{-s} = \sum_{s=1}^n a'_s (1 + r)^{-s} \quad [110]$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones precedentes, se obtiene la expresión que permite valorar la cuantía de la subvención inicial a percibir por el prestamista:

$$T_0 = C - \sum_{s=1}^n a'_s (1 + i)^{-s} \quad [111]$$

De acuerdo con la expresión precedente, la cuantía de la subvención en el origen se obtiene como diferencia entre la cuantía del préstamo y el valor

actualizado, tomando como tipo de interés el medio del préstamo, de los términos amortizativos que ha de satisfacer el prestatario.

Igualmente, considerando las ecuaciones anteriores, la cuantía de la subvención viene dada por la expresión siguiente:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n a'_s(1 + r)^{-s} - \sum_{s=1}^n a'_s(1 + i)^{-s} \quad [112]$$

Hipótesis b). La subvención es percibida por el prestatario⁵⁹, por lo que éste, periódicamente, debe abonar los términos amortizativos que, al tipo medio i del préstamo, posibilitan su amortización, los cuales deben verificar:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s(1 + i)^{-s} \quad [113]$$

Si tal y como hemos señalado, ha de verificarse la igualdad entre el tipo efectivo pasivo y el tipo medio subvencionado, es posible plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida por el deudor inicial de la operación, y la contraprestación real entregada por dicho sujeto:

⁵⁹ De acuerdo con esta hipótesis, el prestatario percibe en el origen de la operación una cuantía total de $(C + T_0)$, superior a la del préstamo C .

$$C + T_0 = \sum_{s=1}^n a_s(1 + i_{p2})^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s(1 + r)^{-s} \quad [114]$$

En cuanto al sujeto prestamista, y teniendo en cuenta que ha de verificarse que $i_a = i$, se puede establecer la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real entregada por dicho sujeto y la contraprestación real recibida por el mismo:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s(1 + i)^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s(1 + i)^{-s} \quad [115]$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones precedentes, se obtiene la correspondiente a la subvención inicial a percibir por el prestatario:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n a_s(1 + r)^{-s} - C \quad [116]$$

De acuerdo con la expresión anterior, la cuantía de la subvención se obtiene como diferencia entre el valor actualizado de los términos amortizativos que ha de satisfacer el prestatario, tomando como tipo de interés el tipo medio subvencionado, y la cuantía del préstamo.

Igualmente, considerando las ecuaciones anteriores, la cuantía de la subvención viene dada por la expresión siguiente:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n a_s (1+r)^{-s} - \sum_{s=1}^n a_s (1+i)^{-s} \quad [117]$$

Analizando conjuntamente las dos hipótesis de percepción de la subvención, se tiene que en cuanto al tipo medio efectivo de la operación, resulta neutral qué sujeto percibe la subvención, pues en ambas hipótesis es $i_a = i$, e $i_p = r$. En cuanto a su cuantificación, en ambas hipótesis se obtiene la subvención como diferencia entre el valor actualizado de los términos amortizativos que debe abonar el prestatario, al tipo de interés subvencionado, y el valor también actualizado de tales términos, al tipo medio del préstamo. Sin embargo, en la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista, tales términos amortizativos verifican la ecuación:

$$C = \sum_{s=1}^n a'_s (1+r)^{-s} \quad [118]$$

En cambio, en la hipótesis de percepción de la subvención por el sujeto prestatario, tales términos amortizativos verifican la expresión:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i)^{-s} \quad [119]$$

por lo que, en general, se verifica: $a'_s \neq a_s$

En consecuencia, si bien la expresión que permite cuantificar la subvención es formalmente la misma en ambas hipótesis de percepción de la subvención, no sucede lo mismo con la ecuación que deben verificar los términos amortizativos, por lo que éstos no serán los mismos en una hipótesis que en otra. En cambio, si en la hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestatario, al recibir éste en el origen de la operación una cuantía total ($T_0 + C > C$) superior a la cuantía que realmente demanda en concepto de préstamo, nos planteásemos el cálculo de la cuantía neta X del préstamo a fin de que unida a la de la subvención, se percibiese la cuantía deseada C , llegaríamos a que en tal hipótesis, la ecuación correspondiente para cuantificar los términos amortizativos es equivalente a la de la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista. En efecto, por verificarse que el tipo efectivo pasivo ha de coincidir con el tipo medio subvencionado, y al percibir el prestatario, entre cuantía del préstamo y de la subvención, una cuantía total C , se tiene:

$$C = \sum_{s=1}^n b'_s (1 + r)^{-s} \quad [121]$$

Queda demostrado, pues, que esta ecuación coincide con la que verifican los términos amortizativos cuando la subvención la percibe el prestamista, por lo que se cumple: $b'_s = a'_s$.

De acuerdo con lo expuesto, en la hipótesis enunciada de subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples, si introducimos como nueva hipótesis que la cuantía total a percibir por el prestatario coincida con la cuantía del préstamo, es indiferente que la subvención la perciba el prestamista o bien que la perciba el prestatario, pues en cualquiera de dichas hipótesis de percepción, las variables características (importe de la subvención, cuantías de los términos amortizativos, tipo efectivo activo y tipo efectivo pasivo) de la operación financiera son idénticas.

Una vez analizadas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, cabe particularizar el estudio para algunos métodos de amortización, de importante utilización en la realidad. Nos limitaremos a las modalidades de: sistema francés, sistema de cuota de amortización constante y sistema americano. Para la valoración de la subvención en los métodos citados, consideraremos la hipótesis de que el tipo de interés del préstamo es constante, así como el tipo de subvención concedido. Analizaremos también dentro de cada método particular las hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista o por el prestatario.

a) **Sistema francés.** Teniendo en cuenta que en este sistema los términos amortizativos son constantes, si la subvención la percibe el prestamista, al verificarse que el tipo efectivo activo coincide con el tipo del préstamo, se

tiene la siguiente ecuación entre la prestación entregada por el prestamista y la contraprestación recibida:

$$C - T_0 = a' a_n \lrcorner i \quad [123]$$

Por coincidir el tipo efectivo pasivo con el tipo medio subvencionado, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación percibida por el prestatario y la contraprestación entregada:

$$C = a' a_n \lrcorner r \quad [124]$$

De las dos ecuaciones precedentes se deduce la expresión que permite cuantificar la subvención inicial:

$$T_0 = C \left(1 - \frac{a_n \lrcorner i}{a_n \lrcorner r} \right) \quad [125]$$

Si la subvención la percibe el prestatario, teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo medio subvencionado, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$C + T_0 = aa_n \lrcorner r \quad [126]$$

Teniendo en cuenta que $i_a = i$, se tiene:

$$C = aa_n \lrcorner i \quad [127]$$

De las ecuaciones precedentes se obtiene como expresión de la subvención a percibir por el prestatario:

$$T_0 = C \left(\frac{a_n \lrcorner r}{a_n \lrcorner i} - 1 \right) \quad [128]$$

En esta misma hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestatario, si éste ha de percibir en total la cuantía del préstamo, de acuerdo con lo señalado en el análisis general, las ecuaciones correspondientes coinciden con las relativas a la hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista.

b) **Sistema americano.** Si el prestamista percibe la subvención, abona en el origen de la operación una cuantía neta que verifica: $C - T_0$. Por ello, los intereses a percibir periódicamente del prestatario, son de cuantía $(C - T_0)i$,

recibiendo al finalizar la operación la cuantía $C - T_0$. De esta forma, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo.

Por coincidir el tipo efectivo pasivo con el tipo medio subvencionado, la ecuación que relaciona la prestación neta percibida por el prestatario con la contraprestación neta entregada, es la siguiente:

$$C = (C - T_0)ia_{n|r} + (C - T_0)(1 + r)^{-n} \quad [129]$$

De la ecuación precedente se deduce la expresión que permite cuantificar la subvención inicial a percibir por el prestamista:

$$T_0 = C \left[1 - \frac{1}{ia_{n|r} + (1 + r)^{-n}} \right] \quad [130]$$

Si la subvención la percibiese el prestatario, ha de abonar al prestamista una cuantía periódica Ci , devolviendo al final de la operación la cuantía C . Por otra parte, al ser $i_p = r$, se tiene la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación recibida por el prestatario y la contraprestación entregada:

$$C + T_0 = C ia_{n|r} + C(1 + r)^{-n} \quad [131]$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones precedentes, se llega a la siguiente expresión para cuantificar la subvención inicial a percibir por el prestatario:

$$T_0 = C \left[ia_{\overline{n}|r} + (1 + r)^{-n} - 1 \right] \quad [132]$$

En esta misma hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestatario, si éste ha de percibir en total la cuantía del préstamo, de acuerdo con lo señalado en el análisis general, las ecuaciones correspondientes coinciden con las relativas a la hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista.

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** Si el sujeto prestamista percibe la subvención, abona en el origen de la operación una cuantía neta de importe: $C - T_0$, percibiendo periódicamente y hasta la finalización de la operación unos términos amortizativos que incluyen un sumando constante, -la cuota de amortización-, de cuantía $(C - T_0)/n$, y un sumando variable, -la cuota de interés-, cuantificada la misma al tipo medio del préstamo y sobre el saldo vivo al principio de cada período. De esta forma, el tipo medio efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo, con lo que se verifica una de las hipótesis que sustenta el cálculo de la subvención inicial en la modalidad que estamos analizando.

De acuerdo con lo señalado, el término amortizativo a abonar por el prestatario viene dado por la expresión genérica:

$$a_s' = \frac{C - T_0}{n} + iC_{s-1} \quad [133]$$

El saldo vivo al principio del período s , C_{s-1} , se obtiene como suma aritmética de las $(n - s + 1)$ cuotas de amortización pendientes de vencimiento, por lo que, después de las oportunas operaciones se llega a:

$$a_s' = \frac{(C - T_0)[1 + i(n - s + 1)]}{n} \quad [134]$$

Si comparamos dos términos amortizativos consecutivos, obtenemos que varían de acuerdo con una progresión aritmética de razón $-\frac{(C-T_0)i}{n}$, consecuencia inmediata de la hipótesis básica del método de cuota de amortización constante⁶⁰.

Teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo medio subvencionado, así como que los términos amortizativos forman una renta cuyos términos varían en progresión aritmética, y considerando la expresión general que posibilita el cálculo del valor actual de tales rentas, podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación percibida por el prestatario y la contraprestación entregada:

⁶⁰ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp. 413-414.

$$C = \left[a_1 - \frac{(C - T_0)ni}{n} - \frac{(C - T_0)i}{nr} \right] a_n^r + \frac{(C - T_0)ni}{nr} \quad [136]$$

Teniendo en cuenta el valor de a_1 , y después de realizar las oportunas operaciones algebraicas, es posible obtener la expresión que permite calcular el valor de la subvención en el origen a percibir por el prestamista.

Si la subvención la percibe el prestatario, el prestamista ha de percibir periódicamente los términos amortizativos tales que el tipo efectivo activo coincida con el tipo medio del préstamo. Dichos términos se componen de un sumando constante, -la cuota de amortización-, de valor C/n , y un sumando variable, -la cuota de interés-, cuantificada la misma al tipo medio del préstamo y sobre el saldo vivo al principio del respectivo período.

De acuerdo con lo señalado, el término amortizativo a abonar por el prestatario viene dado por la expresión genérica:

$$a_s = \frac{C}{n} + iC_{s-1} \quad [138]$$

El saldo vivo al principio del período s , C_{s-1} , se obtiene como suma aritmética de las $(n - s + 1)$ cuotas de amortización pendientes de vencimiento, por lo que, después de las oportunas operaciones se llega a:

$$a_s = \frac{C [1 + i(n - s + 1)]}{n} \quad [139]$$

Si comparamos dos términos amortizativos consecutivos, obtenemos que varían de acuerdo con una progresión aritmética de razón $\frac{-Ci}{n}$, consecuencia inmediata de la hipótesis básica del método de cuota de amortización constante⁶¹.

Teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo medio subvencionado, al percibir en el origen de la operación el prestatario una cuantía total ($C + T_0$), la ecuación de equivalencia financiera entre prestación total percibida y contraprestación total entregada es:

$$C + T_0 = \sum_{s=1}^n a_s (1 + r)^{-s} \quad [141]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que los términos amortizativos forman una renta variable en progresión aritmética, así como que el valor del primero de ellos es $(C/n + iC)$, se obtiene la siguiente expresión que permite valorar la cuantía de la subvención inicial a percibir por el prestatario:

⁶¹ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp. 413-414.

$$T_0 = \left(\frac{C}{n} + Ci + dn + \frac{d}{r} \right) a_{\overline{n}|r} - \frac{dn}{r} - C, \text{ siendo } d = \frac{-Ci}{n} \quad [142]$$

En esta misma hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestatario, si éste ha de percibir en total la cuantía del préstamo, de acuerdo con lo señalado en el análisis general, las ecuaciones correspondientes coinciden con las relativas a la hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista.

4.5.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

En las operaciones señaladas, el importe total de la subvención es abonado íntegramente en el final de la operación, tratándose, pues, de una subvención diferida total con acumulación financiera.

Tal y como sucede en la hipótesis de subvención inicial, en la modalidad de subvención final, y con independencia del sujeto receptor de la misma, el primer problema a resolver es el de la cuantificación del importe de la misma. Para ello es posible seguir dos vías de solución: primera, considerar que la subvención final está vinculada a las subvenciones periódicas simples, y en consecuencia su importe es función de los importes de las mismas; segunda, considerar que, al no existir subvenciones periódicas, se debe realizar la valoración de la subvención final considerando que su cuantía no es función de las cuantías de las subvenciones periódicas simples. Analizaremos separadamente ambas hipótesis de valoración.

4.5.1.- Operaciones con subvención final función de las subvenciones periódicas simples

En la hipótesis enunciada, al ser la subvención en el final una función de las subvenciones periódicas simples, la subvención global está representada por un solo capital que sustituye al conjunto de capitales financieros representativo de las citadas subvenciones periódicas, siendo su cuantía la de un

capital financiero equivalente al conjunto de capitales financieros asociados a las subvenciones periódicas simples:

$$\{(T_n, n)\} \sim \{(S_q, q) / q = (1, 2, \dots, n)\} \quad [143]$$

siendo:

T_n : cuantía de la subvención global en el final de la operación.

S_q : cuantía de la subvención que correspondería asociar al vencimiento q , en la hipótesis de subvención periódica simple.

En consecuencia a lo expuesto, la cuantía T_n ha de ser el valor capitalizado equivalente de tales subvenciones periódicas. El problema que se plantea para dicha capitalización es el de especificar el tipo medio de interés t correspondiente⁶². En relación con el mismo, es preciso distinguir entre que sea fijado, como un valor medio general t , por el ente que subvenciona⁶³; que se tome como valor de t el tipo de interés medio del préstamo, o sea, $t = i$; o bien que se tome como valor de t el tipo medio de interés subvencionado, o sea, $t = r$.

⁶² En la hipótesis de que el tipo de interés fuese variable, t_s para el período s , determinaríamos, tal y como hemos señalado anteriormente para los préstamos simples, el tipo medio constante equivalente t .

⁶³ En esta hipótesis, el ente que subvenciona, ha de fijar entre las condiciones de subvención, no sólo los puntos d_s de interés que subvenciona, sino igualmente, el tipo de interés t_s a aplicar a las subvenciones periódicas a fin de obtener la final.

Hipótesis a). Supuesto un tipo medio t fijado por el ente que subvenciona, el importe de la subvención viene dado por la expresión⁶⁴:

$$T_n = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} \prod_{h=s+1}^n (1 + t_h) = \sum_{s=1}^n d_s C_{s-1} (1 + t)^{n-s} = \sum_{s=1}^n S_s (1 + t)^{n-s} \quad [144]$$

De la comparación de la ecuación precedente con la correspondiente a la que permite obtener la subvención en el origen en la hipótesis de subvención inicial función de las subvenciones periódicas simples, se deduce que la cuantía de la subvención final es el montante de la cuantía de la subvención inicial:

$$T_n = T_0 (1 + t)^n \quad [145]$$

Por otra parte, la subvención final resulta función creciente del tipo medio t , pues al aumentar (o disminuir) dicha variable, la cuantía correspondiente de la subvención aumenta (o disminuye).

Teniendo en cuenta lo expuesto, pudiera deducirse, en principio, que el análisis realizado para la modalidad de subvención inicial, es posible trasladarlo, con ligeras modificaciones, a la hipótesis de subvención final. Tal apreciación es errónea, pues si bien la cuantía de la subvención final es el montante de la inicial, es preciso dar respuesta al problema de cuantificar los

⁶⁴ En la ecuación indicada se relaciona el tipo medio constante t con los tipos variables t_h .

términos amortizativos que se vinculan a la operación de préstamo. Para ello vamos a distinguir entre las hipótesis de que la subvención la perciba el prestamista o bien sea recibida por el prestatario.

Hipótesis a.1.). La subvención final es recibida por el prestamista, por lo que la citada subvención, así como las cuantías de los términos amortizativos periódicos, han de ser tales que posibiliten la amortización del préstamo.

En las condiciones expuestas, para valorar las cuantías de los términos amortizativos a abonar por el prestatario caben dos opciones: una, que abone periódicamente los términos amortizativos correspondientes, una vez deducida la respectiva cuantía de la subvención periódica; otra, que al no existir realmente las subvenciones periódicas, si bien se utilicen para valorar la subvención final, los términos amortizativos sean tales que, teniendo en cuenta la cuantía de la subvención final percibida por el prestamista, amorticen el préstamo al tipo medio de interés del mismo.

Hipótesis a.1.1). Si el prestatario abona los términos amortizativos una vez deducida la respectiva subvención, el conjunto financiero que debe satisfacer es el siguiente:

$$\{ (b_s, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

siendo:

$$b_s = a_s - S_s = i_s C_{s-1} + A_s - d_s C_{s-1} = r_s C_{s-1} + A_s \quad [146]$$

En las condiciones expuestas, el rédito medio efectivo activo o del prestamista, se obtendrá de la ecuación de equivalencia entre la prestación real entregada y la contraprestación real recibida, integrada la misma por los términos amortizativos b_s que percibe del prestatario, y la cuantía T_n de la subvención, que percibe del ente correspondiente:

$$C = \sum_{s=1}^n (a_s - S_s)(1 + i_a)^{-s} + (1 + i_a)^{-n} \sum_{s=1}^n S_s(1 + i)^{n-s} \quad [147]$$

De la expresión precedente, al ser $(a_s - S_s)$ invariante con t , se deduce que el tipo medio efectivo activo i_a es función creciente de t , pues la cuantía T_n de la subvención final aumenta o disminuye según lo haga t .

En cuanto al prestatario, el correspondiente tipo efectivo pasivo no es función del valor medio t , tomando como valor: $i_{pl} = i - d$, de acuerdo con la ecuación⁶⁵:

$$C = \sum_{s=1}^n b_s (i + i_{pl})^{-s} \quad [148]$$

De la ecuación precedente, por sustitución se obtiene:

$$C + \sum_{s=1}^n S_s (1 + r)^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s (1 + r)^{-s} \quad [149]$$

Hipótesis a.1.2). En esta hipótesis, vamos a cuantificar los términos amortizativos b_s que debe abonar el prestatario considerando que los mismos, junto con la subvención final, deben amortizar el préstamo al tipo medio i del mismo. Lógicamente, tales términos amortizativos son distintos de las cuantías $a_s - S_s$. De acuerdo con la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, ha de cumplirse:

$$C = \sum_{s=1}^n b_s (1 + i)^{-s} + T_n (1 + i)^{-n} \quad [150]$$

⁶⁵ En efecto, pues los términos b_s verifican: $b_s = r_s C_{s-1} + A_s$.

Resulta evidente que de la forma descrita, el tipo efectivo activo, si bien vinculado al valor medio del tipo t de actualización de las subvenciones periódicas simples, resulta independiente del mismo, al poder cuantificar en función del correspondiente valor de t , las cuantías de los términos amaortizativos b_s que debe percibir el prestamista. Así, se verifica: $i_a = i$, o sea, el tipo efectivo del prestamista coincide con el tipo medio del préstamo, con lo que la subvención resulta neutral para dicho sujeto. Ahora bien, analizando el conjunto de hipótesis descritas, se tiene: la operación se pacta entre prestamista y prestatario sin tener en cuenta la característica de subvención, cuantificando de acuerdo con la ecuación de equivalencia financiera, las cuantías de los términos amortizativos a_s que, de acuerdo con el tipo medio i del préstamo, permiten la amortización de éste; a continuación, y de acuerdo con los tipos de subvención d_s concedidos por el ente correspondiente, se valoran las subvenciones periódicas simples, las cuales, y de acuerdo con un tipo medio t fijado también por el ente que subvenciona, se capitalizan a fin de obtener la cuantía total T_n de la subvención final; teniendo en cuenta dicha cuantía de la subvención final, se vuelve a cuantificar la contraprestación que realmente debe abonar el prestatario. De la forma descrita: a) existe una gran complejidad en todos los cálculos, que no redundan en claridad alguna; b) los términos amortizativos que abona el prestatario no son la diferencia entre los que debía abonar sin subvención y el importe de ésta. Por lo tanto, consideramos que la hipótesis descrita no debe ser utilizada.

Hipótesis a.2.). La subvención final es percibida por el prestatario, por lo que éste, periódicamente, debe abonar los términos amortizativos que, al tipo medio i del préstamo, hagan posible su amortización, los cuales verifican:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i)^{-s} \quad [151]$$

En las condiciones expuestas, el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo: $i_a = i$, y el tipo efectivo pasivo se deducirá de la ecuación de equilibrio entre la prestación real percibida por el prestatario y la contraprestación real entregada:

$$C + T_n (1 + i_{p2})^{-n} = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i_{p2})^{-s} \quad [152]$$

De acuerdo con lo expuesto, la cuantía T_n es creciente con t , y como las cuantías de los términos amortizativos a_s son invariantes con t , el tipo medio i_{p2} ha de ser decreciente con t .

Lo expuesto lo podemos sintetizar en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a crec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} decreciente con t

Si analizamos el resumen expuesto en el cuadro precedente, con el correspondiente a la hipótesis de subvención inicial, se observa: a) si la subvención la percibe el prestamista, en la hipótesis de subvención inicial, el tipo medio activo es decreciente con t; en cambio, en la hipótesis de subvención final, es creciente; b) si la subvención la percibe el prestatario, en la hipótesis de subvención inicial, el tipo medio pasivo es creciente con t, mientras que en la hipótesis de subvención final, es decreciente. Lo expuesto queda resumido en el siguiente cuadro:

SUBVENCION INICIAL	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a decrec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} creciente con t

SUBVENCION FINAL

PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a crec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} decreciente con t

Una vez analizadas las ecuaciones generales correspondientes a las hipótesis descritas, es posible particularizar el estudio para algunos métodos particulares de amortización, de importante utilización práctica. Limitaremos el análisis a las modalidades de: sistema francés, sistema americano y sistema de cuota de amortización constante, considerando, igualmente, que tanto el tipo de interés del préstamo como el tipo de subvención concedido, son constantes.

a) **Sistema francés.** Teniendo en cuenta la expresión deducida para este sistema en la hipótesis de subvención inicial, así como que la subvención final, según hemos demostrado, analíticamente se obtiene capitalizando la inicial, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_0(1 + t)^n \\ T_0 &= \frac{dC}{a_n \mid i} \sum_{s=1}^n a_{n-s+1} \mid i (1 + t)^{-s} \end{aligned} \right\} \quad [153]$$

De donde al realizar operaciones se obtiene la siguiente expresión analítica para cuantificar la subvención final:

$$T_n = \frac{dC}{a_n \mid i} \sum_{s=1}^n a_{n-s+1} \mid i (1 + t)^{n-s} \quad [154]$$

b) **Sistema americano.** En este método, siendo constante la cuantía de la subvención periódica simple, la expresión que permite valorar la subvención final viene dada por el valor final de una renta temporal inmediata pospagable:

$$T_n = dC s_{\overline{n}|t} \quad [155]$$

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** Teniendo en cuenta la expresión de la subvención inicial y su relación con la final, se obtiene:

$$T_n = \frac{dC[n(1+t)^n - s_{\overline{n}|t}]}{nt} \quad [156]$$

Hipótesis b). En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio del préstamo, o sea, $t = i$, por lo que la cuantía de la subvención final viene dada por la siguiente expresión:

$$T_n = \sum_{s=1}^n S_s(1+i)^{n-s} = T_0(1+i)^n \quad [157]$$

Siguiendo idéntica metodología a la expuesta en la hipótesis general a) anterior, y realizando en las ecuaciones deducidas en la misma, la sustitución $t = i$, se obtienen las correspondientes expresiones para la hipótesis enunciada.

Hipótesis c). En este caso, el tipo medio t de actualización coincide con el tipo medio subvencionado, o sea, $t = r$, por lo que la cuantía de la subvención final viene dada por la siguiente expresión:

$$T_n = \sum_{s=1}^n S_s(1 + r)^{n-s} = T_0(1 + r)^n \quad [158]$$

Siguiendo idéntica metodología a la expuesta en la hipótesis general a) anterior, y realizando en las ecuaciones deducidas en la misma, la sustitución $t = r$, se obtienen las correspondientes expresiones para la hipótesis enunciada.

4.5.2.- Operaciones con subvención final independiente de las subvenciones periódicas simples

En la hipótesis de subvención final, no existen, tal y como hemos señalado, las subvenciones periódicas simples, por lo que, en contraposición al análisis realizado en el apartado precedente, es necesario en este realizar el estudio de la metodología a aplicar para valorar la cuantía total de la subvención en el final de la operación, la cual consideramos que es independiente de las subvenciones periódicas simples teóricas⁶⁶.

De acuerdo con la hipótesis enunciada, el problema que se presenta es el de cuantificar la subvención final, para, en función de la misma, valorar las cuantías de los términos amortizativos a''_s que realmente debe abonar el prestatario, los cuales han de ser inferiores a los a_s que correspondería abonar si no existiese la característica de subvención, debiendo verificar éstos, tal y como hemos señalado, la ecuación de equivalencia financiera siguiente:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^n (1 + i_h)^{-1} \quad [159]$$

De acuerdo con lo expuesto, los términos amortizativos que realmente debe abonar el prestatario, han de obtenerse, pues, en función de la cuantía T_n de la subvención en el final. Ahora bien, al no existir subvenciones periódicas simples, es preciso introducir hipótesis que permitan valorar T_n . Las hipótesis

⁶⁶ Damos el calificativo de "teóricas" a aquellas subvenciones periódicas simples que corresponderían en la hipótesis de que la modalidad respectiva fuese de tales características.

lógicas que deben introducirse han de hacer referencia al tipo efectivo de la operación.

Si no existe la característica de subvención, el rédito medio activo i_a coincide con el tipo medio del préstamo. Además, como es evidente, la introducción de la característica de subvención no tiene por finalidad alterar dicho tipo efectivo, sino, por el contrario, disminuir el tipo efectivo pasivo o del deudor, situándolo en el tipo medio subvencionado. En consecuencia, las hipótesis a introducir indican que el tipo efectivo activo ha de coincidir con el tipo medio del préstamo, y el tipo medio efectivo pasivo ha de tomar idéntico valor que el tipo medio subvencionado:

$$i_a = i$$

$$i_p = r$$

Teniendo en cuenta lo señalado, hemos de distinguir entre las hipótesis de percepción de la subvención por parte del prestamista o bien por parte del prestatario.

Hipótesis a). La subvención es percibida por el prestamista, por lo que, si tal y como hemos señalado ha de verificarse que $i_a = i$, podemos establecer la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real entregada por el prestamista y la contraprestación real recibida por dicho sujeto:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s'' (1 + i)^{-s} + T_n (1 + i)^{-n} \quad [160]$$

En cuanto al sujeto prestatario, y teniendo en cuenta que ha de cumplirse la igualdad entre el rédito medio efectivo pasivo y el tipo medio de interés subvencionado, tenemos la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida por dicho sujeto y la contraprestación efectivamente entregada:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s'' (1 + i_{pl})^{-s} = \sum_{s=1}^n a_s'' (1 + r)^{-s} \quad [161]$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones precedentes, se obtiene la expresión que permite valorar la cuantía de la subvención final a percibir por el prestamista:

$$T_n = (1 + i)^n \left[\sum_{s=1}^n a_s'' (1 + r)^{-s} - \sum_{s=1}^n a_s'' (1 + i)^{-s} \right] \quad [162]$$

De acuerdo con la expresión precedente, y teniendo en cuenta la ecuación que permite valorar la subvención inicial T_0 en la hipótesis homóloga a esta, o sea, subvención independiente de las subvenciones periódicas simples:

$$T_0 = \sum_{s=1}^n a_s' (1 + r)^{-s} - \sum_{s=1}^n a_s' (1 + i)^{-s} \quad [163]$$

se tiene que al ser, en general $a_s'' \neq a_s'$, queda:

$$T_n \neq T_0(1 + i)^n \quad [165]$$

Hipótesis b). La subvención es percibida en el final por el prestatario⁶⁷, debiendo abonar el mismo, periódicamente, los términos amortizativos que, al tipo medio i del préstamo, hagan posible su amortización, los cuales han de verificar la ecuación:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s(1 + i)^{-s} \quad [166]$$

Por otra parte, si tal y como hemos señalado, se verifica la igualdad entre el tipo efectivo pasivo y el tipo medio subvencionado, la ecuación de equivalencia entre la prestación real para el prestatario y la contraprestación real que satisface, es la siguiente:

$$C + T_n(1 + r)^{-n} = \sum_{s=1}^n a_s(1 + r)^{-s} \quad [167]$$

⁶⁷ De acuerdo con esta hipótesis, el prestatario percibe en el origen de la operación la cuantía C del préstamo, y en el final de la misma, la cuantía T_n de la subvención.

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones precedentes, se obtiene, después de realizar las operaciones correspondientes, la siguiente expresión:

$$T_n = (1 + r)^n \left[\sum_{s=1}^n a_s (1 + r)^{-s} - \sum_{s=1}^n a_s (1 + i)^{-s} \right] \quad [168]$$

Ahora bien, en la ecuación precedente, la expresión del corchete es la correspondiente a la cuantía de la subvención inicial en la hipótesis de que la misma fuese independiente de las subvenciones periódicas simples. Por ello se obtiene:

$$T_n = T_0 (1 + r)^n \quad [169]$$

La ecuación anterior indica que la subvención final se obtiene como el montante, al tipo medio subvencionado, de la correspondiente subvención inicial.

Analizando conjuntamente las dos hipótesis de percepción de la subvención, se tiene que en cuanto al tipo medio efectivo de la operación, resulta neutral qué sujeto percibe la subvención, pues en ambas hipótesis es $i_a = i$, e $i_p = r$. En cuanto a su valoración financiera, sí existe diferencia entre ambas hipótesis, pues los términos amortizativos a abonar por el prestatario no son los mismos, pues diferentes son las ecuaciones de equivalencia que han de verificar, ya que, tal y como hemos demostrado, si la subvención la percibe el prestamista, se ha de cumplir:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s'' (1 + r)^{-s} \quad [170]$$

En cambio, si la subvención la percibe el prestatario, tal ecuación de equivalencia es:

$$C = \sum_{s=1}^n a_s (1 + i)^{-s} \quad [171]$$

Se observa que la diferencia entre ambas ecuaciones estriba en el tipo de interés, que es el tipo medio subvencionado en el primer caso, y el tipo medio del préstamo en el segundo, por lo que, en general, será: $a_s \neq a_s''$.

Una vez analizadas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, cabe particularizar el estudio para algunos métodos de amortización, de importante utilización en la realidad. Nos centraremos en las modalidades de: sistema francés, sistema de cuota de amortización constante y sistema americano. Para la valoración de la subvención en los métodos citados, consideraremos la hipótesis de que el tipo de interés del préstamo es constante, así como el tipo de subvención concedido. Analizaremos también dentro de cada método particular las hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista y por el prestatario.

a) **Sistema francés.** Si la subvención final es percibida por el prestamista, al verificarse que el tipo efectivo activo coincide con el tipo del préstamo,

podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación entregada y la contraprestación percibida, integrada ésta por los términos amortizativos constantes desembolsados por el prestatario, y la subvención final, desembolsada por el ente correspondiente:

$$C = a'' a_{n|i} + T_n(1 + i)^{-n} \quad [173]$$

Teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo medio subvencionado, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera entre la prestación percibida por el prestatario y la contraprestación entregada:

$$C = a'' a_{n|r} \quad [174]$$

Al realizar las oportunas operaciones algebraicas se llega a:

$$T_n = C(1 + i)^n \left[1 - \frac{a_{n|i}}{a_{n|r}} \right] \quad [175]$$

Comparando la expresión anterior de la subvención final a percibir por el prestamista, con la correspondiente a la de esta modalidad de método de amortización, y en la hipótesis de subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples:

$$T_0 = C \left(1 - \frac{a_n \overline{|\ i}}{a_n \overline{|\ r}} \right) \quad [176]$$

se deduce:

$$T_n = T_0(1 + i)^n \quad [177]$$

Por lo tanto, la cuantía de la subvención final es el valor capitalizado, al tipo i del préstamo, de la subvención inicial.

En consecuencia, en el sistema francés, las modalidades de subvenciones inicial y final independientes de las subvenciones periódicas simples, son financieramente equivalentes para el sujeto prestamista que las percibe, pues en ambas hipótesis, el prestatario abona y el prestamista recibe, idénticos términos amortizativos, y las cuantías de las subvenciones son capitales equivalentes en base al sistema de capitalización compuesta al tipo i del préstamo:

$$(T_0, 0) \sim (T_n, n) \quad [178]$$

En este mismo sistema, si la subvención final es percibida por el prestatario, teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo subvencionado, se puede establecer la siguiente ecuación, representativa de la

equivalencia financiera entre la prestación percibida por dicho sujeto y la contraprestación entregada:

$$C + T_n(1 + r)^{-n} = aa_{n|r} \quad [179]$$

Por otra parte, siendo el tipo efectivo activo igual al tipo del préstamo, los términos amortizativos verifican:

$$C = aa_{n|i} \quad [180]$$

De donde se infiere:

$$T_n = C(1 + r)^n \left[\frac{a_{n|r}}{a_{n|i}} - 1 \right] \quad [181]$$

Comparando la expresión anterior de la subvención final a percibir por el prestatario con la correspondiente a la de esta modalidad de método de amortización, y en la hipótesis de subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples:

$$T_0 = C \left(\frac{a_n \cdot r}{a_n \cdot i} - 1 \right) \quad [182]$$

se deduce:

$$T_n = T_0(1 + r)^n \quad [183]$$

Por lo tanto, la cuantía de la subvención final es el valor capitalizado de la subvención inicial, y al tipo r de interés subvencionado. Esta expresión coincide, como era de esperar, con la deducida en el análisis general.

En consecuencia, en el sistema francés, las modalidades de subvenciones inicial y final independientes de las subvenciones periódicas simples, son financieramente equivalentes para el sujeto prestatario que las percibe, pues en ambas hipótesis, el prestatario abona y el prestamista recibe, idénticos términos amortizativos, y las cuantías de las subvenciones son capitales equivalentes en base al sistema de capitalización compuesta al tipo r de interés subvencionado:

$$(T_0, 0) \sim (T_n, n) \quad [184]$$

b) **Sistema americano.** De acuerdo con las hipótesis inherentes a este método de amortización, el prestamista ha de percibir periódicamente los intereses (Ci) sobre la cuantía concedida en préstamo, y al final de la operación, la cuantía

C del mismo. Pues bien, si la subvención final la percibe el prestamista, es evidente que, de acuerdo con las hipótesis generales enunciadas para la modalidad de subvención objeto de análisis, -tipo efectivo activo coincidente con el tipo del préstamo, y tipo efectivo pasivo igual al tipo subvencionado-, y a fin de no alterar el tipo medio activo, la cuantía de la subvención ha de ser tal que sumada a la cuantía L que desembolse el prestatario, coincida con el principal del préstamo: $T_n + L = C$. Por otra parte, para el sujeto prestatario, se verificará la siguiente expresión:

$$C = C i a_{\overline{n}|r} + L(1 + r)^{-n} \quad [185]$$

Y en consecuencia, se deduce la siguiente expresión de la subvención final:

$$[186] \quad T_n = C[1 - (1 + r)^n(1 - i a_{\overline{n}|r})]$$

Comparando la expresión anterior de la subvención final a percibir por el prestamista con la correspondiente a la de esta modalidad de método de amortización, y en la hipótesis de subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples, se deduce que las modalidades de subvención inicial y final no son financieramente equivalentes, pues ni los términos amortizativos son los mismos ni las cuantías de las subvenciones inicial y final son equivalentes.

Si la subvención es percibida por el prestatario, se tiene la siguiente ecuación de equivalencia entre los conjuntos de capitales que percibe y desembolsa:

$$C + T_n(1 + r)^{-n} = C ia_{\overline{n}|r} + C(1 + r)^{-n} \quad [187]$$

De donde se llega a:

$$T_n = C(1 + r)^n [ia_{\overline{n}|r} + (1 + r)^{-n} - 1] \quad [188]$$

Comparando la expresión anterior con la correspondiente de la subvención inicial se obtiene, tal y como habíamos demostrado en el análisis general:

$$T_n = T_0(1 + r)^n$$

En consecuencia, en el sistema americano, las modalidades de subvenciones inicial y final independientes de las subvenciones periódicas simples, son financieramente equivalentes para el sujeto prestatario que las percibe, pues en ambas hipótesis, las cuantías de las subvenciones son capitales equivalentes en base al sistema de capitalización compuesta al tipo r de interés subvencionado:

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_0(1 + r)^n \\ (T_0, 0) &\sim (T_n, n) \end{aligned} \right\} \quad [190]$$

c) **Sistema de cuota de amortización constante.** En este método de amortización, cada término amortizativo se compone de la enésima parte del capital, que es la cuota de amortización, y de los correspondientes intereses. Pues bien, si el prestamista percibe tales términos amortizativos, es evidente que al finalizar la operación no debe recibir subvención alguna, pues ello originaría que $i_a > i$. Por tanto, es preciso modificar algunas de las hipótesis de este sistema. Una de las posibles modificaciones es que la suma aritmética de las n cuotas de amortización constantes, junto con la subvención final, sea el capital a amortizar:

$$nA + T_n = C \quad [191]$$

Ahora bien, de la forma descrita se desvirtúa el sistema, pues el capital objeto del préstamo no tiene una amortización lineal. Por ello, esta modificación da lugar, en esencia, a otro método de amortización que difiere del enunciado. Por ello, entendemos que en la hipótesis de subvención percibida por el prestamista, no es posible utilizar el método de amortización indicado. No obstante, si se introduce la modificación señalada, así como cualquier otra, la obtención de la subvención final no ofrece dificultad alguna, debiendo seguirse la metodología general ya señalada.

Si la subvención la percibe el prestatario, el prestamista ha de percibir periódicamente los términos amortizativos tales que el tipo efectivo activo coincida con el tipo medio del préstamo. Dichos términos se componen de un sumando constante, -la cuota de amortización-, de valor C/n , y un sumando variable, -la cuota de interés-, cuantificada la misma al tipo medio del préstamo y sobre el saldo vivo al principio del respectivo período.

De acuerdo con lo señalado, el término amortizativo a abonar por el prestatario viene dado por la expresión genérica:

$$a_s = \frac{C}{n} + iC_{s-1} \quad [192]$$

El saldo vivo al principio del período s , C_{s-1} , se obtiene como suma aritmética de las $(n - s + 1)$ cuotas de amortización pendientes de vencimiento, por lo que, después de las oportunas operaciones se llega a:

$$a_s = \frac{C [1 + i(n - s + 1)]}{n} \quad [193]$$

Si comparamos dos términos amortizativos consecutivos, obtenemos que varían de acuerdo con una progresión aritmética de razón $\frac{-Ci}{n}$, consecuencia inmediata de la hipótesis básica del sistema de cuota de amortización constante.

Teniendo en cuenta que el tipo efectivo pasivo coincide con el tipo medio subvencionado, la ecuación de equivalencia financiera entre prestación total percibida y contraprestación total entregada es:

$$C + T_n(1 + r)^{-n} = \sum_{s=1}^n a_s(1 + r)^{-s} \quad [195]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que los términos amortizativos forman una renta variable en progresión aritmética, así como que el valor del primero de ellos es $(C/n + iC)$, se obtiene la siguiente expresión que permite valorar la cuantía de la subvención final a percibir por el prestatario:

$$T_n = \left[\left(\frac{C}{n} + Ci + dn + \frac{d}{r} \right) a_{\overline{n}|r} - \frac{dn}{r} - C \right] (1 + r)^n \quad [196]$$

Comparando la expresión anterior con la correspondiente de la subvención inicial se obtiene, tal y como habíamos demostrado en el análisis general:

$$T_n = T_0(1 + r)^n \quad [197]$$

En consecuencia, en el sistema americano, las modalidades de subvenciones inicial y final independientes de las subvenciones periódicas simples,

son financieramente equivalentes para el sujeto prestatario que las percibe, pues en ambas hipótesis, las cuantías de las subvenciones son capitales equivalentes en base al sistema de capitalización compuesta al tipo r de interés subvencionado:

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_0(1 + r)^n \\ (T_0, 0) &\sim (T_n, n) \end{aligned} \right\} \quad [198]$$

CAPITULO V

VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVENCIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COMPUESTAS CON INTERESES PREPAGABLES

CAPITULO V: VALORACION FINANCIERA DE LAS SUBVEN- CIONES EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACION COM- PUESTAS CON INTERESES PREPAGABLES

5.1.- INTRODUCCION

5.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA SIMPLE

5.3.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA DIFERIDA

5.4.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

5.5.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

5.1.- INTRODUCCION

Como es sabido, en los préstamos con intereses prepagables, las cuotas de interés se abonan por anticipado, cuantificándose las mismas, en consecuencia, sobre el saldo vivo en el momento en que vencen tales cuotas⁶⁸. Por lo tanto, la subvención correspondiente a cada período, asociada, pues, al respectivo término amortizativo comprensivo de cuota de amortización y de cuota de interés anticipado, debe ser cuantificada de la misma forma que la respectiva cuota de interés y en función del tipo de subvención concedido.

Surgen en esta clase de préstamos los mismos conceptos ya analizados para los préstamos con intereses pospagables: subvención periódica simple; subvención periódica con acumulación aritmética; subvención periódica con acumulación financiera; subvención inicial y subvención final. Los conceptos indicados se definen en esta modalidad de operaciones de forma idéntica a la correspondiente con intereses pospagables, diferenciándose únicamente, en el hecho de que en las operaciones con intereses prepagables, los mismos se abonan al principio de cada período, y en consecuencia, la subvención periódica simple también debe abonarse al principio del período al cual se refiera.

⁶⁸ Un análisis general de las operaciones de amortización con intereses prepagables, puede verse en:
Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp.390-397 y 403-407.
Rodríguez Rodríguez, A. (1984): Op. cit., pp. 97 y 212.

5.2.- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA SIMPLE

En esta hipótesis, y de acuerdo con lo anteriormente expuesto, llegado el vencimiento de cada término amortizativo, el tercero que lo ha subvencionado, ha de abonar el importe correspondiente de la subvención. Para cuantificar dicho importe es indiferente que el mismo sea abonado directamente al prestamista, o que lo sea al prestatario. En cualquier hipótesis, el citado importe vendrá dado por el interés correspondiente al saldo vivo del préstamo, al principio del período de que se trate, y de acuerdo con el tipo de subvención concedido:

$$S_{s+1} = d_{s+1}^* C_s^* \quad [199]$$

siendo:

S_{s+1} : cuantía de la subvención correspondiente al período (s+1).

d_{s+1}^* : tipo de subvención del período (s+1) concedido por el ente correspondiente.

C_s^* : cuantía del saldo vivo al principio del período (s+1).

En la hipótesis de subvención percibida por el prestamista, el prestatario debe abonarle la diferencia entre el correspondiente término

amortizativo⁶⁹ y la cuantía de la subvención: $b_s = a_s - S_{s+1}$, con lo que la cuantía neta correspondiente a la cuota de interés viene dada por la expresión correspondiente a la cuota de interés antes de la subvención, y ésta:

$$\left. \begin{array}{l} I_{s+1}^* = i_{s+1}^* C_s^* \\ S_{s+1} = d_{s+1}^* C_s^* \end{array} \right\} \Rightarrow I_{s+1}^* = (i_{s+1}^* - d_{s+1}^*) C_s^* = r_{s+1}^* C_s^* \quad [200]$$

De acuerdo con lo señalado, la cuantía neta abonada por el prestatario viene dada por la expresión: $b_s = r_{s+1}^* C_s^* + A_s^*$.

En la hipótesis descrita, la cuantía total percibida por el prestamista, como agregación de la entregada por el prestatario y el ente que subvenciona, coincide con la del término amortizativo sin subvencionar. Por ello, el tipo efectivo activo coincide con el tipo de interés medio del préstamo, definido por la siguiente ecuación:

⁶⁹ Las cuantías de los términos amortizativos, antes de considerar la característica de subvención, han de verificar, como es conocido, la ecuación de equilibrio, representativa de la equivalencia entre la suma financiera de la prestación y la de la contraprestación. Es precisamente en base a dicha ecuación de equivalencia, expresiva del postulado de equivalencia financiera, como es posible determinar tales cuantías y, en base a distintas hipótesis acerca de las mismas así como al tipo de interés de la operación, surgen diversos sistemas de amortización. Véase en este sentido: Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., pp. 399-422.

$$C^*(1-i_1^*) = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^s (1-i_h^*) = \sum_{s=1}^n a_s (1-i^*)^s = \sum_{s=1}^n a_s (1-i_a^*)^s \quad [202]$$

siendo:

C^* : cuantía nominal del préstamo.

i^* : tipo medio anticipado de interés del préstamo.

En cuanto al prestatario, de acuerdo con lo señalado anteriormente, la contraprestación que abona viene definida por el conjunto de capitales siguiente:

$$\{ (b_s, s) \} = \{ (r_{s+1}^* C_s^* + A_s^*, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

En concordancia con lo señalado, el tipo efectivo del prestatario coincide con el tipo medio de interés subvencionado, definido por la expresión:

$$C^*(1-r_1^*) = \sum_{s=1}^n b_s \prod_{h=1}^s (1-r_h^*) = \sum_{s=1}^n b_s (1-r^*)^s = \sum_{s=1}^n b_s (1-i_p^*)^s \quad [203]$$

En la hipótesis de subvención percibida por el prestatario, éste debe abonar al prestamista la cuantía total de los correspondientes términos amortizativos, que da origen al siguiente conjunto de capitales financieros:

$$\{ (a_s, s) \} = \{ (i_{s+1}^* C_s^* + A_s^*, s) / s = 1, 2, \dots, n \}$$

De acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis, también se verifica la igualdad entre el tipo medio del préstamo y el tipo efectivo activo o del prestamista, y entre el tipo medio subvencionado y el tipo efectivo pasivo o del prestatario:

$$i_a^* = i^*$$

$$i_p^* = r^*$$

Una vez analizadas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, cabe particularizar el estudio para un método particular de amortización, de importante utilización en la realidad: el método alemán.

Como es sabido, el método alemán viene caracterizado porque tanto los términos amortizativos como el tipo de interés anticipado son constantes, verificando los términos amortizativos la ecuación de equilibrio siguiente⁷⁰:

$$C^*(1 - i^*) = a a_n \bar{i} \quad [205]$$

⁷⁰ Gil Peláez, L. (1987): Op. cit., p. 404.

Si consideramos que el tipo de subvención concedido también es constante, se tiene que la cuantía de la subvención prepagable, correspondiente al período (s+1), viene dada por la ecuación:

$$S_{s+1} = d^* C_s^* \quad [206]$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre las cuantías nominal y neta del saldo⁷¹, así como el valor de éste por el método prospectivo, se llega, después de realizar las oportunas operaciones algebraicas, a que la cuantía de la subvención del período (s+1) viene dada por la expresión:

$$S_{s+1} = d^* C^* \frac{a_{n-s} | i}{a_n | i} \quad [207]$$

siendo i el tipo de interés pospagable equivalente al prepagable i^* , deducido de la expresión: $(1 + i)(1 - i^*) = 1$.

⁷¹ Ibidem: p. 392.

5.3- OPERACIONES CON SUBVENCION PERIODICA DIFERIDA

La hipótesis de diferimiento en cuanto al abono de la subvención periódica prepagable, implica que la misma no es abonada en su vencimiento (principio de cada período), sino que se produce un diferimiento hacia la derecha en el tiempo. Por ello, bien la subvención correspondiente a un vencimiento, o las correspondientes a varios vencimientos, son abonadas con posterioridad a tales vencimientos, dando origen a las modalidades de acumulación aritmética y acumulación financiera.

En consecuencia a lo señalado, supongamos que las subvenciones correspondientes a los períodos (s+1) a (s+h+1), ambos inclusive, se abonan íntegramente en el punto (s+h), principio del período (s+h+1), siendo, pues, el siguiente conjunto de capitales el que es objeto de diferimiento:

$$\{ (S_{q+1}, q) / q = s, s+1, \dots, s+h \}$$

siendo S_{q+1} la cuantía de la subvención prepagable del período (q+1), con vencimiento en el punto q.

5.3.1.- Operaciones con subvención periódica diferida y acumulación aritmética

En las operaciones enunciadas, en el vencimiento $s+h$, único para el grupo de subvenciones diferidas, el ente que subvenciona ha de abonar la suma aritmética de los correspondientes capitales financieros que se han diferido. Por ello, la cuantía a abonar, T_{s+h} verifica:

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_{q+1} = \sum_{q=s}^{s+h} d_{q+1}^* C_q^* \quad [208]$$

En la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista, el diferimiento señalado, así como la acumulación descrita, implican que el tipo efectivo activo de la operación sea inferior al que obtendría sin la característica de subvención, o, aún existiendo ésta, si la misma fuese sin tal diferimiento. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁷²: $i_a^* < i^*$.

Si la subvención la percibe el prestatario, la hipótesis de diferimiento señalada, implica que el tipo efectivo pasivo de la operación sea superior al

⁷² Para el sujeto prestatario, al recibir el prestamista la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁷³: $i_p^* > r^*$.

Una vez deducidas las expresiones generales correspondientes a la hipótesis enunciada, vamos a particularizar el estudio para el método alemán.

En el método alemán de amortización, y teniendo en cuenta tanto la ecuación precedente como la correspondiente deducida en la hipótesis de subvención periódica simple, se obtiene como ecuación que permite calcular la cuantía acumulada en (s+h):

$$T_{s+h} = \frac{d^* C^*}{a_{n|i}} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q|i} \quad [209]$$

⁷³ Para el sujeto prestamista, al recibir el prestatario la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

5.3.2.- Operaciones con subvención periódica diferida y acumulación financiera

En esta hipótesis, en el vencimiento único $s+h$, el ente que subvenciona ha de abonar la suma financiera de los respectivos capitales que se han diferido. Por ello, la cuantía a abonar, T_{s+h} verifica:

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_{q+1} \prod_{p=1}^h (1+i'_{s+p})$$

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} S_{q+1} (1+i)^{s+h-q} = \sum_{q=s}^{s+h} d_{q+1}^* C_q^* (1+i)^{s+h-q} \quad [210]$$

$$T_{s+h} = \sum_{q=s}^{s+h} d_{q+1}^* C_q^* (1-i^*)^{-(s+h-q)}$$

siendo $i'_{s+1}, i'_{s+2}, \dots, i'_{s+h}$, los tipos de interés pospagables pactados entre el ente que subvenciona y el sujeto receptor de la subvención, los cuales tienen un tipo medio pospagable equivalente i' , o bien uno prepagable medio i^* .

En la hipótesis de percepción de la subvención por el prestamista, el diferimiento señalado, así como la acumulación descrita, implican que el tipo efectivo activo de la operación sea distinto al que obtendría sin la característica

de subvención, o, aún existiendo ésta, si la misma fuese sin tal diferimiento⁷⁴. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁷⁵: $i_a^* \neq i^*$. Ahora bien, si el tipo de interés medio prepagable pactado para valorar las subvenciones, supera al tipo de interés medio anticipado del préstamo, el tipo medio efectivo también superará a dicho tipo medio, siendo inferior en el caso opuesto:

$$\text{Si } i_a^* > i^* \Rightarrow i_a^* > i^*$$

$$\text{Si } i_a^* < i^* \Rightarrow i_a^* < i^*$$

Si la subvención la percibe el prestatario, la hipótesis de diferimiento señalada, implica que el tipo efectivo pasivo de la operación sea distinto al correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple. Por ello, y de acuerdo con lo expuesto, en esta hipótesis se verifica que⁷⁶: $i_p^* \neq r^*$. Ahora bien, si el tipo de interés medio prepagable pactado para valorar las subvenciones, supera al tipo de interés medio prepagable subvencionado, el tipo medio efectivo resulta inferior a dicho tipo medio, siendo superior en el caso opuesto:

⁷⁴ Dicho tipo efectivo se obtendrá a través de la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real entregada por el prestamista y la contraprestación real recibida.

⁷⁵ Para el sujeto prestatario, al recibir el prestamista la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

⁷⁶ Para el sujeto prestamista, al recibir el prestatario la subvención, no existe incidencia en su tipo efectivo.

$$\text{Si } i^* > r^* \Rightarrow i_p^* < r^*$$

$$\text{Si } i^* < r^* \Rightarrow i_p^* > r^*$$

Analizaremos a continuación la modalidad particular correspondiente al sistema alemán.

De acuerdo con las ecuaciones precedentes para el cálculo de la subvención a abonar en (s+h), y teniendo en cuenta la expresión deducida para este sistema en la hipótesis de subvención periódica simple, tenemos que la cuantía correspondiente en la hipótesis de subvención periódica con acumulación financiera, se obtiene a través de la expresión:

$$T_{s+h} = \frac{d^* C^*}{a_{n|i}} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q|i} (1+i)^{s+h-q} \quad [214]$$

5.4.- OPERACIONES CON SUBVENCION INICIAL

En las operaciones señaladas, y de acuerdo con lo expuesto, el importe total de la subvención es abonado en el origen de la operación, tratándose, pues, de una subvención diferida total, con acumulación financiera, en la que el diferimiento lo podemos considerar negativo.

De igual forma a como sucede con los préstamos con intereses pospagables, con independencia del sujeto receptor de la subvención, el primer problema a resolver en esta modalidad es el de la cuantificación del importe de la misma. Para ello es posible seguir dos vías de solución: primera, considerar que la subvención inicial está vinculada a las subvenciones periódicas simples, y en consecuencia su importe es función de los importes de las mismas; segunda, considerar que, al no existir subvenciones periódicas, se debe realizar la valoración de la subvención inicial considerando que su cuantía no es función de las cuantías de las subvenciones periódicas simples. Analizaremos separadamente ambas hipótesis de valoración.

5.4.1- Operaciones con subvención inicial función de las subvenciones periódicas simples

Para las operaciones descritas, al ser la subvención en el origen una función de las subvenciones periódicas simples, la subvención global está representada por un solo capital que sustituye al conjunto de capitales financieros representativo de las citadas subvenciones periódicas, siendo su

cuantía la de un capital financiero equivalente al conjunto de capitales financieros asociados a las subvenciones periódicas simples:

$$\{(T_0, 0)\} \sim \{(S_{q+1}, q) / q = (0,1,2,\dots,n-1)\} \quad [215]$$

siendo:

T_0 : cuantía de la subvención global en el origen o subvención inicial.

S_{q+1} : cuantía de la subvención que correspondería asociar al vencimiento q , en la hipótesis de subvención periódica simple, y perteneciente al intervalo $(q+1)$.

En consecuencia a lo expuesto, la cuantía T_0 ha de ser el valor actualizado equivalente de tales subvenciones periódicas. Por ello, y a efectos de valorar dicha subvención inicial, podemos aplicar para tal objetivo la misma metodología señalada en el análisis de los préstamos con intereses pospagables. De tal forma, y supuesto un tipo medio pospagable t , fijado por el ente que subvenciona, el importe de la subvención inicial viene dado por la expresión:

$$T_0 = S_1 + \sum_{s=1}^n S_{s+1} \prod_{h=1}^s (1+t_h)^{-1} = \sum_{s=0}^n S_{s+1} (1+t)^{-s} = \sum_{s=0}^n d_{s+1}^* C_s^* (1+t)^{-s} \quad [216]$$

Si en lugar de expresar la ecuación anterior en función del tipo medio pospagable, lo hiciésemos en función del tipo medio prepagable, relacionado con el pospagable a través de la ecuación: $(1+t)(1-t^*)=1$, se llega a:

$$T_0 = \sum_{s=0}^n d_{s+1}^* C_s^* (1 - t^*)^s \quad [218]$$

Teniendo en cuenta que la metodología a utilizar coincide esencialmente con la correspondiente al análisis realizado en las operaciones con intereses pospagables, omitimos el resto del análisis. No obstante ello, en la hipótesis particular de utilizar el método alemán de amortización, y teniendo en cuenta la correspondiente expresión para la subvención periódica simple, podemos obtener la cuantía total de la subvención inicial. En efecto, considerando la expresión citada, así como la ecuación precedente, después de realizar las oportunas sustituciones, se llega a:

$$T_0 = \frac{d^* C^*}{a_{n|i}} \sum_{s=0}^n a_{n-s|i} (1 - t^*)^s \quad [219]$$

5.4.2.- Operaciones con subvención inicial independiente de las subvenciones periódicas simples

Cuando la totalidad de la subvención es abonada en el origen de la operación, es evidente que no existen las subvenciones periódicas simples, por lo que es procedente valorar la citada subvención inicial sin vinculación a las teóricas subvenciones simples⁷⁷.

De acuerdo con la hipótesis enunciada, el problema que se presenta es el de cuantificar la subvención inicial, para a continuación valorar las cuantías de los términos amortizativos a_s que realmente debe abonar el prestatario, los cuales han de ser inferiores a los a_s que correspondería abonar si no existiese la característica de subvención, debiendo verificar éstos, tal y como hemos señalado, la ecuación de equivalencia financiera siguiente:

$$C^*(1 - i_1^*) = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^n (1 - i_h^*) \quad [220]$$

En base a lo expuesto, los términos amortizativos que realmente debe abonar el prestatario, han de obtenerse, pues, en función de la cuantía T_0 de la subvención en el origen. Ahora bien, al no existir subvenciones periódicas simples, es preciso introducir hipótesis que permitan valorar T_0 . Las hipótesis lógicas que deben introducirse han de hacer referencia al tipo efectivo de la operación.

⁷⁷ Calificamos de "teóricas" a aquellas subvenciones periódicas simples que corresponderían en la hipótesis de que la modalidad respectiva fuese de tales características.

Si no existe la característica de subvención, el rédito medio activo i_a^* coincide con el tipo medio del préstamo. Además, como es evidente, la introducción de la característica de subvención no tiene por finalidad alterar dicho tipo efectivo, sino, por el contrario, disminuir el tipo efectivo pasivo o del deudor, situándolo en el tipo medio subvencionado. En consecuencia, las hipótesis a introducir señalan que el tipo efectivo activo ha de coincidir con el tipo medio prepagable del préstamo, y el tipo medio efectivo pasivo ha de tomar idéntico valor que el tipo medio subvencionado:

$$i_a^* = i^*$$

$$i_p^* = r^*$$

Teniendo en cuenta lo señalado, se observa como las hipótesis introducidas son las mismas que en la valoración de la modalidad de subvención descrita, pero con operaciones de interés pospagable. En consecuencia, es posible utilizar la misma metodología ya analizada, obteniendo las correspondientes ecuaciones expresadas ahora en función de los tipos de interés anticipados respectivos. Por ello, y como la utilización de la misma metodología de análisis no ofrece dificultad digna de mención, omitimos su estudio.

5.5.- OPERACIONES CON SUBVENCION FINAL

En las operaciones indicadas, el importe total de la subvención es abonado íntegramente en el final de la operación, tratándose, pues, de una subvención diferida total con acumulación financiera.

Tal y como sucede en la hipótesis de subvención inicial, en la modalidad de subvención ahora objeto de análisis, y con independencia del sujeto receptor de la misma, el primer problema a resolver es el de la cuantificación del importe de la misma. Para ello es posible seguir dos vías de solución: primera, considerar que la subvención final está vinculada a las subvenciones periódicas simples, y en consecuencia su importe es función de los importes de las mismas; segunda, considerar que, al no existir subvenciones periódicas, se debe realizar la valoración de la subvención final considerando que su cuantía no es función de las cuantías de las subvenciones periódicas simples. Analizaremos separadamente ambas hipótesis de valoración.

5.5.1.- Operaciones con subvención final función de las subvenciones periódicas simples

En la hipótesis enunciada, al ser la subvención en el final una función de las subvenciones periódicas simples, la subvención global está representada por un solo capital que sustituye al conjunto de capitales financieros representativo de las citadas subvenciones periódicas, siendo su cuantía la de un

capital financiero equivalente al conjunto de capitales financieros asociados a las subvenciones periódicas simples:

$$\{(T_n, n)\} \sim \{(S_{q+1}, q) \mid q = (0,1,2,\dots,n-1)\} \quad [221]$$

siendo:

T_n : cuantía de la subvención global en el final de la operación.

S_{q+1} : cuantía de la subvención que correspondería asociar al vencimiento q , en la hipótesis de subvención periódica simple.

En consecuencia a lo expuesto, la cuantía T_n ha de ser el valor capitalizado equivalente de tales subvenciones periódicas. Por ello, y a efectos de valorar dicha subvención final, podemos aplicar para tal objetivo la misma metodología señalada en el análisis de los préstamos con intereses pospagables. De tal forma, y supuesto un tipo medio pospagable t , o su equivalente prepagable t^* , fijado por el ente que subvenciona, el importe de la subvención final viene dado por la expresión:

$$T_n = \sum_{s=0}^n S_{s+1} (1 + t)^{n-s} = \sum_{s=0}^n S_{s+1} (1 - t^*)^{-(n-s)} \quad [222]$$

De la comparación de la ecuación precedente con la correspondiente por la que se obtiene la subvención en el origen en la hipótesis de subvención

inicial función de las subvenciones periódicas simples, se deduce que la cuantía de la subvención final es el montante de la cuantía de la subvención inicial:

$$T_n = T_0(1 + t)^n = T_0(1 - t^*)^{-n} \quad [223]$$

Teniendo en cuenta que la metodología a utilizar coincide fundamentalmente, tal y como hemos señalado, con la correspondiente al análisis realizado en las operaciones con intereses pospagables, omitimos el resto del análisis.

5.5.2.- Operaciones con subvención final independiente de las subvenciones periódicas simples

En la hipótesis enunciada no existen, como es evidente, las subvenciones periódicas simples, por lo que, procede analizar la metodología a aplicar para valorar la cuantía de la subvención total en el final de la operación, la cual consideraremos que es independiente de las subvenciones periódicas simples.

De acuerdo con la hipótesis enunciada, el problema que se presenta es el de cuantificar la subvención final, para, en función de la misma, valorar las cuantías de los términos amortizativos a_s , que realmente debe abonar el prestatario, los cuales han de ser inferiores a los a_s que correspondería abonar si no existiese la característica de subvención, debiendo verificar éstos, tal y como hemos señalado, la ecuación de equivalencia financiera siguiente:

$$C^*(1 - i_1^*) = \sum_{s=1}^n a_s \prod_{h=1}^n (1 - i_h^*) \quad [224]$$

De acuerdo con lo expuesto, los términos amortizativos que realmente debe abonar el prestatario, han de obtenerse, pues, en función de la cuantía T_n de la subvención en el final. Ahora bien, al no existir subvenciones periódicas simples, es preciso introducir hipótesis que permitan valorar T_n . Las hipótesis lógicas que deben introducirse han de hacer referencia al tipo efectivo de la operación.

Si no existe la característica de subvención, el rédito medio activo i_a^* coincide con el tipo medio del préstamo. Además, como es evidente, la introducción de la característica de subvención no tiene por finalidad alterar dicho tipo efectivo, sino, por el contrario, disminuir el tipo efectivo pasivo o del deudor, situándolo en el tipo medio subvencionado. En consecuencia, las hipótesis a introducir indican que el tipo efectivo activo ha de coincidir con el tipo medio del préstamo, y el tipo medio efectivo pasivo ha de tomar idéntico valor que el tipo medio subvencionado:

$$i_a^* = i^*$$

$$i_p^* = r^*$$

De acuerdo con lo hasta aquí expuesto, las hipótesis consideradas son las mismas que en la valoración de la subvención en la modalidad descrita, pero con intereses pospagables. En consecuencia, es posible utilizar la misma metodología ya analizada para operaciones con intereses pospagables, obteniendo las expresiones analíticas correspondientes ahora en función de los tipos de interés anticipados respectivos. Por lo tanto, y teniendo en cuenta que la utilización de la misma metodología ya estudiada, no ofrece dificultad alguna, se omite su análisis.

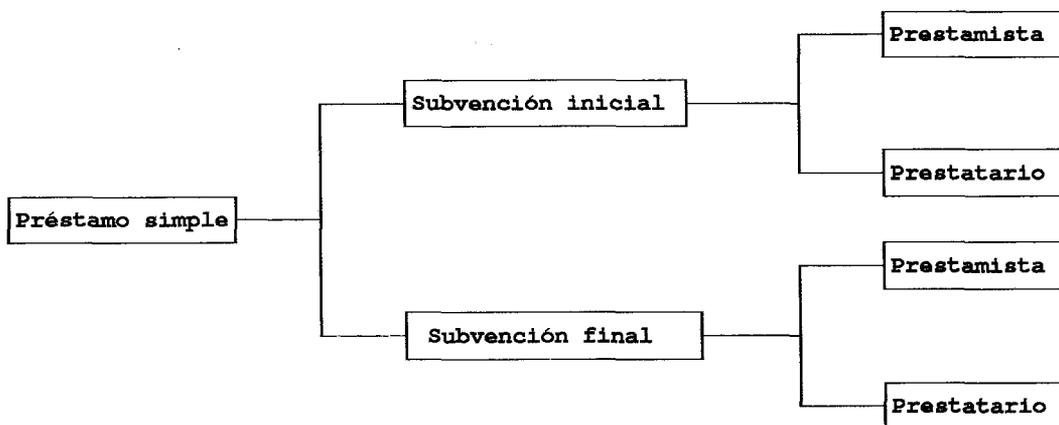
CONCLUSIONES

De acuerdo con los objetivos señalados, así como con la metodología utilizada, podemos formular las siguientes conclusiones:

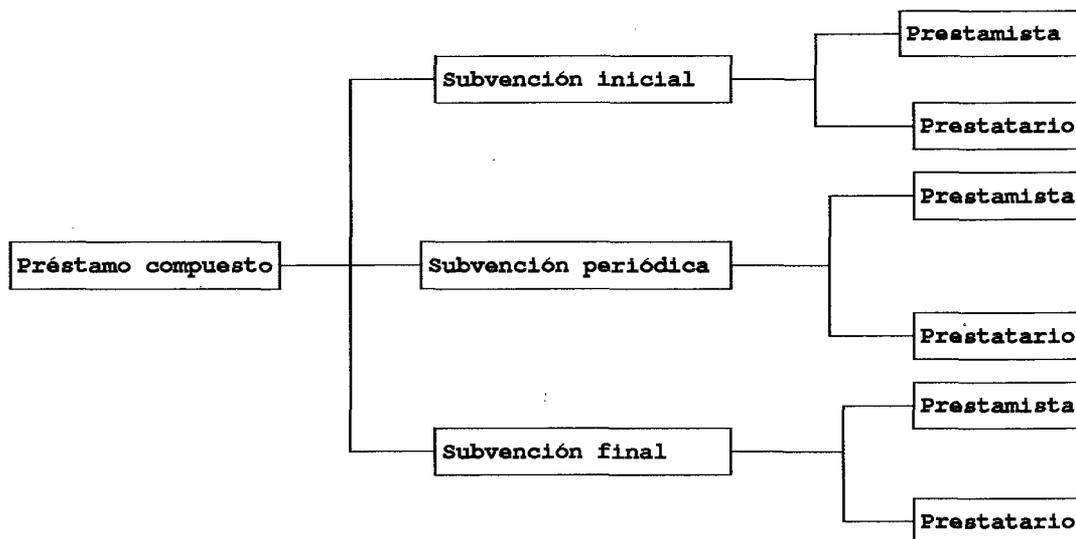
A) Del capítulo I

Primera. Las operaciones de amortización con subsidiación en los tipos de interés, o préstamos subvencionados, se conceptualizan por su característica financiera diferenciadora en relación a otras operaciones de amortización. Dicha característica se concreta en la existencia en las mismas de un tercer sujeto, el otorgante de la subvención, que asume la obligación de satisfacer una parte del precio financiero de tales operaciones.

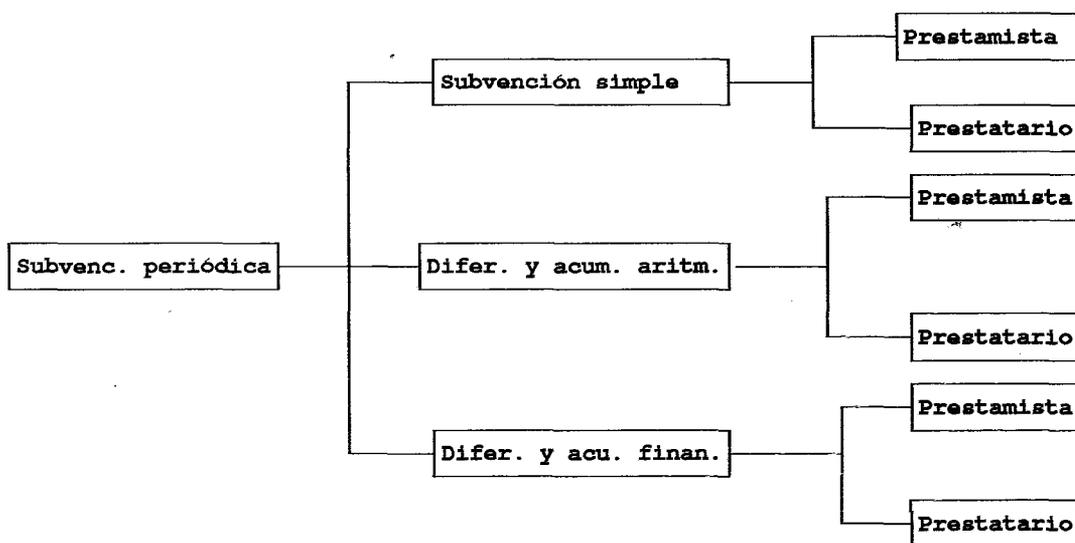
Segunda. Hemos definido, desde el punto de vista financiero, las modalidades de subvención que pueden pactarse en las operaciones de amortización con contraprestación única u operaciones simples, así como los sujetos perceptores, y que se sintetizan en el siguiente esquema:



Tercera. Hemos definido, desde el punto de vista financiero, las modalidades de subvención que pueden pactarse en las operaciones de amortización con contraprestación múltiple u operaciones compuestas, así como los sujetos perceptores, y que se sintetizan en el siguiente esquema:



Cuarta. La modalidad de subvención periódica da origen a dos tipos: subvención periódica simple y subvención periódica diferida, pudiendo ser ésta con acumulación aritmética o con acumulación financiera, según se expone en el siguiente esquema:



B) Del capítulo II

Primera. En las operaciones de amortización con contraprestación única e intereses pospagables, si la subvención tiene vencimiento en el final de la operación, la modalidad de percepción de la misma es neutral, pues es indiferente en cuanto a precio financiero activo o del prestamista y en cuanto a precio financiero pasivo o del prestatario, el sujeto que la percibe, según se resume en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	C	C
Recibe en el final:	$C(1+i)^n$	$C(1+i)^n$
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	C	C
Entrega en el final:	$C(1+r)^n$	$C(1+r)^n$
Tipo efectivo pasivo:	$i_p = r$	$i_p = r$

Segunda. En las operaciones de amortización con contraprestación única e intereses pospagables, si la subvención tiene vencimiento en el origen de la operación, a fin de valorar la subvención inicial es preciso señalar el tipo medio de interés a aplicar a la subvención final. Dicho tipo medio ha de estar comprendido entre el tipo medio r de interés subvencionado y el tipo medio i de interés del préstamo: $r \leq t \leq i$.

Tercera. En las operaciones indicadas en la conclusión anterior, la modalidad de percepción de la subvención inicial (sujeto activo o sujeto pasivo), así como el valor del tipo medio t de actualización, son neutrales para el sujeto prestamista, en cuanto que su incidencia sobre el tipo efectivo activo es nula. En cambio, no lo es para el sujeto pasivo, ya que tomando como variable de decisión el tipo efectivo del prestatario, la subvención inicial debe ser recibida por el prestamista, con el fin de que el precio financiero pasivo de la operación sea el mínimo. En el siguiente cuadro sintetizamos lo expuesto:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatarario
<u>a) Valor genérico de t</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo: i_p es creciente con t	$i_a = i$ $i_{p1} = f(t)$	$i_a = i$ $i_{p2} = f(t) > i_{p1}$
<u>b) Hipótesis: t = i</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo:	$i_a = i$ $i_p = r$	$i_a = i$ $i_p = f(i) > r$
<u>c) Hipótesis: t = r</u> Tipo efectivo activo: Tipo efectivo pasivo:	$i_a = i$ $i_{p1} = f(r)$	$i_a = i$ $i_p = r > i_{p1}$

Cuarta. En las operaciones de amortización simples pactadas con intereses pospagables, los criterios de elección en cuanto al sujeto receptor de la subvención quedan sintetizados en el siguiente cuadro, según el cual, en relación con el sujeto activo, la modalidad de subvención (inicial o final), así como el sujeto que la percibe (prestamista o prestatarario), es neutral. En cambio, para el sujeto pasivo, sólo es neutral la modalidad de subvención final, prefiriendo en la subvención inicial que la misma sea percibida por el prestamista:

	Subvención inicial	Subvención final
Tipo efectivo activo:	$i_a = i$	$i_a = i$
Tipo efectivo pasivo:		
- subvención percibida por el prestamista:	$i_{p1} = f(t)$	$i_p = r$
- subvención percibida por el prestatario:	$i_{p2} = f(t)$	$i_p = r$
$i_{p2} > i_{p1}$		

C) Del capítulo III

Primera. En las operaciones de amortización simples pactadas con intereses prepagables, en cualquier modalidad de percepción de la subvención inicial, bien por el sujeto activo o prestamista, o bien por el sujeto pasivo inicial o prestatario, cada sujeto de la operación entrega y recibe idéntica cuantía, no viéndose alterado, en consecuencia, el tipo medio efectivo. Por ello, la modalidad de percepción, en relación con el sujeto que la recibe, es neutral en cuanto a su incidencia tanto sobre el tipo efectivo activo como sobre el tipo efectivo pasivo, según queda sintetizado en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Recibe en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	$C^*(1-r^*)^n$	$C^*(1-r^*)^n$
Entrega en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo pasivo:	$i_p^* = r^*$	$i_p^* = r^*$

Segunda. En las operaciones de amortización con contraprestación única e intereses prepagables, si la subvención tiene vencimiento en la fecha de finalización de la operación, a fin de valorar la subvención final, es preciso señalar el tipo medio de interés anticipado a aplicar a la subvención inicial para obtener la final. Dicho tipo medio ha de estar comprendido entre el tipo medio anticipado de interés subvencionado y el tipo medio prepagable de interés del préstamo: $r^* \leq t^* \leq i^*$.

Tercera. En las operaciones señaladas en el párrafo anterior, cualquier modalidad de percepción de la subvención final, bien por el sujeto activo, o bien por el sujeto pasivo, es neutral en cuanto a su incidencia sobre el tipo

efectivo activo y sobre el tipo efectivo pasivo de la operación. En cambio, sí tiene incidencia sobre el tipo efectivo pasivo, el valor concreto utilizado como tipo medio de interés prepagable t^* para valorar la subvención final. Lo expuesto se sintetiza en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Entrega en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Recibe en el final:	C^*	C^*
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
PRESTATARIO		
Recibe en el origen:	$C^*(1-i^*)^n$	$C^*(1-i^*)^n$
Entrega en el final:	$C^* - S_n = M$	$C^* - S_n = M$
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1}^* = f(t^*)$	$i_{p2}^* = f(t^*)$
$i_{p1}^* = i_{p2}^* = i_p^*$ i_p^* es decreciente con t^*		

Cuarta. En las operaciones de amortización simples pactadas con intereses prepagables, tanto en la hipótesis de subvención inicial como en la de subvención final, existe neutralidad de la modalidad de percepción de la

subvención (percibida por el sujeto activo o por el pasivo), en cuanto a su incidencia sobre el tipo efectivo de cada sujeto de la operación, siendo, en ambas hipótesis (subvención inicial o subvención final), el mismo para el sujeto activo, coincidente con el tipo medio prepagable del préstamo. En cambio, para el sujeto pasivo, no se produce tal coincidencia entre las hipótesis de subvención inicial y la final, siendo en el primer caso, coincidente con el tipo medio subvencionado, y en el segundo, función del tipo medio t^* . Lo expuesto se sintetiza en el siguiente cuadro:

	Subvención inicial	Subvención final
Tipo efectivo activo:	$i_a^* = i^*$	$i_a^* = i^*$
Tipo efectivo pasivo:	$i_p^* = r^*$	$i_p^* = f(t^*)$

D) Del capítulo IV

Primera. En las operaciones de amortización con contraprestación múltiple, pactadas con intereses pospagables, y en la hipótesis de subvención periódica simple, es neutral la modalidad de percepción de la subvención, en cuanto al sujeto, ya que el tipo efectivo activo coincide con el tipo medio del préstamo, y el tipo efectivo pasivo toma idéntico valor que el tipo medio de interés subvencionado: $i_a = i$; $i_p = r$.

Segunda. Para las operaciones señaladas en el párrafo anterior, las expresiones particulares que permiten valorar la cuantía de la subvención periódica simple, en los sistemas clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés:

$$S_s = dC_{s-1} = \frac{dCa_{\overline{n-s+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \quad [227]$$

b) Sistema americano:

$$S_s = dC$$

c) Sistema de cuota de amortización constante:

$$S_s = \frac{dC(n - s + 1)}{n} \quad [228]$$

Tercera. Para las operaciones de amortización analizadas en este capítulo, en la modalidad de subvención periódica diferida con acumulación aritmética, la citada acumulación implica que si la subvención es percibida por el prestamista, su tipo efectivo resulta inferior al correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple, no teniendo incidencia dicha modalidad sobre el tipo efectivo pasivo. En cambio, si la subvención es percibida por el prestatario, su tipo efectivo es superior al correspondiente en la hipótesis de subvención periódica simple.

Cuarta. Para las operaciones señaladas en el párrafo anterior, las expresiones particulares que permiten valorar la cuantía de la subvención periódica diferida con acumulación aritmética en los sistemas clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés:

$$T_{s+h} = \frac{Cd}{a_n \lceil i} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q+1 \lceil i} \quad [229]$$

b) Sistema americano:

$$T_{s+h} = (h + 1)dC \quad [230]$$

c) Sistema de cuota de amortización constante:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{2n} [h(4n - 2s + 3 - h) - 2s] \quad [231]$$

Quinta. Para las operaciones de amortización analizadas en este capítulo, en la modalidad de subvención periódica diferida con acumulación financiera, es preciso pactar, entre el ente que subvenciona y el sujeto receptor de las subvenciones, el tipo medio i' a aplicar para valorar la cuantía total de la subvención. Si la subvención la percibe el prestamista, y el tipo de interés medio pactado para valorar las subvenciones supera al tipo de interés medio del préstamo, el tipo medio efectivo activo también supera a dicho tipo, siendo inferior en caso contrario:

$$Si \ i' > i \Rightarrow i_a > i$$

$$Si \ i' < i \Rightarrow i_a < i$$

Si la subvención la percibe el prestatario, y el tipo de interés medio pactado para valorar las subvenciones supera al tipo medio de interés subvencionado, el tipo medio efectivo pasivo de la operación resulta inferior a dicho tipo medio subvencionado, siendo superior en el caso opuesto:

$$\text{Si } i' > r \Rightarrow i_p < r$$

$$\text{Si } i' < r \Rightarrow i_p > r$$

Sexta. Para las operaciones señaladas en el párrafo anterior, las expresiones particulares que permiten valorar la cuantía de la subvención periódica diferida con acumulación financiera en los sistemas clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{a_{n|i}} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q+1|i} (1+i)^{s+h-q} \quad [234]$$

b) Sistema americano:

$$T_{s+h} = dC s_{h+1|i} \quad [235]$$

c) Sistema de cuota de amortización constante:

$$T_{s+h} = \frac{dC}{n} \left[(n-s-h - \frac{1}{i'}) s_{\overline{h+1}|i'} + \frac{(h+1)(1+i')^{h+1}}{i'} \right] \quad [236]$$

Séptima. En las operaciones compuestas con intereses pospagables y subvención inicial función de las subvenciones periódicas simples, la modalidad de percepción de la subvención inicial (sujeto prestamista o sujeto prestatario) no es neutral en cuanto que la misma sí tiene incidencia sobre el precio financiero medio de la operación. Así, si la subvención es percibida por el prestamista, el tipo medio activo es decreciente con respecto al tipo medio t de actualización pactado para valorar la subvención; en cambio, el precio financiero medio pasivo, es independiente de dicho tipo t , siendo coincidente con el tipo medio subvencionado. Si la subvención inicial la percibe el prestatario, el tipo medio activo coincide con el tipo medio del préstamo; en cambio, el tipo medio pasivo es creciente con el tipo medio t . Lo expuesto se sintetiza en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a decrec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} creciente con t

Octava. Para las operaciones señaladas en el párrafo anterior, las expresiones particulares que permiten valorar la cuantía de la subvención inicial en función de las subvenciones periódicas simples, en los sistemas clásicos de amortización, y en la hipótesis particular de que el tipo medio de valoración coincida con el tipo medio de interés del préstamo, son las siguientes:

a) Sistema francés:

$$T_o = \frac{dC}{a_{\overline{n}|i}} \sum_{s=1}^n a_{\overline{n-s+1}|i} (1+i)^{-s} \quad [237]$$

b) Sistema americano:

$$T_0 = dCa_n \lrcorner i \quad [238]$$

c) Sistema de cuota de amortización constante:

$$T_0 = \frac{dC(n - a_n \lrcorner i)}{ni} \quad [239]$$

Novena. En las operaciones de amortización compuestas, pactadas con intereses pospagables, a fin de valorar la subvención inicial, en la hipótesis de que la misma sea independiente de las subvenciones periódicas simples, es preciso postular que la característica de subvención sea neutral en su incidencia en el precio financiero medio de la operación, debiendo verificarse la igualdad entre el tipo medio activo y el tipo de interés del préstamo, y entre el tipo medio pasivo y el tipo medio subvencionado, siendo neutral, pues, la modalidad de percepción de la subvención (sujeto activo o sujeto pasivo):

$$i_a = i$$

$$i_p = r$$

Décima. Para las operaciones descritas en el apartado anterior, las expresiones que permiten cuantificar la subvención inicial en los métodos clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés. Si la subvención la percibe el prestamista:

$$T_0 = C \left(1 - \frac{a_n \overline{|\ i}}{a_n \overline{|\ r}} \right) \quad [240]$$

Si la subvención la percibe el prestatario:

$$T_0 = C \left(\frac{a_n \overline{|\ r}}{a_n \overline{|\ i}} - 1 \right) \quad [241]$$

b) Sistema americano. Subvención percibida por el prestamista:

$$T_0 = C \left[1 - \frac{1}{ia_n \overline{|\ r} + (1 + r)^{-n}} \right] \quad [242]$$

Si la subvención la percibiese el prestatario:

$$T_0 = C \left[ia_n \overline{|\ r} + (1 + r)^{-n} - 1 \right] \quad [243]$$

Undécima. En las operaciones compuestas con intereses pospagables y subvención final función de las subvenciones periódicas simples, la

modalidad de percepción de la subvención final (sujeto prestamista o sujeto prestatario) no es neutral, en cuanto que la misma sí tiene incidencia sobre el precio financiero medio de la operación. Así, si la subvención es percibida por el prestamista, el tipo medio activo es creciente con respecto al tipo medio t de interés pactado para valorar la subvención; en cambio, el precio financiero medio pasivo, es independiente de dicho tipo t , siendo coincidente con el tipo medio subvencionado. Si la subvención final la percibe el prestatario, el tipo medio activo coincide con el tipo medio del préstamo; en cambio, el tipo medio pasivo es decreciente con el tipo medio t . Lo expuesto se sintetiza en el siguiente cuadro:

	Subvención percibida por el prestamista	Subvención percibida por el prestatario
PRESTAMISTA		
Tipo efectivo activo:	$i_a = f(t)$ i_a crec. con t	$i_a = i$
PRESTATARIO		
Tipo efectivo pasivo:	$i_{p1} \neq f(t)$ $i_{p1} = r$	$i_{p2} = f(t)$ i_{p2} decreciente con t

Duodécima. Para las operaciones descritas en el apartado anterior, las expresiones particulares para los sistemas clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés:

$$T_n = \frac{dC}{a_{\overline{n}|i}} \sum_{s=1}^n a_{\overline{n-s+1}|i} (1+i)^{n-s} \quad [244]$$

b) Sistema americano:

$$T_n = dC s_{\overline{n}|i} \quad [245]$$

c) Sistema de cuota de amortización constante:

$$T_n = \frac{dC[n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}]}{nt} \quad [246]$$

Decimotercera. En las operaciones de amortización compuestas, pactadas con intereses pospagables, a fin de valorar la subvención final, en la hipótesis de que la misma sea independiente de las subvenciones periódicas simples, es preciso postular que la característica de subvención sea neutral en su incidencia en el precio financiero medio de la operación, debiendo verificarse la igualdad entre el tipo medio activo y el tipo de interés del

préstamo, y entre el tipo medio pasivo y el tipo medio subvencionado, siendo neutral, pues, la modalidad de percepción de la subvención (sujeto activo o sujeto pasivo):

$$i_a = i$$

$$i_p = r$$

Decimocuarta. Para las operaciones descritas en el apartado anterior, las expresiones que permiten cuantificar la subvención final en los métodos clásicos de amortización, son las siguientes:

a) Sistema francés. Si la subvención la percibe el prestamista:

$$T_n = C(1 + i)^n \left[1 - \frac{a_n \cdot i}{a_n \cdot r} \right] \quad [247]$$

Si la subvención final es percibida por el prestatario:

$$T_n = C(1 + r)^n \left[\frac{a_n \cdot r}{a_n \cdot i} - 1 \right] \quad [248]$$

b) Sistema americano. Si la subvención final la percibe el prestamista:

$$T_n = C[1 - (1 + r)^n(1 - ia_{n|r})] \quad [249]$$

Si la subvención final la percibe el prestatario:

$$T_n = C(1 + r)^n[ia_{n|r} + (1 + r)^{-n} - 1] \quad [250]$$

E) Del capítulo V

Primera. En las operaciones con contraprestación múltiple e intereses prepagables, en la hipótesis de subvención periódica simple, es neutral la modalidad de percepción de la subvención (sujeto activo o sujeto pasivo), pues el tipo efectivo de la operación, para cualquiera de los dos sujetos, no resulta alterado, verificándose:

$$i_a^* = i^*$$

$$i_p^* = r^*$$

Segunda. Para las operaciones anteriores, la expresión que posibilita valorar la cuantía de la subvención periódica simple en el sistema alemán de amortización, es la siguiente:

$$S_{s+1} = d^* C^* \frac{a_{n-s} \mid i}{a_n \mid i} \quad [252]$$

Tercera. Para las operaciones analizadas en este capítulo, en la modalidad de subvención periódica diferida con acumulación aritmética, la citada acumulación implica que si la subvención es percibida por el prestamista, su tipo efectivo resulta inferior al tipo medio del préstamo: $i_a^* < i^*$. En

cambio, si la subvención es percibida por el prestatario, su tipo efectivo es superior al tipo medio subvencionado: $i_p^* > r^*$.

Cuarta. Para las operaciones financieras analizadas en este capítulo, en la modalidad de subvención periódica diferida y acumulación financiera, es preciso pactar, entre el sujeto receptor de las subvenciones y el sujeto que subvenciona, el tipo medio de interés a aplicar a fin de cuantificar el importe total de la subvención. Si la subvención la percibe el prestamista, y el tipo de interés medio pactado para valorar las subvenciones supera al tipo de interés medio del préstamo, el tipo medio efectivo activo también supera a dicho tipo, siendo inferior en caso contrario:

$$\text{Si } i^{*'} > i^* \Rightarrow i_a^* > i^*$$

$$\text{Si } i^{*'} < i^* \Rightarrow i_a^* < i^*$$

Si la subvención la percibe el prestatario, y el tipo de interés medio pactado para valorar las subvenciones supera al tipo medio de interés subvencionado, el tipo medio efectivo pasivo de la operación resulta inferior a dicho tipo medio subvencionado, siendo superior en el caso opuesto:

$$\text{Si } i^{*'} > r^* \Rightarrow i_p^* < r^*$$

$$\text{Si } i^{*'} < r^* \Rightarrow i_p^* > r^*$$

Quinta. Para las operaciones señaladas en el párrafo anterior, la expresión particular que permite valorar la cuantía de la subvención periódica diferida con acumulación financiera en el sistema alemán, es la siguiente:

$$T_{s+h} = \frac{d^* C^*}{a_n \mid i} \sum_{q=s}^{s+h} a_{n-q} \mid i (1 + i)^{s+h-q} \quad [257]$$

BIBLIOGRAFIA

BUNGE, M. (1976): La investigación científica; Barcelona, Ed. Ariel.

CARRASCO CARRASCO, M. (1987): Las subvenciones: un sistema indirecto de transferencias de fondos de las Comunidades Autónomas a la Administración Central; Revista de Economía y Empresa, nº 19.

CARRASCO CARRASCO, M. (1988): El coste efectivo de la financiación empresarial; Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla.

ECO, U. (1983): Cómo se hace una tesis; Barcelona, Ed. Gedisa.

FERNANDEZ FARRERES, G. (1983): La subvención: concepto y régimen jurídico; Madrid, Instituto de Estudios Fiscales.

FREIXAS, X. (1991): El mercado hipotecario español: situación actual y proyecto de reforma; Madrid, Ed. Federsa.

GIL PELAEZ, L. (1987): Matemática de las Operaciones Financieras; Madrid, Ed. AC.

GONZALEZ CATALA, V. T. (1984): Introducción a las operaciones financieras, bancarias y bursátiles; Madrid, Ed. Tebar Flores.

QUESADA HERRERA, J. (1983) Redacción y presentación del trabajo intelectual; Madrid, Ed. Paraninfo, S.A.

RODRIGUEZ RODRIGUEZ, A. (1984): Matemática de la Financiación; Barcelona, Ed. Romargraf, S.A.

ROMANO, D. (1973): Elementos y técnica del trabajo científico; Barcelona, Ed. Teide, S.A.

SIERRA BRAVO, R. (1988): Tesis doctorales y trabajos de investigación científica; Madrid, Ed. Paraninfo, S.A.

Los préstamos subvencionados u **operaciones de amortización con subsidiación en los tipos de interés**, resultan de singular importancia dentro del conjunto de las operaciones de amortización. La presente obra se centra en el análisis de tales operaciones, cubriendo los siguientes objetivos: primero, **conceptualización** de las operaciones de amortización con subsidiación en el precio financiero, lo que supone: a) definir y clasificar con precisión tales operaciones, estableciendo sus distintas modalidades y poniendo de manifiesto las características financieras definidoras más sobresalientes; b) definir y clasificar las diversas modalidades de subsidiación, señalando las características principales. Segundo: **valoración financiera** de la cuantía de las distintas modalidades de subvenciones, lo que implica que, de acuerdo con la conceptualización realizada, y a través de un proceso lógico-deductivo, mediante el establecimiento de diversas hipótesis en cuanto a la modalidad de subsidiación y/o a la de cuantificación, es posible valorar financieramente, y de acuerdo con la metodología propia de la Matemática de las Operaciones Financieras, la cuantía del capital financiero asociado a la subvención correspondiente, relativa a las distintas modalidades objeto de análisis.



Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
SERVICIO DE PUBLICACIONES