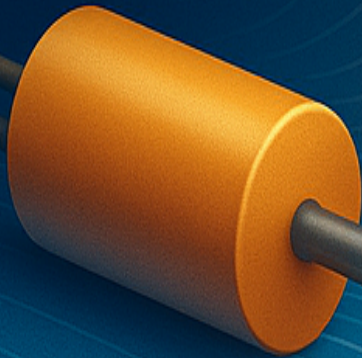


# DETERMINACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE FLUJOS COMPRESIBLES BASADO EN LA MEDIDA DE TEMPERATURA



$$T_s(t) = \int_0^t h(t-\tau) T_\infty(\tau) d\tau$$

$$\dot{q}_w(s) = \frac{k_w A_w}{\sqrt{\alpha_w}} \sqrt{s} \theta(s)$$

$$D_t^{1/2} \theta(t)$$

**Jorge Agustín Valencia Santana**

**Enero 2026**



---

# Determinación del comportamiento de flujos compresibles basado en la medida de temperatura

---



Tesis Doctoral

Programa de Doctorado en Tecnologías de Telecomunicación e  
Ingeniería Computacional

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones  
Numéricas en Ingeniería

Jorge Agustín Valencia Santana

Las Palmas de Gran Canaria  
Enero 2026



## Anexo I

D/D<sup>a</sup> \_\_\_\_\_ COORDINADOR/A  
DEL PROGRAMA DE DOCTORADO \_\_\_\_\_  
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

INFORMA,

De que la Comisión Académica del Programa de Doctorado, en su sesión de fecha \_\_\_\_\_, tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada “ \_\_\_\_\_ ” presentada por el/la doctorando/a D/D<sup>a</sup> \_\_\_\_\_ y dirigida por el/la Doctor/a \_\_\_\_\_.

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Art<sup>o</sup> 11 del Reglamento de Estudios de Doctorado (BOULPGC 04/03/2019) de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de dos mil \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
Coordinador/a del Programa de Doctorado



## Anexo II

**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
ESCUELA DE DOCTORADO**

**Programa de doctorado:** 6021 - Programa de Doctorado en Tecnologías de Telecomunicación e Ingeniería Computacional

**Línea de investigación:** Sistemas inteligentes y aplicaciones numéricas en ingeniería

**Título de la Tesis:** Determinación del comportamiento de flujos compresibles basado en la medida de temperatura

**Tesis Doctoral presentada por:** D. Jorge Agustín Valencia Santana

**Dirigida por:** Prof. Dr. D. Alejandro Ramos Martín

**Codirigida por:** Prof. Dr. D. Vicente Henríquez Concepción

Las Palmas de Gran Canaria, a \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
El/la Director/a

(firma)

\_\_\_\_\_  
El/la Codirector/a

(firma)

\_\_\_\_\_  
El/la Doctorando/a

(firma)



# Determinación del comportamiento de flujos compresibles basado en la medida de temperatura

*Memoria que presenta para optar al título de Doctor en Ingeniería*  
**Jorge Agustín Valencia Santana**

*Dirigida por:*  
**Prof. Dr. Alejandro Ramos Martín**  
**Prof. Dr. Vicente Henríquez Concepción**

**Programa de Doctorado en Tecnologías de Telecomunicación  
e Ingeniería Computacional**

**Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y  
Aplicaciones Numéricas en Ingeniería**

**Las Palmas de Gran Canaria**  
**Enero 2026**



*A mi familia,  
faro de mi vida y  
sostén incondicional.*



*Words are, in my not-so-humble opinion,  
our most inexhaustible source of magic.  
Albus Dumbledore, Harry Potter and the Deathly Hallows*



# Agradecimientos

*La gratitud en silencio no sirve a nadie.*

Gertrude Stein

Me declaro, con toda honestidad, un fanático empedernido del grupo norteamericano de los años 60, The Doors, y, en particular, de su carismático vocalista, Jim Morrison. Desde la primera vez que la escuché, hay una frase suya que se me quedó grabada como una obsesión luminosa: "*There are things known and things unknown, and in between are the doors*". Hoy, al cerrar esta etapa, siento que comprendo con más claridad la profundidad de esas palabras y el modo en que resuenan con mi propio recorrido. Tras esas puertas de las que hablaba Morrison, esas que separan lo conocido de lo desconocido se abría para mí una travesía exigente, incierta, a veces áspera, pero siempre reveladora. Una travesía que, con sus luces y sus sombras, me ha conducido hasta la culminación de esta tesis. Y, en lo más profundo, sé que al cruzar cada una de esas puertas he crecido, no solo como investigador, sino como persona.

De igual manera, tras esas puertas también se encuentran personas a quienes nunca podré transmitir plenamente mi gratitud. Su contribución ha sido crucial, no solo a través de acciones concretas -escribir líneas de código, montar bancos de ensayo, adquirir materiales o corregir artículos-, sino, sobre todo mediante palabras de aliento, gestos oportunos y ánimos constantes en los momentos difíciles, recordándome siempre que con esfuerzo y perseverancia todo es posible.

Este documento representa años de trabajo, y no me avergüenza el tiempo invertido: lo ganado en este trayecto no tiene comparación. Cada persona recorre su propio camino, con sus circunstancias. Antes de iniciar el doctorado, llevaba ya tres años trabajando como ingeniero de servicio en un astillero. Turnos extensos y viajes frecuentes hicieron que la tesis avanzara a intervalos, pero con disciplina supe aprovechar vacaciones, festivos y fines de semana para avanzar, aunque fuera poco a poco.

Entre todos esos intervalos, en 2018 nació mi hija. Esta línea de investigación había comenzado dos años antes de su llegada y, con siete años hoy, ha podido presenciar que finalmente la entrego. Afrontar el reto de ser padre

mientras intentaba culminar un proyecto de semejante envergadura ha sido, sin duda, una de las experiencias más exigentes de mi vida.

Ainhara, solo espero que algún día comprendas el esfuerzo realizado y sepas valorar, como ejemplo, todas esas tardes, paseos y conversaciones que nos quedaron pendientes. Cuando empezaste a hablar y alguien te preguntaba por mí, siempre respondías: "Está con la tesis...", sin conocer el trasfondo de tus palabras. Hoy puedo decirte que esa frase deja de ser cierta. Y quiero que sepas que este logro es, en gran medida, también tuyo. No lo digo por alivio, sino porque fuiste el motor que me impidió rendirme. Ojalá que, cuando algún día mires atrás, valores el sacrificio y el aprendizaje que encierra la perseverancia.

A mi mujer, María, le debo una gratitud inmensa. No encuentro palabras suficientes para expresar lo fundamental que ha sido su apoyo, su paciencia y su comprensión durante este proceso. Espero que algún día comprenda plenamente lo que su acompañamiento ha significado y lo valore como parte de un camino que también es suyo.

Un reconocimiento especial merecen mis padres, por su amor incondicional, su paciencia y su confianza. Han sido el combustible que me ha impulsado en todo momento. Hoy, más que nunca, comprendo el esfuerzo de mi padre, que estudió, trabajó en dos empleos y sostuvo a su familia. Él sigue siendo mi héroe, uno de esos héroes que no aparecen en las películas, pero que ocupan para siempre un lugar en el corazón.

No menos importante es mi agradecimiento a mis directores, el Prof. Dr. Alejandro Ramos Martín y el Prof. Dr. Vicente Henríquez Concepción, por su dirección, guía constante y valiosas enseñanzas a lo largo de este recorrido. Su experiencia y compromiso han sido pilares esenciales en el desarrollo de este trabajo.

Tampoco quiero olvidar a quienes ya no están, pero me acompañaron durante parte del trayecto. Algunos partieron hacia destinos lejanos y a otros los conocí en el transcurso, aunque hoy nuestros caminos ya no coincidan. De todos ellos aprendí, sin etiquetar sus gestos como buenos o malos. Como suele decir Vicente: *"El libro de las cosas que no funcionan es más grueso que el de las que sí funcionan"*. Aplicado a la vida, he comprobado que es una gran verdad. Se aprende más de la dificultad que de la comodidad, y mi camino ha estado marcado por esa realidad.

Si tuviera que buscar una analogía que refleje la voluntad que me ha sostenido para concluir esta tesis sería la de una silla: sus cuatro patas serían mi mujer, mi hija, mis padres y mis tutores. Sin su apoyo constante, esta silla se habría tambaleado muchas veces, quizá sin volver a levantarse. A todos ellos, mi gratitud más profunda.

No quiero ver esto como el final de un ciclo, sino como la transformación de una etapa y la evolución hacia algo mayor. En ese nuevo viaje, espero seguir contando con las cuatro patas de la silla.

Newton dijo: *"Si he visto más lejos, es porque estoy sentado sobre hom-*

*bros de gigantes*", y de esos gigantes ya he hablado en los párrafos anteriores. Junto a ellos, esta experiencia me ha demostrado que, con voluntad y esfuerzo, las personas pueden alcanzar lo que se proponen. La única moneda necesaria para lograr lo que uno desea es el esfuerzo; no existe otro secreto.



# Prefacio

*La simplicidad es la máxima sofisticación.*

Leonardo da Vinci

El desarrollo de esta tesis ha sido mucho más que la aplicación del método científico: ha sido una travesía de aprendizaje continuo, duda, descubrimiento y persistencia. Lo que en un inicio parecía un problema técnico sobre la medición de temperatura en condiciones dinámicas pronto reveló la profundidad de sus implicaciones físicas, metodológicas y experimentales. En ese camino, aprendí que comprender esta magnitud física no sólo exige precisión instrumental, sino también una sensibilidad especial para interpretar sus variaciones en entornos reales, complejos y a menudo impredecibles.

Todas las ciencias recurren a variantes del llamado método científico, entendido como un enfoque sistemático para la investigación. Ya sea un psicólogo que estudia los efectos del ruido en la concentración, o un ingeniero que analiza la combustión del hidrógeno para la propulsión de vehículos, ambos siguen procedimientos similares: plantear un problema, experimentar, observar y registrar datos.

Estos datos pueden ser cualitativos, es decir, observaciones generales del sistema; o cuantitativos, valores obtenidos mediante mediciones. En ingeniería, es habitual expresar los datos mediante símbolos y ecuaciones estandarizadas, lo cual facilita su interpretación y la comunicación entre investigadores. Una vez recogidos, el paso siguiente es la interpretación, donde se formula una hipótesis: una explicación tentativa basada en los datos. Luego, se diseñan nuevos experimentos para contrastarla. En la figura (1) se resumen los pasos fundamentales de este proceso.

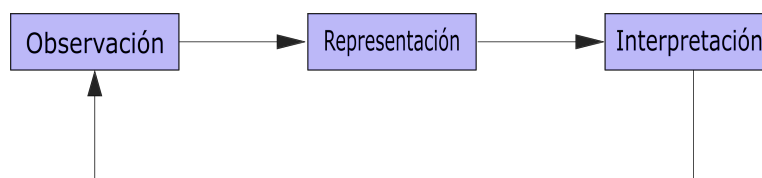


Figura 1: Los tres niveles de estudio del método científico.

Con el transcurso del tiempo, las hipótesis que han sido sometidas a múltiples procesos de validación empírica pueden consolidarse como leyes científicas o evolucionar hacia teorías más amplias. Una ley científica se caracteriza por expresar, de manera concisa y reproducible, una relación constante entre fenómenos observables bajo condiciones similares. Por ejemplo, la segunda ley del movimiento formulada por Newton establece que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración, siendo la masa la constante de proporcionalidad:  $F = m \cdot a$ . En contraste, las teorías científicas constituyen marcos explicativos más integradores, capaces de articular múltiples observaciones, leyes y principios en una estructura coherente que permite interpretar y predecir fenómenos complejos.

Cabe señalar que el desarrollo del conocimiento científico no sigue necesariamente una trayectoria lineal ni acumulativa. En numerosos casos, las leyes han precedido a las teorías, y distintos investigadores han llegado a interpretaciones divergentes a partir de un mismo conjunto de datos o problemas. La historia de la ciencia está repleta de trabajos que, aunque posteriormente desestimados o relegados al olvido, desempeñaron un papel fundamental en la apertura de nuevas líneas de investigación. Por cada hallazgo ampliamente reconocido, existen innumerables contribuciones que, desde una posición marginal, han enriquecido el corpus del saber científico.

Este trabajo se apoya en esos cimientos. A lo largo de su desarrollo, se ha recurrido a los aportes previos de la comunidad científica y se han enfrentado las limitaciones inherentes al estado actual del conocimiento. Esta tesis no pretende ofrecer una respuesta definitiva, sino contribuir con un análisis riguroso y fundamentado al estudio de un fenómeno de gran relevancia: la caracterización de la temperatura en flujos compresibles. Los capítulos siguientes profundizan en este objetivo.

## Resumen técnico

La presente investigación se enmarca en el análisis de la medición de temperatura en entornos donde el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ). Bajo este régimen se supone una distribución uniforme de temperatura en el interior del sensor, lo que resulta idóneo para modelar su respuesta mediante la aproximación de parámetros concentrados. Sin embargo, estas condiciones también intensifican los efectos de conducción a través de los cables, un fenómeno que tradicionalmente ha sido desestimado. Para sustentar esta problemática y enmarcar la investigación dentro de la evolución reciente del campo, el trabajo incorpora un análisis sistemático del estado del arte —incluyendo técnicas bibliométricas— que evidencia la necesidad de ampliar los modelos clásicos con formulaciones avanzadas capaces de representar dichos efectos no ideales.

Más allá de estas condiciones en las que el número de Biot tiende a cero, la

investigación se extiende a escenarios donde los sensores se emplean en flujos compresibles, caracterizados por altas velocidades y fuerte turbulencia. En estas condiciones, las regiones de estancamiento favorecen la aparición de capas límite viscosas cuya evolución genera estructuras de elevada vorticidad que se desintegran en la escala de Kolmogórov, produciendo fluctuaciones térmicas que los sensores convencionales no logran seguir con precisión. Este desacoplamiento entre el flujo y la señal de temperatura conduce a una subestimación de fenómenos relevantes, cuya correcta detección podría prevenir fallos prematuros en máquinas térmicas o procesos industriales complejos.

Por tanto, los modelos clásicos, basados en una única constante de tiempo, no resultan capaces de reconstruir adecuadamente la señal térmica original mediante convolución, especialmente en presencia de efectos de acoplamiento no ideal. Esta limitación motiva el desarrollo de modelos más avanzados que incorporen explícitamente el flujo de calor a través de los cables del sensor, con el fin de ofrecer una descripción más realista de su respuesta dinámica.

En este contexto, el documento propone y valida dos aproximaciones conceptualmente distintas, orientadas a mejorar el modelo convencional de constante de tiempo. Ambas integran en su formulación el flujo de calor a través de los cables, tratados como sólidos semi-infinitos, aportando así una representación más completa del balance energético. Esta consideración, frecuentemente omitida, se vuelve relevante en condiciones donde la conducción axial por los conductores representa una vía dominante de disipación o absorción de calor.

La primera aproximación se formula en el dominio de Laplace mediante funciones de transferencia térmica generalizadas. En dicha formulación, aparece un término proporcional a  $\sqrt{s}$ , característico de procesos difusivos. Debido a su complejidad analítica, se aplica una aproximación racional basada en el método de Carlson-Halijak, que permite representar la respuesta temporal del sistema mediante una doble exponencial con dos constantes de tiempo diferenciadas.

La segunda aproximación adopta una formulación basada en cálculo fraccional, modelando la conducción de calor en los cables mediante un operador de orden  $\frac{1}{2}$  según la definición de Grünwald-Letnikov. Esta estrategia introduce de forma explícita los efectos de memoria térmica, capturando la naturaleza no local de la difusión y la dependencia de la respuesta actual con respecto al historial térmico del sistema.

La validación experimental, orientada a reproducir el fenómeno de estancamiento térmico de un sensor inmerso en un flujo gaseoso a alta velocidad, se llevó a cabo mediante ensayos controlados en una cámara adiabática, en la cual el termistor permaneció térmicamente aislado y fue sometido a la acción de una fuente externa de calor mediante excitación láser. Las pruebas se realizaron en diferentes medios gaseosos –aire, aire sintético, helio y vacío– con la finalidad de analizar la respuesta del sensor en entornos con

propiedades termo-físicas distintas.

Los resultados evidencian una mejora sustancial en la capacidad predictiva de ambas aproximaciones propuestas en comparación con el enfoque convencional. En el análisis de la evolución temporal de los residuos, así como los errores cuadráticos medios, se confirma la superioridad del planteamiento fraccional en la mayoría de los escenarios evaluados, si bien la formulación basada en doble exponencial ofrece un equilibrio apropiado entre precisión y simplicidad analítica.

En conjunto, este trabajo proporciona una base teórica y experimental sólida para el uso de termistores NTC en condiciones dinámicas exigentes, estableciendo nuevos criterios de diseño, selección e instalación de este tipo de sensores en flujos compresibles o en sistemas donde las condiciones de frontera no ideales afectan significativamente la calidad de la medición.

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Prefacio</b>	<b>XIII</b>
Glosario de acrónimos . . . . .	XXIX
<b>Glosario de acrónimos, siglas y abreviaturas</b>	<b>XXXI</b>
<b>Glosario de acrónimos, siglas y abreviaciones</b>	<b>XXXI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes. . . . .	1
1.1.1. De la constante de tiempo a los operadores fraccionales: una visión bibliométrica de la modelización de sensores de temperatura. . . . .	1
1.1.2. Importancia de la medición de temperatura en flujos compresibles. . . . .	13
1.1.3. El papel de los sensores de temperatura en la medición de flujos compresibles. . . . .	16
1.1.4. Problemas e implicaciones del flujo de calor a través de los cables en la medición de temperatura. . . . .	20
1.2. Planteamiento del problema. . . . .	22
1.3. Objetivos. . . . .	25
1.4. Estructura del documento. . . . .	26
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción. . . . .	29
2.2. Estado del arte de los sensores de temperatura. . . . .	30
2.2.1. Respuesta dinámica y el papel de la convolución en los sensores de temperatura. . . . .	30
2.2.2. Fundamentos sobre los termistores NTC. . . . .	32
2.2.3. Tiempo de respuesta y comportamiento dinámico. . . . .	33
2.3. Conceptos fundamentales. . . . .	36

2.3.1.	Turbulencia y efectos transitorios en la medición de temperatura. . . . .	36
2.3.2.	La escala de Kolmogórov: la huella dactilar de la turbulencia. . . . .	39
2.3.3.	Número de Grashof: turbulencia en convección natural. . . . .	43
2.3.4.	Número de Reynolds: transición y régimen turbulento en flujos compresibles. . . . .	45
2.3.5.	Número de Biot y análisis de parámetros concentrados. . . . .	46
2.3.6.	Número de Fourier. . . . .	48
2.3.7.	Longitud característica. . . . .	49
2.4.	El cálculo fraccional como herramienta para el análisis de transferencia de calor. . . . .	49
2.4.1.	Memoria térmica en materiales: justificación física del cálculo fraccional. . . . .	51
2.4.2.	Transformadas integrales. . . . .	52
2.4.3.	Derivada fraccional de Grünwald–Letnikov: formulación numérica. . . . .	54
2.4.4.	Función de Mittag–Leffler. . . . .	54
2.4.5.	Validación conceptual y diferencias estructurales entre definiciones fraccionales. . . . .	55
<b>3.</b>	<b>Modelos matemáticos</b>	<b>61</b>
3.1.	Introducción . . . . .	61
3.2.	Fundamentos del modelado térmico. . . . .	62
3.2.1.	Ecuación general del balance energético. . . . .	63
3.2.2.	Consideraciones sobre el flujo de calor hacia los alrededores $\dot{q}_{\text{surr}}$ . . . . .	64
3.2.3.	Modelo matemático para el cuerpo del sensor. . . . .	68
3.2.4.	Flujo de calor $\dot{q}_{\text{wire}}$ a través de los conductores. . . . .	71
3.3.	Evaluación de las aproximaciones propuestas. . . . .	76
3.3.1.	Formulación y análisis de la exponencial clásica de constante de tiempo: $\theta_3(t) = a^*(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . . . . .	76
3.3.2.	Formulación de la aproximación con doble exponencial: funciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ . . . . .	82
3.3.3.	Formulación de la aproximación basada en la derivada de Caputo, resuelta mediante discretización tipo Grünwald–Letnikov: $\theta_\alpha(t)$ . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Materiales y métodos</b>	<b>97</b>
4.1.	Introducción. . . . .	97
4.2.	Selección de termistores NTC. . . . .	98

---

4.3.	Sistema experimental para la caracterización térmica en flujos compresibles. . . . .	100
4.3.1.	Prototipo de doble sensor en tubo de polipropileno. . . . .	101
4.3.2.	Banco de pruebas para los ensayos. . . . .	104
4.4.	Cámara adiabática de ensayo. . . . .	107
4.4.1.	Diseño CAD y funcionalidad. . . . .	107
4.4.2.	Conectores y cableado hermético. . . . .	110
4.4.3.	Ensamblaje del prototipo. . . . .	112
4.4.4.	Banco de pruebas de la cámara adiabática. . . . .	114
4.4.5.	Protocolo experimental y adquisición de datos. . . . .	124
4.5.	Ensayos complementarios. . . . .	127
4.5.1.	Estudio de conducción térmica por cables. . . . .	127
<b>5.</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>133</b>
5.1.	Introducción. . . . .	133
5.2.	Resultados del prototipo de medición basado en diferencias de temperatura. . . . .	134
5.3.	Respuesta transitoria del termistor bajo diferentes condiciones de excitación y del medio gaseoso. . . . .	137
5.3.1.	Aire ambiente. . . . .	139
5.3.2.	Helio. . . . .	141
5.3.3.	Aire sintético. . . . .	142
5.3.4.	Vacío parcial. . . . .	143
5.4.	Evaluación de las aproximaciones propuestas. . . . .	144
5.5.	Comparación y discusión de resultados. . . . .	152
5.5.1.	Análisis experimental de las pérdidas térmicas a través de los conductores. . . . .	163
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>167</b>
6.1.	Conclusiones. . . . .	167
6.2.	Líneas futuras. . . . .	169
<b>A.</b>	<b>Códigos de programación</b>	<b>173</b>
A.1.	Matlab. . . . .	173
A.1.1.	Código para dispositivo de medición de temperatura basado en la diferencia de $T_{01}$ y $T_1$ . . . . .	173
A.1.2.	Código para la representación de resultados de los ensayos en cámara adiabática. . . . .	177
A.1.3.	Código para la representación de modelos de constante de tiempo aplicados a los ensayos en cámara adiabática. . . . .	179
A.1.4.	Código para la representación de modelos de doble exponencial aplicados a los ensayos en cámara adiabática. . . . .	182

---

A.1.5. Código para la representación de modelos fraccionales tipo GL aplicados a los ensayos en cámara adiabática.	185
A.1.6. Código para representación de resultados a los ensayos en escáner. . . . .	189
A.1.7. Código para la validación de las aproximaciones mediante ecuaciones diferenciales fraccionales. . . . .	191
A.2. Java. . . . .	193
A.3. Python. . . . .	205
<b>B. Software de control y adquisición de datos</b>	<b>209</b>
B.1. DatEmp. . . . .	209
<b>C. Solución de ecuaciones fraccionales</b>	<b>217</b>
C.1. Análisis de soluciones y formulación fraccional. . . . .	217
<b>Bibliografía</b>	<b>221</b>

# Índice de figuras

1.	Los tres niveles de estudio del método científico. . . . .	XIII
1.1.	Evolución conceptual en la modelización matemática de sensores de temperatura. . . . .	2
1.2.	Desarrollo metodológico de la investigación. . . . .	4
1.3.	Nube de palabras clave asociadas a estudios con termopares en flujos compresibles. . . . .	5
1.4.	Resultados de la búsqueda de estudios con termopares en flujos compresibles. . . . .	6
1.5.	Resultados de la búsqueda de estudios con termistores en flujos compresibles. . . . .	6
1.6.	Producción científica anual sobre modelización dinámica de sensores de temperatura (1999–2024). . . . .	7
1.7.	Nube de palabras clave asociadas a estudios con termistores en flujos compresibles y cuando el número de Biot tiende a cero (1999–2024). . . . .	8
1.8.	Red de co–ocurrencia basada en palabras clave de autor. . . . .	9
1.9.	Mapa temático de temas de investigación en modelización de sensores de temperatura. . . . .	11
1.10.	Diagrama de Sankey que relaciona los términos más frecuentes en los resúmenes, autores y palabras clave. . . . .	12
1.11.	Red de co–ocurrencia de palabras clave en publicaciones sobre termistores en condiciones dinámicas (1999–2024). . . . .	12
1.12.	Esquema de los regímenes de flujo según el número de Mach: dominio incompresible y compresible. . . . .	13
1.13.	Mapa característico de un compresor centrífugo. Se muestran las curvas de eficiencia, líneas de velocidad y presión relativa, además del límite de bombeo [1]. . . . .	14
1.14.	Diagrama h–s. . . . .	16
1.15.	Diversos tipos de termistores NTC [2]. . . . .	17
1.16.	Diversos tipos de termopares industriales [3]. . . . .	18
1.17.	Sensor PT100 RTD [4]. . . . .	18

1.18. Sensor de temperatura de silicio [5]. . . . .	19
1.19. Sensor de fibra para aplicaciones médicas [6]. . . . .	19
1.20. Esquema conceptual de un termistor NTC y detalle de los mecanismos de transferencia de calor: conducción a través de los cables ( $\dot{q}_{\text{wire}}$ ) y convección en la superficie expuesta ( $\dot{q}_{\text{conv}}$ ). . . . .	21
1.21. Respuesta de un sensor ideal (sin pérdidas por conducción) y la de un sensor real (con pérdidas por conducción). . . . .	22
1.22. Representación esquemática del sistema sensor–cable en me- dio gaseoso, sometido a una excitación térmica mediante un pulso láser [7]. . . . .	23
2.1. Respuesta de un sensor de temperatura con constante de tiem- po conocida ante una variación de temperatura sinusoidal, in- cluyendo el error [7]. . . . .	31
2.2. Curva de resistividad frente a temperatura para un termistor. . . . .	33
2.3. Respuesta exponencial a escalón de un sistema térmico de pri- mer orden. La constante $\tau$ corresponde al tiempo para alcan- zar el 63,2% del valor final, tal como se detalla en la tabla (2.1). . . . .	34
2.4. Respuesta oscilatoria a escalón en sistema térmico no lineal, típica de sensores con acoplamiento mecánico o inercia térmica distribuida. . . . .	35
2.5. Termopar tipo K expuesto (abajo), aislado conectado a tierra (centro) y aislado no conectado a tierra (arriba) [8]. . . . .	36
2.6. Estructura multiescala de la capa límite turbulenta, mostran- do la subcapa viscosa ( $y^+ < 5$ ), región buffer ( $5 < y^+ < 30$ ), y capa turbulenta externa [9]. . . . .	37
2.7. Cascada energética y densidad espectral de energía $E(k)$ en función del número de onda $k$ . Se distinguen los rangos inte- gral, inercial y disipativo, así como la ley de Kolmogórov en el rango inercial, $E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ . . . . .	40
2.8. Perfil de temperatura y velocidad en una capa límite turbu- lenta sobre una placa vertical [10]. . . . .	45
2.9. Perfiles de temperatura en sólidos para distintos valores de $Bi$ [11, 12]. . . . .	47
2.10. Comparación entre la derivada clásica y las derivadas fraccio- nales de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ aplicadas a $x(t) = t$ . . . . .	56
2.11. Comparación entre derivadas fraccionales de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ apli- cadas a $u(t)$ : formulaciones de Riemann–Liouville, Caputo, aproximación de Grünwald–Letnikov y función Mittag–Leffler. . . . .	58
3.1. Modelo físico de un sensor de temperatura expuesto a un me- dio gaseoso, mostrando los principales mecanismos de inter- cambio energético [7]. . . . .	63

3.2.	Análisis de los mecanismos de intercambio térmico entre la superficie del sensor y el medio gaseoso. (A) Coeficiente de radiación ( $h_{\text{rad}}$ ) en función de ( $\epsilon_s$ ) y ( $T_s$ ); (B) Número de Grashof (Gr); (C) Número de Nusselt (Nu); (D) Coeficiente de transferencia de calor (h); (E) Longitud característica mínima ( $L_{c,\text{mín}}$ ) para distintos valores de ( $T_g$ ) [7]. . . . .	67
3.3.	Evolución del cociente adimensional de temperatura para distintos valores del número de Biot. . . . .	71
3.4.	Modelo conceptual de conducción térmica unidimensional a través del conductor de un sensor [7]. . . . .	72
3.5.	Distribución de temperatura adimensional para la conducción transitoria en un sólido semi-infinito, cuando la temperatura de la superficie se mantiene constante. . . . .	75
3.6.	Diagrama eléctrico equivalente de modelización de impedancias térmicas para el sensor [7]. . . . .	77
3.7.	Diagramas de Bode para las aproximaciones racionales del operador $\sqrt{s}$ [7]. . . . .	78
3.8.	Diagrama del circuito equivalente simplificado para el modelo térmico del sensor [7]. . . . .	79
3.9.	Diagrama del circuito para el modelo exponencial clásico. . .	81
3.10.	Flujo de calor en $x = 0$ para una temperatura superficial constante $T_s$ . Comparación entre la solución analítica y distintas aproximaciones [7]. . . . .	84
3.11.	Flujo de calor en $x = 0$ para señal periódica de temperatura. Comparación entre la solución analítica y las aproximaciones propuestas para diferentes frecuencias [7]. . . . .	86
4.1.	Termistor tipo perla con encapsulado epóxico de 10 k $\Omega$ y tolerancia del 5 % (Cantherm MF52A2103J3470) [13]. . . . .	98
4.2.	Termistor de película delgada recubierto en Kapton <sup>®</sup> [14]. . .	99
4.3.	Termistor de película delgada tras la reducción de sección del encapsulado. . . . .	100
4.4.	Registro experimental del sistema de medida diferencial. Se observan diferencias significativas entre NTC1 y NTC10 en régimen transitorio. . . . .	101
4.5.	Modelo CAD del encapsulado utilizado en los ensayos. . . . .	101
4.6.	Esquema conceptual del sensor doble para estimación del contenido energético. . . . .	102
4.7.	Primer prototipo experimental con carcasa de bolígrafo. . . .	102
4.8.	Detalle del montaje interno del segundo termistor en el primer prototipo. . . . .	103
4.9.	Prototipo intermedio con termistor de película delgada para reducir interferencias térmicas. . . . .	103

4.10. Versión final del prototipo con termistores de película delgada y conductores trenzados. . . . .	104
4.11. Detalle de la soplante centrífuga utilizada. . . . .	105
4.12. Vista general del banco de ensayos. . . . .	105
4.13. Detalle del montaje del prototipo de medida en el tubo de aspiración. . . . .	106
4.14. Esquema del sistema completo de adquisición. . . . .	106
4.15. Bomba neumática multiplicadora de presión. . . . .	108
4.16. Vista general del modelo CAD de la cámara adiabática de ensayo. . . . .	108
4.17. Vistas isométrica, frontal, lateral y superior del modelo completo. . . . .	109
4.18. Terminales de cobre encapsulados individualmente en epoxi. . . . .	110
4.19. Vista del cableado dispuesto en la tapa superior durante el proceso de ensamblaje. . . . .	111
4.20. Tapa superior de la cámara con paso de conectores mecanizados. . . . .	111
4.21. Esquema de conexión del conector tipo 1. . . . .	112
4.22. Esquema de conexión del conector tipo 2. . . . .	112
4.23. Vista del interior de la cámara con los sensores montados y aislados. . . . .	113
4.24. Cámara adiabática completamente ensamblada. . . . .	114
4.25. Puntero láser JD-851 (verde, clase IIIA, 532nm)[15]. . . . .	114
4.26. Montaje inicial del puntero láser apuntando a la cámara adiabática. . . . .	115
4.27. Encapsulado del puntero láser para mejora de estabilidad térmica. . . . .	116
4.28. Caída progresiva de luminosidad detectada por la LDR. . . . .	116
4.29. Frontal del proyector EMMA EM-RGB220 [16]. . . . .	117
4.30. Parte trasera del proyector EM-RGB220 con conexiones y controles [16]. . . . .	117
4.31. Estabilidad lumínica registrada con el proyector EMMA. . . . .	118
4.32. Sistema completo con proyector láser. Vista del sistema de adquisición de datos. . . . .	118
4.33. Sistema completo con proyector láser. Vista de la cámara y el dispositivo obturador. . . . .	119
4.34. Vista superior de la placa PCB desarrollada con resistencias de 1 k $\Omega$ soldadas. . . . .	119
4.35. Comparación del conexionado en protoboard con el diseño de la PCB. . . . .	120
4.36. Proceso de insolación del fotolito sobre placa fotosensible para la fabricación de la PCB. . . . .	121

4.37. Esquema funcional del banco de ensayo con la cámara adiabática [7]. . . . .	122
4.38. Vista de los equipos del ensayo: cámara adiabática, bomba de vacío y conexiones a la distribución de los gases técnicos. . . . .	124
4.39. Respuesta térmica del termistor ante una excitación láser. . . . .	125
4.41. Representación gráfica en tiempo real del perfil térmico durante el ensayo. . . . .	126
4.40. Interfaz de adquisición <i>DatEmp</i> . . . . .	126
4.42. Esquema de modificación del escáner para utilizarlo como fuente de radiación UV controlada. . . . .	128
4.43. Detalle de las configuraciones térmicas aplicadas a cada termistor. . . . .	129
4.44. Configuración real del escáner modificado. . . . .	130
4.45. Termistor con dos resistencias de $0 \Omega$ en serie por rama. . . . .	130
4.46. Ejemplar con tubos de cobre utilizados como elementos conductores térmicos en los cables. . . . .	131
5.1. Temperaturas $T_{01}$ y $T_1$ en el ensayo 1. . . . .	134
5.2. Diferencial de temperatura ( $\Delta T = T_{01} - T_1$ ) durante el ensayo 1. . . . .	135
5.3. Temperaturas $T_{01}$ y $T_1$ en el ensayo 3. . . . .	135
5.4. Diferencial de temperatura ( $\Delta T = T_{01} - T_1$ ) durante el ensayo 3. . . . .	136
5.5. Media del diferencial $\Delta T$ para los ensayos. . . . .	136
5.6. Distribución del valor máximo de temperatura relativa $T_{\text{máx}}$ para cada fluido y potencia láser. . . . .	137
5.7. Prueba experimental representativa de la señal de máxima potencia láser (P) en la cámara adiabática [7]. . . . .	138
5.8. Prueba experimental representativa de la señal de mínima potencia láser (G) en la cámara adiabática. . . . .	139
5.9. Respuesta del termistor en aire ambiente. . . . .	140
5.10. Representación de la repetibilidad de las respuestas del termistor. . . . .	140
5.11. Respuesta del termistor al helio en la cámara. . . . .	141
5.12. Respuesta del termistor en aire sintético. . . . .	142
5.13. Manómetro de la cámara durante las pruebas con aire sintético. . . . .	143
5.14. Respuesta del termistor en condiciones de vacío parcial. . . . .	144
5.15. Evaluación del ajuste mediante la aproximación de constante de tiempo aplicado a un ensayo con aire y láser P. . . . .	147
5.16. Evaluación del ajuste mediante la aproximación de doble exponencial aplicado a un ensayo con aire y láser P. . . . .	149

5.17. Evaluación del ajuste mediante la aproximación fraccional GL aplicado a un ensayo con aire y láser P. . . . .	151
5.18. Comparación de las respuestas experimental y de las aproximaciones matemáticas en aire y pulso B. . . . .	152
5.19. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser P en el tramo de subida. . . . .	153
5.20. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser P en el tramo de bajada. . . . .	154
5.21. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser B en el tramo de subida. . . . .	155
5.22. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser B en el tramo de bajada. . . . .	156
5.23. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser R en el tramo de subida. . . . .	157
5.24. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser R en el tramo de bajada. . . . .	158
5.25. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser G en el tramo de subida. . . . .	159
5.26. Representación adimensional de la temperatura $\Theta(t)$ para el láser G en el tramo de bajada. . . . .	160
5.27. Evolución de la temperatura en seis configuraciones del termistor (Ensayo 1). . . . .	163
5.28. Evolución de la temperatura en seis configuraciones del termistor (Ensayo 2). . . . .	164
5.29. Temperaturas máximas alcanzadas en cada configuración (Ensayo 1). . . . .	165
5.30. Temperaturas máximas alcanzadas en cada configuración (Ensayo 2). . . . .	165
B.1. Pantalla principal. . . . .	210
B.2. Pantalla de inicio de medición. . . . .	210
B.3. Ventana de valores iniciales. . . . .	211
B.4. Selección de monitorización de temperatura. . . . .	212
B.5. Ventana de monitorización de temperatura. . . . .	212
B.6. Vista en detalle de la ventana de monitorización de temperatura. . . . .	213
B.7. Activación del obturador. . . . .	213
B.8. Seguimiento de la luminosidad. . . . .	214
B.9. Exportar datos a Excel. . . . .	215
B.10. Icono para cerrar la interfaz de DatEmp. . . . .	215

# Índice de Tablas

1.1. Comparativa de sensores de temperatura para aplicaciones dinámicas [17–20]. . . . .	19
2.1. Constante de tiempo térmica y evolución de la temperatura relativa. . . . .	34
2.2. Umbrales del número de Biot y aplicaciones típicas. . . . .	47
3.1. Valores de los coeficientes para las aproximaciones (3.41) y (3.42). . . . .	78
3.2. Coeficientes de las expresiones (3.54) y (3.55). . . . .	82
3.3. Exponente de $(Fo - \overline{Fo})$ en cada término de $\frac{d}{dFo}\Theta$ , ${}_0CD_{Fo}^{\frac{1}{2}}\Theta$ y $Bi\Theta$ . . . . .	92
4.1. Especificaciones técnicas de los termistores empleados. . . . .	99
4.2. Asignación funcional de pines para los conectores herméticos. . . . .	112
4.3. Especificaciones técnicas del puntero láser JD-851 (fase inicial del experimento). . . . .	115
4.4. Especificaciones técnicas del proyector láser EMMA EM-RGB220 (sistema definitivo). . . . .	117
4.5. Especificaciones de la bomba de vacío REFCO ECO 5DV. . . . .	123
4.6. Composición del gas helio utilizado en los ensayos. . . . .	123
4.7. Composición del aire sintético empleado en los experimentos. . . . .	123
4.8. Configuraciones analizadas para el estudio de flujo de calor por los cables. . . . .	129
5.1. Parámetros y valores de $QE$ para la aproximación de constante de tiempo $\theta_3(t)$ en aire. . . . .	146
5.2. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación de constante de tiempo $\theta_3(t)$ en helio. . . . .	146
5.3. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación de constante de tiempo $\theta_3(t)$ en aire sintético. . . . .	146

5.4. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación de constante de tiempo $\theta_3(t)$ en vacío. . . . .	147
5.5. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación $\theta_1(t)$ en aire. .	148
5.6. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación $\theta_1(t)$ en helio. .	148
5.7. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación $\theta_1(t)$ en aire sintético. . . . .	148
5.8. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación $\theta_2(t)$ en vacío. .	149
5.9. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación fraccional tipo GL $\theta_\alpha(t)$ en aire. . . . .	150
5.10. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación fraccional tipo GL $\theta_\alpha(t)$ en helio. . . . .	150
5.11. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación fraccional tipo GL $\theta_\alpha(t)$ en aire sintético. . . . .	150
5.12. Parámetros y valores $QE$ para la aproximación fraccional tipo GL $\theta_\alpha(t)$ en vacío. . . . .	151
5.13. Media y variación relativa $RQE_1$ de los valores $QE$ por aproximación y tipo de fluido. . . . .	161
5.14. Media y variación relativa $RQE_2$ de los valores $QE$ por aproximación y tipo de fluido. . . . .	161
C.1. Tipos de soluciones de la ecuación característica en función de los valores de $Bi$ y $\gamma$ . . . . .	218
C.2. Expresiones de la solución tipo y coeficiente $C_1$ para distintos regímenes térmicos. . . . .	218
C.3. Soluciones adimensionales $\Theta(Fo)$ para distintos casos particulares. . . . .	219





# Glosario de acrónimos, siglas y abreviaturas

<b>AC</b>	Corriente alterna / <i>Alternating Current</i>
<b>ADC</b>	Convertidor analógico-digital / <i>Analog-to-Digital Converter</i>
<b>Bi</b>	Número de Biot
<b>CFD</b>	Dinámica de fluidos computacional / <i>Computational Fluid Dynamics</i>
<b>DatEmp</b>	Software de monitorización de datos de temperatura
<b>Fo</b>	Número de Fourier
<b>GL</b>	Operador fraccional de Grünwald-Letnikov
<b>I2C</b>	Protocolo de comunicación serie entre circuitos integrados / <i>Inter-Integrated Circuit</i>
<b>LED</b>	Diodo emisor de luz / <i>Light-Emitting Diode</i>
<b>LES</b>	Simulación de grandes remolinos / <i>Large eddy simulation</i>
<b>LTI</b>	Sistema lineal invariante en el tiempo / <i>Linear Time-Invariant system</i>
<b>MATLAB</b>	Entorno de cálculo numérico y programación científica (Matrix Laboratory) / <i>Matrix Laboratory</i>
<b>NBR</b>	Caucho butadieno-acrilonitrilo (goma nitrílica) / <i>Nitrile Butadiene Rubber</i>
<b>NTC</b>	Termistor de coeficiente de temperatura negativo / <i>Negative Temperature Coefficient thermistor</i>
<b>PCB</b>	Placa de circuito impreso / <i>Printed Circuit Board</i>
<b>Pr</b>	Número de Prandtl
<b>PVC</b>	Policloruro de vinilo / <i>Polyvinyl Chloride</i>
<b>RANS</b>	Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas de Reynolds / <i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations</i>

<b>Re</b>	Número de Reynolds
<b>RL</b>	Operador fraccional de Riemann-Liouville
<b>RTD</b>	Detector de temperatura basado en resistencia / <i>Resistance Temperature Detector</i>
<b>TTL</b>	Lógica transistor-transistor / <i>Transistor-Transistor Logic</i>
<b>WoS</b>	Base de datos científica utilizada para el análisis bibliométrico / <i>Web of Science Core Collection</i>

# Capítulo 1

## Introducción

*La ciencia no es sino un refinamiento  
del pensamiento cotidiano.*

Albert Einstein

Este capítulo establece la motivación y el contexto general de la investigación. Desde una perspectiva que pretende aportar una visión innovadora, se presenta en primer lugar un análisis bibliométrico del campo de estudio: la modelización de sensores de temperatura, con especial énfasis en entornos dinámicos y en la medición de flujos compresibles. Tomando esta hipótesis inicial, se expone el planteamiento del problema, donde se analizan las limitaciones inherentes a los modelos convencionales basados en la constante de tiempo y se justifica la necesidad de adoptar enfoques más avanzados. Asimismo, se presentan los objetivos específicos de la tesis y se describe la estructura del documento, proporcionando al lector una guía clara para la comprensión del desarrollo posterior del trabajo.

### 1.1. Antecedentes.

#### 1.1.1. De la constante de tiempo a los operadores fraccionales: una visión bibliométrica de la modelización de sensores de temperatura.

Entre los dominios tecnológicos que encontramos en la actualidad, los sensores de temperatura destacan por su utilización en aplicaciones tan diversas que van desde la monitorización ambiental, hasta la robótica, pasando por la automatización y el diagnóstico en medicina, entre otros. Este es un rol que le han permitido posicionarse como dispositivos fundamentales de la

instrumentación moderna, dada la garantía que ofrecen en cuanto a precisión, seguridad y optimización de sistemas y procesos. En los últimos años, los desarrollos e innovaciones en materiales y mecanismos de transducción han dado lugar a una proliferación de tipos de sensores como: termopares, termistores, detectores de temperatura por resistencia (RTD) y sensores basados en fibra óptica. Asimismo, es necesario añadir que el desarrollo en la miniaturización y la integración de procesamiento inteligente de datos los sitúa en un punto favorable [21, 22].

Por otro lado, este rápido progreso tecnológico también ha impulsado un cambio en la modelización matemática de los sensores de temperatura, especialmente bajo condiciones dinámicas. Durante las dos últimas décadas, este desarrollo ha evolucionado desde formulaciones clásicas hacia representaciones matemáticas cada vez más sofisticadas que integran conceptos de dinámica de sistemas y cálculo fraccional, en donde se tienen en cuenta efectos transitorios y de memoria en el comportamiento térmico del sensor y de los conductores [23–26].

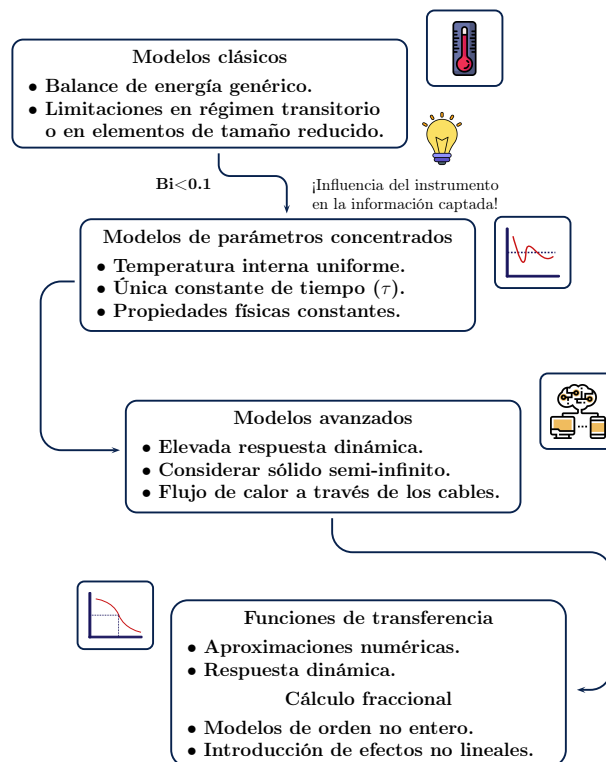


Figura 1.1: Evolución conceptual en la modelización matemática de sensores de temperatura.

La figura (1.1) ilustra esta trayectoria conceptual, haciendo énfasis en aquellos regímenes en los que el número de Biot tiende a cero, condición que justifica el uso de modelos térmicos basados en parámetros concentrados [27–29].

Sin embargo, en aplicaciones donde la respuesta dinámica adquiere mayor complejidad –como sucede en entornos sometidos a flujos compresibles de alta velocidad o al utilizar sensores de dimensiones reducidas– resulta necesario recurrir a modelos avanzados [7, 23, 30–32]. Estas formulaciones se fundamentan en la incorporación de estructuras de convolución de elevada complejidad matemática, capaces de captar comportamientos dinámicos de orden superior y de representar con mayor fidelidad fenómenos asociados a la memoria térmica y al acoplamiento no ideal entre el sensor y su entorno.

En este contexto y con el objetivo de situar en el mapa evolutivo el punto de partida de la presente investigación, se aborda el estudio desde una perspectiva exploratoria mediante el desarrollo de un análisis bibliométrico apoyado en técnicas de minería de datos y cartografía científica [33, 34]. Para ello, se han recopilado datos desde la base *WoS*, una fuente multidisciplinar de alta calidad, ampliamente utilizada en estudios bibliométricos y en análisis cuantitativos de la producción científica [33, 35], la cual proporciona metadatos normalizados y compatibles con herramientas analíticas avanzadas [36, 37].

El análisis se ha realizado mediante el paquete *bibliometrix* implementado en el entorno *R* [37], complementado con su interfaz gráfica *biblioshiny*, el cual facilita la exploración interactiva de las métricas y relaciones bibliográficas.

En particular, se han examinado los siguientes aspectos:

- La evolución estructural y temática del campo.
- Las redes intelectuales y sociales que sustentan su desarrollo.
- La posición de técnicas de modelización como las constantes de tiempo, las funciones de transferencia y las derivadas fraccionales dentro del panorama científico.

Aunque también se realizaron búsquedas preliminares en *Scopus*, el análisis final se centró exclusivamente en *WoS* debido a varias ventajas metodológicas, como: sus metadatos altamente estructurados y estandarizados, la inclusión sistemática de referencias citadas y su plena compatibilidad con la bibliometría, así como la provisión de un marco basado en *R* para el mapeo de los recursos científicos [36, 37].

Este análisis se alinea con trabajos previos que destacan el valor de la bibliometría para cartografiar dominios de nicho e interdisciplinarios, facilitando la identificación de tendencias emergentes y la toma de decisiones en investigación [33, 38, 39]. Al aplicar técnicas como co-citación, co-palabras

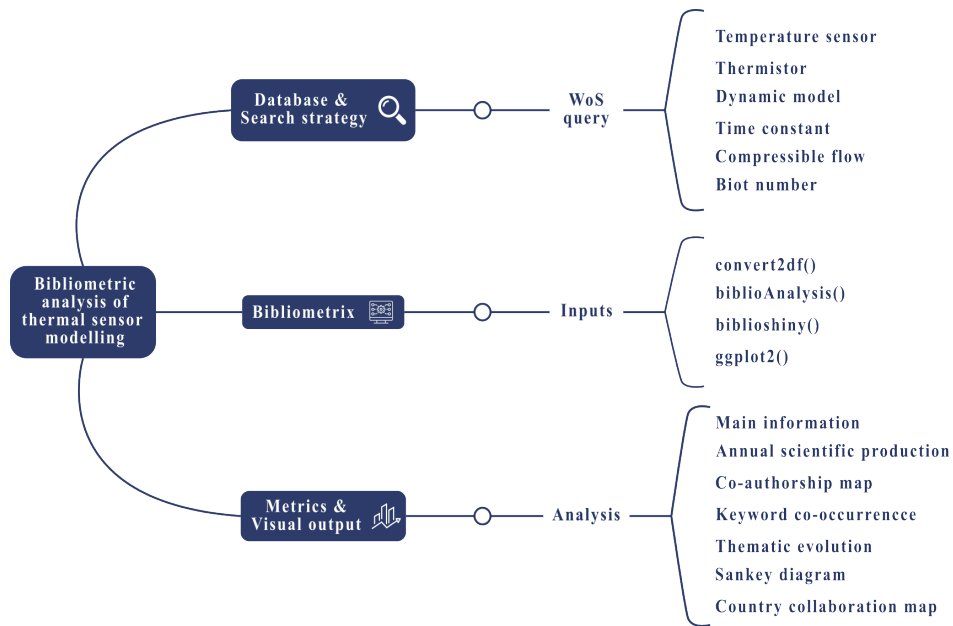


Figura 1.2: Desarrollo metodológico de la investigación.

y acoplamiento bibliográfico, se visualizan estructuras del conocimiento y se evalúa la evolución temática de un campo [36, 40, 41], contribuyendo así a una comprensión más profunda de su dinámica interna y convergencia tecnológica.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, la figura (1.2) recoge el flujo de trabajo general, así como los pasos conceptuales en los que se basa la metodología empleada en este análisis preliminar.

En esta línea cabe destacar que, dentro de la literatura científica, los termopares han sido históricamente los sensores más ampliamente investigados en contextos de transferencia de calor en régimen transitorio, medición de flujos compresibles y entornos aeroespaciales [30–32, 42–46]. Esta prevalencia se manifiesta tanto en el volumen de publicaciones como en la profundidad de las aproximaciones propuestas, que incluyen técnicas avanzadas de modelado, compensación dinámica y análisis inverso.

Por ello, se ha decidido realizar, de forma preliminar, una búsqueda bibliográfica restringida a estos ámbitos específicos, centrada en el caso del termopar. Este procedimiento permite establecer una base comparativa sólida y analizar los posibles puntos de mejora de la presente investigación, tomando como referencia una línea de trabajo ampliamente consolidada en el campo del modelado dinámico de sensores de temperatura.

Así, empleando la siguiente expresión de búsqueda en la base de datos *WoS*, se pretende delimitar el corpus de documentos relacionados con termopares en contextos de flujo compresible, número de Biot con tendencia a

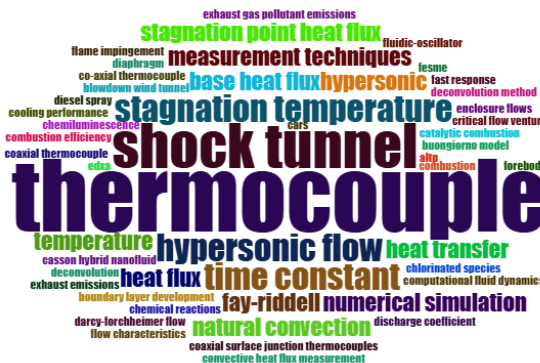


Figura 1.3: Nube de palabras clave asociadas a estudios con termopares en flujos compresibles.

cero y condiciones de estancamiento térmico:

$$\begin{aligned}
 TS = & \text{(temperature sensor OR thermocouple)} \\
 & \text{AND (compressible flow OR stagnation temperature} \\
 & \text{OR stagnation point OR low Biot number)}
 \end{aligned}$$

La evidencia se ve respaldada por los datos obtenidos partir del análisis bibliométrico aplicado a la estrategia de búsqueda centrada en termopares. Como se muestra en la figura (1.3), la nube de palabras clave revela una clara concentración temática en torno a conceptos como *shock tunnel*, *stagnation temperature*, *hypersonic flow*, *base heat flux* y *time constant*, todos ellos característicos de estudios avanzados de transferencia de calor en régimen transitorio o en entornos de alta velocidad del fluido. Asimismo, los indicadores generales presentados en la figura (1.4) evidencian que el corpus obtenido, compuesto por 43 documentos publicados entre 1991 y 2025, cuenta con una media de 12,77 citas por artículo, lo que indica un impacto razonable dentro de la comunidad científica. El total de 1.196 referencias citadas y una media de 3,77 coautores por trabajo sugieren, además, una dinámica de colaboración técnica sostenida, así como un cuerpo teórico consolidado.

Este escenario contrasta con lo que se observará en el caso de los termistores NTC, donde la producción científica es considerablemente más reducida, fragmentada y, en general, aún limitada en lo que respecta al desarrollo y aplicación de modelos dinámicos bajo condiciones térmicas complejas. En particular, resulta llamativo que, a pesar de las claras ventajas que ofrecen estos sensores en aplicaciones cuando Biot tiende a cero –como su elevada sensibilidad, tiempo de respuesta reducido y facilidad de integración–, no se haya desarrollado un cuerpo teórico comparable al de los termopares, especialmente en lo referente a su comportamiento en flujos compresibles, puntos de estancamiento o regímenes de alta frecuencia térmica.



Figura 1.4: Resultados de la búsqueda de estudios con termopares en flujos compresibles.

Dado este vacío temático e instrumental, la presente investigación busca aprovechar dicho nicho para profundizar en el desarrollo y validación de modelos matemáticos avanzados que permitan describir con mayor precisión la respuesta dinámica de termistores NTC. Esta aproximación considera efectos de conducción a través de los conductores y fenómenos de memoria térmica, integrando tanto formulaciones clásicas como herramientas del cálculo fraccional. La identificación de esta laguna bibliométrica no solo refuerza la originalidad del enfoque adoptado, sino que también posiciona el estudio en una línea de investigación emergente con claras implicaciones teóricas y aplicadas.

Por lo tanto, la búsqueda correspondiente al caso que nos ocupa –centrado en los termistores– se ha restringido a artículos de revistas revisadas por pares y artículos de revisión, publicados entre enero de 1999 y diciembre de 2024 (últimos 25 años), donde el patrón de búsqueda utilizado fue el siguiente:

$$\begin{aligned}
 TS = & \text{(temperature sensor OR thermistor)} \\
 & \text{AND (compressible flow OR stagnation temperature} \\
 & \quad \text{OR stagnation point OR low Biot number)}
 \end{aligned}$$

Tras aplicar filtros por tipo de documento (artículos y revisiones) e idioma (inglés), se obtuvo un total de 10 únicos registros:

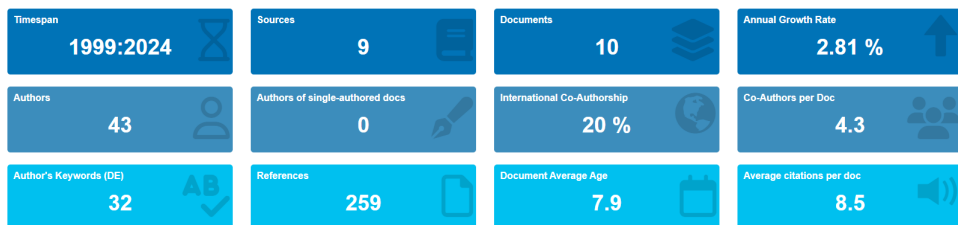


Figura 1.5: Resultados de la búsqueda de estudios con termistores en flujos compresibles.

De igual forma que se presentó para los termopares, en la figura (1.5) se presenta el perfil bibliométrico del conjunto de datos seleccionado. Se identificó un total de 10 documentos, cuya autoría colectiva corresponde a 43 investigadores, lo que arroja una media de 4,3 coautores por documento. Cabe destacar que ninguna publicación fue producida por un único autor, lo que indica un entorno de investigación predominantemente colaborativo [37, 38]. Con esto, la tasa de coautoría internacional se sitúa en el 20 %, sugiriendo una colaboración transfronteriza moderada en este campo. El conjunto de datos incluye 32 palabras clave de autor distintas, por lo que se deduce la diversidad conceptual y la granularidad temática de la bibliografía. Además, las 259 referencias citadas resaltan la profundidad intelectual y las fuentes fundacionales que sustentan este conjunto de trabajos.

Desde una perspectiva temporal, la tasa de crecimiento anual de las publicaciones se estima en un 2,81 %, indicando una expansión constante del interés científico. La antigüedad media de los documentos es de 7,9 años, por lo que refleja una mezcla de trabajos tempranos y contribuciones más recientes. Además, el análisis de citas revela una media de 8,5 citas por documento, sugiriendo un nivel respetable de impacto académico dentro de la comunidad científica [38, 47].

A continuación, la figura (1.6) muestra la distribución temporal de la producción científica en el área en cuestión, abarcando los últimos 25 años. La tendencia de la producción revela una actividad de publicación intermitente, con la aparición de sólo uno o dos artículos en años aislados y varios vacíos sin producción documentada. Se observan picos de publicación en 2022 y 2024.

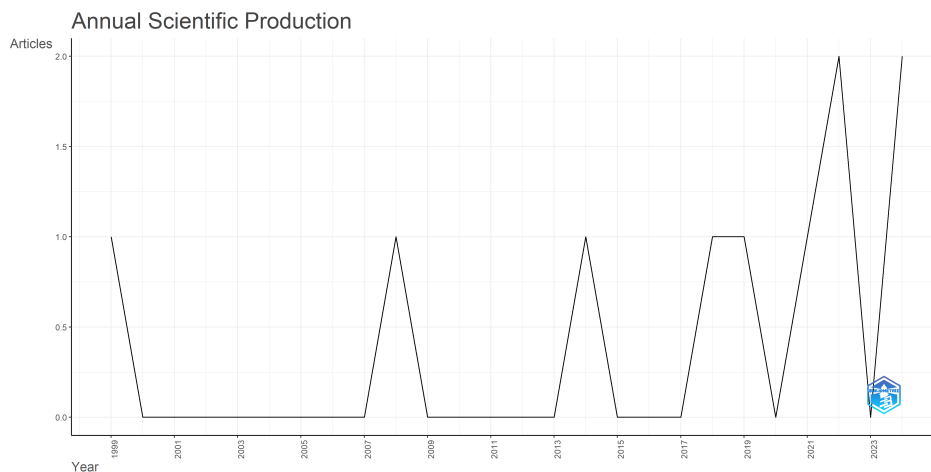


Figura 1.6: Producción científica anual sobre modelización dinámica de sensores de temperatura (1999–2024).

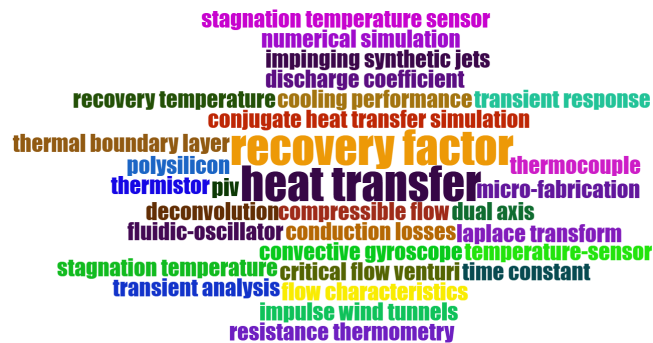


Figura 1.7: Nube de palabras clave asociadas a estudios con termistores en flujos compresibles y cuando el número de Biot tiende a cero (1999–2024).

Esta tendencia esporádica, pero que se intensifica gradualmente, refleja el interés nicho, aunque en evolución, por los enfoques de modelización dinámica, en particular los que implican análisis de flujos compresibles y cuando el número de Biot tiende a cero [7, 25, 26, 48]. Este patrón también sugiere que este campo de investigación sigue estando poco explorado, lo que pone de relieve un terreno fértil para futuros estudios destinados a unir el diseño de sensores de temperatura con metodologías avanzadas de control e identificación de fenómenos.

Por otro parte, la figura (1.7) –análoga a la figura (1.3)– muestra una nube de palabras clave en la que destacan términos como *heat transfer*, *recovery factor*, *transient response*, *compressible flow* y *deconvolution*, los cuales evidencian el enfoque predominantemente termodinámico y numérico de este subconjunto de la literatura. Además, resulta particularmente relevante la aparición de conceptos como *Laplace transform* y *time constant*, lo que indica que varios de estos estudios incorporan herramientas del análisis de sistemas dinámicos para modelar la respuesta térmica de los sensores [7, 22].

No obstante, en comparación con la nube correspondiente al caso de los termopares, se aprecia un menor énfasis en términos experimentales vinculados a túneles de viento o regímenes hipersónicos, sugiriendo una menor consolidación del campo en aplicaciones críticas de alta velocidad.

Este patrón apunta a que el campo de los termistores NTC, si bien está vinculado a temas relevantes como la convección, el análisis transitorio y la formulación numérica, aún presenta una dispersión temática significativa y una menor densidad investigadora en relación con escenarios extremos de transferencia térmica, lo que refuerza la motivación del presente trabajo.

Como propuesta de visualización para analizar la proximidad semántica y la agrupación temática de conceptos en el corpus bibliográfico de esta investigación [33, 41], la figura (1.8) representa la red de co-ocurrencia de palabras clave empleadas por los autores en sus publicaciones. En dicha red, el tamaño de los nodos refleja la frecuencia relativa de cada término, mien-

tras que la cercanía entre nodos y el grosor de los enlaces indican la fuerza de asociación semántica, sugiriendo vínculos conceptuales entre temas recurrentes.

Este análisis proporciona un mapa visual claro de las prioridades investigadoras y de los solapamientos interdisciplinarios dentro del campo. A partir de esta representación, es posible identificar al menos seis comunidades léxicas diferenciadas, codificadas por colores, que se agrupan en torno a nichos conceptuales bien definidos:

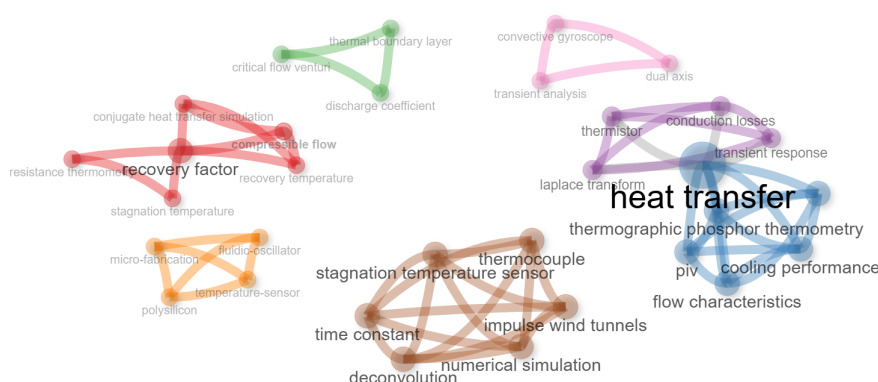


Figura 1.8: Red de co-ocurrencia basada en palabras clave de autor.

Particularmente, destaca la prominencia del nodo *heat transfer*, el cual se presenta como el concepto central de la red, tanto por su frecuencia de aparición como por su alto grado de conectividad con otros términos clave. Éste actúa como punto de confluencia semántica entre varios clústeres temáticos, incluidos aquellos vinculados a los termistores, al rendimiento térmico, a la respuesta transitoria y a los métodos experimentales de caracterización.

Por otro lado, los términos vinculados al concepto de *thermistor*, como *Laplace transform*, *transient response* y *conduction losses*, conforman un subgrupo menos conectado que se localiza en la región central derecha del mapa (color púrpura). La dispersión observada en este clúster sugiere una menor densidad investigadora y una etapa aún incipiente de consolidación teórica en torno a los modelos dinámicos de termistores bajo condiciones térmicas complejas.

En cambio, uno de los clústeres más densamente conectados —ubicado en la zona inferior central y representado en marrón oscuro— está conformado por términos como *thermocouple*, *stagnation temperature sensor*, *impulse wind tunnels*, *time constant*, *numerical simulation* y *deconvolution*. Este conglomerado léxico denota una línea de investigación bien consolidada en torno al uso de termopares en condiciones de alta velocidad, donde la dinámica térmica y el modelado computacional cobran especial relevancia.

Con esto, es importante resaltar que esta segmentación temática no solo revela la asimetría entre los nichos dedicados a termopares y termistores, sino

que también valida cuantitativamente la hipótesis central de este trabajo: la necesidad de desarrollar modelos avanzados y enfoques analíticos específicos para sensores de temperatura escasamente abordados en la literatura actual, como los termistores NTC, especialmente en regímenes donde el número de Biot tiende a cero y flujos compresibles.

Avanzando en el análisis bibliométrico, en esta etapa se pretende identificar los temas de investigación centrales, emergentes y de nicho dentro del campo de estudio. La figura (1.9) muestra el mapa temático generado a partir de las palabras clave proporcionadas por los autores. Esta representación se construye utilizando las métricas de centralidad (eje  $x$ ) y densidad (eje  $y$ ), las cuales permiten clasificar los grupos temáticos en función de su grado de desarrollo interno y su relevancia dentro del panorama científico global [37, 49].

De acuerdo con la metodología de Cobo et al. [49], los cuadrantes del mapa temático se interpretan del siguiente modo:

- Temas motores (cuadrante superior derecho): son conceptos bien desarrollados y centrales para el campo.
- Temas básicos (cuadrante inferior derecho): como pueden ser los sensores de temperatura, de manera genérica.
- Temas nicho (cuadrante superior izquierdo): están especializados y bien desarrollados, aunque periféricos, posiblemente por su enfoque en materiales o configuraciones concretas.
- Temas emergentes (cuadrante inferior izquierdo): presentan baja centralidad y escaso desarrollo, pero señalan líneas incipientes de investigación, como la identificación de parámetros mediante funciones de transferencia o el uso de operadores fraccionales.

Únicamente se identifica un clúster representado en la figura (1.9) con claridad, conformado por los términos *compressible flow*, *conjugate heat transfer simulation* y *convective gyroscope*, todos agrupados con un 100 % de confianza. Sin embargo, su ubicación en la zona inferior central del gráfico –cercana al origen– sugiere que se trata de un tema emergente y poco desarrollado, que además presenta una débil conexión con el resto de los núcleos temáticos. Esta posición refleja una doble limitación: por un lado, la baja densidad semántica indica que el subcampo no cuenta aún con una base sólida de publicaciones interrelacionadas; por otro, la baja centralidad implica una interacción marginal con las áreas más consolidadas, como aquellas vinculadas a *heat transfer* o *thermocouple*.

A pesar de su aparente marginalidad, este hallazgo refuerza el valor estratégico de la presente investigación, al situarse precisamente sobre un nicho poco explorado pero con alto potencial aplicado.

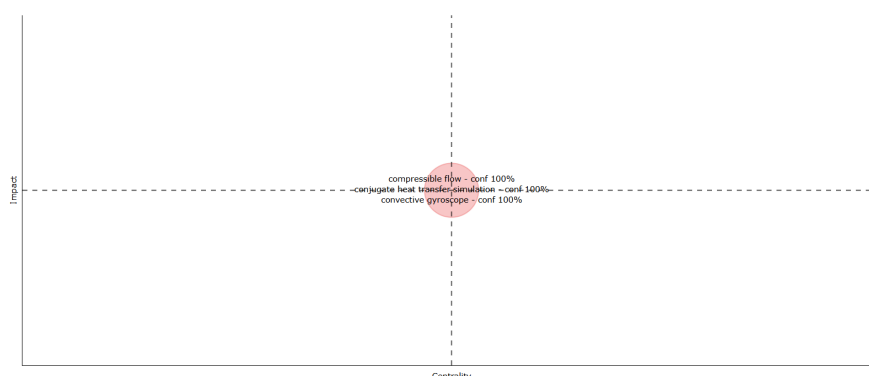


Figura 1.9: Mapa temático de temas de investigación en modelización de sensores de temperatura.

Con el fin de explorar las relaciones multidimensionales los términos frecuentes en resúmenes, autores y palabras clave, se genera un diagrama de Sankey (figura 1.10). Este esquema conecta tres dimensiones distintas extraídas del conjunto de datos:

- AB\_TM: términos más frecuentes en los resúmenes.
- AU: autor.
- ID: palabras clave.

Esta estructura ofrece una visión holística de cómo se distribuyen los temas de investigación en función de los términos frecuentes y los énfasis conceptuales. Así, se puede identificar los puntos fuertes de la investigación, las oportunidades de colaboración y las intersecciones poco exploradas que podrían servir como sustrato para futuras investigaciones.

A diferencia de la figura (1.7), donde se analizaba un conjunto bibliográfico más amplio en el que predominaban los estudios sobre termopares –debido a la inclusión del término genérico *temperature sensor*–, la figura (1.11) se focaliza de forma más precisa en los trabajos que abordan el uso de termistores NTC. En este caso, el mapa revela la estructura semántica de un campo aún incipiente, menos consolidado desde el punto de vista teórico, pero en clara evolución. Se observa cómo esta línea temática comienza a establecer conexiones con dominios aplicados de alta complejidad, como el análisis de flujo compresible, la respuesta térmica transitoria y las condiciones de estancamiento.

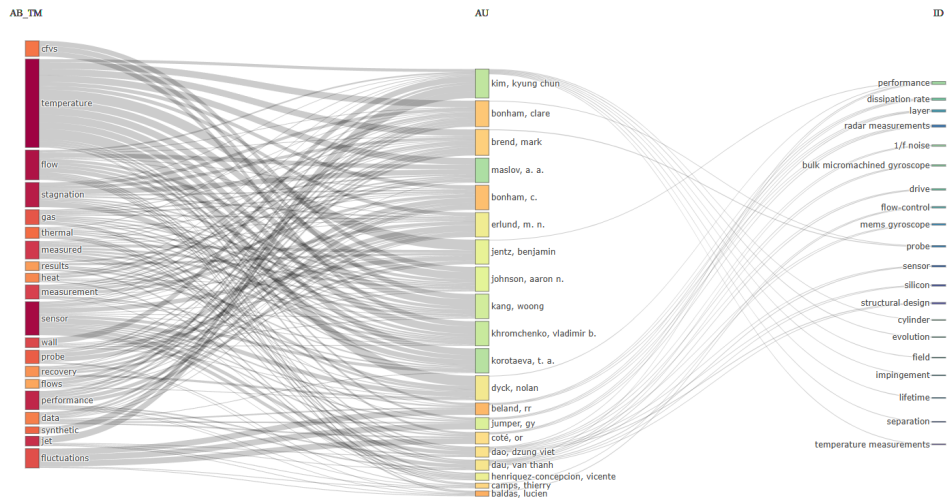


Figura 1.10: Diagrama de Sankey que relaciona los términos más frecuentes en los resúmenes, autores y palabras clave.

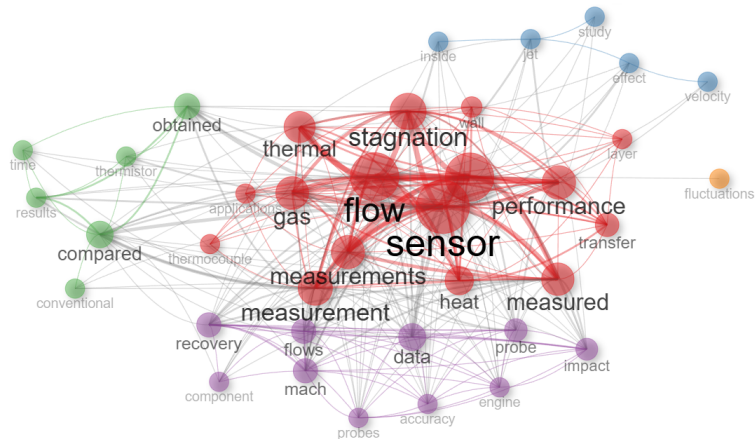


Figura 1.11: Red de co-ocurrencia de palabras clave en publicaciones sobre termistores en condiciones dinámicas (1999–2024).

Como conclusión, aunque los estudios sobre termistores NTC en flujos dinámicos aún ocupan una posición periférica respecto al discurso central, su incipiente asociación con conceptos clave como *stagnation*, *transient response* y *conduction losses* indica un potencial aún no plenamente explorado. Esta brecha temática, identificada mediante análisis bibliométrico, justifica el enfoque de esta tesis: desarrollar modelos avanzados para termistores en regímenes compresibles cuando el número de Biot tiende a cero, empleando formulaciones no convencionales que capturen con mayor precisión sus efectos dinámicos en condiciones reales de operación.

### 1.1.2. Importancia de la medición de temperatura en flujos compresibles.

La temperatura constituye una magnitud termodinámica fundamental, directamente vinculada con la energía cinética media de las partículas que conforman un sistema [28]. En medios fluidos, esta variable determina la distribución interna de energía térmica y condiciona propiedades macroscópicas como la presión, la densidad y la viscosidad dinámica.

Cuando un sensor de temperatura se introduce en un fluido, establece un intercambio térmico con el entorno mediante mecanismos de convección y radiación, hasta alcanzar el equilibrio térmico. La exactitud y velocidad con que el sensor replica la temperatura real del medio dependen de sus características térmicas (capacidad calorífica, masa, conductividad, geometría) y de las condiciones del flujo circundante (régimen laminar o turbulento, compresibilidad, número de Reynolds).

En el caso particular de flujos compresibles, donde la densidad del fluido experimenta variaciones notables asociadas a cambios de presión y temperatura, la medición de esta última adquiere un papel estratégico. La ecuación de estado para gases ideales se define como:

$$p = \rho R T \quad (1.1)$$

relacionando la presión ( $p$ ), la densidad ( $\rho$ ), la constante específica del gas ( $R$ ) y la temperatura absoluta ( $T$ ) [50]. Esta dependencia implica que variaciones térmicas afectan directamente la dinámica del flujo y sus propiedades aerodinámicas.

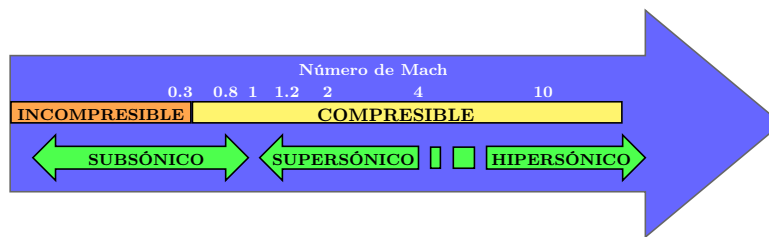


Figura 1.12: Esquema de los regímenes de flujo según el número de Mach: dominio incompresible y compresible.

A medida que el número de Mach ( $M$ ) se incrementa, las variaciones térmicas asociadas a los procesos de compresión y expansión adquieren relevancia, evidenciando el carácter compresible del flujo [51]. En este régimen, la temperatura total o de estancamiento se define como:

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (1.2)$$

donde  $\gamma$  es la razón de calores específicos. Esta temperatura representa el valor que alcanzaría el fluido si fuera desacelerado adiabáticamente hasta el reposo y constituye un parámetro fundamental en la caracterización de flujos compresibles en aplicaciones aeronáuticas e industriales [52].

La medición precisa de esta magnitud es crítica en múltiples contextos: en túneles de viento, mediante sondas especiales, se reconstruyen las condiciones reales del flujo [53]; en motores a reacción y turbinas de gas, se evalúa la eficiencia del ciclo y se previenen daños en los elementos; y durante reentradas atmosféricas, se diseña la protección térmica de vehículos aeroespaciales frente a condiciones extremas [54]. En todas ellas, se emplean sensores de temperatura como termistores, termopares y RTDs, que permiten monitorizar con precisión el comportamiento térmico en distintas etapas del sistema [55].

La medición de temperatura también desempeña un papel relevante en la detección de inestabilidades aerodinámicas, como el bombeo (*surge*) en compresores. Este fenómeno provoca oscilaciones bruscas de presión y temperatura, acompañadas de ruido y vibraciones que comprometen la fiabilidad y la integridad estructural del sistema mecánico [53, 55].

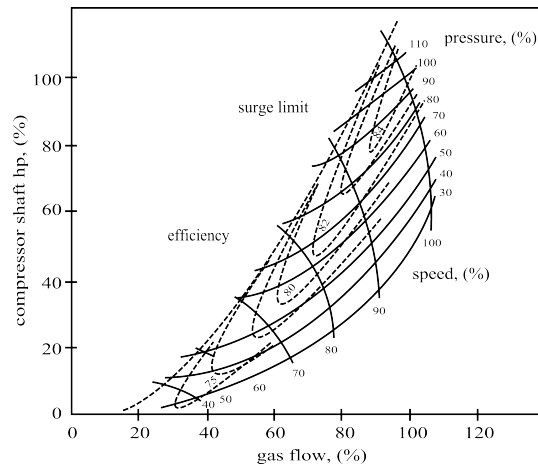


Figura 1.13: Mapa característico de un compresor centrífugo. Se muestran las curvas de eficiencia, líneas de velocidad y presión relativa, además del límite de bombeo [1].

Varios estudios han demostrado que, durante eventos de *surge* en compresores centrífugos y radiales, la compresión no estacionaria y la disipación térmica inducida por la recirculación del flujo generan un aumento local de temperatura en la zona de admisión, lo cual puede utilizarse como indicador

temprano de inestabilidad [56, 57]. En particular, Andersen et al. [56] identifican un incremento térmico previo al bombeo, asociado a oscilaciones de presión y flujo inverso, mientras que Kämmer y Rautenberg [57] atribuyen el calentamiento a mecanismos de pérdida como la separación del flujo y el desprendimiento (*stall*) en los álabes.

Ambos enfoques coinciden en que la monitorización de la temperatura estática en el conducto de entrada permite anticipar condiciones críticas de funcionamiento, reforzando su utilidad como herramienta diagnóstica para establecer márgenes de operación seguros en turbomáquinas. De ahí que se hayan propuesto estrategias basadas en la monitorización avanzada de la temperatura, las cuales combinan sensores de elevada respuesta dinámica con algoritmos de análisis de series temporales. Así, como se podrá comprobar en los desarrollos futuros de este trabajo, se plantea profundizar en el tratamiento en tiempo real de la señal térmica captada por el sensor, aplicando técnicas de *deconvolución* con el objetivo de recuperar la señal original del fluido y así mejorar la detección de fenómenos transitorios asociados al bombeo y a otros efectos no lineales [7, 58, 59].

Tal como se ha documentado, diversos estudios han señalado que la monitorización de la temperatura en la entrada del compresor constituye una herramienta eficaz para detectar el inicio del fenómeno de bombeo. En particular, la medición de la *temperatura estática* –frente a la más habitual *temperatura de estancamiento*, empleada en los diagramas *h-s*– proporciona una estimación más precisa del estado energético del fluido bajo condiciones inestables. La diferencia entre ambas magnitudes permite estimar indirectamente el salto de entalpía y, por ende, del contenido energético del flujo:

$$T_{01} - T_1 = \frac{v^2}{2c_p} \quad (1.3)$$

donde  $v$  es la velocidad del fluido y  $c_p$  su capacidad calorífica a presión constante. Esta formulación da lugar a realizar un seguimiento indirecto del estado dinámico del flujo, especialmente útil en condiciones transitorias. En efecto, dicho criterio posibilita una estimación más precisa de los niveles de entalpía asociados a los estados  $h_1$  y  $h_2$  (véase figura 1.14), contribuyendo así a la detección temprana de inestabilidades rotacionales y al diseño más robusto de turbomáquinas modernas.

En tendencias actuales como el *downsizing*, que implican una reducción del tamaño de los motores manteniendo altas prestaciones mediante sobrealimentación, surgen exigencias térmicas y aerodinámicas cada vez más estrictas en turbomáquinas. En este escenario, la detección anticipada de fenómenos como el bombeo, a través de una monitorización térmica de alta resolución, se convierte en un recurso clave para garantizar el rendimiento y la fiabilidad operativa de los compresores.

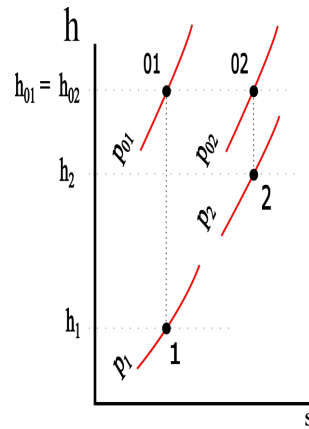


Figura 1.14: Diagrama h-s.

Por ende, la combinación de sensores con elevada respuesta dinámica, ensayos experimentales y validación mediante aproximaciones avanzadas proporciona un marco metodológico robusto para abordar los desafíos que plantea la medición térmica en flujos compresibles.

### 1.1.3. El papel de los sensores de temperatura en la medición de flujos compresibles.

La instrumentación de la temperatura en flujos compresibles se basa fundamentalmente en el empleo de termistores, termopares y RTDs, debido a su capacidad para captar con elevada precisión la evolución temporal de ésta en distintos regímenes de operación [55]. Esta característica resulta especialmente relevante en aplicaciones donde la dinámica del sistema es elevada, como en procesos transitorios o en aplicaciones de control en tiempo real.

En dichos escenarios, la capacidad del sensor para seguir fielmente las rápidas variaciones de temperatura –sin introducir distorsiones ni retardos significativos– se convierte en un requisito primordial para asegurar tanto la calidad metrológica de la señal como la fiabilidad del análisis experimental [60–63].

Entre las tecnologías disponibles, los termistores NTC y los termopares destacan por su rápida respuesta dinámica, versatilidad y fácil integración en sistemas de adquisición de datos de alta frecuencia de muestreo.

A continuación, se resumen sus características principales, ventajas y limitaciones, así como su comparación con otras tecnologías relevantes:

#### ■ Termistores NTC:

- Son componentes semiconductores cuyo valor de resistencia disminuye exponencialmente con el aumento de la temperatura, lo que les confiere una alta sensibilidad térmica [18, 64].



Figura 1.15: Diversos tipos de termistores NTC [2].

- Presentan coeficientes de temperatura elevados (típicamente entre  $-2\%K$  y  $-6\%K$ ), pudiendo detectar variaciones mínimas de temperatura y proporcionando una señal de salida fácilmente interpretable [64].
  - Masa térmica reducida y geometría compacta, lo que le permiten alcanzar constantes de tiempo del orden de milisegundos, convirtiéndolos en candidatos idóneos para el análisis de fenómenos transitorios [19, 60, 65].
  - Por indicar ventajas de los termistores NTC, disponen de:
    - Alta sensibilidad y precisión en rangos de temperatura moderados.
    - Respuesta térmica ultrarrápida y excelente repetibilidad.
    - Bajo coste y amplia disponibilidad en diversos formatos.
    - Facilidad de integración en sistemas embebidos y electrónicos portátiles.
    - Buena estabilidad a largo plazo y mínima deriva [18].
  - Referente a las limitaciones de estos sensores, se pueden citar:
    - Autocalentamiento inducido por la corriente de medición, que puede introducir errores si no se controla la disipación de potencia [66].
    - Rango de operación limitado, normalmente hasta  $300^{\circ}C$ .
    - Menor robustez mecánica frente a vibraciones o choques extremos en comparación con termopares [17].
- **Termopares:**
- Basados en el efecto Seebeck, generan una fuerza electromotriz proporcional a la diferencia de temperatura entre sus extremos, permitiendo su uso en un amplio rango de temperaturas (de  $-200$  a más de  $2000^{\circ}C$ ) [17, 63].



Figura 1.16: Diversos tipos de termopares industriales [3].

- Ofrecen tiempos de respuesta muy rápidos, especialmente en configuraciones de hilo fino y unión desnuda, lo que los hace aptos para la detección de eventos térmicos de alta velocidad [19, 67].
- Son robustos, resistentes a ambientes exigentes y presentan buena estabilidad a largo plazo.
- En cuanto a sus limitaciones, es posible destacar las siguientes:
  - Sensibilidad menor que los NTC, especialmente en rangos de temperatura moderados.
  - Requieren compensación de la unión de referencia para una medición precisa.
  - La señal de salida puede requerir un amplificador y acondicionamiento adicional, lo que los convierte más adaptables a entornos industriales, donde la inmunidad al ruido es primordial.

■ **Comparativa con otras tecnologías:**

- **RTD:** alta precisión y linealidad, pero tiempos de respuesta más lentos y coste superior. Además, tienen un comportamiento más lineal, si los comparamos con los NTC.

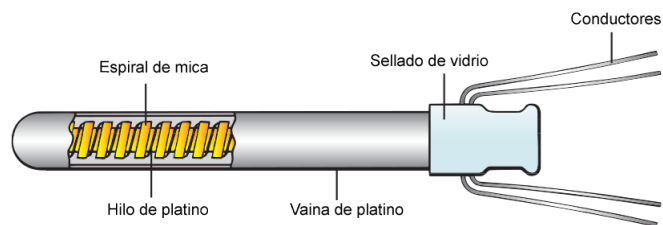


Figura 1.17: Sensor PT100 RTD [4].

- **Sensores de silicio:** buena integración electrónica, pero rango térmico limitado.

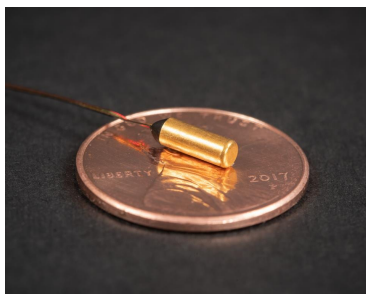


Figura 1.18: Sensor de temperatura de silicio [5].

- **Sensores ópticos y de fibra:** respuesta muy rápida, inmunidad a interferencias y operación en condiciones extremas, aunque con mayor coste y complejidad [6, 20, 68].

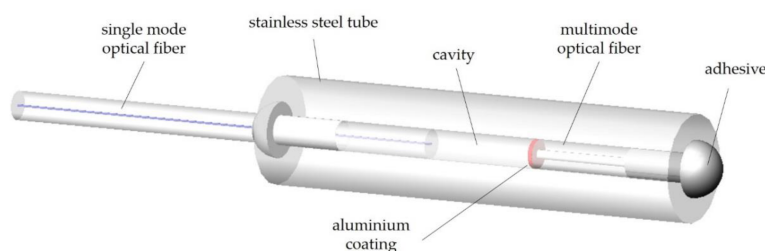


Figura 1.19: Sensor de fibra para aplicaciones médicas [6].

Tabla 1.1: Comparativa de sensores de temperatura para aplicaciones dinámicas [17–20].

Sensor	Rango temp. [°C]	Precisión	Tiempo de respuesta	Robustez	Coste
NTC	-100 a 300	Alta	ms	Baja-Mod.	Bajo
Termopar	-200 a 2500	Moderada	ms a s	Alta	Bajo/Medio
RTD	-200 a 850	Muy alta	0,5–5 s	Alta	Alto
Silicio	-50 a 150	Alta	<1 s	Baja	Bajo
Óptico (fibra)	-200 a 2000	Muy alta	$\mu$ s–ms	Muy alta	Alto

En base a lo que se ha expuesto, la selección del sensor de temperatura debe responder a un compromiso entre sensibilidad, tiempo de respuesta, durabilidad, rango operativo y coste, siempre en función de la naturaleza dinámica del fenómeno a medir. En el marco de esta investigación, se han seleccionado termistores NTC como sensores principales debido a su elevada sensibilidad, rápida respuesta térmica y facilidad de integración en sistemas

embebidos, tal y como se ha descrito. Estas cualidades, junto con su bajo coste y disponibilidad en formatos miniaturizados, los hacen especialmente adecuados para el análisis de variaciones de temperatura de alta frecuencia.

#### 1.1.4. Problemas e implicaciones del flujo de calor a través de los cables en la medición de temperatura.

Una medición precisa de temperatura en condiciones transitorias rápidas exige, además del uso de sensores con alta respuesta dinámica, la consideración rigurosa de todos los mecanismos de transferencia de calor implicados en el entorno sensor–cable. Distintos trabajos han documentado que la conducción de calor a través de los conductores se subestima o ignora frecuentemente en la instrumentación experimental y en los modelos clásicos de sensores, lo cual puede afectar de manera significativa la calidad de los resultados [42, 44, 45].

Tal como se evidencia en la figura (1.20), existe un flujo de calor a través de los cables que puede inducir errores sistemáticos y comprometer la fidelidad de la medición, especialmente en escenarios donde se requiere captar variaciones térmicas en escalas temporales del orden de milisegundos o inferiores. Este fenómeno resulta especialmente crítico en las siguientes circunstancias:

- Cuando el sensor presenta una masa térmica reducida, como ocurre con termopares coaxiales o termistores miniaturizados.
- Cuando los cables están expuestos a gradientes térmicos elevados o a fluctuaciones rápidas asociadas a escalas turbulentas.
- Cuando el tiempo característico del fenómeno a medir es similar o menor al tiempo de respuesta térmica del sistema sensor–cable.

En el uso de termopares coaxiales para la medición transitoria de flujos de calor, se ha demostrado que la conductividad térmica y la masa de los cables alteran la constante de tiempo efectiva del sistema (ver figura 2.1), comprometiendo la capacidad del sensor para registrar variaciones rápidas de temperatura y, por ende, la estimación precisa del flujo de calor superficial [42, 44]. Este fenómeno cobra especial relevancia en los termistores NTC, en los que la disipación de calor a través de los conductores puede llegar a igualar –o incluso superar– el intercambio térmico con el fluido circundante [32].

Con base en lo anterior, el tratamiento explícito del flujo de calor a través de los cables ha sido abordado rigurosamente en la literatura mediante modelos de conducción en medios semi–infinitos [31, 32]. En particular, la formulación de Lorenzo y Hartley [31] se basa en la solución transitoria de la ecuación de conducción de calor para un sólido semi–infinito, imponiendo

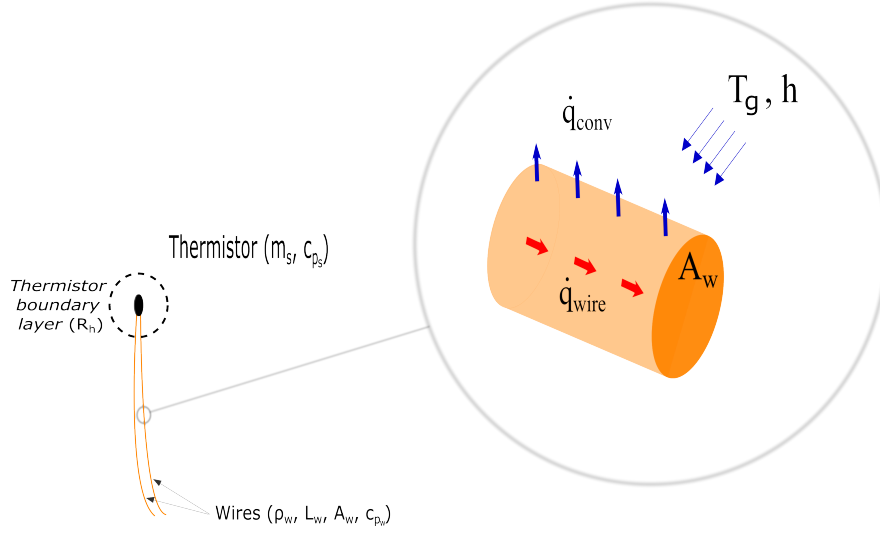


Figura 1.20: Esquema conceptual de un termistor NTC y detalle de los mecanismos de transferencia de calor: conducción a través de los cables ( $\dot{q}_{wire}$ ) y convección en la superficie expuesta ( $\dot{q}_{conv}$ ).

como condición de contorno la temperatura del sensor, en el que el flujo de calor a través de los cables ( $\dot{q}_{wire}(t)$ ), se expresa como:

$$\dot{q}_{wire}(t) = k_w \sqrt{\frac{\alpha_w}{\pi}} \int_0^t \frac{T_s(\tau) - T_0}{(t - \tau)^{1/2}} d\tau \quad (1.4)$$

donde  $k_w$  es la conductividad térmica del material del conductor,  $\alpha_w$  la difusividad térmica de dicho material,  $T_s(\tau)$  la temperatura en la interfaz sensor-cable en el instante  $\tau$  y  $T_0$  la temperatura del extremo.

Esto implica que la conducción de calor a través de los cables del sensor introduce efectos no locales que generan memoria térmica y retardos en el balance energético del sistema sensor-cable, dando lugar a respuestas no exponenciales que dificultan la reconstrucción precisa de señales rápidas [21, 31, 32]. Varios trabajos han demostrado la relevancia de estas pérdidas bajo condiciones dinámicas exigentes, proponiendo representaciones en el dominio de Laplace que modelan explícitamente la impedancia térmica de los conductores [30, 31].

Por lo tanto, omitir este fenómeno supone asumir condiciones de contorno idealizadas, lo que distorsiona la señal registrada y compromete la precisión de los modelos experimentales y de control. La presente investigación aborda esta limitación incorporando explícitamente el flujo de calor axial a través de los cables, extendiendo así el marco clásico de modelado térmico.

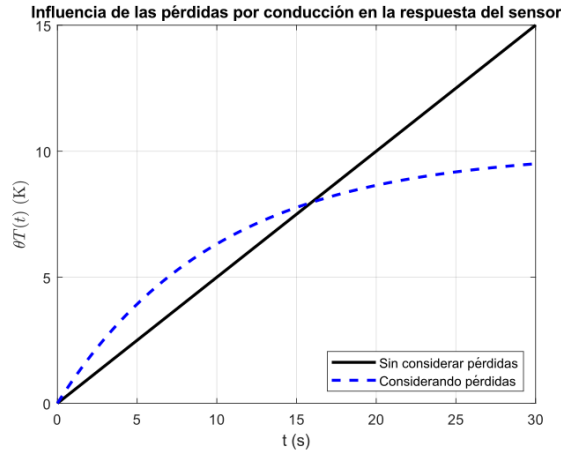


Figura 1.21: Respuesta de un sensor ideal (sin pérdidas por conducción) y la de un sensor real (con pérdidas por conducción).

## 1.2. Planteamiento del problema.

Para modelar de forma precisa la respuesta dinámica de un sensor de temperatura inmerso en un medio gaseoso, esta investigación parte del balance de energía del sistema sensor-entorno. A diferencia de los enfoques convencionales, en los que únicamente se consideran mecanismos de convección y fuentes externas de calor, aquí se plantea la necesidad de incorporar explícitamente el flujo de calor por conducción a través de los cables. Tal como se ha evidenciado, este mecanismo, frecuentemente ignorado, puede inducir errores significativos en condiciones transitorias rápidas, comprometiendo la fidelidad de la medición.

El foco de estudio está compuesto por tres elementos principales: el núcleo activo del sensor, idealizado como una geometría esférica; los conductores eléctricos que lo interconectan con el sistema de adquisición de datos; y una fuente de excitación térmica basada en un haz láser, la cual actúa como entrada escalonada de energía. Al estar inmerso en un gas con temperatura  $T_g$ , el sensor intercambia calor con el medio circundante a través de un flujo convectivo caracterizado por el coeficiente de transferencia de calor  $h$ . Además, se consideran pérdidas adicionales hacia el entorno, a temperatura  $T_{\text{surr}}$ , y hacia los cables, cuya masa y conductividad térmica son relevantes. La inclusión de estas contribuciones no convencionales será desarrollada y justificada con mayor detalle en el Capítulo 3.

La figura (1.22) ilustra de forma esquemática el modelo físico planteado. Se representa el núcleo del sensor como una región esférica con temperatura superficial  $T_s(r_0, t)$ , sometida a una excitación de entrada mediante un láser  $P_{\text{laser}}$ , un flujo convectivo hacia el gas  $\dot{q}_{\text{conv}}$ , un flujo hacia el entorno  $\dot{q}_{\text{surr}}$  y un flujo de conducción hacia los cables  $\dot{q}_{\text{wire}}$ . En la parte inferior derecha se

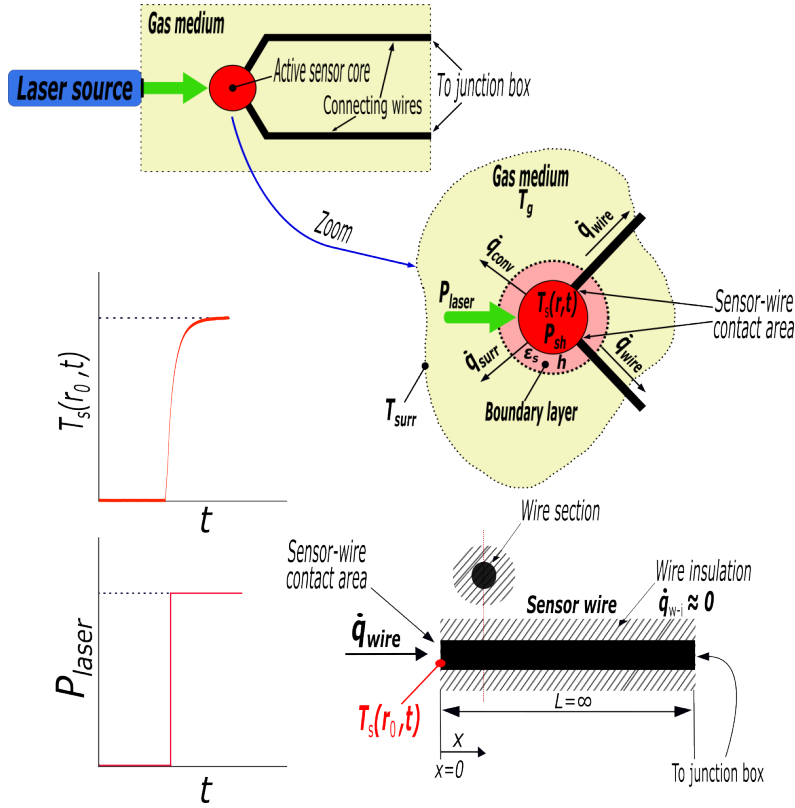


Figura 1.22: Representación esquemática del sistema sensor–cable en medio gaseoso, sometido a una excitación térmica mediante un pulso láser [7].

muestra el modelo de conducción axial en el cable, idealizado como un sólido semi–infinito ( $x \in [0, \infty)$ ) cuya temperatura en  $x = 0$  está determinada por la unión térmica con el sensor.

Establecidos los mecanismos de intercambio energético a través de la superficie del núcleo del sensor, es posible formalizar el balance de energía aplicado al sistema. Este balance contempla la energía absorbida por el sensor a través del láser, el autocalentamiento, las pérdidas por convección hacia el medio gaseoso, la disipación hacia el entorno circundante y la conducción térmica a través de los cables conectores. El modelo general queda representado mediante la siguiente ecuación:

$$P_{laser} + P_{sh} - \dot{q}_{conv} - \dot{q}_{surr} - \dot{q}_{wire} = m_s c_{p_s} \frac{dT_s(t)}{dt} \quad (1.5)$$

donde  $m_s$  representa la masa térmicamente activa del sensor,  $c_{p_s}$  su capacidad calorífica específica y  $T_s(t)$  la temperatura promedio en su superficie externa.

Así pues, el análisis de este sistema se enmarca en condiciones de ope-

ración en las que se busca una elevada sinergia térmica entre el sensor y el medio gaseoso, lo que da lugar a un número de Biot que tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ). Esta simplificación, ampliamente aceptada en la literatura, es conocida como modelo de parámetros concentrados [69], el cual se desarrollará en el siguiente capítulo.

No obstante, incluso bajo este régimen, el flujo de calor a través de los cables puede alcanzar valores significativos [70], especialmente en aplicaciones donde se utilizan sensores miniaturizados. Este efecto, que no está contemplado en el modelo convencional de primer orden, puede alterar de forma notable la respuesta térmica del sensor. Tal limitación justifica la necesidad de desarrollar modelos extendidos, más representativos del comportamiento real, como los que se introducirán en los capítulos posteriores.

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) representan el modelo térmico convencional que relaciona la constante de tiempo  $\tau$  con los números adimensionales de Biot y Fourier [28, 71, 72]. Por un lado, la ecuación (1.6) corresponde al caso en que la temperatura del gas  $T_g(t)$  varía con el tiempo, siendo  $T_s(t)$  la temperatura del sensor. En cambio, la ecuación (1.7) describe el comportamiento para un gas a temperatura constante  $T_g$ , partiendo de la condición inicial  $T_s(0) \neq T_g$ .

$$\begin{aligned} \tau \frac{dT_s(t)}{dt} + T_s(t) &= T_g(t) \\ T_s(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ T_s(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t T_g(s) e^{\frac{s}{\tau}} ds \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Bi} \frac{dT_s(Fo)}{dFo} + T_s(Fo) &= T_g(Fo) \\ \Rightarrow T_s(Fo) &= e^{-Bi Fo} \left[ T_s(0) + Bi \int_0^{Fo} T_g(s) e^{Bi s} ds \right] \end{aligned}$$

$$\tau \frac{dT_s(t)}{dt} + T_s(t) = T_g \quad \Rightarrow \quad \frac{T_s(t) - T_g}{T_s(0) - T_g} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{Bi} \frac{dT_s(Fo)}{dFo} + T_s(Fo) = T_g \quad \Rightarrow \quad \frac{T_s(Fo) - T_g}{T_s(0) - T_g} = e^{-Bi Fo}$$

Puede observarse que este modelo tiene en cuenta únicamente las propiedades térmicas del cuerpo del termistor y del fluido circundante. Aunque su desarrollo formal se abordará en detalle en los capítulos siguientes, lo que aquí se pretende es establecer la versión básica a partir de la cual se construirá toda la fundamentación matemática que sustenta las formulaciones propuestas.

### 1.3. Objetivos.

La presente tesis doctoral aborda el modelado dinámico de sensores de temperatura tipo termistor NTC en medios gaseosos en condiciones de flujos compresibles con alta variabilidad temporal. En estos entornos, la conducción de calor a través de los cables –frecuentemente ignorada en los modelos clásicos– adquiere relevancia, generando errores que afectan la precisión de la medición térmica.

Este fenómeno resulta especialmente crítico en aplicaciones como turbomáquinas, donde eventos como el bombeo generan transitorios localizados cuya detección temprana puede evitar fallos operativos. La interacción del sensor con estructuras vorticiarias, inestabilidades de la capa límite y escalas turbulentas como las de Kolmogórov exige una modelización de alto nivel.

En conjunto, los objetivos que se plantean permitirán establecer una base teórico–experimental para el diseño y selección de sensores de temperatura, con vistas al desarrollo de sistemas avanzados de adquisición capaces de incorporar correcciones dinámicas en tiempo real. Esta mejora contribuirá a prevenir fallos funcionales en turbomáquinas y a reforzar los esquemas de mantenimiento predictivo.

Por lo tanto, los objetivos de la presente investigación se estructuran de la siguiente manera:

#### Objetivo general:

Desarrollar y validar aproximaciones matemáticas que describan la dinámica térmica de sensores de temperatura tipo termistor NTC en presencia de flujos compresibles y en condiciones en que el número de Biot tiende a cero. Dichas aproximaciones incorporan explícitamente los efectos de conducción de calor a través de los cables mediante formulaciones en el dominio de Laplace y operadores fraccionales, con el fin de mejorar la deconvolución de la señal térmica original a partir de la respuesta medida del sensor bajo condiciones no ideales.

#### Objetivos específicos:

1. Formular dos aproximaciones complementarias para modelar el flujo de calor conducido a través de los cables del sensor:
  - Una formulación en el dominio de Laplace, basada en la solución de la ecuación de conducción para un sólido semi–infinito, que introduce una dependencia de tipo  $\sqrt{s}$  y cuya respuesta temporal se aproxima mediante una doble exponencial asociada a las constantes de tiempo del sensor y del conductor.

- Un enfoque alternativo en el dominio temporal, basado en la ecuación diferencial fraccional del balance energético de Caputo, resuelta numéricamente mediante el esquema de Grünwald–Letnikov, capaz de representar los efectos de memoria térmica y conducción no local.
2. Diseñar un protocolo experimental de validación en una cámara adiabática aislada, donde un termistor NTC es sometido a una excitación térmica escalonada mediante un pulso láser, replicando de forma controlada las condiciones de estancamiento características de flujos compresibles.
  3. Analizar la influencia de la conducción de calor a través de los cables sobre la respuesta dinámica del sensor, identificando los puntos de distorsión y evaluando el impacto sobre la reconstrucción (deconvolución) de la señal térmica original.

#### 1.4. Estructura del documento.

El presente documento se estructura en seis capítulos principales, organizados de manera lógica y progresiva para abordar integralmente la problemática de la medición de temperatura en flujos compresibles. La investigación combina el desarrollo de aproximaciones avanzadas, la caracterización experimental y la implementación de técnicas de instrumentación aplicadas a termistores NTC, caracterizados por su elevada respuesta dinámica.

El **Capítulo 1** introduce el contexto general de la tesis, revisando, mediante un análisis bibliométrico, los antecedentes científicos y el estado actual de la investigación. Se analiza la relevancia de la medición de temperatura en flujos compresibles, el papel de los sensores de alta respuesta transitoria y los efectos no ideales asociados a la conducción de calor a través de los cables. Asimismo, se plantea formalmente el problema de investigación y se definen los objetivos generales y específicos que guían el desarrollo de esta tesis.

En el **Capítulo 2** se exponen los fundamentos teóricos necesarios para este trabajo. Se abordan los principios de instrumentación, los mecanismos de transferencia de calor y parámetros clave como el número de Biot, el número de Grashof y las escalas de Kolmogórov. Además, se introducen el uso de operadores fraccionales para modelar efectos de memoria térmica.

Por otra parte, el **Capítulo 3** está dedicado al desarrollo de los modelos matemáticos que describen la dinámica de los sensores. Se parte de la ecuación de conducción del calor y se introducen extensiones que incorporan la conducción axial a través de impedancias térmicas del tipo  $\sqrt{s}$ , aproximadas mediante funciones racionales. Asimismo, partiendo del desarrollo numérico de la formulación basada en el operador de Grünwald–Letnikov del capítulo

anterior, se aborda el problema planteado. Es por ello que, este apartado constituye la base teórica sobre la que se construyen las dos aproximaciones propuestas: una en el dominio de Laplace y otra mediante cálculo fraccional.

Seguidamente, en el **Capítulo 4** se describe en detalle los materiales y métodos empleados en la investigación. En él, se incluyen los diseños experimentales, la metodología específica utilizada para la caracterización de los sensores y los procedimientos de tratamiento y análisis de datos. Este capítulo garantiza la reproducibilidad y transparencia de los experimentos realizados.

Es en el **Capítulo 5** donde se presentan y discuten los resultados. Se analiza la influencia del flujo de calor a través de los conductores en la respuesta del sensor y el desempeño comparativo de las dos aproximaciones propuestas. La discusión permite contrastar las predicciones teóricas con los datos experimentales, evaluar la validez de cada enfoque bajo diferentes condiciones de ensayo y analizar el efecto del régimen turbulento sobre la temperatura medida.

Finalmente, el **Capítulo 6** recoge las principales conclusiones de la tesis, destacando las aportaciones de ambas aproximaciones y su validación experimental. Asimismo, se plantean posibles líneas futuras de investigación orientadas a la mejora de los modelos desarrollados, la optimización de la instrumentación y su aplicación en entornos reales con flujos compresibles.

Esta estructura secuencial y coherente permite abordar de forma sistemática los distintos aspectos teóricos, metodológicos y experimentales relacionados con la determinación del comportamiento de flujos compresibles mediante la medida de temperatura, facilitando así la comprensión global y el alcance de las aportaciones realizadas en el marco de la presente tesis doctoral.



## Capítulo 2

# Fundamentos teóricos

*Si he visto más lejos es porque estoy  
sentado sobre los hombros de gigantes.*

Sir Isaac Newton

Este capítulo presenta los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo y análisis de las aproximaciones propuestas en esta tesis. Se abordan los principios de instrumentación para la medición de temperatura, estado del arte de los sensores y conceptos clave de transferencia de calor y dinámica de fluidos. Asimismo, se exploran las nuevas aproximaciones basadas en cálculo fraccional, estableciendo así el marco conceptual sobre el que se sustenta la investigación.

### 2.1. Introducción.

La temperatura, considerada un pilar fundamental de la termodinámica, ha sido objeto de múltiples definiciones a lo largo de la historia. Max Planck la definió como una magnitud que caracteriza el estado térmico de un cuerpo y determina la dirección del flujo de calor entre sistemas en contacto [73], mientras que el enunciado atribuido a R.H. Flower –base del *principio cero de la termodinámica*– establece que si dos cuerpos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces también lo están entre sí [74]. No obstante, estas definiciones, aunque sólidas, pueden resultar abstractas desde un enfoque operativo. Parte de esta dificultad radica en que la percepción del calor o el frío es subjetiva y está influida por la transferencia de energía térmica y propiedades como la difusividad del material en contacto.

Desde una perspectiva más rigurosa, es una consecuencia directa de la segunda ley de la termodinámica que cualquier par de motores térmicos reversibles que operen entre un foco térmico a alta temperatura  $T_2$  y otro a

baja temperatura  $T_1$  presenten siempre la misma eficiencia, expresada por:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{\text{energía útil obtenida}}{\text{energía total suministrada}} \right) \quad (2.1)$$

Esta expresión implica que, dado que la eficiencia de un ciclo térmico ideal depende exclusivamente del cociente entre dos temperaturas absolutas, dicha magnitud puede utilizarse, de forma recíproca, para establecer una definición operativa de la relación entre temperaturas desconocidas. Así se fundamenta la *escala de temperatura termodinámica*.

Si bien esta escala no tiene una aplicación directa en la medición cotidiana –pues resulta inviable operar un motor térmico idealizado como instrumento metrológico–, su importancia radica en que proporciona un marco teórico universal sobre el cual se sustentan los distintos dispositivos de medida.

Más allá de la percepción subjetiva, la física ofrece herramientas para definir y cuantificar la temperatura como una variable objetiva. Desde esta óptica, puede interpretarse como un nivel de energía térmica, análoga a la tensión eléctrica o a la altura en un campo gravitatorio. Así, la temperatura refleja el grado de agitación de las partículas que componen un sistema, permitiendo traducir en términos cuantificables aquello que intuitivamente reconocemos como frío o calor.

Esta visión consolida a la temperatura como una magnitud esencial en la termodinámica y en el estudio de fenómenos energéticos, tanto en condiciones de equilibrio como fuera de él. En consecuencia, su medición precisa constituye un eje transversal en disciplinas como la ingeniería, la ciencia de materiales, la medicina o la biología.

Bajo este panorama conceptual, se abre el camino hacia el objetivo específico de esta tesis: el análisis del comportamiento de flujos compresibles a través de la medición de temperatura. En este contexto, los sensores de temperatura no solo permiten registrar una magnitud física, sino que actúan como interfaces sensibles entre el flujo y el sistema de adquisición, siendo capaces –si se modelan adecuadamente– de revelar información sobre fenómenos de alta complejidad como los que se han hablado en el capítulo anterior.

## 2.2. Estado del arte de los sensores de temperatura.

### 2.2.1. Respuesta dinámica y el papel de la convolución en los sensores de temperatura.

El principio fundamental de la medición de temperatura reside en la capacidad de ciertos materiales o dispositivos para modificar una propiedad física en función de la temperatura, siempre que dicha propiedad sea cuantificable y reproducible. Este fundamento, ampliamente documentado en la

literatura especializada [21, 74], constituye la base del diseño y selección de sensores de temperatura en aplicaciones industriales y científicas.

La figura (2.1) muestra la respuesta típica de un sensor de temperatura ante una oscilación periódica en un medio gaseoso. Se observa que la señal registrada,  $T_s(t)$ , presenta un retardo y una atenuación respecto a la temperatura real del fluido,  $T_\infty(t)$ , como consecuencia de la inercia térmica del sensor y de la resistencia al intercambio de calor. Esta discrepancia, de naturaleza sistemática, depende directamente de la constante de tiempo del sensor, la cual limita su capacidad de seguimiento dinámico en situaciones transitorias.

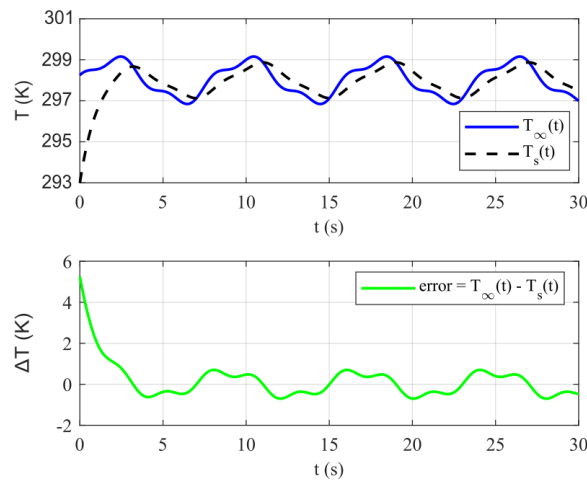


Figura 2.1: Respuesta de un sensor de temperatura con constante de tiempo conocida ante una variación de temperatura sinusoidal, incluyendo el error [7].

Este comportamiento puede formalizarse mediante el concepto de *convolución*, extensamente utilizado para modelar la respuesta dinámica de sensores como sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) [48, 75, 76]. En este enfoque, la señal registrada  $T_s(t)$  se interpreta como el resultado de la interacción entre la entrada térmica  $T_\infty(t)$  y la función de respuesta impulsiva del sistema sensor–fluido, denotada por  $h(t)$ :

$$T_s(t) = \int_0^t h(t - \tau) T_\infty(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Esta formulación implica que el sensor actúa como un filtro térmico de primer orden, capaz de atenuar las componentes de alta frecuencia de la señal de entrada [21, 74]. En el dominio de Laplace, la función de transferencia asociada al sistema puede escribirse como:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.3)$$

donde  $\tau$  representa la constante de tiempo del sensor. La ecuación 2.3 permite caracterizar la respuesta dinámica y evaluar el error sistemático introducido por efectos de inercia térmica o limitaciones en la transferencia de calor [7, 48, 58].

En consecuencia, la medida de temperatura debe interpretarse como una señal filtrada, donde la señal original  $T_\infty(t)$  es modificada por las limitaciones intrínsecas del sistema sensor [21, 48]. Este principio resulta esencial no solo para comprender las restricciones de la instrumentación convencional, sino también para desarrollar estrategias de *deconvolución* capaces de recuperar la señal original a partir de los registros experimentales, tal y como se explorará en los siguientes capítulos.

### 2.2.2. Fundamentos sobre los termistores NTC.

La literatura técnica reconoce que los termistores NTC destacan por su alta sensibilidad y reducido tamaño, lo que favorece su integración en sistemas de monitorización donde la rapidez de la respuesta y precisión en rangos de temperatura moderados son relevantes [77]. Sin embargo, su principal limitación radica en el rango de operación, habitualmente comprendido entre  $-100^\circ\text{C}$  y  $+300^\circ\text{C}$ , así como en su estabilidad a largo plazo, inferior a la de sensores como las termorresistencias (RTD) de platino. Estas características hacen que los termistores NTC sean especialmente adecuados en aplicaciones que priorizan la detección de pequeños cambios de temperatura y la miniaturización del sensor [77].

En procesos industriales caracterizados por cambios térmicos rápidos, la selección del sensor debe considerar tanto la sensibilidad como la velocidad de respuesta. Los termistores NTC, gracias a su baja masa térmica y elevada sensibilidad, son capaces de detectar variaciones de temperatura en escalas de tiempo muy cortas, convirtiéndolos en una opción preferente para el control térmico dinámico en sistemas de flujo compresible y otras aplicaciones críticas [77].

Estos dispositivos semiconductores están compuestos principalmente por óxidos metálicos –como los de níquel, manganeso, cobalto, cobre, hierro, titanio o magnesio– que presentan una sensibilidad térmica considerablemente mayor que la de sensores como las RTDs, aunque con menor estabilidad y una relación no lineal entre temperatura y resistencia (véase figura 2.2) [21, 64].

Existen dos tipos principales: los termistores de coeficiente de temperatura negativo (NTC), cuya resistencia disminuye al aumentar la temperatura, y los de coeficiente positivo (PTC), donde la resistencia aumenta. Los NTC son los más utilizados en aplicaciones de medida y control térmico debido a su mayor sensibilidad y velocidad de respuesta [18, 78].

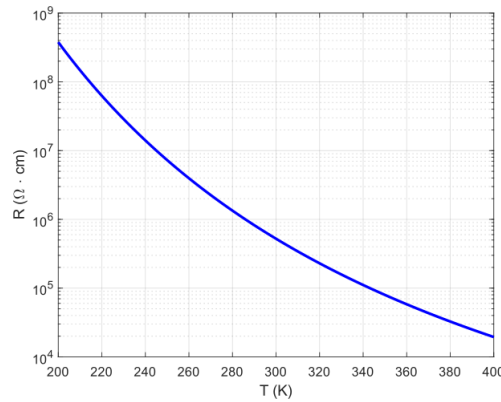


Figura 2.2: Curva de resistividad frente a temperatura para un termistor.

La alta sensibilidad, el tiempo de respuesta corto, el diseño compacto y el bajo coste hacen de los NTC una opción eficiente y versátil en aplicaciones industriales y científicas exigentes, donde se requiere detectar pequeñas fluctuaciones térmicas con elevada precisión [60, 64]. Además, como la medición de temperatura se realiza tanto en regímenes estacionarios –donde las variaciones térmicas son lentas– como en procesos transitorios, caracterizados por cambios térmicos rápidos, los errores de medida se vuelven función del tiempo y están condicionados tanto por la dinámica térmica del sistema como por la respuesta del sensor [48, 70].

Por ello, la excelente respuesta dinámica de los termistores NTC se explica, en gran medida, por su baja masa térmica y reducido volumen, lo que favorece una transferencia de calor eficiente con el entorno [64, 79]. Como se ha mencionado en el capítulo anterior, en este tipo de sensores se justifica la hipótesis de parámetros concentrados [28, 80], dado que el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ).

### 2.2.3. Tiempo de respuesta y comportamiento dinámico.

El tiempo de respuesta es un parámetro especialmente relevante en instrumentación, ya que cuantifica la rapidez con la que un sensor puede registrar cambios en la temperatura del medio circundante. Convencionalmente, se define como el tiempo necesario para que la señal de salida alcance un cierto porcentaje (usualmente el 63,2 % o el 90 %) del valor final tras un escalón térmico en la entrada [74].

En el caso de sensores que responden de manera similar a un sistema de primer orden –como muchos termistores NTC– la evolución temporal de la temperatura medida  $T(t)$  puede representarse mediante una ley exponencial decreciente:

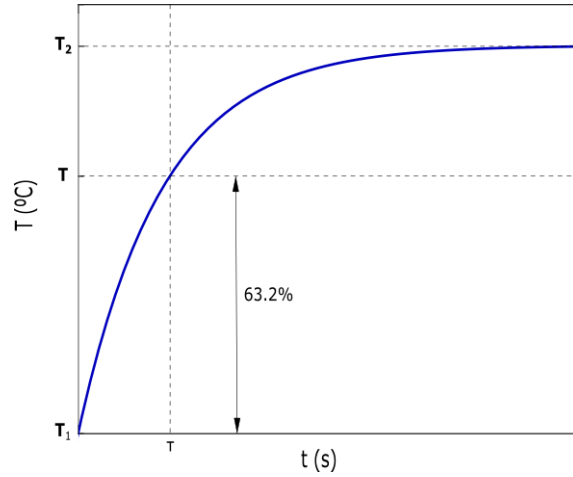


Figura 2.3: Respuesta exponencial a escalón de un sistema térmico de primer orden. La constante  $\tau$  corresponde al tiempo para alcanzar el 63,2 % del valor final, tal como se detalla en la tabla (2.1).

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.4)$$

donde  $T_0$  representa la temperatura inicial,  $T_{\infty}$  la temperatura del entorno, y  $\tau$  la constante de tiempo característica del sensor, dependiente de su capacidad calorífica  $c_{ps}$  y de la resistencia térmica del entorno  $R_h$ . Cabe destacar que, en el caso de termistores miniaturizados, el valor de  $\tau$  puede reducirse hasta escalas del orden de milisegundos, lo que permite registrar con fidelidad las fluctuaciones de temperatura asociadas a flujos altamente transitorios o turbulentos [60].

Tabla 2.1: Constante de tiempo térmica y evolución de la temperatura relativa.

Tiempo	Temperatura relativa $\frac{(T-T_1)}{(T_2-T_1)}$
$\tau$	63.2 %
$2\tau$	86.5 %
$3\tau$	95.0 %
$4\tau$	98.2 %
$5\tau$	99.4 %

Se observa en la figura (2.3) y en la tabla (2.1) que el comportamiento exponencial de sistemas de primer orden implica que tras cinco constantes de tiempo ( $5\tau$ ) el sensor alcanza el 99.4 % del valor final. Esta relación es

fundamental para determinar la frecuencia máxima de muestreo requerida en aplicaciones dinámicas, ya que establece el límite temporal para capturar variaciones térmicas sin distorsión.

Si bien la ecuación (2.4) ofrece una interpretación intuitiva del retardo ante perturbaciones súbitas, su validez se restringe a entradas tipo escalón. En situaciones más generales –como aquellas en las que se aplican señales arbitrarias o no estacionarias– el comportamiento dinámico del sensor se describe con mayor precisión mediante el formalismo de la *convolución* entre la entrada térmica y la respuesta impulsiva del sistema, tal como se expuso en secciones anteriores. Con lo cual, en esta línea, la ley exponencial constituye un caso particular, correspondiente a la respuesta del sistema de primer orden (ecuación 2.3) frente a una entrada escalón unitario.

En sistemas no lineales o con múltiples constantes de tiempo –como sensores con inercia térmica en cables o acoplamientos mecánicos–, la respuesta puede exhibir oscilaciones antes de estabilizarse (figura 2.4). Este fenómeno, descrito por ecuaciones diferenciales de segundo orden con factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ), muestra convergencia monotónica si  $\zeta > 1$  u oscilaciones amortiguadas si  $0 < \zeta < 1$  [75].

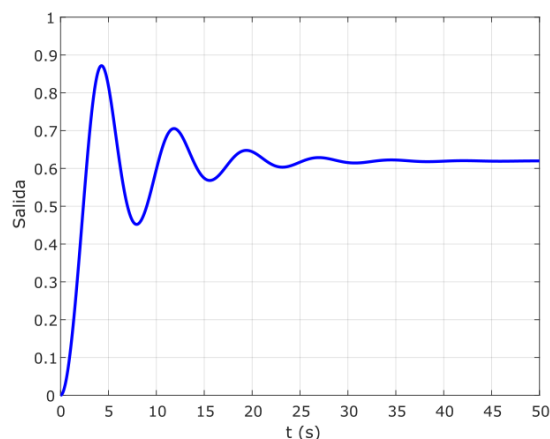


Figura 2.4: Respuesta oscilatoria a escalón en sistema térmico no lineal, típica de sensores con acoplamiento mecánico o inercia térmica distribuida.

La optimización del tiempo de respuesta depende de tres factores principales: el diseño del sensor (termopares expuestos responden más rápido pero son vulnerables a interferencias [81]), la geometría (diámetros  $< 1$  mm reducen la masa térmica [82]) y el entorno (la convección forzada acelera la transferencia de calor [80]). Como muestra la figura (2.5), un termopar tipo K expuesto logra  $\tau \sim 0,1$  s en aire, frente a los  $\tau \sim 2$  s de uno aislado [8].

En aplicaciones exigentes, como la medición en flujos compresibles, la elección de sensores con respuesta suficientemente rápida respecto a la diná-

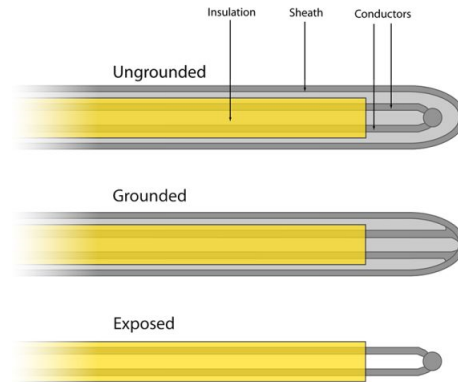


Figura 2.5: Termopar tipo K expuesto (abajo), aislado conectado a tierra (centro) y aislado no conectado a tierra (arriba) [8].

mica del fenómeno resulta esencial. Por ello, se recomienda validar experimentalmente su comportamiento mediante ensayos estandarizados y aplicar estrategias de compensación, como filtros inversos, para reducir el retardo inherente [12, 83]. Diversos estudios han demostrado que sensores de temperatura avanzados –como termopares coaxiales o termistores de película delgada– permiten registrar con precisión eventos transitorios intensos, siempre que su constante de tiempo sea adecuada y se combinen con técnicas robustas de calibración y modelado [44, 45]. Este enfoque garantiza mediciones fiables incluso bajo condiciones extremas.

## 2.3. Conceptos fundamentales.

### 2.3.1. Turbulencia y efectos transitorios en la medición de temperatura.

La turbulencia, fenómeno omnipresente en flujos ingenieriles, se caracteriza por fluctuaciones caóticas tridimensionales en las variables termofluidodinámicas, que modifican sustancialmente los procesos de transferencia de calor. En contextos de flujo compresible o convección forzada, esta variabilidad impone retos críticos a la instrumentación térmica debido a:

- La presencia de escalas temporales múltiples, que van desde los movimientos de gran escala hasta las estructuras disipativas microscópicas (escala de Kolmogórov), con tiempos característicos que pueden ser del orden de milisegundos o incluso microsegundos [84, 85].
- La aparición de gradientes térmicos locales intensos, que pueden supe-

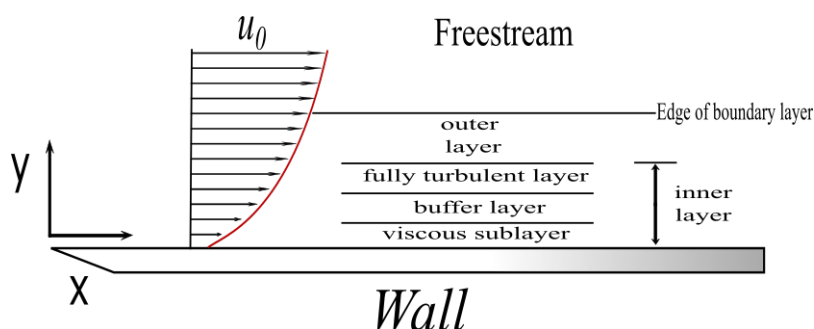


Figura 2.6: Estructura multiescala de la capa límite turbulenta, mostrando la subcapa viscosa ( $y^+ < 5$ ), región buffer ( $5 < y^+ < 30$ ), y capa turbulenta externa [9].

rar los  $10^6 \frac{W}{m^2}$  en configuraciones turbulentas con flujos de alta velocidad [45, 86].

- La sensibilidad de los sensores convencionales al retardo dinámico inducido por su constante de tiempo, limitando su capacidad para capturar eventos transitorios de alta frecuencia [44, 48].
- El efecto de la anisotropía térmica inducida por las estructuras coherentes del flujo (vórtices, capas límite inestables), que alteran la distribución espacial de la temperatura alrededor del sensor [87, 88].

En flujos turbulentos cercanos a paredes o sensores embebidos, la transferencia de calor se ve fuertemente influida por la estructura interna de la capa límite. Ésta se divide, de forma clásica, en tres regiones: la *subcapa viscosa* ( $y^+ < 5$ ), dominada por efectos disipativos; la *región buffer* ( $5 < y^+ < 30$ ), de transición entre flujo laminar y turbulento; y la *capa turbulenta externa*, donde las fluctuaciones tridimensionales son predominantes. La figura (2.6) ilustra esta organización multiescala, comúnmente descrita mediante la coordenada adimensional  $y^+$  [86].

La dinámica térmica de los sensores ubicados en estas regiones depende de su constante de tiempo. En particular, cuando el sensor se encuentra inmerso en la subcapa viscosa o en la zona buffer, debe poseer una capacidad de respuesta suficientemente rápida para captar las variaciones térmicas asociadas a las estructuras turbulentas coherentes, altamente intermitentes. Esta exigencia justifica la necesidad de recurrir a modelos térmicos de alta fidelidad, capaces de representar tanto efectos de difusión retardada como mecanismos de transferencia no local [48, 70].

Estas condiciones hacen imprescindible el uso de sensores de elevada respuesta dinámica, así como el desarrollo de formulaciones matemáticas avanzadas que incorporen memoria térmica y fenómenos no ideales [60].

Se describen a continuación, la interacción simultánea de tres mecanismos físicos fundamentales:

### Dinámica vorticial y transporte térmico:

Los vórtices en la capa límite (figura 2.6) generan:

- Mezcla turbulenta con coeficientes de difusión efectiva  $10^3 - 10^5$  mayores que la molecular.
- Fluctuaciones de temperatura en la región *buffer* [89].
- Gradientes térmicos locales que distorsionan lecturas puntuales [90].

### Respuesta dinámica del sensor:

La constante de tiempo determina la fidelidad de la medición:

- Para  $\tau > \frac{1}{f_v}$  (frecuencia de desprendimiento de vórtices), se producen errores por atenuación y desfase.
- Resonancias en  $f_v \approx \frac{1}{2\pi\tau}$  pueden amplificar los errores de la medición [79].

### Modelado y corrección numérica:

Comprende estrategias validadas experimentalmente [70, 91], como por ejemplo:

- Modelos *RANS*:  $k-\epsilon$  realizable muestra mejor desempeño para flujos con desprendimiento.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) para el transporte de energía cinética turbulenta, combinada con modelos de función de transferencia inversa, permite reconstruir la temperatura real en flujos supersónicos [30].

- Técnicas *LES*: capturan el 95 % de las escalas vorticiales relevantes.
- Filtrado adaptativo: filtros Kalman–Wiener.

En resumen, la influencia de la turbulencia y los efectos transitorios en la medición de temperatura impone limitaciones significativas sobre la fidelidad de los sensores. Para mitigar estos efectos, es fundamental considerar el posicionamiento adecuado de los sensores (evitando la región *buffer*, por ejemplo con  $y^+ > 30$ ) y seleccionar tecnologías con una baja constante de

tiempo (como los termistores NTC). Estos enfoques, junto con los avances en técnicas de optimización inversa [92] y aprendizaje automático [93], permiten estimar con alta precisión parámetros clave como la difusividad térmica y el coeficiente de transferencia de calor, incluso en condiciones altamente dinámicas.

Por lo tanto, la comprensión de la turbulencia y su impacto en la medición de temperatura requiere, además del análisis de la dinámica de vórtices y la respuesta del sensor, la caracterización de las escalas espaciales y temporales que definen la estructura del flujo.

### 2.3.2. La escala de Kolmogórov: la huella dactilar de la turbulencia.

Para comprender la dinámica de la turbulencia, resulta esencial revisar brevemente su descripción matemática. La formulación moderna de la dinámica de fluidos comenzó con los trabajos pioneros de Leonhard Euler (1707–1783), y posteriormente se enriqueció con las contribuciones de Claude–Louis Navier (1785–1836) y George Gabriel Stokes (1819–1903). Gracias a ellos, hoy sabemos que el movimiento de un fluido de viscosidad  $\nu$  y densidad  $\rho$  está gobernado por las ecuaciones de conservación del momento, conocidas como ecuaciones de Navier–Stokes (N–S). En el caso de un fluido homogéneo ( $\rho \equiv cte$ ), la conservación de la masa implica  $\nabla \cdot v = 0$  y las ecuaciones de Navier–Stokes se escriben:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 v \quad (2.6)$$

donde  $p$  es la presión y  $v$  es el campo de velocidades. Estas ecuaciones muestran la competición entre diferentes fuerzas que actúan en el fluido:

- $\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$  son los términos inerciales. El primero indica la variación temporal de la velocidad, mientras que el segundo, que es no lineal, describe la advección,
- $-\frac{\nabla p}{\rho}$  es la fuerza interna debida a la presión,
- $\nu \nabla^2 v$  es el término de difusión debido a la viscosidad del fluido.

La competición entre el término no lineal advectivo y el término lineal difusivo define el número de Reynolds ( $Re$ ), en el que cuanto mayor sea éste, más importante es el término advectivo frente al difusivo, lo que conduce a una dinámica más turbulenta.

En régimen turbulento, la fuerte no linealidad de las ecuaciones de Navier–Stokes dificulta enormemente su tratamiento analítico. Por ello, desde la física se han desarrollado dos aproximaciones principales para comprender la turbulencia: la fenomenológica y la estadística.

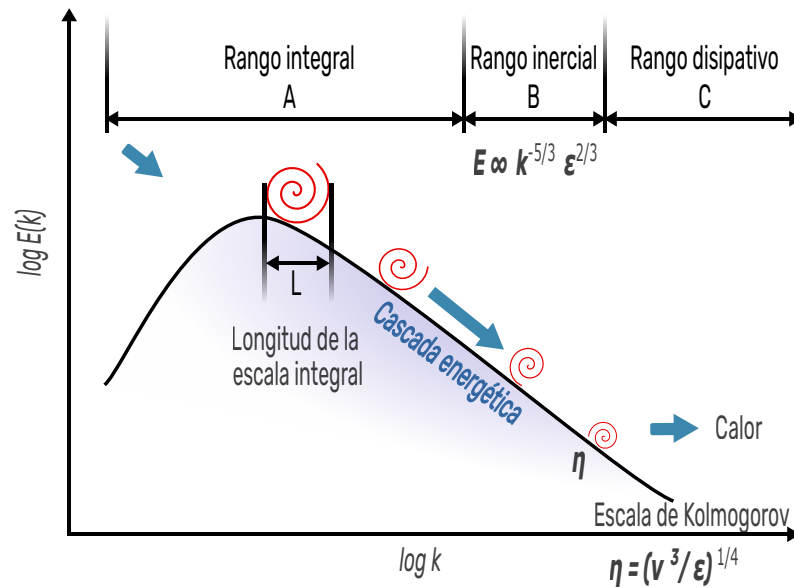


Figura 2.7: Cascada energética y densidad espectral de energía  $E(k)$  en función del número de onda  $k$ . Se distinguen los rangos integral, inercial y disipativo, así como la ley de Kolmogórov en el rango inercial,  $E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ .

En 1921, Lewis Fry Richardson (1881–1953) presentó una visión de la turbulencia que todavía prevalece, según la cual la turbulencia se describe como una jerarquía de torbellinos de diferentes tamaños, con una cascada de energía de los grandes vórtices hacia los pequeños [94] (figura 2.7). A modo de poema, el propio Richardson expresó:

Vórtices grandes dan lugar a vórtices pequeños, alimentados por su velocidad, y los pequeños llevan a incluso más pequeños, y así hasta la viscosidad.

En inglés original:

Big whirls have little whirls, which feed on their velocity, and little whirls have lesser whirls, and so on to viscosity.

Esta descripción implica que la energía es inyectada en el sistema a través de las grandes escalas, mientras que es en las pequeñas escalas donde la energía es finalmente disipada. Así, la turbulencia se revela como un fenómeno multiescala (figura 2.7).

Sin embargo, fue necesario esperar hasta mediados del siglo XX para que Andrey Nikolayevich Kolmogórov (1903–1987) desarrollara la primera teoría estadística capaz de caracterizar y describir la turbulencia como un fenómeno multiescala. Inspirado por la visión de Richardson, Kolmogórov construyó la

teoría conocida como "Kolmogórov 1941"(K41). Esta teoría distingue tres dominios de escalas en la turbulencia:

- **Región integral:** contiene las grandes escalas, iguales o mayores que la escala integral  $L$ , a través de las cuales la energía es inyectada al sistema.
- **Región inercial:** contiene las escalas menores que  $L$  pero mayores que la escala de disipación  $\eta_K$ . En este dominio, la energía fluye de las grandes hacia las pequeñas escalas.
- **Región disipativa:** contiene las escalas menores que  $\eta_K$ , en las cuales la energía es disipada.

La región inercial se caracteriza por una dinámica dominada por el término advectivo sobre el difusivo en las ecuaciones de Navier–Stokes, mientras que en el dominio disipativo el término difusivo domina. Para desarrollar su teoría, Kolmogórov formuló dos hipótesis fundamentales [95]. En primer lugar, si el número de Reynolds tiende al infinito, las pequeñas escalas (menores que la escala integral  $L$ ) de la turbulencia son estadísticamente isotropas e independientes de las grandes escalas [96]. En segundo lugar, el comportamiento de los incrementos de velocidad en la región inercial puede caracterizarse estadísticamente mediante leyes de escala.

Gracias a estas hipótesis, Kolmogórov demostró que el incremento de velocidad a una escala  $l$  en la región inercial puede aproximarse como:

$$\delta_l v(x) = v_x(x+l) - v_x(x) \approx \epsilon^{\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}} \quad (2.7)$$

Esta relación conduce a comportamientos específicos de leyes de escala para los momentos estadísticos de los incrementos de velocidad [95]:

$$\delta_p(l) \equiv \langle (\delta_l v)^p \rangle = C_p (\epsilon^{\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}})^p \quad (2.8)$$

donde  $S_p(l)$  son las funciones de estructura,  $p$  es el orden de la función de estructura y  $C_p$  son constantes de universalidad. A partir del comportamiento en leyes de escala de la función de estructura de orden dos,  $S_2(l) = C_2 \epsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}}$ , se obtiene la distribución espectral de energía de un flujo turbulento (figura 2.7):

$$E\left(\frac{1}{l}\right) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{l}\right)^{-\frac{5}{3}} \quad (2.9)$$

Estas relaciones son válidas para cualquier escala  $l$  en la región inercial, donde no hay ni inyección directa de energía ni disipación directa, sino un flujo de energía  $\Pi$  desde la escala integral  $L$  hacia la escala disipativa  $\eta_K$ .

En consecuencia, el flujo de energía  $\Pi$  debe ser independiente de la escala e igual a la tasa media de disipación de energía:

$$\Pi \approx \frac{\langle (\delta_l v(x))^3 \rangle}{l} \approx \langle \epsilon \rangle \quad (2.10)$$

La escala de Kolmogórov ( $\eta$ ) representa el tamaño mínimo de los vórtices en un flujo turbulento, donde la energía cinética es finalmente disipada por efectos viscosos. Se define como:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.11)$$

siendo  $\nu$  la viscosidad cinemática y  $\epsilon$  la tasa de disipación de energía turbulenta. Esta escala determina la resolución espacial requerida para capturar todas las fluctuaciones relevantes del flujo. Para un sensor con diámetro  $d$ , la condición  $d < \eta$  garantiza que el dispositivo no promediará fluctuaciones térmicas asociadas a vórtices subdesarrollados [84].

La teoría de Kolmogórov también postula que, en flujos turbulentos de alto número de Reynolds, la energía cinética se transfiere desde los vórtices grandes (escala integral  $L$ ) hasta los pequeños (escala  $\eta$ ) a través de un proceso de cascada inviscida [97]. Este mecanismo establece que la tasa de disipación de energía puede aproximarse como:

$$\epsilon \sim \frac{u_L^3}{L} \quad (2.12)$$

teniendo que  $u_L$  es la velocidad característica a escala  $L$ . La relación entre escalas viene dada por:

$$\frac{L}{\eta} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (2.13)$$

En la práctica, para un túnel de viento con  $L = 1$  m y  $Re = 10^7$ , esto implica  $\eta \approx 30 \mu m$ , lo que desafía los límites de la instrumentación convencional. Este ejemplo ilustra por qué sensores de temperatura miniaturizados son necesarios para resolver fluctuaciones en flujos compresibles. Además, la correcta caracterización de flujos turbulentos impone condiciones estrictas sobre el diseño de los dispositivos de medida. En primer lugar, la resolución espacial debe ser tal que el diámetro del sensor cumpla para evitar el promediado de las fluctuaciones térmicas asociadas a vórtices subdesarrollados [84]. En segundo lugar, es necesario considerar la escala temporal asociada a  $\eta$ , definida como:

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

De esta forma, la frecuencia de muestreo de un sensor debe ser superior al doble de la frecuencia característica asociada a la escala de Kolmogórov [84], es decir:

$$f_{\text{muestreo}} > \frac{1}{\pi \tau_{\eta}} \quad (2.15)$$

para evitar el fenómeno de *aliasing* y, por consiguiente, la pérdida de información relevante sobre las fluctuaciones térmicas del flujo. Esto implica que, además de su miniaturización, los sensores deben poseer una capacidad de respuesta dinámica acorde con las escalas temporales más pequeñas presentes en el régimen turbulento.

### 2.3.3. Número de Grashof: turbulencia en convección natural.

Como complemento al análisis de la escala de Kolmogórov, resulta interesante considerar el número de Grashof ( $Gr$ ) en situaciones donde la convección natural es dominante. Este número adimensional cuantifica la relación entre las fuerzas de flotabilidad –originadas por diferencias de temperatura o densidad– y las fuerzas viscosas que se oponen al movimiento del fluido:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} \quad (2.16)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica,  $\Delta T$  la diferencia de temperatura característica,  $L$  una longitud representativa del sistema y  $\nu$  la viscosidad cinemática. Valores bajos de  $Gr$  (típicamente  $Gr < 10^8$ ) indican predominancia viscosa y flujo laminar, mientras que valores altos ( $Gr > 10^9$ ) señalan flotabilidad predominante y transición a la turbulencia.

El número de Grashof ( $Gr$ ), análogo al número de Reynolds en convección natural, constituye un parámetro clave para predecir la transición de flujo laminar a turbulento en ausencia de forzado externo. A diferencia del  $Re$ , que depende de una velocidad impuesta, el  $Gr$  emerge de las diferencias de densidad inducidas por gradientes térmicos, gobernando así la aparición de movimientos convectivos espontáneos [80, 98].

A medida que aumentan las diferencias de temperatura, el crecimiento de  $Gr$  favorece la formación de estructuras vorticiales que alteran tanto la escala espacial relevante como el valor efectivo del gradiente térmico. Este fenómeno modifica la distribución local de temperatura y complica la interpretación de la transferencia de calor, especialmente cuando se emplean sensores miniaturizados [45, 48].

En estos escenarios, la interacción entre turbulencia y convección natural no solo afecta la ubicación óptima de los sensores, sino que también exige modelos de corrección dinámica que consideren la reducción del gradiente

térmico efectivo ( $\Delta T_{\text{efectivo}}$ ) y la variabilidad de la longitud característica local. La caracterización precisa del número de Grashof ( $Gr$ ) y su influencia sobre el campo térmico medido resulta, por tanto, fundamental en configuraciones donde predominan flujos naturales o mixtos [83, 86].

En la práctica,  $Gr$  orienta en el diseño y selección de sensores de temperatura. Para valores moderados ( $Gr < 10^8$ ) es posible aplicar modelos laminares simplificados. Sin embargo, en configuraciones altamente convectivas ( $Gr > 10^9$ ) el régimen turbulento requiere sensores de alta frecuencia y algoritmos de procesamiento avanzado (filtros de Kalman, wavelets) para registrar correctamente las fluctuaciones.

Con ello, la correlación clásica entre el número de Nusselt ( $Nu$ ) y el producto adimensional  $Gr Pr$  permite cuantificar la eficiencia de la transferencia de calor:

$$Nu = C (Gr Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{laminar}) \quad (2.17)$$

$$Nu = C (Gr Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{turbulento}) \quad (2.18)$$

donde  $Pr$  es el número de Prandtl y  $C$  es un coeficiente que depende de la geometría y condiciones de contorno. La validez de estas expresiones requiere una elección adecuada de la longitud característica  $L_c$  y una evaluación contextual del régimen de flujo [80].

En situaciones donde el sensor presenta un diámetro reducido o la diferencia de temperatura entre el núcleo y el medio gaseoso es moderada, el número de Grashof puede tomar valores bajos ( $Gr < 1$ ), lo que atenúa significativamente la convección natural. En este límite, el número de Nusselt tiende a su valor mínimo teórico  $Nu \rightarrow 2$ , indicando que el mecanismo dominante en la transferencia de calor es la conducción a través de la capa límite. Esta condición es especialmente relevante en sensores miniaturizados, donde se justifica la adopción de un coeficiente de transferencia de calor constante y la simplificación de modelos estacionarios [7].

La figura (2.8) muestra la transición entre flujo laminar y turbulento en una placa vertical calentada. En las proximidades de la superficie, los gradientes térmicos intensos elevan el valor local de  $Gr$ , favoreciendo la aparición de estructuras turbulentas a medida que  $Ra_x = Gr_x Pr$  supera  $10^9$ . Esta distribución espacial condiciona la ubicación de los sensores de temperatura, pues la presencia de vórtices puede inducir errores significativos en la medición.

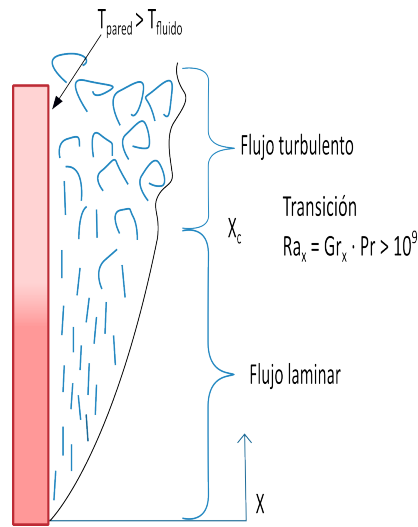


Figura 2.8: Perfil de temperatura y velocidad en una capa límite turbulenta sobre una placa vertical [10].

#### 2.3.4. Número de Reynolds: transición y régimen turbulento en flujos compresibles.

Como se ha visto, el número de Reynolds ( $Re$ ) constituye uno de los parámetros adimensionales más relevantes en mecánica de fluidos, al cuantificar la relación entre fuerzas inerciales y viscosas en un flujo. Su definición clásica es:

$$Re = \frac{\rho U L_c}{\mu} = \frac{U L}{\nu} \quad (2.19)$$

donde:

- $U$  es la velocidad característica del flujo ( $\frac{m}{s}$ ),
- $L_c$  la longitud característica del sistema (m),
- $\rho$  la densidad del fluido ( $\frac{kg}{m^3}$ ),
- $\mu$  la viscosidad dinámica ( $Pa \cdot s$ ),
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  la viscosidad cinemática ( $\frac{m^2}{s}$ ).

En flujos compresibles, el número de Reynolds no solo determina el régimen de flujo (laminar, transitorio o turbulento), sino que también condiciona la aparición de estructuras vorticiales, ondas de choque y fenómenos de capa límite, especialmente en presencia de gradientes de presión o geometrías complejas [50–52].

La transición a la turbulencia suele ocurrir para valores críticos de  $Re$

que dependen del tipo de flujo y las condiciones de contorno. En conductos, típicamente  $Re_{cr} \sim 2300$ , mientras que en flujos externos, como sobre una placa plana, el umbral se sitúa en  $Re_x \sim 5 \cdot 10^5$  [52, 84]. Más allá de este valor, las fuerzas inerciales dominan y el flujo se vuelve caótico, con transporte mejorado de masa, cantidad de movimiento y energía térmica.

Desde la perspectiva de transferencia de calor, la turbulencia inducida por altos números de Reynolds reduce las capas límite térmicas y eleva el coeficiente de transferencia de calor  $h$ , lo que tendrá implicaciones directas en la respuesta dinámica de los sensores utilizados, ya que reducirá la constante de tiempo  $\tau$ . Como han señalado Sommer et al. [99], el modelado de flujos térmicos turbulentos cercanos a pared requiere el uso de modelos específicos de transporte turbulento de calor, como los de dos ecuaciones o formulaciones tipo  $k$ - $\epsilon$  corregidas para conductividad térmica.

### 2.3.5. Número de Biot y análisis de parámetros concentrados.

El número de Biot ( $Bi$ ) es un parámetro adimensional fundamental en el análisis térmico de sensores, ya que permite determinar la validez de modelos simplificados que suponen un comportamiento térmico homogéneo en el interior del sólido. Su expresión matemática (ecuación 2.20), relaciona el coeficiente de convección  $h$ , la longitud característica del cuerpo  $L_c$  y su conductividad térmica  $k$ . Desde un punto de vista físico,  $Bi$  representa la razón entre la resistencia térmica por convección en la superficie y la resistencia interna por conducción, una relación que puede deducirse de forma análoga a los circuitos de resistencias térmicas en serie [80, 100]:

$$Bi = \frac{\text{Resistencia a la convección}}{\text{Resistencia a la conducción}} = \frac{\frac{1}{hA}}{\frac{L_c}{kA}} = \frac{h L_c}{k} \quad (2.20)$$

Cuando el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ) la resistencia térmica interna del sensor resulta despreciable frente a la convección superficial, lo que permite asumir que la temperatura del sólido es espacialmente uniforme y evoluciona únicamente con el tiempo. Esta hipótesis sustenta el modelo de parámetros concentrados (*Lumped Capacitance Model*), ampliamente utilizado por su simplicidad y eficacia en análisis transitorios [21, 80]. Con ello, la dinámica térmica puede describirse mediante una única ecuación diferencial ordinaria, cuya solución ante un escalón térmico se expuso en la ecuación (2.4) y se ilustró en la figura (2.3).

Un ejemplo representativo de esta condición es el de una esfera metálica de 1 cm de radio ( $L = 0,01$  m) sumergida en aire con coeficiente de transferencia de calor  $h = 10 \frac{W}{m^2 K}$  y conductividad térmica  $k = 200 \frac{W}{m K}$ , que da lugar a un número de Biot aproximado de  $Bi \approx 0,0005$ , validando plenamente esta aproximación [21].

En el extremo opuesto, cuando  $Bi \gg 1$ , la resistencia interna domina y se generan gradientes térmicos significativos dentro del sólido, lo que obliga a utilizar modelos distribuidos. Por ejemplo, un bloque de madera de 10 cm en agua agitada ( $h = 1000 \frac{W}{m^2 K}$ ,  $k = 0,15 \frac{W}{m K}$ ) presenta un número de Biot superior a 600, situación que exige resolver ecuaciones diferenciales parciales para describir el comportamiento térmico [74].

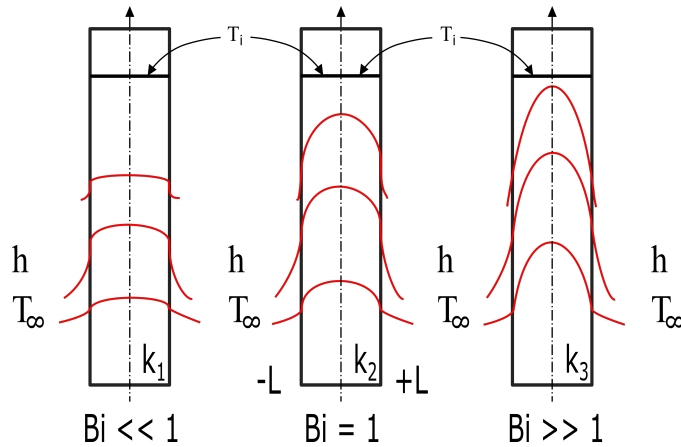


Figura 2.9: Perfiles de temperatura en sólidos para distintos valores de  $Bi$  [11, 12].

Tabla 2.2: Umbrales del número de Biot y aplicaciones típicas.

Condición	$Bi$	Aplicación
Parámetros concentrados	$< 0,1$	Termistores en aire, electrónica
Transición	$0,1 - 1$	Sensores en líquidos a baja velocidad
Modelo distribuido	$> 1$	Procesos industriales de alta energía

No obstante, en el contexto de flujos compresibles, el incremento de la velocidad del fluido conlleva un aumento significativo del coeficiente de transferencia de calor, lo que puede invalidar la hipótesis de parámetros concentrados incluso en sensores miniaturizados. En estos casos, resulta imprescindible recurrir a estrategias de compensación dinámica, como el uso de modelos híbridos o filtros inversos, que permiten corregir la distorsión inducida por la inercia térmica y la transferencia no uniforme [83].

Por ende, comprender el significado físico del número de Biot y su relación con el perfil de temperatura interno del sensor resulta primordial tanto para validar modelos analíticos como para optimizar el diseño geométrico y material del dispositivo.

### 2.3.6. Número de Fourier.

El número de Fourier ( $Fo$ ), por su parte, es otro parámetro adimensional fundamental en la transferencia de calor que describe el progreso del proceso de difusión térmica a lo largo del tiempo [27, 98], y se define como:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (2.21)$$

donde:

- $t$  es el tiempo (s),
- $\alpha$  es la difusividad térmica del material ( $\frac{m^2}{s}$ ), definida como  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ , siendo :
  - $k$  la conductividad térmica ( $\frac{W}{mK}$ ).
  - $\rho$  la densidad ( $\frac{kg}{m^3}$ ).
  - $c_p$  el calor específico a presión constante ( $\frac{J}{kgK}$ ).
- $L_c$  es la longitud característica del sistema (m), que se estima habitualmente como el cociente entre el volumen del cuerpo y el área superficial a través de la cual se transfiere calor.

En términos físicos, el número de Fourier ( $Fo$ ) cuantifica la relación entre la cantidad de energía en forma de calor que se transfiere desde la superficie y la que es almacenada internamente en el sólido durante un intervalo temporal dado [27, 98]. Cuando  $Fo \ll 1$ , la perturbación térmica no ha penetrado significativamente en el material; a medida que  $Fo$  aumenta, la difusión progresa hacia un estado más cercano al equilibrio térmico (ver figura 2.9). Esta característica convierte a  $Fo$  en una *variable temporal adimensional*, que permite analizar y comparar la evolución transitoria de sistemas térmicos diversos bajo un mismo marco de referencia [27, 72]. Además, la combinación de  $Fo$  con  $Bi$  posibilita expresar los resultados empleando la temperatura adimensional como variable dependiente. Esto facilita la comparación entre condiciones experimentales distintas y la validación de modelos bajo un enfoque generalizado [27, 98].

En este trabajo, esta estrategia se ha adoptado como base para presentar los resultados experimentales y numéricos, como se detallará en los capítulos correspondientes. Así, tanto el tiempo adimensional ( $Fo$ ) como la representación logarítmica de la temperatura en función de  $Bi$  constituyen herramientas fundamentales para el análisis de la respuesta térmica y la evaluación de las aproximaciones propuestas.

### 2.3.7. Longitud característica.

La longitud característica es un parámetro geométrico importante en transferencia de calor y mecánica de fluidos que sirve para definir las escalas espaciales dominantes del fenómeno térmico o del flujo estudiado [27, 72, 98]. Su especificación adecuada es esencial para la correcta adimensionalización de las ecuaciones y la interpretación física de los números adimensionales como Biot, Fourier o Grashof, ya expuestos anteriormente.

En el campo de transferencia de calor, la longitud característica suele definirse como el cociente entre el volumen del sólido y el área superficial a través de la cual se realiza el intercambio térmico. Esta definición proporciona una medida representativa del tamaño efectivo del cuerpo respecto a la transferencia interna y externa de calor. Esto permite cuantificar con precisión la resistencia térmica interna en comparación con la resistencia externa, facilitando la adecuada aplicación y análisis del número de Biot (ecuación 2.20).

En la convección natural o en la forzada, la longitud característica se relaciona con la dimensión representativa que determina la escala del movimiento del fluido desplazado, como la altura de una placa vertical o el diámetro de un cilindro, y es clave para el cálculo de números tales como Grashof o Reynolds.

Su correcta definición asegura la comparabilidad y generalización de resultados experimentales y simulaciones, permitiendo escalar la respuesta térmica y dinámica de sensores y sistemas a diferentes condiciones y geometrías. Por ello, en la presentación de resultados adimensionales, la longitud característica es la base para construir variables universales como la temperatura adimensional en función del número de Fourier y la relación con el número de Biot, herramientas indispensables para el análisis y validación metrológica detallada.

## 2.4. El cálculo fraccional como herramienta para el análisis de transferencia de calor.

La historia del cálculo fraccional es casi tan antigua como la del cálculo diferencial clásico. Su primera referencia documentada se remonta a una carta fechada en 1695, cuando Guillaume de l'Hôpital consultó a Leibniz sobre el significado de la derivada de orden  $n = \frac{1}{2}$  en la notación  $\frac{D^n f(x)}{dx^n}$ . La enigmática respuesta de Leibniz fue: *“una aparente paradoja de la que algún día surgirán consecuencias útiles”*. Con ella, anticipó con notable intuición la importancia futura de esta extensión de la diferenciación [101, 102].

En la actualidad, el cálculo fraccional se ha consolidado como una herramienta matemática esencial para describir procesos físicos con efectos de memoria y fenómenos no locales. En particular, en ingeniería térmica, la

utilización de operadores fraccionales –diferenciales e integrales– proporciona ventajas significativas frente a los modelos clásicos basados en derivadas enteras. Estos operadores permiten representar fielmente sistemas donde el estado actual depende de la historia térmica acumulada [23, 103, 104].

Un caso paradigmático es la aparición natural de derivadas fraccionales de orden  $\frac{1}{2}$  al resolver la ecuación de conducción de calor en dominios semi–infinitos, lo cual da lugar a núcleos del tipo  $(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}$ . Esta formulación describe una respuesta térmica con dependencia temporal, característica de mecanismos no locales, que escapan a la descripción clásica [69, 105].

No obstante, a pesar de su mayor capacidad descriptiva, las ecuaciones diferenciales fraccionales presentan importantes desafíos analíticos. En general, no existen soluciones cerradas para los problemas de contorno con derivadas de orden no entero [105], lo que ha motivado el desarrollo de estrategias numéricas adaptadas desde el cálculo convencional. Entre los métodos más utilizados para la resolución de este tipo de ecuaciones destacan:

- Métodos de diferencias finitas con discretización fraccional [106].
- Técnicas espectrales basadas en funciones ortogonales [107].
- Resolución mediante funciones de Green generalizadas.
- Aproximaciones analíticas mediante funciones de Mittag–Leffler, que generalizan la exponencial clásica y aparecen de forma natural en sistemas lineales fraccionales [107].

Aunque estos métodos requieren mayores requerimientos computacionales y validaciones exhaustivas, han demostrado mejorar sustancialmente la precisión de las aproximaciones de sistemas térmicos complejos, especialmente en el tratamiento de la respuesta dinámica de sensores sometidos a gradientes térmicos de alta frecuencia [12].

Así, el cálculo fraccional no debe considerarse simplemente una extensión formal del cálculo clásico, sino un marco teórico fundamental que permite la formulación de modelos avanzados. Además, facilita la obtención de funciones de transferencia generalizadas en el dominio de Laplace, tales como  $\frac{1}{\sqrt{s}}$ , cuya interpretación física favorece la comprensión de la dinámica observada [7].

Este marco conceptual sienta las bases para el desarrollo posterior de aproximaciones matemáticas que integran formulaciones clásicas y generalizadas, orientados a describir con fidelidad el comportamiento dinámico de sensores de temperatura bajo condiciones reales y no ideales.

A continuación, se pasa a definir formalmente el concepto de memoria térmica, el cual constituye uno de los fundamentos que justifican el uso de operadores fraccionales en problemas de transferencia de calor transitoria.

Tras esta explicación, se presenta un resumen de las principales definiciones y funciones empleadas en el cálculo fraccional, con énfasis en las formulaciones basadas en transformadas integrales –como las definiciones de Riemann–Liouville y Caputo–, así como en los enfoques numéricos derivados del procedimiento de Grünwald–Letnikov, los cuales resultan fundamentales para el análisis desarrollado en esta tesis. Asimismo, aprovechando el contexto, se introduce la función de Mittag–Leffler, dada su relevancia como solución tipo en este ámbito.

### 2.4.1. Memoria térmica en materiales: justificación física del cálculo fraccional.

En 1822, J. Fourier formuló por primera vez en su tratado sobre transferencia de calor que la razón de conducción térmica a través de una placa plana es proporcional a la diferencia de temperatura a través de la misma y al área de transferencia de calor, pero inversamente proporcional al espesor de dicha placa [28]. Cuando el espesor de la placa tiende a cero, esta expresión puede representarse en forma diferencial como:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = -k A \frac{dT}{dx} \quad (2.22)$$

en donde la constante de proporcionalidad  $k$  es la conductividad térmica del material.

Sin embargo, esta ley implica una propagación térmica con velocidad infinita, lo que es incompatible con ciertos fenómenos observados en materiales reales y en configuraciones experimentales específicas [108, 109]. En contextos en los que se produce un almacenamiento local de energía o donde existen estructuras con elevada resistencia térmica interna –como en conductores eléctricos finos, materiales estratificados o sensores miniaturizados– el flujo de calor no solo depende del gradiente de temperatura actual, sino también de su evolución histórica.

Esta manifestación térmica con dependencia de eventos pasados se conoce como *memoria térmica*, y ha sido ampliamente documentada tanto en estudios teóricos como en aplicaciones experimentales [23, 26, 103, 104]. El fenómeno se evidencia, por ejemplo, en los retardos en la respuesta de sensores de temperatura ante excitaciones de forma no estacionaria, en la presencia de incrementos térmicos elevados o en la evolución asimétrica entre fases de calentamiento y enfriamiento en medios heterogéneos. En todos estos casos, la temperatura superficial y el flujo de calor no están relacionados de forma local en el tiempo, lo cual invalida el uso exclusivo del planteamiento clásico de conducción.

Para representar adecuadamente estos efectos de *herencia térmica*, se hace necesario incorporar operadores que acumulen el historial del sistema de forma ponderada en el tiempo. Es en este ámbito donde el cálculo fraccional

ofrece una herramienta particularmente potente. Las derivadas fraccionales –tales como las definidas por Caputo o por Grünwald–Letnikov– permiten modelar sistemas con memoria mediante integrales convolucionales con núcleos tipo potencia [110, 111]. Esta formulación resulta coherente con el comportamiento clásico del sólido semi-infinito, donde el flujo de calor en la frontera presenta una dependencia de tipo  $t^{-\frac{1}{2}}$ , equivalente a una derivada fraccional de orden  $\frac{1}{2}$ .

Por lo tanto, el uso de operadores fraccionales puede capturar, en una formulación unificada, el retardo dinámico observado en las mediciones de temperatura bajo condiciones transitorias. A continuación, se expondrán diferentes formulaciones específicas que permiten describir esta dinámica con mayor precisión.

### 2.4.2. Transformadas integrales.

En el campo del cálculo fraccional, se han propuesto diversas formulaciones basadas en transformadas integrales. Entre ellas, las más ampliamente utilizadas en aplicaciones físicas e ingenieriles son las definiciones de derivada fraccional de Riemann–Liouville y de Caputo. Ambas se fundamentan en integrales de tipo convolución, pero difieren en el orden en que se aplica la diferenciación respecto a la integración, lo cual tiene implicaciones importantes en la interpretación física y en las condiciones iniciales requeridas [102, 105, 111, 112].

#### Derivada de Riemann–Liouville:

La derivada fraccional de Riemann–Liouville de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , con  $n - 1 < \alpha < n$ , se define como:

$${}^RL D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (2.23)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  es el menor entero que satisface  $n > \alpha$ , y  $\Gamma(\cdot)$  denota la función Gamma de Euler [110, 112]. Esta formulación tiene carácter no local y resulta útil para modelar sistemas donde la memoria del estado anterior desempeña un papel fundamental [102, 110, 113]. No obstante, su interpretación física puede ser menos intuitiva, dado que las condiciones iniciales deben expresarse en términos de derivadas fraccionales.

#### Derivada de Caputo:

Con el fin de resolver esta dificultad práctica, Caputo propuso una definición alternativa, en la cual la derivación de orden entero se realiza sobre la función antes de la integración [110, 114]:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (2.24)$$

donde  $f^{(n)}(\tau)$  representa la derivada ordinaria de orden  $n = \lceil \alpha \rceil$ . Esta formulación es especialmente adecuada para problemas físicos e ingenieriles, ya que permite la imposición de condiciones iniciales tradicionales en términos de valores de la función y sus derivadas enteras [113, 115].

Ambas definiciones, la de Riemann–Liouville y la de Caputo, coinciden para funciones suficientemente regulares, pero difieren cuando estas presentan discontinuidades o singularidades en el instante inicial. En la práctica, la selección entre una u otra depende del sistema a modelar y del tipo de condiciones iniciales que se pueden imponer [114, 116].

### **Propiedades analíticas de las derivadas fraccionales:**

Una propiedad fundamental de las formulaciones fraccionales es su acción sobre funciones monomiales. En particular, la derivada de Riemann–Liouville aplicada a una potencia entera se expresa como [110, 114]:

$${}^RL D_t^\alpha (t^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}, \quad k \geq 0 \quad (2.25)$$

lo que generaliza la regla clásica de derivación para órdenes enteros. A partir de esta expresión se deduce que existen combinaciones particulares de  $k$  y  $\alpha$  para las cuales el operador fraccional anula la función:

$${}^RL D_t^\alpha (t^{\alpha-j}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \lfloor \Re(\alpha) \rfloor + 1 \quad (2.26)$$

mostrando que ciertas potencias pertenecen al núcleo del operador fraccional [113, 116]. Esta propiedad resulta especialmente útil en la construcción de soluciones mediante series generalizadas.

Cabe destacar que, mientras las expresiones anteriores se han planteado en el marco de la derivada de Riemann–Liouville, la siguiente propiedad es de carácter más general y puede extenderse también a la derivada de Caputo (bajo las condiciones de regularidad adecuadas). Por ejemplo:

$${}_0 D_t^{n\alpha} (t^{\alpha(k+1)-1}) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\alpha(k-n+1))} t^{\alpha(k-n+1)-1} \quad (2.27)$$

donde  $n, k \in \mathbb{N}$ . Este tipo de expresión es especialmente relevante en la resolución analítica y espectral de ecuaciones diferenciales fraccionales.

En conjunto, estas propiedades analíticas proporcionan las herramientas para modelar procesos de transferencia de calor con memoria térmica [101, 107], como los analizados en este trabajo.

### 2.4.3. Derivada fraccional de Grünwald–Letnikov: formulación numérica.

Dentro del conjunto de definiciones existentes en el cálculo fraccional, la derivada de Grünwald–Letnikov (GL) destaca por su carácter constructivo y su aplicabilidad directa en esquemas numéricos [107, 110]. Esta formulación representa una generalización de la derivada clásica basada en diferencias finitas, extendida a órdenes no enteros.

La expresión general de la derivada fraccional de orden  $\alpha$  según Grünwald–Letnikov es [107, 110]:

$${}^{\text{GL}}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (2.28)$$

donde  $h$  representa el paso temporal,  $\binom{\alpha}{j}$  son los coeficientes generalizados dados por:

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha - j + 1)}, \quad (2.29)$$

Esta definición permite aproximar derivadas fraccionales a partir de datos discretos  $f(t_j)$ , siendo especialmente adecuada para sistemas con memoria o historia térmica.

Cabe destacar que, frente a otras formulaciones como Riemann–Liouville o Caputo, la derivada de Grünwald–Letnikov presenta una estructura recurrente y fácilmente adaptable a esquemas numéricos, lo que la convierte en la base de numerosos algoritmos de integración numérica en problemas de transferencia de calor no local y sensores con efecto de memoria térmica [115–117].

### 2.4.4. Función de Mittag–Leffler.

Esta función constituye una generalización directa de la exponencial clásica y aparece de forma natural en la solución de ecuaciones diferenciales e integrales de orden fraccional. Su papel es análogo al que cumple la función exponencial en sistemas dinámicos de orden entero, siendo clave en la descripción de fenómenos con memoria y respuestas dinámicas no locales [107, 110, 112].

La forma más simple es la función de un solo parámetro:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0 \quad (2.30)$$

Una versión más general y de uso extendido en cálculo fraccional es la

función de dos parámetros:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha), \Re(\beta) > 0 \quad (2.31)$$

Esta expresión reduce a la función exponencial en el caso particular:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \quad (2.32)$$

Además, existe una generalización con tres parámetros, introducida por Prabhakar, que extiende aún más su aplicabilidad:

$$E_{\alpha,\beta}^{\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\delta+k)}{k! \Gamma(\delta)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \Re(\alpha), \Re(\beta), \Re(\delta) > 0 \quad (2.33)$$

Una de las razones fundamentales por las que esta función es tan utilizada en ingeniería es su comportamiento bajo la transformada de Laplace [112, 118]. Por ejemplo, para su forma de dos parámetros se cumple:

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha}) \right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp a} \quad (2.34)$$

De forma análoga, para la versión de tres parámetros se obtiene:

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\delta}(\pm at^{\alpha}) \right\} = \frac{s^{\alpha\delta-\beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{\delta}} \quad (2.35)$$

Estas expresiones resultan especialmente valiosas en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionales, al permitir la representación de soluciones mediante formas racionales generalizadas en el dominio de Laplace. En el ámbito de los sensores de temperatura, la función de Mittag-Leffler proporciona una herramienta matemática eficaz para describir fenómenos caracterizados por retardo, memoria térmica y respuestas dinámicas [119, 120].

Aunque en el presente trabajo no se recurre directamente a soluciones basadas en dicha función, se reconoce su utilidad como extensión natural para futuros desarrollos.

#### 2.4.5. Validación conceptual y diferencias estructurales entre definiciones fraccionales.

Para ilustrar las propiedades del cálculo fraccional de forma accesible y validar su aplicabilidad, se analiza el caso simple  $x(t) = t$ , cuya derivada fraccional puede calcularse analíticamente. Aplicando la expresión (2.25) al caso particular  $k = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , se obtiene:

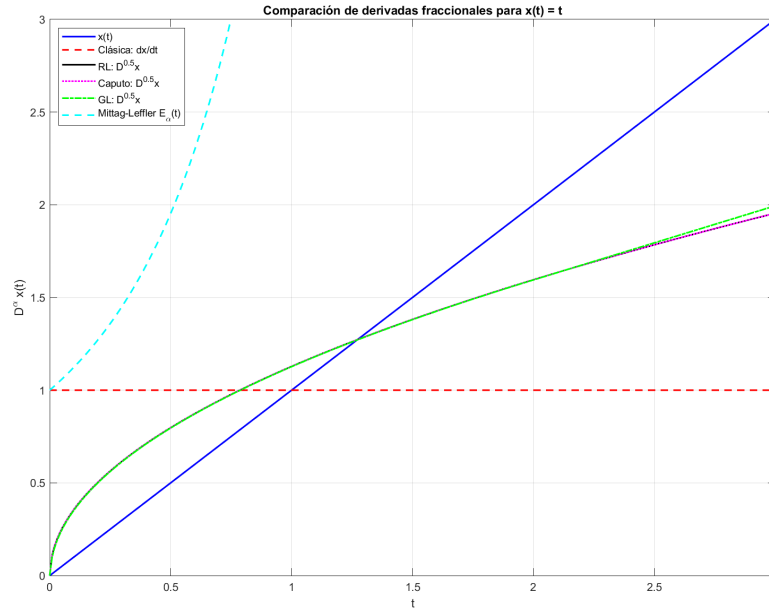


Figura 2.10: Comparación entre la derivada clásica y las derivadas fraccionales de orden  $\alpha = \frac{1}{2}$  aplicadas a  $x(t) = t$ .

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

una función creciente y sublineal, que evoluciona más lentamente que la función original  $x(t) = t$ , pero supera en magnitud a su derivada clásica, constante e igual a uno.

La figura (2.10) representa gráficamente este comportamiento, comparando:

- la función original  $x(t) = t$  (línea azul),
- su derivada clásica  $\frac{dx}{dt} = 1$  (línea roja discontinua),
- las derivadas fraccionales de orden  $\alpha = \frac{1}{2}$ , calculadas según Riemann–Liouville, Caputo y Grünwald–Letnikov,
- y la función de Mittag–Leffler  $E_{\frac{1}{2}}(t)$  (línea cian discontinua), incluida como solución tipo en sistemas fraccionales homogéneos.

En este ejemplo, las formulaciones fraccionales coinciden prácticamente, ya que derivan una función analítica con condiciones iniciales nulas. En cambio, la función de Mittag–Leffler, que si bien no corresponde a una derivada fraccional directa de  $x(t)$ , representa la solución típica de un sistema fraccional ante un escalón. Su evolución más rápida y forma convexa ilustra

el comportamiento acumulativo de sistemas con memoria. Este resultado es coherente con la teoría y refuerza la validez conceptual del uso de derivadas fraccionales en el modelado de fenómenos térmicos con efectos no locales.

De manera análoga, a continuación se analiza la sensibilidad de estas definiciones ante funciones con discontinuidades o derivadas clásicas no definidas. Para ello, se emplea como caso de estudio la función escalón unitario  $u(t)$ , definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

función que representa un cambio brusco típico en fenómenos térmicos transitorios.

### 1. Derivada de Riemann–Liouville:

A partir de su definición integral (ecuación 2.23), se obtiene que:

$${}^RL_0 D_t^\alpha u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t > 0, \quad (2.38)$$

lo cual implica una respuesta no nula y singular en el origen. Este comportamiento tiene implicaciones físicas relevantes, ya que refleja la existencia de una memoria instantánea infinita en el instante inicial.

### 2. Derivada de Caputo:

Para el mismo orden y función, la derivada de Caputo resulta ser:

$${}^C_0 D_t^\alpha u(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

dado que la función es constante en  $t \geq 0$  y su derivada clásica es nula, anulando así la integral fraccional. Esta discrepancia entre RL y Caputo pone de manifiesto que la elección del operador no es una mera cuestión formal, sino que afecta directamente a la interpretación física del modelo.

### 3. Aproximación numérica mediante Grünwald–Letnikov:

Para validar numéricamente estas formulaciones, se implementa el operador de Grünwald–Letnikov (GL) de la ecuación (2.28), evaluando:

$${}^{GL}_0 D_t^\alpha u(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} u(t - jh), \quad (2.40)$$

cuyo resultado se muestra en la figura (2.11). La derivada GL reproduce con excelente precisión el comportamiento de la derivada de Riemann–Liouville, incluyendo la singularidad inicial y el decaimiento tipo ley de potencia.

### 4. Función de Mittag–Leffler de un parámetro:

Partiendo de la ecuación (2.30), esta función representa, para el caso particular analizado, la generalización natural de la exponencial  $e^t$ , recuperándose

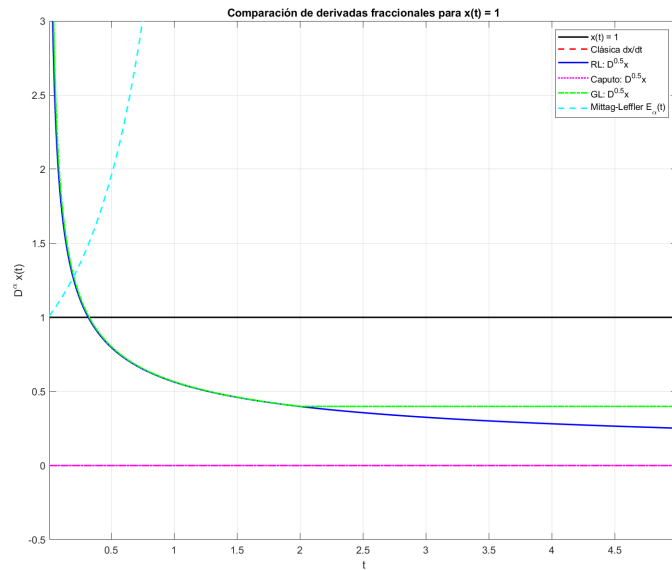


Figura 2.11: Comparación entre derivadas fraccionales de orden  $\alpha = \frac{1}{2}$  aplicadas a  $u(t)$ : formulaciones de Riemann–Liouville, Caputo, aproximación de Grünwald–Letnikov y función Mittag–Leffler.

ésta como caso límite cuando  $\alpha = 1$ . Su comportamiento para  $0 < \alpha < 1$  es característico de sistemas con memoria, ya que exhibe una respuesta inicial suave seguida de un crecimiento acelerado, como puede observarse en la figura (2.11).

Si bien  $E_\alpha(t)$  no posee una interpretación directa como derivada fraccional de una función constante, su inclusión en el análisis permite contrastar la respuesta de un sistema de primer orden clásico frente a la de un sistema de orden fraccional puro.

En particular, la comparación gráfica entre los distintos tipos de derivadas fraccionales y la función de Mittag–Leffler permite ver con claridad los efectos de memoria y respuesta no local que introducen estos operadores. Para una entrada constante, tanto la derivada clásica como la de Caputo resultan nulas, mientras que las de Riemann–Liouville y Grünwald–Letnikov capturan una respuesta singular en el entorno de  $t \rightarrow 0$ , propia de sistemas con memoria. Para una entrada lineal, las diferencias entre las derivadas convencionales y las fraccionales reflejan el retardo acumulativo en la dinámica del sistema.

La función de Mittag–Leffler, por su parte, no representa una derivada, sino una solución tipo que resulta especialmente útil en el modelado de sistemas térmicos complejos. Su comportamiento no exponencial y su sensibilidad al orden fraccionario la convierten en una herramienta fundamental para describir fenómenos donde la difusión no responde a la ley de Fourier en sentido estricto.

Se concluye, por tanto, que la definición de Grünwald–Letnikov no solo guarda coherencia con las formulaciones analíticas (como las de Riemann–Liouville y Caputo), sino que ofrece ventajas prácticas significativas para su implementación numérica. Esta formulación permite abordar condiciones iniciales arbitrarias y aproximar con precisión la evolución térmica en sistemas con efectos de memoria. Asimismo, estas validaciones proporcionan una base conceptual sólida para el uso de derivadas fraccionales en el presente trabajo.



## Capítulo 3

# Modelos matemáticos

*La teoría del calor será siempre la más  
rica en analogías.*

Jean-Baptiste Joseph Fourier

En este capítulo se desarrollan las aproximaciones matemáticas que sustentan el análisis dinámico de sensores de temperatura, con el propósito de describir los mecanismos de transferencia de calor bajo condiciones operativas reales. Se parte de formulaciones clásicas basadas en ecuaciones diferenciales parciales, incorporando distintas condiciones de contorno asociadas al entorno gaseoso, la excitación externa y la geometría del encapsulado. Posteriormente, se extienden a aproximaciones mediante representaciones en el dominio de Laplace y con el uso de circuitos térmicos equivalentes, ofreciendo una interpretación en términos de impedancias térmicas y constantes de tiempo. A fin de capturar fenómenos no ideales como las pérdidas por conducción a través de los conductores, se introduce el cálculo fraccional como herramienta unificadora, empleando tanto formulaciones de Caputo [111] como discretizaciones basadas en Grünwald–Letnikov [31].

### 3.1. Introducción

Los modelos de sensores de temperatura requieren partir de los principios fundamentales de la transferencia de calor. En aplicaciones reales, estos dispositivos rara vez operan en condiciones ideales, dado que a menudo se encuentran embebidos en estructuras, inmersos en medios gaseosos en movimiento y conectados mediante hilos conductores cuya masa, geometría y propiedades térmicas pueden alterar significativamente su respuesta global. Estos efectos introducen retardos en la medición y fenómenos de memoria, especialmente en configuraciones con geometría no uniforme o bajo condiciones de frontera variables [7, 21], tal y como se ha mencionado en los capítulos

anteriores.

Bajo esta perspectiva, se justifica la necesidad de aproximaciones matemáticas que incorporen, de forma progresiva, una mayor complejidad física. A continuación, se presentan tres niveles de modelización térmica, cada uno con supuestos, alcances y herramientas analíticas específicas:

- **Modelos clásicos:** formulados a partir de la ecuación unidimensional de conducción de calor, bajo la hipótesis de medios homogéneos y geometrías simples. Pueden resolverse mediante esquemas de diferencias finitas, como los métodos FTCS (Forward Time Centered Space), implícito o Crank–Nicolson.
- **Modelos equivalentes:** construidos a partir de la analogía termoeléctrica mediante circuitos RC, permiten representar capas acopladas, retardos distribuidos, así como otros efectos transitorios. Este enfoque facilita la transición hacia modelos en el dominio de Laplace.
- **Modelos extendidos:** incorporan formulaciones más avanzadas, como funciones de transferencia racionalizadas y el cálculo fraccional, capaces de capturar efectos de memoria y dinámicas no locales.

En este trabajo se presta especial atención a la representación de la conducción térmica en los cables mediante impedancias del tipo  $\sqrt{s}$ , las cuales reflejan el carácter no local en el tiempo del fenómeno. Estas se aproximan numéricamente mediante el método de Carlson, y se complementan en el dominio temporal con el uso de la derivada fraccional de Grünwald–Letnikov, cuya formulación resulta coherente con el comportamiento con memoria térmica discutido en el capítulo anterior.

### 3.2. Fundamentos del modelado térmico.

El balance energético constituye el marco teórico desde el cual se describe la evolución temporal de la temperatura de un sensor, considerando tanto los intercambios térmicos con el entorno como las posibles fuentes internas de generación. Esta formulación permite representar, con distintos niveles de fidelidad, la respuesta ante perturbaciones transitorias, así como los errores derivados de fenómenos no ideales.

Como ya se ha ido indicando a lo largo de este documento, este estudio se centra en sensores para los cuales el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ), situación donde resulta válida la hipótesis de parámetros concentrados. Esta simplificación permite modelar la evolución térmica mediante una ecuación diferencial ordinaria. A partir de esta base, se introducen progresivamente los efectos no ideales y las estrategias matemáticas para capturarlos dentro del balance energético.

### 3.2.1. Ecuación general del balance energético.

En la sección 1.2 de este documento se presentó el balance energético del sistema sensor-medio, del cual se dedujeron los principales mecanismos de intercambio térmico en la superficie del sensor. No obstante, para facilitar la comprensión, en este apartado se desarrolla el origen y formulación de dicho balance, retomando el esquema general representado en la figura (3.1).

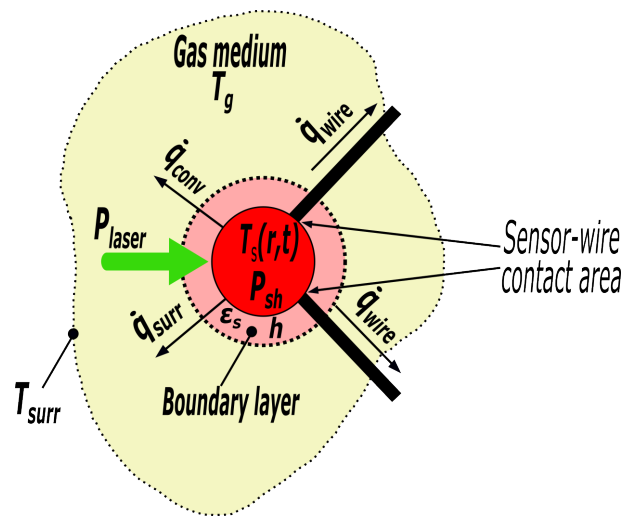


Figura 3.1: Modelo físico de un sensor de temperatura expuesto a un medio gaseoso, mostrando los principales mecanismos de intercambio energético [7].

Este modelo conceptual considera:

- El núcleo del sensor, cuya temperatura varía con el tiempo.
- La transferencia de calor por convección y radiación hacia el medio gaseoso y superficies del entorno.
- El flujo de calor a través de los conductores que conectan el sensor al circuito externo.
- La aportación térmica externa (en este caso, mediante excitación láser) que actúa como fuente de energía.

En las subsecuentes secciones se presentarán las ecuaciones que describen matemáticamente cada uno de estos flujos, así como las condiciones de contorno e hipótesis empleadas para su modelización.

### 3.2.2. Consideraciones sobre el flujo de calor hacia los alrededores $\dot{q}_{\text{surr}}$ .

Planteado el esquema conceptual del sensor (véase figura 3.1), se detallan a continuación los mecanismos de transferencia de calor hacia el entorno: convección, radiación y su posible combinación en una expresión unificada. Con esto, se evalúa su contribución relativa en función de la geometría y de las condiciones térmicas del medio.

#### 1) Hipótesis geométricas y térmicas del núcleo:

Se modela el núcleo del sensor como una esfera homogénea con difusividad térmica  $\alpha_s$ , admitiéndose gradientes de temperatura internos. No obstante, para simplificar el tratamiento del intercambio en la superficie, se asume una temperatura superficial uniforme:  $T_s(r_0, t)$ . A su vez, alrededor del sensor se forma una capa gaseosa (*boundary layer*), que actúa como interfaz para la transferencia de calor por convección:  $T_g(r_g, t)$ . Esta interacción se describe mediante la ley de enfriamiento de Newton:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = h A_s (T_s - T_g) \quad (3.1)$$

siendo  $A_s$  es el área del sensor y, donde el coeficiente de transferencia de calor, se calcula como:

$$h = \frac{Nu k}{D} \quad (3.2)$$

El número de Nusselt (Nu) se obtiene mediante correlaciones adimensionales que dependen del régimen térmico (natural o forzado), con formas típicas:

$$Nu = 2 + f(Re, Pr) \quad \text{o} \quad Nu = 2 + f(Gr, Pr) \quad (3.3)$$

tal como se abordó en el capítulo anterior. Estas correlaciones reflejan que siempre existe un valor mínimo de  $Nu = 2$  para geometrías esféricas asociado al régimen puramente de conducción, especialmente relevante cuando el número de Grashof es bajo. En tales condiciones, la transferencia de calor ocurre casi exclusivamente por conducción a través de la capa límite, lo cual puede demostrarse analíticamente para una esfera en régimen estacionario:

$$\begin{aligned} \lim_{Pr \rightarrow 0} \dot{q}_{\text{conv}} &= \lim_{r_g \rightarrow \infty} \dot{q}_{\text{cond}} = \lim_{r_g \rightarrow \infty} \frac{T_s - T_g}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_g}} = \frac{T_s - T_g}{\frac{1}{r_0} - 0} = \\ &= \frac{T_s - T_g}{\frac{4 \pi k}{4 \pi k}} = 4 \pi r_0 k (T_s - T_g) = 2 \pi D k (T_s - T_g) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{conv} = h \pi D^2 (T_s - T_g) = \frac{Nu k}{D} \pi D^2 (T_s - T_g) = Nu k \pi D (T_s - T_g) \quad (3.4)$$

## 2) Intercambio de energía por radiación:

En este caso, el flujo de calor por radiación entre la superficie del sensor y los alrededores se expresa como:

$$\dot{q}_{surr} = \sigma A_s \epsilon_s (T_s^4 - T_{surr}^4) = h_{rad} A_s (T_s - T_{surr}) \quad (3.5)$$

donde  $h_{rad}$  representa el coeficiente de radiación, definido como:

$$h_{rad} = \sigma \epsilon_s (T_s^2 + T_{surr}^2)(T_s + T_{surr}) \quad (3.6)$$

Este coeficiente puede considerarse prácticamente constante cuando los saltos térmicos son moderados. La figura (3.2) A ilustra su dependencia respecto a la emisividad superficial  $\epsilon_s$  y la temperatura del sensor, mostrando valores comprendidos entre 5,7 y  $7 \frac{W}{m^2 K}$  para  $\epsilon_s = 1$ . En particular, dentro del intervalo de temperaturas considerado,  $h_{rad}$  presenta una variación del orden del 20 % respecto a su valor mínimo, y apenas un 2 % con respecto al coeficiente de transferencia de calor, como se observa en los gráficos A y D de la figura (3.2), lo cual representa el peor de los casos contemplados.

## 3) Influencia del tamaño del sensor:

A partir del número de Grashof, es posible establecer si la convección natural tiene un papel relevante en la transferencia de calor. La condición crítica  $Gr = 1$  define la longitud característica mínima ( $L_{c,mín}$ ) por debajo de la cual las fuerzas de flotación térmica son superadas por la difusión viscosa, y por tanto, la convección se vuelve despreciable:

$$L_{c,mín} = \left( \frac{\nu \alpha_s}{g \beta (T_s - T_g)} \right)^{1/3} \quad (3.7)$$

La figura (3.2) E muestra la evolución de  $L_{c,mín}$  en función de la temperatura del gas para distintos diámetros del sensor. Si se cumple que  $D < L_{c,mín}$ , la convección natural se atenúa considerablemente y el mecanismo predominante pasa a ser la conducción.

## 4) Definición de un coeficiente combinado:

Bajo estas condiciones límite, se define un coeficiente global de transferencia térmica que integra los efectos de convección y radiación superficial:

$$\dot{q}_t(t) = h_t A_s (T_s(t) - T_g), \quad h_t = h + h_{\text{rad}} \quad (3.8)$$

Con este coeficiente combinado ( $h_t$ ) se puede representar el flujo de calor neto a través de la superficie del sensor, condensando los mecanismos activos en un solo término efectivo.

### 5) Formalización del balance de energía:

Considerando las fuentes externas –la potencia incidente del láser  $P_{\text{laser}}$  y el autocalentamiento  $P_{\text{sh}}$ –, así como las pérdidas por convección, radiación y conducción a través de los cables  $\dot{q}_{\text{wire}}$ , el balance energético general del sensor se expresa como:

$$P_{\text{laser}} + P_{\text{sh}} - \dot{q}_{\text{conv}} - \dot{q}_{\text{surr}} - \dot{q}_{\text{wire}} = \Delta \dot{U} \quad (3.9)$$

A la luz de las consideraciones presentadas en esta sección, dicha expresión puede reescribirse de la siguiente manera, siendo válida para sensores con  $Bi < 0,1$ , tal como se justificó en el Capítulo 1. Así, el balance energético se reduce a:

$$P_{\text{laser}} - \dot{q}_t - \dot{q}_{\text{wire}} = m_s c_{p_s} \frac{dT_s(t)}{dt} \quad (3.10)$$

Esta formulación constituye el punto de partida para el desarrollo matemático que se abordará en las secciones siguientes.

### 6) Evaluación paramétrica y representación gráfica:

La figura (3.2) presenta un análisis paramétrico de los principales mecanismos de transferencia de calor que afectan al sensor. El subgráfico (A) muestra la evolución del coeficiente de radiación  $h_{\text{rad}}$  en función de la emisividad superficial  $\epsilon_s$  y de la temperatura del sensor  $T_s$ , revelando una variación moderada en el rango de temperatura considerado. Los subgráficos (B), (C) y (D) representan, respectivamente, el número de Grashof, el número de Nusselt y el coeficiente de transferencia de calor, todos evaluados para sensores esféricos de distinto diámetro (D).

Por su parte, el subgráfico (E) muestra la longitud característica mínima obtenida a partir de la condición crítica  $Gr = 1$ . Se observa que, para temperaturas moderadas del gas, sensores de diámetro reducido pueden quedar por debajo de esta longitud crítica, anulando así el efecto de convección natural y validando el régimen de transferencia por conducción.

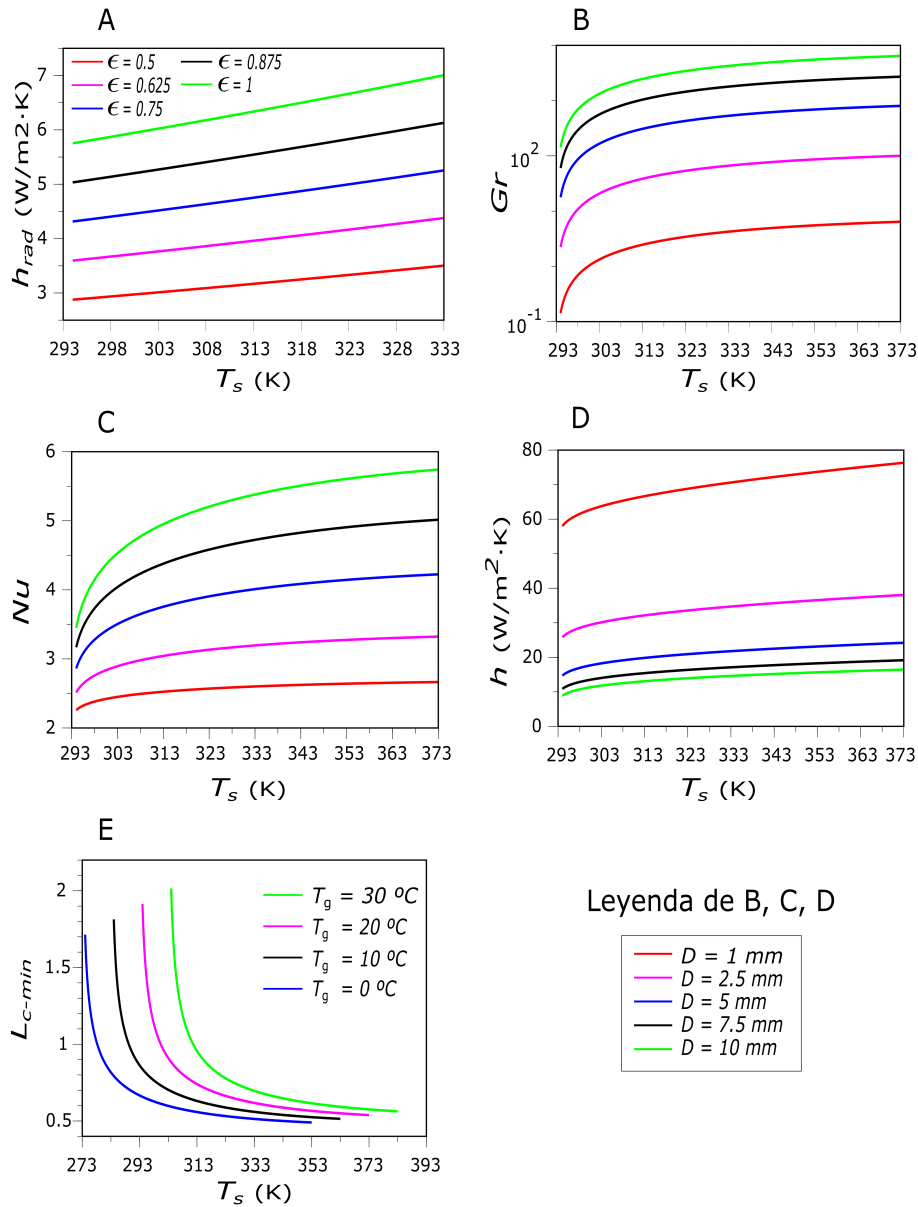


Figura 3.2: Análisis de los mecanismos de intercambio térmico entre la superficie del sensor y el medio gaseoso. (A) Coeficiente de radiación ( $h_{rad}$ ) en función de ( $\epsilon_s$ ) y ( $T_s$ ); (B) Número de Grashof ( $Gr$ ); (C) Número de Nusselt ( $Nu$ ); (D) Coeficiente de transferencia de calor ( $h$ ); (E) Longitud característica mínima ( $L_{c,min}$ ) para distintos valores de ( $T_g$ ) [7].

### 3.2.3. Modelo matemático para el cuerpo del sensor.

El análisis de transferencia de calor en régimen transitorio dentro del cuerpo esférico del sensor se basa en la ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas [27, 98, 121]. En este modelo, se considera inicialmente la existencia de un gradiente térmico radial, aunque se supone que la temperatura es uniformemente distribuida para cada valor del radio  $r$ . Además, bajo el supuesto de simetría radial y despreciando el intercambio térmico a través de los cables –es decir, considerando  $\dot{q}_{\text{wire}} \simeq 0$  como una primera aproximación–, se asume que todo el intercambio de calor se produce exclusivamente a través de la superficie externa del sensor. Asimismo, se establece como condición de contorno que la temperatura del gas circundante coincide con la temperatura de las superficies del entorno, es decir,  $T_g = T_{\text{surr}}$ . En concordancia con los supuestos planteados, se introduce un coeficiente global de transferencia de calor  $h_t$ , y se considera que la fuente de excitación térmica –proporcionada por el láser– actúa directamente sobre la frontera del sistema. Con todo esto, la ecuación de gobierno para el sensor se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \right) &= \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ k_s \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= -h_t (T_s(r_0, t) - T_g) + \frac{P_{\text{laser}}}{A_s} \\ T_s(r, 0) &= T_g \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{p_s}}$  es la difusividad térmica del sensor,  $T_g$  la temperatura del medio gaseoso y  $\frac{P_{\text{laser}}}{A_s}$  representa una fuente de calor que actúa sobre la superficie del sensor, como en el caso de estudio, un láser.

Cuando el sistema alcanza el régimen estacionario ( $t = \infty$ ), el flujo neto de calor hacia el sensor se iguala a las pérdidas por convección, dando lugar a la condición:

$$0 = -h (T_s(r_0, \infty) - T_g) + \frac{P_{\text{laser}}}{A_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{\text{laser}}}{A_s} = h (T_s(r_0, \infty) - T_g) \quad (3.12)$$

lo que permite verificar experimentalmente los parámetros  $h$  o  $P_{\text{laser}}$  a partir del estado final.

La ecuación (3.11) para la evolución transitoria se transforma en:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \right) &= \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial t} \\
\left. \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} &= 0 \\
k_s \left. \frac{\partial T_s(r,t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= -h (T_s(r_0, t) - T_s(r_0, \infty)) \\
T_s(r, 0) &= T_g
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La solución general para este problema de frontera, válida para una esfera homogénea, viene dada en forma de serie infinita [27, 92, 98]:

$$\frac{T_s(r, t) - T_s(r_0, \infty)}{(T_g - T_s(r_0, \infty))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2 \cdot \lambda_n - \sin(2 \cdot \lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \cdot \frac{\alpha_s t}{r_0^2}} \cdot \frac{\sin(\lambda_n \frac{r}{r_0})}{\lambda_n \frac{r}{r_0}} \tag{3.14}$$

donde  $Fo$  es el número de Fourier y los valores  $\lambda_n$  se obtienen resolviendo la ecuación:

$$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = Bi = \frac{h r_0}{k} \tag{3.15}$$

Esta expresión permite describir la respuesta transitoria de sensores esféricos en régimen general, mostrando cómo la solución adimensional depende únicamente de los parámetros  $Bi$  y  $Fo$ , así como de la posición relativa  $\frac{r}{r_0}$  [80, 92, 122, 123]. Por ello, suele ser empleada para comparar resultados experimentales y teóricos bajo diferentes escalas y condiciones, facilitando la validación de modelos dinámicos de sensores [7, 27, 92, 98].

### 3.2.3.1. Solución aproximada cuando el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ).

Se ha analizado que cuando el número de Biot tiende a cero ( $Bi < 0,1$ ), se justifica la hipótesis de *parámetros concentrados*, lo que permite simplificar el análisis modelo. En este régimen, el gradiente espacial de temperatura en el interior del sensor es despreciable y la evolución temporal de la temperatura puede representarse mediante una ley exponencial [27, 80]:

$$\frac{T_s(t) - T_s(\infty)}{T_g - T_s(\infty)} \simeq e^{(-Bi Fo)} \tag{3.16}$$

o, de manera equivalente, en función de la constante de tiempo  $\tau$ , obteniéndose la ecuación (2.4), vista en el capítulo anterior:

$$\frac{T_s(t) - T_s(\infty)}{T_g - T_s(\infty)} \simeq e^{(-\frac{t}{\tau})} \tag{3.17}$$

donde la constante de tiempo está definida como:

$$\tau = \frac{m_s c_{p_s}}{h A_s} \quad (3.18)$$

Esta relación puede derivarse directamente a partir del balance de energía, que se reduce, en este caso, a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$P_{\text{laser}} - h A_s (T_s(t) - T_g) = m_s c_{p_s} \frac{dT_s(t)}{dt} \quad (3.19)$$

con la condición inicial:

$$T_s(0) = T_{\text{surr}} = T_g$$

En el régimen permanente ( $t \rightarrow \infty$ ), la variación temporal se anula y la ecuación se reduce a:

$$0 = -h (T_s(\infty) - T_g) + \frac{P_{\text{laser}}}{A_s} \Rightarrow T_s(\infty) = T_g + \frac{P_{\text{laser}}}{h A_s} \quad (3.20)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (3.19), se obtiene:

$$-h A_s (T_s(t) - T_s(\infty)) = m_s c_{p_s} \frac{dT_s(t)}{dt} \quad (3.21)$$

cuya solución es precisamente la expresión exponencial de las ecuaciones (3.16) y (3.17). Cuando se opera en condiciones en que las pérdidas de conducción son significativas frente a los efectos convectivos o, en el caso de sensores de pequeño tamaño, esta simplificación resulta especialmente útil.

Por ello, en la figura (3.3) se ha querido representar la evolución de la temperatura adimensional frente al número de Fourier ( $Fo$ ), para distintos valores del número de Biot ( $Bi = 0,1, 1$  y  $10$ ). Se muestra en trazo negro la temperatura para diferentes profundidades de esfera, según el modelo analítico de la expresión (3.14), y en trazo rojo se muestra la aproximación correspondiente al caso en que  $Bi \rightarrow 0$ , observándose un buen ajuste de la ecuación (3.16) respecto al modelo general. Este comportamiento valida su uso como solución simplificada en condiciones de baja resistencia térmica externa [7, 92].

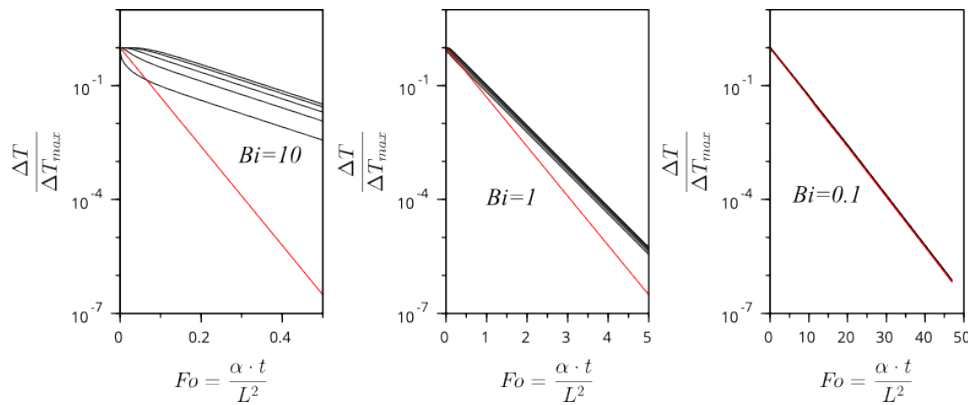


Figura 3.3: Evolución del cociente adimensional de temperatura para distintos valores del número de Biot.

### 3.2.4. Flujo de calor $\dot{q}_{wire}$ a través de los conductores.

Tal como se ha expuesto anteriormente en el documento, los cables conectados a los sensores no solo transportan señales eléctricas, sino que también constituyen vías significativas de transferencia de calor.

Desde un punto de vista dinámico, este fenómeno se manifiesta como una disminución en la constante de tiempo efectiva del sistema, así como en una menor sensibilidad a escalones térmicos de corta duración. Esta pérdida de sensibilidad transitoria puede ser crítica en aplicaciones que requieren mediciones de alta resolución temporal.

Para analizar este efecto, es habitual modelar los conductores como sólidos semi-infinitos, bajo el supuesto de propiedades termofísicas constantes, ausencia de generación interna de calor y condiciones iniciales uniformes. Este enfoque resulta apropiado cuando la longitud del cable excede ampliamente la profundidad de penetración térmica asociada al transitorio considerado [7, 60].

Este enfoque ha sido utilizado en el análisis de sensores de temperatura sometidos a flujos de calor muy breves e intensos, como en ensayos a alta velocidad [30, 32] y en sensores coaxiales aplicados en motores y cámaras de combustión [42, 44–46]. Estos estudios resaltan la necesidad de considerar el retardo y la difusión del calor, ya que pueden afectar la estimación del flujo térmico real.

En base a esto, la conducción axial unidimensional en los cables puede describirse mediante la ecuación clásica del calor. A diferencia de secciones anteriores, donde se analizaba la evolución térmica del sensor ( $T_s$ ), en este caso la variable  $T(x, t)$  representa la temperatura en el interior del conductor. Con lo cual, tomando como referencia la temperatura del gas circundante  $T_g$ , se define la variable auxiliar  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_g$ , lo que conduce a la siguiente formulación diferencial:

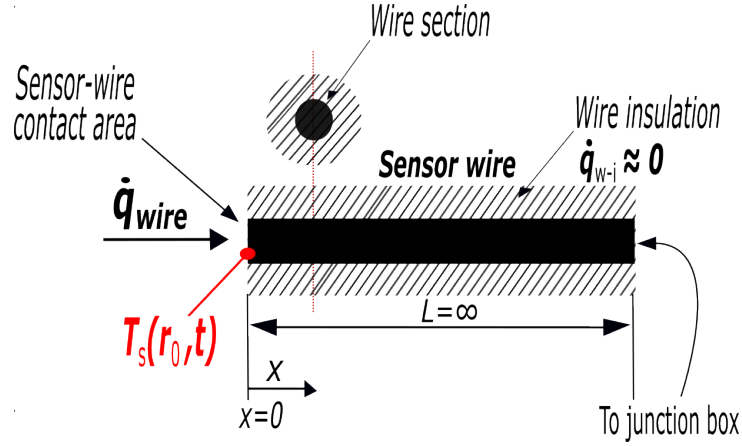


Figura 3.4: Modelo conceptual de conducción térmica unidimensional a través del conductor de un sensor [7].

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_w} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (3.22)$$

donde la difusividad térmica del conductor se define como:

$$\alpha_w = \frac{k_w}{\rho_w c_{p_w}}.$$

La resolución completa del modelo del sensor requiere incorporar adecuadamente las condiciones de contorno. Para ello, el conductor se modela como un cilindro alargado de longitud  $L \rightarrow \infty$ , con sección transversal  $A_w$  y conductividad térmica  $k_w$ , tal y como se mostró en la figura (1.20). Se considera conducción axial pura sin generación interna, con propiedades termofísicas constantes y condiciones iniciales uniformes.

Partiendo de la ecuación (3.22) bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{Condición inicial:} & \quad \theta(x, t = 0) = 0 \\ \text{Condición límite:} & \quad \theta(x \rightarrow \infty, t) = 0 \\ \text{Condición límite:} & \quad \theta(x = 0, t) = T_s(t) - T_g \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.22), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, s)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_w} s \theta(x, s) \quad (3.24)$$

Esta ecuación diferencial es lineal homogénea, de la que se puede extraer la ecuación característica con las soluciones que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \frac{1}{\alpha_w} s &= 0 \\ \lambda &= \pm \sqrt{\frac{s}{\alpha_w}}\end{aligned}\quad (3.25)$$

cuya solución en el campo complejo a la ecuación (3.24) es:

$$\theta(x, s) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha_w}} x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha_w}} x} \quad (3.26)$$

Aplicando las condiciones de contorno ( $\theta(\infty, t) = 0$  y  $-k_w A_w \left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=0} = \dot{q}_{wire}$ ), se anula  $C_2$  y se obtiene:

$$\theta(x, s) = \frac{\dot{q}_{wire}(s)}{k_w A_w \sqrt{\frac{s}{\alpha_w}}} e^{-x \sqrt{\frac{s}{\alpha_w}}} \quad (3.27)$$

En  $x = 0$ , la temperatura se expresa como:

$$\theta(0, s) = \frac{\dot{q}_{wire}(s)}{k_w A_w \sqrt{\frac{s}{\alpha_w}}} = \frac{\dot{q}_{wire}(s)}{\sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2 s}} \quad (3.28)$$

y, también el flujo de calor para  $x = 0$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{q}_{wire}(0, s) = \frac{k_w A_w}{\sqrt{\alpha_w}} \sqrt{s} \theta(0, s) = \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2} \sqrt{s} \theta(0, s) \quad (3.29)$$

Se pueden obtener las expresiones temporales para la temperatura  $\theta(0, t)$  y para el flujo de calor  $\dot{q}(0, t)$  aplicando el teorema de convolución, tal como se muestra en las ecuaciones (3.30) y (3.31), a partir de la transformada de Laplace de potencias:

$$\mathcal{L}[t^p] = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad p > -1$$

$$\begin{aligned}\theta(0, t) &= \frac{1}{\sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2}} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \dot{q}_{wire}(0, s) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \dot{q}_{wire}(0, \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2}} {}_0^{RL} I_t^{\frac{1}{2}} \dot{q}_{wire}(t)\end{aligned}\quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_{wire}(t) &= \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2} \mathcal{L}^{-1} [\sqrt{s} \theta(0, s)] \\ &= \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\theta(0, \tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w A_w^2} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} \theta(0, t)\end{aligned}\quad (3.31)$$

donde  ${}^RL I_t^{\frac{1}{2}}$  representa el operador de integración fraccional de Riemann–Liouville (véase ecuación 2.23) y  ${}^C D_t^{\frac{1}{2}}$ , la derivada fraccional de Caputo (véase ecuación 2.24). Estas relaciones establecen un vínculo directo entre la temperatura en la interfaz sensor–cable y el flujo de calor, considerando el efecto de memoria térmica característico de la conducción en medios semi-infinitos.

### 3.2.4.1. Solución analítica en medios semi-infinitos para temperatura de la superficie $T_s$ constante.

Un caso clásico de conducción transitoria se presenta cuando un sólido semi-infinito, inicialmente a temperatura uniforme  $T_g$ , experimenta un cambio instantáneo en la temperatura de su superficie en  $x = 0$ , fijada repentinamente a un valor constante  $T_s$  (véase figura 3.4). Esta configuración es análoga al contacto entre el sensor y el conductor eléctrico, modelando el hilo como un medio de longitud efectiva infinita y sección constante, en el que el calor se propaga únicamente en la dirección longitudinal.

Este planteamiento permite estudiar la evolución de una perturbación térmica desde la frontera hacia el interior del medio, bajo el supuesto de conducción unidimensional y sin generación interna de calor. En tales condiciones, el problema se formula con la siguiente condición inicial y condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Condición inicial: } & T(x, 0) = T_g \\ \text{Condiciones de frontera: } & T(0, t) = T_s; \quad T(\infty, t) = T_g \end{aligned} \quad (3.32)$$

La técnica de separación de variables no resulta aplicable de forma directa en este caso, debido al dominio no acotado. No obstante, el uso de una variable de semejanza permite transformar la ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria al combinar  $x$  y  $t$  en [28]:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha_w t}} \quad (3.33)$$

La solución analítica a este problema es [28, 80, 121]:

$$\frac{T(x, t) - T_g}{T_s - T_g} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_w t}}\right) \quad (3.34)$$

donde  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  denota la función complementaria de error.

La profundidad de penetración térmica asociada al transitorio viene dada por:

$$\delta(t) = 2\sqrt{\alpha_w t} \quad (3.35)$$

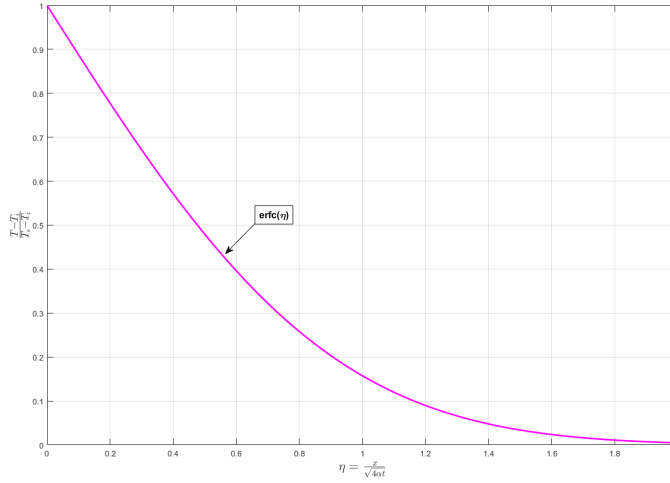


Figura 3.5: Distribución de temperatura adimensional para la conducción transitoria en un sólido semi-infinito, cuando la temperatura de la superficie se mantiene constante.

y la validez del modelo semiinfinito requiere que el espesor del cuerpo sea mucho mayor que  $\delta(t)$ .

Por otro lado, aplicando la Ley de Fourier, el flujo de calor en la frontera  $x = 0$  resulta [28, 80, 121]:

$$\dot{q}_w(t) = -k_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{k_w (T_s - T_g)}{\sqrt{\pi \alpha_w t}} \quad (3.36)$$

Esta formulación resulta especialmente útil para estimar la profundidad afectada por perturbaciones térmicas superficiales en sensores expuestos a escalones o pulsos térmicos de corta duración.

En el dominio de Laplace, la solución asociada al problema de conducción transitoria en un sólido semiinfinito con temperatura superficial impuesta se expresa como:

$$T(x, s) = \frac{T_s - T_g}{s} e^{-x \sqrt{\frac{s}{\alpha_w}}} \quad (3.37)$$

donde se asume que la temperatura de la superficie se mantiene constante en el tiempo  $T(0, t) = T_s$ .

Aplicando la Ley de Fourier y evaluando el gradiente en la frontera  $x = 0$ , se obtiene el flujo de calor:

$$\dot{q}_{\text{wire}}(0, s) = -k_w \left. \frac{\partial T(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = (T_s - T_g) \sqrt{k_w \rho_w c_{p_w}} \sqrt{s} \quad (3.38)$$

lo que revela que la relación entre temperatura y flujo de calor en la frontera está regida por un operador proporcional a  $\sqrt{s}$ , propio del cálculo fraccional. En consecuencia, la impedancia térmica equivalente se comporta como un elemento de tipo fraccional de orden  $\frac{1}{2}$ , reflejando el carácter difusivo, con memoria térmica, de la conducción en medios semi-infinitos.

Con el fin de profundizar en esta interpretación, en las secciones siguientes se presentarán las soluciones analíticas asociadas a las aproximaciones propuestas en este trabajo.

### 3.3. Evaluación de las aproximaciones propuestas.

#### 3.3.1. Formulación y análisis de la exponencial clásica de constante de tiempo: $\theta_3(t) = a^*(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

Los desarrollos anteriores han servido como punto de partida para formalizar las distintas aproximaciones que se abordarán a lo largo de este trabajo. A partir de este momento, y con todos los elementos del balance energético ya definidos, se considera la ecuación general planteada en la ecuación (3.10), la cual puede expresarse en el dominio de Laplace como:

$$\frac{P_{\text{laser}}}{s} - \dot{q}_t(s) - \dot{q}_{\text{wire}}(s) = m_s c_{p_s} s (T_s(s) - T_g) \quad (3.39)$$

En esta expresión,  $\dot{q}_t(s)$  representa la transferencia de calor combinada por convección y radiación, mientras que  $\dot{q}_{\text{wire}}(s)$  corresponde al flujo de calor axial a través de los conductores. Sustituyendo ambos términos según las ecuaciones (3.8) y (3.29), se obtiene:

$$\frac{P_{\text{laser}}}{s} - \frac{T_s(s) - T_g}{R_h} - \frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} A_w \sqrt{s} (T(s) - T_g) = m_s c_{p_s} s (T_s(s) - T_g) \quad (3.40)$$

donde se incorpora explícitamente los efectos de conducción a través de los cables, representado mediante el operador  $\sqrt{s}$ .

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (3.40), se obtiene una expresión diferencial en el dominio temporal para la evolución de la temperatura del sensor  $T_s(t)$ , considerando como entrada una potencia láser constante  $P_{\text{laser}}$ . El modelo resultante constituye una formulación ampliada del balance energético, que incorpora tanto los efectos clásicos de convección y radiación como las pérdidas térmicas inducidas por los conductores.

Esta ecuación puede representarse mediante su análogo eléctrico, mostrado en la figura (3.6) [122], donde la acción del láser se modela como una fuente de corriente constante,  $\frac{P_{\text{laser}}}{s}$ . El flujo total de calor por convección y radiación se representa mediante una resistencia térmica  $R_h$ , dispuesta en paralelo con una capacidad calorífica asociada al núcleo del sensor,  $C_1 = m_s c_{p_s}$ .

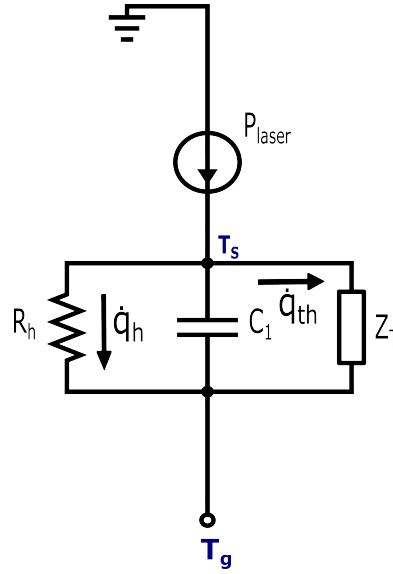


Figura 3.6: Diagrama eléctrico equivalente de modelización de impedancias térmicas para el sensor [7].

Adicionalmente, se incorpora una rama paralela correspondiente a una impedancia térmica asociada a los hilos del sensor, influida por la raíz cuadrada del operador  $s$ , representada como  $\sqrt{s} \theta(s)$ .

Los problemas físicos que conducen a ecuaciones diferenciales con operadores  $s$  de orden entero suelen resolverse de forma directa en el dominio de Laplace [123]. Sin embargo, en presencia de exponentes no enteros, como ocurre en este caso, el tratamiento analítico requiere aproximaciones específicas o el uso de funciones de transferencia generalizadas para su resolución.

Para resolver problemas con operadores irracionales como el que aparece en (3.40), se propone un método de aproximación con funciones de transferencia equivalentes basado en el trabajo de Carlson y Halijak [106], que emplea un proceso regular de Newton para obtener aproximaciones racionales para el operador  $\sqrt{s}$ .

Las aproximaciones racionales para el operador  $\sqrt{s}$  se expresan como:

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \approx Z_1(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + b_0} \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \approx Z_2(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (3.42)$$

donde los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  se obtienen mediante el método de Carlson [105, 115, 124]. La tabla (3.1) muestra valores típicos de dichos coeficientes.

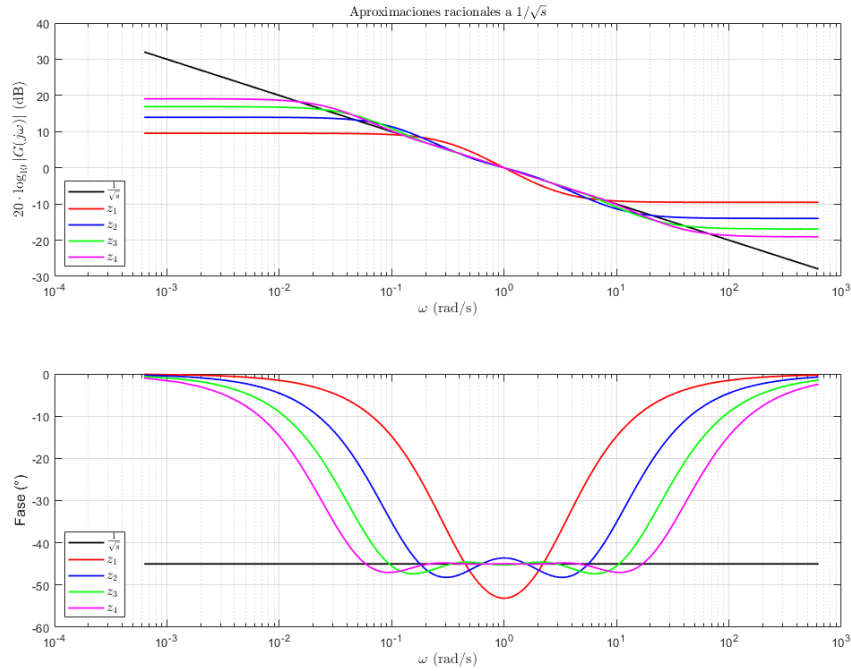


Figura 3.7: Diagramas de Bode para las aproximaciones racionales del operador  $\sqrt{s}$  [7].

Tabla 3.1: Valores de los coeficientes para las aproximaciones (3.41) y (3.42).

Coefficiente	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$
$a_0$	3	5
$a_1$	1	10
$a_2$	-	1
$b_1$	3	10
$b_2$	-	5

Como se observa en las ecuaciones (3.41) y (3.42), las aproximaciones obtenidas son funciones de transferencia en las que los polinomios del numerador y el denominador son de igual orden. Siguiendo el método propuesto por Carlson [105, 115, 124], se pueden derivar funciones de transferencia equivalentes de orden superior, empleando polinomios de orden 2, 3 y mayores, lo que conlleva una mejora significativa en la precisión de las aproximaciones. La figura (3.7) ilustra el impacto de estas aproximaciones en el comportamiento teórico del operador  $\sqrt{s}$ , mostrando un ajuste progresivamente más preciso a medida que aumenta el orden de los polinomios.

Sin embargo, a medida que aumenta el número de elementos, el costo computacional puede incrementarse considerablemente, requiriendo un análisis más detallado de las condiciones de contorno y las propiedades térmicas del sistema. Este nivel de complejidad adicional puede no ser siempre necesario para obtener resultados satisfactorios. Por este motivo, se ha optado por un enfoque que reduzca el nivel de complejidad, sin sacrificar la precisión y que proporcione soluciones adecuadas para el análisis térmico.

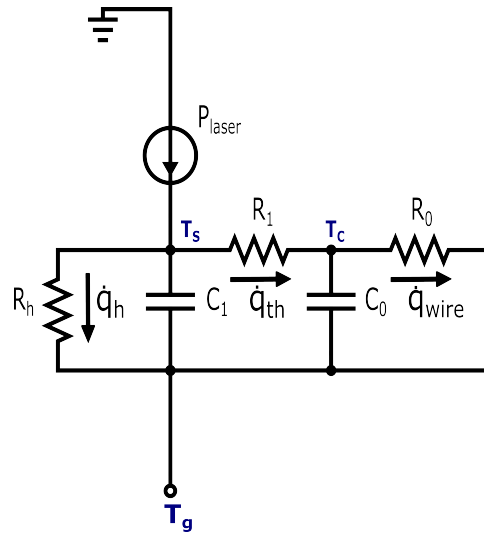


Figura 3.8: Diagrama del circuito equivalente simplificado para el modelo térmico del sensor [7].

Con este enfoque, la aproximación del operador  $\sqrt{s}$  ofrece una visión genérica del sistema térmico. De hecho, en la figura (3.6) se muestra un circuito equivalente con la aproximación  $Z_1(s)$ , el análogo eléctrico del problema térmico, donde se consideran los siguientes elementos: la resistencia total  $R_h = R_{conv} + R_{rad}$ , la capacidad calorífica del termistor  $C_1$ , el flujo de calor convectivo y por radiación  $\dot{q}_h$  a través de la resistencia  $R_h$ , el flujo de calor a través del termistor y de los cables  $\dot{q}_{th}$  y  $\dot{q}_{wire}$ , respectivamente, la capacidad calorífica de los conductores  $C_0$ , y las resistencias térmicas asociadas a los conductores  $R_1$  y  $R_0$ . La contribución de la impedancia equivalente  $Z_1(s)$ , mostrada en la figura (3.6), se observa en su rama equivalente correspondiente al conjunto de elementos  $R_1$ ,  $C_0$  y  $R_0$ , es decir, dos resistencias térmicas y una capacidad térmica. De manera análoga, para el caso de  $Z_2(s)$ , habría tres resistencias térmicas y dos capacidades térmicas. En cambio, cuando se trata de un modelo convencional de constante de tiempo, en el que no se considera el flujo de calor a través de los cables, el esquema se reduce a los elementos  $C_1$  y  $R_h$ . Asimismo, es importante tener en cuenta que, para describir un modelo en condiciones de vacío, como se verá más adelante, el término  $R_h$  tiende a infinito, por lo que desaparece.

La impedancia total del diagrama anterior se obtiene considerando la conexión en paralelo de la resistencia  $R_h$ , la capacitancia  $C_1$  y la impedancia  $Z_1^*(s)$ :

$$Z_T(s) = \frac{R_h Z_1^*(s)}{R_h + (R_h C_1 s + 1) Z_1^*(s)} \quad (3.43)$$

donde el término  $Z_1^*(s) = (\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} A_w)^{-1} Z_1(s)$  es:

$$Z_1^*(s) = (\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} A_w)^{-1} \frac{C_0 R_0 R_1 s + R_0 + R_1}{C_0 R_0 s + 1} \approx (\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} A_w)^{-1} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (3.44)$$

Finalmente, la diferencia de temperatura experimentada por el sensor en función de la fuente de excitación externa se expresa en el dominio de Laplace como:

$$\theta(s) = (T_s(s) - T_g) = \frac{P_{laser}}{s} Z_T(s) \quad (3.45)$$

Es interesante abordar este proceso porque, a partir de ahora, se pueden aplicar las consideraciones pertinentes para ajustar la escala de precisión requerida según los diferentes modelos que se han expuesto. De este modo, partiendo de la expresión (3.45), se obtiene el modelo clásico de constante de tiempo, la aproximación de doble exponencial y la aproximación fraccional.

Habiendo introducido el tratamiento mediante transformadas de Laplace, así como los fundamentos del modelo de conducción unidimensional bajo la hipótesis de sólido semi-infinito, a continuación se toma la ecuación (3.45) para deducir la expresión correspondiente al modelo exponencial clásico. A partir del esquema mostrado en la figura (3.9), se plantea un modelo convencional basado en la constante de tiempo, el cual describe la evolución térmica del sensor frente a una excitación térmica –en este caso, un pulso láser–, bajo el supuesto que las pérdidas de calor por conducción a través de los hilos del sensor son despreciables.

Esta aproximación se ajusta utilizando las ecuaciones (3.44) y (3.43). En el caso del modelo convencional, sin flujo de calor a través de los cables, los parámetros se definen como sigue:

$$a^* = P_{laser} R_h \quad (3.46)$$

$$b^* = \tau = C_1 R_h \quad (3.47)$$

La ecuación resultante para la temperatura es:

$$\theta_3(s) = \frac{a^*}{s} \frac{1}{b^* s + 1} = \frac{a^*}{s} \frac{1}{\tau s + 1} \quad (3.48)$$

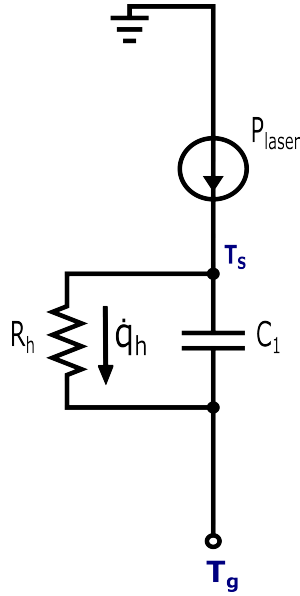


Figura 3.9: Diagrama del circuito para el modelo exponencial clásico.

Aplicando la transformada inversa de Laplace y realizando las agrupaciones oportunas, se obtiene la expresión de la respuesta de temperatura experimentada por el termistor tras la fuente de excitación láser externa es:

$$\theta_3(t) = a^* (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = a^* (1 - e^{-Bi Fo}) \quad (3.49)$$

Al realizar el cambio de variable para expresar la respuesta del sensor en forma adimensional, se obtiene que la temperatura relativa del modelo clásico queda definida como:

$$\Theta_3(t) = \frac{T_s(t) - T_s(\infty)}{T_s(0) - T_s(\infty)} = \frac{\theta_3(t)}{\theta_3(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi Fo} \quad (3.50)$$

donde  $\Theta_3(t)$  representa la temperatura adimensional del sensor,  $\tau$  es la constante de tiempo térmica del sistema,  $Bi$  el número de Biot, y  $Fo$  el número de Fourier. Véase que esta ecuación se obtuvo en el apartado 3.2.4.1.

Para régimen estacionario ( $t \rightarrow \infty$ ), se cumple que:

$$\theta_3(\infty) = a^*$$

siendo  $a^* = P_{\text{laser}} R_h$ , el valor asintótico alcanzado por la temperatura en respuesta a una excitación térmica constante.

### 3.3.2. Formulación de la aproximación con doble exponencial: funciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ .

A partir de la figura (3.8) y de la ecuación general (3.45), considerando todos los flujos de calor relevantes, es decir, la suma de convección y radiación  $\dot{q}_t = \dot{q}_{\text{conv}} + \dot{q}_{\text{rad}}$ , además del flujo de conducción axial  $\dot{q}_{\text{wire}}$  a través de los hilos, se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de Laplace:

$$\theta_1(s) = \frac{a}{s} \frac{s + 3}{b s^2 + (3(1+b) + c) s + 3c + 1} \quad (3.51)$$

En condiciones de vacío –es decir, despreciando convección y radiación–, se obtiene una versión simplificada:

$$\theta_2(s) = \frac{a}{s} \frac{s + 3}{b s^2 + 3(1+b) s + 1} \quad (3.52)$$

donde los parámetros son:

$$a = \left( \frac{P_{\text{laser}} A_w k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \right)^{-1}, \quad b = \left( \frac{C_{\text{th}} A_w k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \right)^{-1},$$

$$c = \left( \frac{R_h A_w k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \right)^{-1} \quad (3.53)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace y tras las agrupaciones oportunas, se obtiene la evolución térmica del sensor en el dominio temporal:

$$\theta_1(t) = \epsilon_1 + \lambda_1 e^{-(\delta_1 + \gamma_1)t} - (\epsilon_1 + \lambda_1) e^{-(\delta_1 - \gamma_1)t} \quad (3.54)$$

$$\theta_2(t) = \epsilon_2 + \lambda_2 e^{-(\delta_2 + \gamma_2)t} - (\epsilon_2 + \lambda_2) e^{-(\delta_2 - \gamma_2)t} \quad (3.55)$$

Los parámetros del modelo, para cada condición, se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 3.2: Coeficientes de las expresiones (3.54) y (3.55).

Función	$\epsilon_i$	$\lambda_i$	$\delta_i$	$\gamma_i$
$\theta_1(t)$	$\frac{3a}{3c+1}$	$\frac{3a}{3c+1} \left( \frac{3}{2\delta_1} - \frac{\gamma_1}{2\delta_1} + \frac{4}{3b\delta_1} - \frac{1}{2} \right)$	$\frac{3a}{3c+1}$	$\frac{\sqrt{9b^2+14b+9-6bc+6c+c^2}}{2b}$
$\theta_2(t)$	$3a$	$\frac{a}{2\delta_2} + \frac{7a}{6} \frac{\gamma_2}{\delta_2} - \frac{3a}{2}$	$3a$	$\frac{\sqrt{9b^2+14b+9}}{2b}$

En régimen estacionario, y suponiendo que  $T_s(0) = T_g$ , se deduce que:

$$\theta_i(\infty) = T_s(\infty) - T_g = \epsilon_i \Rightarrow \begin{cases} T_s(\infty) = \epsilon_i + T_s(0) \\ \theta_i(\infty) = T_s(\infty) - T_s(0) \end{cases} \quad \text{para } i = \{1, 2\} \quad (3.56)$$

Por tanto, la expresión adimensional de la temperatura del sensor se expresa como:

$$\frac{T_s(t) - T_s(\infty)}{T_s(0) - T_s(\infty)} = -\frac{\lambda_i}{\epsilon_i} e^{-(\delta_i + \gamma_i)t} + \left(1 + \frac{\lambda_i}{\epsilon_i}\right) e^{-(\delta_i - \gamma_i)t} \quad (3.57)$$

Definimos así la temperatura adimensional:

$$\Theta_i(t) = -\frac{\lambda_i}{\epsilon_i} e^{-(\delta_i + \gamma_i)t} + \left(1 + \frac{\lambda_i}{\epsilon_i}\right) e^{-(\delta_i - \gamma_i)t} \quad \text{para } i = \{1, 2\} \quad (3.58)$$

Las funciones  $\Theta_1(t)$  y  $\Theta_2(t)$  representan las temperaturas en forma adimensional, comparables entre aproximaciones. Este enfoque puede extenderse mediante el método cuadrupolar [69], especialmente útil para resolver problemas de transferencia de calor transitoria en geometrías 1D complejas o con condiciones de contorno variables. Esta aproximación supera las limitaciones de los modelos clásicos, que suelen despreciar o simplificar en exceso las pérdidas térmicas a través de los hilos, así como la inercia térmica y la capacidad calorífica distribuida del conjunto sensor-cable, tal y como se ha expuesto a través de los diagramas. Si nos permitimos analizar la solución analítica de esta formulación, se podrá evaluar la idoneidad y alcance de esta propuesta para el problema planteado.

Rescatando la ecuación (3.36), es posible aplicar la transformada inversa en el dominio temporal conforme a la propiedad:

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = \frac{df(t)}{dt} - f(0).$$

De esta manera, basándonos en las aproximaciones  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$  previamente definidas en las ecuaciones (3.41) y (3.42), se pueden obtener expresiones aproximadas para el flujo de calor  $\dot{q}_{wire}$  que comparten la estructura de la solución analítica en el dominio del tiempo. Estas aproximaciones se derivan aplicando la transformada inversa de Laplace a los productos  $\theta(0, s)Z_i^{-1}(s)$ , considerando una entrada tipo escalón para la función  $\theta$ .

Para la primera aproximación, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1,wire}(0, t) &\approx -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \mathcal{L}^{-1} [\theta(0, s) Z_1^{-1}(s)] = -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\theta}{s} Z_1^{-1}(s) \right] \\ &\approx -\frac{k_w}{3\sqrt{\alpha_w}} (T_s(t) - T_g) (8e^{-3t} + 1) \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde se aprecia un comportamiento temporal dominado por un término exponencial decreciente, que refleja la dinámica transitoria del sistema.

Para la segunda aproximación, más refinada, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2,wire}(0, t) &\approx -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \mathcal{L}^{-1} [\theta(0, s) Z_2^{-1}(s)] = -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\theta}{s} Z_2^{-1}(s) \right] \\ &\approx -\frac{k_w}{5\sqrt{\alpha_w}} (T_s(t) - T_g) \left[ 1 + 4(3 + \sqrt{5}) e^{(-5-2\sqrt{5})t} + 4(3 - \sqrt{5}) e^{(-5+2\sqrt{5})t} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde la presencia de exponentes con coeficientes reales y raíces cuadradas refleja una dinámica térmica más precisa, capturando la evolución temporal del flujo de calor en el conductor.

La figura (3.10) muestra la comparación entre las aproximaciones (3.59) y (3.60) para un escalón de temperatura de  $\theta = 1^\circ\text{C}$ , con una conductividad térmica  $k_w = 400 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$  y una difusividad térmica  $\alpha_w = 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ , junto con la solución analítica (3.38). Se observa que las aproximaciones son suficientemente precisas, especialmente para tiempos mayores a medio segundo, ante un cambio brusco de temperatura en  $x = 0$ .

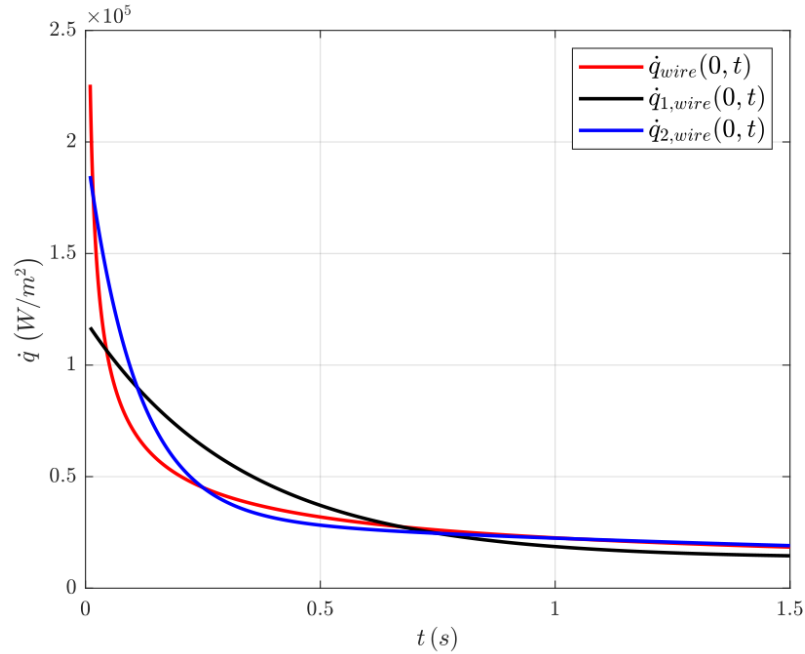


Figura 3.10: Flujo de calor en  $x = 0$  para una temperatura superficial constante  $T_s$ . Comparación entre la solución analítica y distintas aproximaciones [7].

A continuación, se considera el segundo caso para la solución analítica de una temperatura periódica aplicada en la frontera  $x = 0$  de la forma:

$$\theta(0, t) = \Delta T \sin(\omega t) \quad (3.61)$$

donde, bajo estas condiciones se obtiene la expresión:

$$\dot{q}_{wire}(0, t) = k_w A_w \Delta T \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_w}} \left( \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (3.62)$$

Las aproximaciones para el flujo de calor analítico (3.62) mediante las funciones de transferencia  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$  son:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1,wire}(0, t) &\approx -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \Delta T \omega \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + \omega^2} Z_1^{-1}(s) \right] \\ &\approx -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \frac{\Delta T \omega}{\omega^2 + 9} \left[ -8 e^{-3t} + 3 \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) \sin(\omega t) + 8 \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2,wire}(0, t) &\approx -\frac{k_w}{\sqrt{\alpha_w}} \Delta T \omega \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + \omega^2} Z_2^{-1}(s) \right] \\ &\approx -\frac{k_w}{5\sqrt{\alpha_w}} \frac{\Delta T}{\omega^4 + 90\omega^2 + 25} \left[ (-44\sqrt{5} + 100)\omega^3 + (20\sqrt{5} + 100)\omega e^{(-5-2\sqrt{5})t} \right. \\ &\quad \left. + ((44\sqrt{5} - 100)\omega^3 - (20\sqrt{5} + 100)\omega) e^{(-5+2\sqrt{5})t} \right. \\ &\quad \left. + (25\omega^4 + 370\omega^2 + 25) \sin(\omega t) + (200\omega^3 + 200\omega) \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

En la figura (3.11) se contrasta la solución analítica exacta del flujo de calor periódico (ecuación 3.62) con las aproximaciones propuestas en las ecuaciones (3.63) y (3.64), bajo las mismas condiciones paramétricas que el análisis anterior.

Se observa que las funciones de transferencia aproximadas proporcionan una representación suficientemente precisa del comportamiento térmico, especialmente para frecuencias de 0,1 y 1 Hz, las cuales se sitúan dentro del rango de mejor ajuste al operador  $\frac{1}{\sqrt{s}}$ , tal como se evidenció previamente en los diagramas de Bode de la figura (3.7).

### 3.3.3. Formulación de la aproximación basada en la derivada de Caputo, resuelta mediante discretización tipo Grünwald–Letnikov: $\theta_\alpha(t)$ .

Si bien el modelo clásico basado en una constante de tiempo y su extensión mediante doble exponencial aportan mejoras significativas en la caracterización dinámica del sensor térmico, ambos permanecen dentro del marco

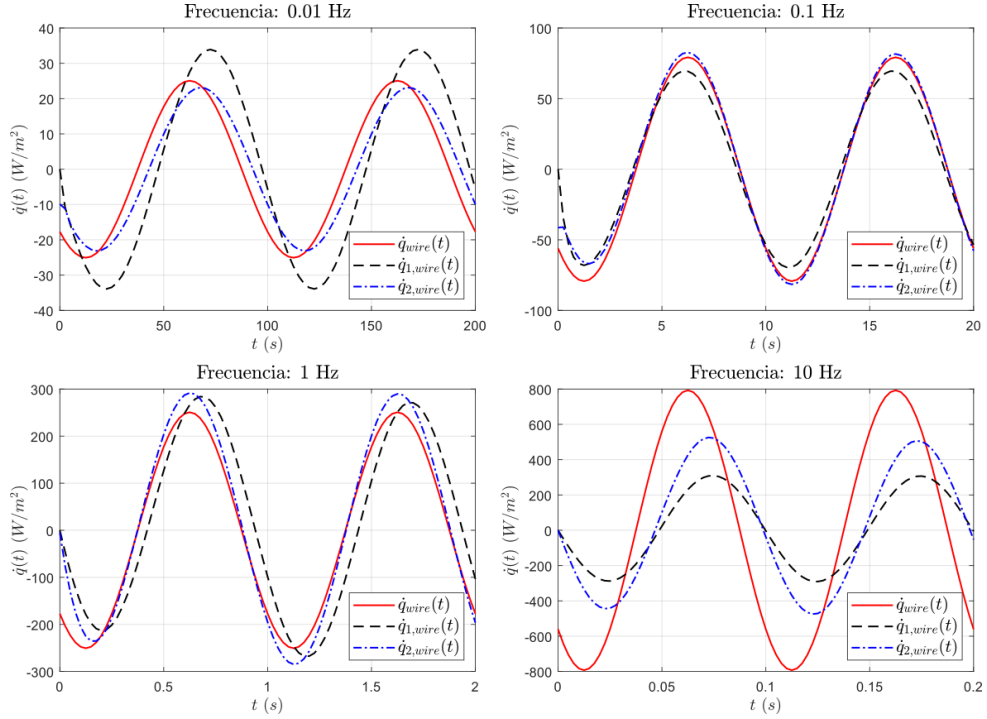


Figura 3.11: Flujo de calor en  $x = 0$  para señal periódica de temperatura. Comparación entre la solución analítica y las aproximaciones propuestas para diferentes frecuencias [7].

de derivadas ordinarias. No obstante, los efectos de memoria térmica generados por la conducción de calor a través de los conductores eléctricos pueden modelarse de manera más precisa mediante cálculo fraccional [107, 110]. Esto conduce a un modelo más general, capaz de capturar fenómenos no locales en el tiempo [7].

Por lo tanto, se propone un modelo fraccional basado en el operador de Grünwald–Letnikov (GL), a partir del balance de energía (ecuación 3.10) que incluye explícitamente las pérdidas por conducción en los hilos:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{laser}} - h A_s (T_s(t) - T_g) - A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} (T_s(t) - T_g) &= \\
 &= m_s c_{p_s} \frac{d}{dt} (T_s(t) - T_g) \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

En estado estacionario ( $t \rightarrow \infty$ ), tanto la derivada ordinaria como la derivada fraccional de Caputo se anulan, obteniéndose:

$$P_{\text{laser}} = h A_s (T_s(\infty) - T_g) \quad (3.66)$$

siendo este resultado únicamente al emplear la definición fraccional de Capu-

to, ya que bajo la formulación de Riemann–Liouville la derivada fraccional de una constante no se anula.

Al sustituir la potencia del láser en la ecuación diferencial, y considerando los términos que se anulan en el estado estacionario, se obtiene:

$$\begin{aligned} h A_s (T_s(\infty) - T_g) + A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} T_s(\infty) \\ - h A_s (T_s(t) - T_g) - A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} T_s(t) \\ = m_s c_{p_s} \frac{d}{dt} T_s(t) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Operando, la ecuación queda de la forma:

$$\begin{aligned} h A_s (T_s(\infty) - T_s(t)) + A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} (T_s(\infty) - T_s(t)) = \\ = m_s c_{p_s} \frac{d}{dt} (T_s(\infty) - T_s(t)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Aplicando el cambio de variable  $\theta_\alpha(t) = T_s(t) - T_s(\infty)$ , se obtiene la ecuación diferencial fraccional:

$$- \left[ h A_s \theta_\alpha(t) + A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} \theta_\alpha(t) \right] = m_s c_{p_s} \frac{d\theta_\alpha(t)}{dt} \quad (3.69)$$

Resultado la ecuación de la siguiente manera:

$$m_s c_{p_s} \frac{d\theta_\alpha(t)}{dt} + h A_s \theta_\alpha(t) + A_w \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} \theta_\alpha(t) = 0 \quad (3.70)$$

Dividiendo por  $h A_s$ , resulta:

$$\frac{m_s c_{p_s}}{h A_s} \frac{d\theta_\alpha(t)}{dt} + \theta_\alpha(t) + \frac{A_w}{h A_s} \sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} \theta_\alpha(t) = 0 \quad (3.71)$$

Mediante las siguientes transformaciones intermedias:

$$\begin{aligned} Bi Fo &= \frac{h L_c}{k_s} \frac{\alpha_s t}{L_c^2} = \frac{h}{\rho_s L_c c_{p_s}} t = \frac{h A_s}{\rho_s V c_{p_s}} t = \frac{h A_s}{m_s c_{p_s}} t \\ t &= Bi \frac{m_s c_{p_s}}{h A_s} Fo \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{Bi} \frac{h A_s}{m_s c_{p_s}} \frac{1}{Fo} \\ t^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{Bi \frac{m_s c_{p_s}}{h A_s} Fo^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{k_s}{L_c} \frac{1}{\sqrt{\rho_s c_{p_s} k_s}} \frac{1}{Fo^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

la ecuación puede expresarse en términos de los números de Biot y Fourier:

$$\frac{1}{Bi} \frac{d\theta_\alpha(For)}{dFor} + \frac{1}{Bi} \frac{A_w}{As} \sqrt{\frac{\rho_w c_{p_w} k_w}{\rho_s c_{p_s} k}} {}_0^C D_{For}^{\frac{1}{2}} \theta_\alpha(For) + \theta_\alpha(For) = 0 \quad (3.73)$$

Reordenando la ecuación y efectuando el cambio de variable adimensional  $\Theta_\alpha(For) = \frac{\theta_\alpha(For)}{\theta_\alpha(0)} = \frac{T_s(For) - T_s(\infty)}{T_s(0) - T_s(\infty)}$ , junto con la introducción de la constante adimensional  $\gamma = \frac{A_w}{As} \sqrt{\frac{\rho_w c_{p_w} k_w}{\rho_s c_{p_s} k}}$  se obtiene:

$$\frac{d\Theta_\alpha(For)}{dFor} + \gamma {}_0^C D_{For}^{\frac{1}{2}} \Theta_\alpha(For) + Bi \Theta_\alpha(For) = 0 \quad (3.74)$$

Nótese que la derivada ordinaria de primer orden puede expresarse como una derivada fraccional de orden  $2 \cdot \frac{1}{2}$ , es decir,  $\frac{d\Theta_\alpha(For)}{dFor} = {}_0^C D_{For}^{2 \cdot \frac{1}{2}} \Theta_\alpha(For)$ . De este modo, la ecuación diferencial fraccional puede escribirse como:

$${}_0^C D_{For}^{2 \cdot \frac{1}{2}} \Theta_\alpha(For) + \gamma {}_0^C D_{For}^{\frac{1}{2}} \Theta_\alpha(For) + Bi \Theta_\alpha(For) = 0 \quad (3.75)$$

Una posible forma de solución se plantea del tipo:

$$\Theta_\alpha(For) = e^{\frac{\lambda For}{2}} = For^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \left( \lambda For^{\frac{1}{2}} \right) = For^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k For^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \quad (3.76)$$

donde  $e^{\frac{\lambda For}{2}}$  representa la función  $\alpha$ -exponencial de orden  $\frac{1}{2}$ . Esta función satisface la siguiente propiedad:

$$\lim_{For \rightarrow 0} \left( For^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda For}{2}} \right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3.77)$$

A partir de la ecuación (3.75) y de la forma de solución asumida en (3.76), se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + \gamma \lambda + Bi = 0 \quad (3.78)$$

cuya solución es:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4 Bi}}{2} \quad (3.79)$$

Sustituyendo las raíces  $\lambda_{1,2}$  en la ecuación diferencial (3.75), se obtiene la solución general:

$$\Theta_\alpha(For) = C_1 e^{\frac{\lambda_1 For}{2}} + C_2 e^{\frac{\lambda_2 For}{2}} \quad (3.80)$$

Para determinar las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ , se aplica la condición de contorno en el origen junto con la propiedad (3.77):

$$\lim_{Fo \rightarrow 0} \left( Fo^{-\frac{1}{2}} \Theta_\alpha(Fo) \right) = \lim_{Fo \rightarrow 0} \left( Fo^{-\frac{1}{2}} C_1 e_{\frac{1}{2}}^{-\lambda_1 Fo} + Fo^{-\frac{1}{2}} C_2 e_{\frac{1}{2}}^{-\lambda_2 Fo} \right) \quad (3.81)$$

donde se obtiene la relación:

$$0 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} (C_1 + C_2) \Rightarrow C_2 = -C_1 \quad (3.82)$$

Por lo tanto, la temperatura adimensional puede escribirse como:

$$\Theta_\alpha(Fo) = C_1 \left[ e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_1 Fo} - e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_2 Fo} \right]. \quad (3.83)$$

Para determinar la constante de integración  $C_1$ , se aplica la condición inicial  $\Theta_\alpha(0) = 1$ , que corresponde a  $\Theta_\alpha(0) = \frac{T_s(0) - T_s(\infty)}{T_s(0) - T_s(\infty)} = 1$ :

$$1 = C_1 \left[ e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_1 \cdot 0} - e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_2 \cdot 0} \right] \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_1 \cdot 0} - e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_2 \cdot 0}}. \quad (3.84)$$

Considerando la propiedad de la función  $\alpha$ -exponencial de orden  $\frac{1}{2}$ , se simplifica finalmente a:

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (3.85)$$

De este modo, la solución analítica de la ecuación diferencial (3.75) se expresa como:

$$\Theta_\alpha(Fo) = \frac{e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_1 Fo} - e_{\frac{1}{2}}^{\lambda_2 Fo}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.86)$$

donde las funciones  $e_{\frac{1}{2}}^{\lambda Fo}$  representan  $\alpha$ -exponenciales de orden  $\frac{1}{2}$ , asociadas a la función de Mittag-Leffler.

Dado que la formulación de Caputo es compatible con la discretización de Grünwald–Letnikov, se adopta este último para la implementación numérica [104, 110, 125]. Recuérdese que el operador de Grünwald–Letnikov fue definido en la ecuación (2.28), junto con los coeficientes binomiales generalizados indicados en la expresión (2.29).

A partir de estas definiciones, el balance de energía del sensor puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
P_{\text{laser}} - hA_s(T_s(t) - T_g) - A_w\sqrt{\rho_w c_{p_w} k_w} {}_0^{\text{GL}}D_t^{\frac{1}{2}}(T_s(t) - T_g) \\
= m_s c_{p_s} \frac{d}{dt}(T_s(t) - T_g). \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Finalmente, siguiendo el mismo procedimiento de adimensionalización expuesto anteriormente se llega a una ecuación de la misma forma que la planteada en el caso de Caputo, pero ahora expresada mediante el operador de Grünwald–Letnikov:

$$\frac{d\Theta_\alpha(Fo)}{dFo} + \gamma {}_0^{\text{GL}}D_{Fo}^\alpha \Theta_\alpha(Fo) + Bi \Theta_\alpha(Fo) = 0, \quad (3.88)$$

La ecuación (3.88) permite analizar la respuesta del sensor incluyendo de forma explícita la contribución fraccional de los conductores. Además, constituye una generalización de la solución exponencial clásica, capturando de manera más realista el decaimiento térmico en presencia de medios con memoria. En función del signo y valor de los parámetros  $\gamma$  y  $Bi$ , la solución puede presentar diferentes regímenes dinámicos: oscilatorio, sobreamortiguado o crítico. Estos escenarios, junto con las expresiones analíticas detalladas, así como las formas cerradas de la temperatura adimensional  $\Theta(Fo)$  para cada caso, se recogen en el *Apéndice C*.

Una vez establecida la formulación fraccional basada en el operador de Grünwald–Letnikov, en los apartados siguientes se extiende este análisis a condiciones de contorno no constantes en el tiempo. En particular, se consideran escenarios donde el número de Biot deja de ser un valor fijo para adoptar una dependencia funcional respecto al número de Fourier, es decir,  $Bi = Bi(Fo)$ . Con ello se incorporan efectos asociados a la variabilidad en la transferencia de calor por convección, reflejando cambios en las propiedades del entorno.

### 3.3.3.1. Ecuación con coeficiente variable $Bi(Fo)$ .

Con el fin de generalizar el modelo fraccional, se plantea la incorporación de un coeficiente de Biot dependiente del número de Fourier,  $Bi(Fo)$ . Esto ofrece la posibilidad de capturar escenarios en los que las condiciones de contorno no son constantes, sino que varían en el tiempo debido, por ejemplo, a regímenes convectivos no estacionarios o a modificaciones en las propiedades termofísicas del entorno [126–128].

$${}_0^C D_{Fo}^{2\frac{1}{2}} \Theta(Fo) + \gamma {}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}} \Theta(Fo) + Bi(Fo) \Theta(Fo) = 0, \quad (3.89)$$

en donde el primer término equivale, en realidad, a una derivada de orden entero 1. Bajo este concepto, resulta conveniente adoptar la definición de

Caputo para las derivadas fraccionales, ya que posibilita imponer condiciones iniciales físicas en términos de la temperatura adimensional  $\Theta(Fo)$ . De este modo, la ecuación diferencial fraccional que describe la evolución térmica del sensor queda expresada como:

$${}_0^C D_{Fo}^1 \Theta(Fo) + \gamma {}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}} \Theta(Fo) + Bi(Fo) \Theta(Fo) = 0, \quad (3.90)$$

siendo el término  ${}_0^C D_{Fo}^1$  correspondiente a la derivada ordinaria de primer orden y donde  ${}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}}$  denota la derivada fraccional de orden 1/2 en el sentido de Caputo.

La presencia del término  $Bi(Fo)$  introduce un coeficiente variable que refleja el carácter no estacionario de la transferencia de calor en la interfase sensor–fluido, lo que elimina la posibilidad de soluciones analíticas cerradas en términos de funciones de Mittag–Leffler y obliga a recurrir a formulaciones numéricas específicas [111, 112, 129]. De ahí, un desarrollo formal de la solución puede expresarse como una serie fraccional del tipo:

$$\Theta(Fo) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Fo - \overline{Fo})^{\frac{k}{2}}, \quad (3.91)$$

donde los coeficientes  $a_k$  se determinan de manera recursiva a partir de la ecuación diferencial planteada.

De forma análoga, se representa el número de Biot mediante una expansión en serie [112, 127, 130]:

$$Bi(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (Fo - \overline{Fo})^{\frac{1}{2}k} \quad (3.92)$$

donde los primeros coeficientes de la serie de  $\Theta(Fo)$  se determinan a partir de las condiciones iniciales e información sobre la derivada fraccional:

$$a_0 = \lim_{Fo \rightarrow 0} \Theta(Fo) \quad a_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \lim_{Fo \rightarrow 0} {}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}} \Theta(Fo) \quad (3.93)$$

Aplicando la derivación fraccional término a término se obtienen, respectivamente, los términos de orden 1 y  $\frac{1}{2}$ :

$${}_0^C D_{Fo} \Theta(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k-1}{2})} (Fo - \overline{Fo})^{\frac{1}{2}(k-3)} \quad (3.94)$$

$$\gamma {}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}} \Theta(Fo) = \gamma \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} (Fo - \overline{Fo})^{\frac{k}{2}-1} \quad (3.95)$$

$$Bi(Fo) \Theta(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (Fo - \overline{Fo})^{\frac{1}{2} \cdot k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (Fo - \overline{Fo})^{\frac{1}{2} \cdot (k-1)} \quad (3.96)$$

El producto  $Bi(fo) \Theta(fo)$  se desarrolla mediante el producto de Cauchy, lo que da lugar a:

$$Bi(fo) \Theta(fo) = \sum_{n=0}^{\infty} (fo - \overline{fo})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k \quad (3.97)$$

La ecuación de coeficientes se escribe como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} (fo - \overline{fo})^{\frac{1}{2}(n-3)} + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (fo - \overline{fo})^{\frac{n}{2}-1} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (fo - \overline{fo})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k \end{aligned} \quad (3.98)$$

En la tabla 3.3 se muestran las secuencias de las potencias de los coeficientes en función de  $(fo - \overline{fo})$ . A partir de la comparación de potencias iguales de  $(fo - \overline{fo})$ , se obtiene, para todo  $n \geq 0$ , la siguiente relación de recurrencia:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} a_{n+2} = -\gamma \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} a_{n+1} - \sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k \quad (3.99)$$

despejando, resulta:

$$a_{n+2} = -\gamma \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} a_{n+1} - \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k \quad (3.100)$$

A modo ilustrativo, si  $a_0 = a_1 = 1$ , entonces:

$$a_2 = -\gamma \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} p_0 = -2 \left( \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} + p_0 \right) \quad (3.101)$$

Tabla 3.3: Exponente de  $(fo - \overline{fo})$  en cada término de  $\frac{d}{dfo} \Theta$ ,  ${}_0^C D_{fo}^{\frac{1}{2}} \Theta$  y  $Bi \Theta$ .

$n$	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2}(n-3)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{n}{2}-1$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}(n-1)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

Como caso particular, se puede considerar una variación sinusoidal del número de Biot en función de  $fo$ :

$$Bi(fo) = \frac{\overline{Bi}}{2} (1 + \sin(\omega fo + \varphi)) \quad (3.102)$$

En general, una función analítica  $f(x)$  puede expresarse mediante la expansión de McLaurin fraccional como:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} f^{(\alpha k)}(0) \quad (3.103)$$

En particular, para la función seno se cumple:

$${}_0^C D_{Fo}^{\alpha} \sin(\omega Fo) = \omega^{\alpha} \sin(\omega Fo + \frac{\pi}{2} \alpha) \quad (3.104)$$

Finalmente, aplicando esta aproximación de McLaurin con derivadas fraccionales [103, 129, 131], la expansión del número de Biot con variación sinusoidal adopta la forma:

$$Bi(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k Fo^{\frac{1}{2}k} = \frac{\overline{Bi}}{2} \left( 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{\frac{1}{2}k} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}k) \frac{Fo^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k)} \right) \quad (3.105)$$

### 3.3.3.2. Ecuación no homogénea con coeficiente variable $Bi(Fo)$ .

A diferencia del caso anterior, donde se consideró la formulación homogénea, aquí se incorpora un término en el lado derecho de la ecuación diferencial. Esta inclusión permite describir no solo la dinámica libre del sensor, sino también su respuesta ante un estado estacionario variable impuesto por el entorno. En particular, se plantea una ecuación diferencial no homogénea en la que el coeficiente de Biot depende del número de Fourier,  $Bi(Fo)$ . Con ello, se puede modelar sistemas sometidos a condiciones de contorno variables de manera transitoria, como flujos convectivos no estacionarios o medios con propiedades térmicas que evolucionan en el tiempo [130, 132].

$${}_0^C D_{Fo}^1 \Theta(Fo) + \gamma {}_0^C D_{Fo}^{\frac{1}{2}} \Theta(Fo) + Bi(Fo) \Theta(Fo) = Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo), \quad (3.106)$$

donde  ${}_0^C D_{Fo}^1$  corresponde a la derivada ordinaria de primer orden y  ${}_0^C D_{Fo}^{1/2}$  denota la derivada fraccional de orden  $1/2$ , ambas en el sentido de Caputo.

La solución formal de la ecuación (3.106) puede construirse mediante una serie iterativa de Neumann, expresada en términos de integrales fraccionarias de Riemann–Liouville [103, 126, 128, 129], pudiendo representar la respuesta del sistema como una superposición de convoluciones con núcleos de memoria térmica:

$$\Theta(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \gamma {}_0^{RL} I_{Fo}^{\frac{1}{2}} + Bi(Fo) {}_0^{RL} I_{Fo}^1 \right)^k {}_0^{RL} I_{Fo}^1 [Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo)] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S_k(Fo) \quad (3.107)$$

donde los primeros términos de la serie son:

$$S_0(Fo) = {}_0^{RL}I_{Fo}^1[Bi(Fo)\Theta_\infty(Fo)] \quad (3.108)$$

$$S_1(Fo) = \left( \gamma_0^{RL}I_{Fo}^{\frac{1}{2}} + Bi(Fo) {}_0^{RL}I_{Fo}^1 \right) S_0(Fo) \quad (3.109)$$

$$S_2(Fo) = \left( \gamma_0^{RL}I_{Fo}^{\frac{1}{2}} + Bi(Fo) {}_0^{RL}I_{Fo}^1 \right)^2 S_0(Fo) \quad (3.110)$$

En forma general, el  $k$ -ésimo término de la expansión queda:

$$S_k(Fo) = \left( \gamma_0^{RL}I_{Fo}^{\frac{1}{2}} + Bi(Fo) {}_0^{RL}I_{Fo}^1 \right)^k S_0(Fo) \quad (3.111)$$

Quedando la solución de la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\Theta(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left( \gamma_0^{RL}I_{Fo}^{\frac{1}{2}} + {}_0^{RL}I_{Fo}^1 Bi(Fo) \right)^k S_0(Fo) \quad (3.112)$$

Para facilitar el análisis, se considera una expresión periódica para el coeficiente de Biot:

$$Bi(Fo) = \frac{\overline{Bi}}{2} (1 + \sin(\omega Fo + \varphi)) \quad (3.113)$$

y una forma complementaria para el estado estacionario:

$$\Theta_\infty(Fo) = \frac{\overline{\Theta}_\infty}{2} (1 + \sin(\omega Fo - \varphi)) \quad (3.114)$$

Esta función puede expandirse, según la relación de potencias de  $Fo$ :

$$\begin{aligned} Bi(Fo) &= \sum_{k=0}^{\infty} bi_k \cdot Fo^{\frac{1}{2} \cdot k} = \frac{\overline{Bi}}{2} \cdot (1 + \sin(\omega \cdot Fo + \varphi)) = \\ &= \frac{\overline{Bi}}{2} \cdot \left( 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{\frac{1}{2} \cdot k} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi \cdot k}{4}\right) \cdot \frac{Fo^{\frac{1}{2} \cdot k}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2} \cdot k)} \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

siendo los coeficientes  $bi_k$  de la siguiente manera:

$$bi_k = \begin{cases} (1 + \sin(\varphi)) \cdot \frac{\overline{Bi}}{2} & ; k = 0 \\ \frac{\overline{Bi}}{2} \cdot \frac{\omega^{\frac{1}{2} \cdot k}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2} \cdot k)} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi \cdot k}{4}\right) & ; k > 0 \end{cases} \quad (3.116)$$

Para ilustrar el comportamiento combinado, se considera el producto del coeficiente de Biot variable y el estado estacionario propuesto. La expresión inicial es:

$$Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo) = \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4} [1 + \sin(\omega Fo + \varphi) + \sin(\omega Fo - \varphi) + \sin(\omega Fo + \varphi) \sin(\omega Fo - \varphi)] \quad (3.117)$$

Aplicando identidades trigonométricas de adición y productos, esta expresión puede reordenarse como:

$$Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo) = \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4} [\cos^2(\varphi) + 2 \cos(\varphi) \sin(\omega Fo) + \sin^2(\omega Fo)] \quad (3.118)$$

Equivalentemente, puede escribirse como:

$$Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo) = \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4} \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi \sin(\omega Fo) - \frac{1}{2} \cos(2\omega Fo) \right) \quad (3.119)$$

Empleando la expansión en series de potencias de McLaurin, se llega a:

$$Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo) = \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4} \left[ \frac{1}{2} + \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k)} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) Fo^{\frac{1}{2}k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^{\frac{1}{2}k} \omega^{\frac{1}{2}k})}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k)} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) Fo^{\frac{1}{2}k} \right] \quad (3.120)$$

El producto puede expresarse, de forma general, como una serie de potencias fraccionales:

$$Bi(Fo) \Theta_{\infty}(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k Fo^{\frac{1}{2}k} \quad (3.121)$$

donde los coeficientes  $e_k$  son:

$$e_k = \begin{cases} \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \varphi \right) \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4}; & k = 0 \\ \left( 2 \cos \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) - \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}k} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \right) \frac{\omega^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k)} \cdot \frac{\overline{Bi} \overline{\Theta}_{\infty}}{4}; & k > 0 \end{cases} \quad (3.122)$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en series de potencias, se procede a determinar los sumandos de la solución de la ecuación diferencial. El primer término se obtiene como:

$$S_0(Fo) = {}_0^{RL}I_{Fo}[Bi(Fo)\Theta(Fo)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{\frac{1}{2}k+1} Fo^{\frac{1}{2}k+1} \quad (3.123)$$

El producto de  $S_0(Fo)$  con el coeficiente variable  $Bi(Fo)$  conduce a una doble suma:

$$Bi(Fo) S_0(Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_k e_p}{\frac{1}{2}p+1} Fo^{\frac{1}{2}(k+p)+1} \quad (3.124)$$

Tras integrar nuevamente se obtiene:

$${}_0^{RL}I_{Fo}[Bi(Fo) S_0(Fo)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_k e_p}{(\frac{1}{2}p+1)(\frac{1}{2}(k+p)+2)} Fo^{\frac{1}{2}(k+p)+2} \quad (3.125)$$

De forma análoga, el proceso puede iterarse. El término  $k$ -ésimo de la expansión general se expresa como un producto iterado de coeficientes:

$$({}_0^{RL}I_{Fo} Bi(Fo))^k S_0(Fo) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{\infty} \frac{(\prod_{p=1}^k b_{i_p}) e_{i_{k+1}}}{\prod_{p=1}^{k+1} [\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^p i_j)+p]} Fo^{\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{k+1} i_j)+k+1} \quad (3.126)$$

La ecuación (3.126) representa la forma general del  $k$ -ésimo sumando de la solución en serie, obtenida a partir de la formulación de Neumann para coeficientes de Biot variables.

## Capítulo 4

# Materiales y métodos

*El método es la luz que ilumina el camino de la ciencia.*

Claude Bernard

Con el firme propósito de evaluar el comportamiento dinámico de termistores NTC de película delgada bajo condiciones representativas de flujos compresibles, este capítulo presenta el conjunto de técnicas experimentales, configuraciones instrumentales y herramientas de análisis desarrolladas a lo largo de la investigación. Se exponen diseños orientados a la medición diferencial de temperatura, así como entornos controlados que permiten reproducir distintos regímenes de operación del sensor. Asimismo, se describe en detalle el proceso de adquisición y tratamiento de datos, basado en plataformas de desarrollo propias y software de análisis numérico. Todo ello con la finalidad de contrastar la validez de las aproximaciones propuestas, analizando posteriormente los efectos no ideales asociados a la transferencia de calor a través de los conductores.

### 4.1. Introducción.

Partiendo de los ensayos preliminares orientados a la detección del bombeo prematuro en turbocompresores y, tras una descripción detallada del proceso experimental, se presenta el desarrollo de una cámara adiabática diseñada específicamente para simular condiciones de estancamiento. Esta cámara se complementa con un sistema auxiliar basado en un escáner, concebido para analizar las pérdidas de calor a través de los conductores eléctricos del sensor. Ambas configuraciones experimentales se describen de forma estructurada, abarcando las etapas de diseño, fabricación, ensamblaje

y ejecución de los ensayos, todo ello con el objetivo de sustentar experimentalmente las hipótesis formuladas a lo largo de esta tesis.

Se detalla el diseño experimental desarrollado para caracterizar la respuesta dinámica de termistores NTC bajo condiciones representativas de flujos compresibles. Para eso, se implementan estrategias que inducen gradientes térmicos controlados mediante excitación láser, junto con la modificación del entorno gaseoso en el que opera el sensor, con la finalidad de validar las aproximaciones formuladas en el Capítulo 3.

De igual forma, se presentan los dispositivos construidos *ad hoc*, los sistemas de adquisición y postprocesado de datos, así como los procedimientos experimentales empleados para evidenciar los fenómenos térmicos estudiados. Este conjunto de actuaciones constituye el núcleo experimental sobre el cual se contrastan los modelos dinámicos y las hipótesis físicas planteadas en esta investigación.

## 4.2. Selección de termistores NTC.

Tal como se expuso en el Capítulo 2, la elección de termistores con coeficiente de temperatura negativo se fundamenta en su elevada sensibilidad térmica, baja masa térmica y reducido tamaño, cualidades que los hacen especialmente idóneos para aplicaciones de medición dinámica. Estas propiedades son idóneas para detectar con precisión variaciones rápidas de temperatura, aspecto destacable en el estudio de fenómenos transitorios y flujos compresibles, donde los gradientes térmicos evolucionan en escalas temporales muy reducidas.

En una primera etapa, se evaluaron termistores tipo perla con encapsulado epóxico (figura 4.1), ampliamente empleados por su bajo coste y robustez. No obstante, su mayor volumen y masa térmica, así como las dificultades asociadas a su integración en el prototipo de medición desarrollado, limitaron su viabilidad en las configuraciones experimentales propuestas.



Figura 4.1: Termistor tipo perla con encapsulado epóxico de 10 k $\Omega$  y tolerancia del 5 % (Cantherm MF52A2103J3470) [13].

Por esta razón, se optó por termistores NTC de película delgada (thin film) recubiertos en material polimérico tipo *Kapton*®), adquiridos con tole-

rancias del 1%. Estos permiten una integración más directa.

No obstante, para su adaptación al dispositivo experimental, fue necesario modificar manualmente el encapsulado mediante cortes en la lámina protectora, reduciendo su sección sin llegar a comprometer la integridad funcional del termistor (figura 4.3).



Figura 4.2: Termistor de película delgada recubierto en Kapton® [14].

Las especificaciones técnicas de ambos modelos de termistor empleados en los ensayos se resumen en la tabla (4.1).

Parámetro	Cantherm	Littelfuse
Tipo	Perla	Película delgada
Código DigiKey	317-1258-ND	615-1126-ND
Part number	MF52A2103J3470	USP16673
Fabricante	Cantherm	Littelfuse / U.S. Sensor
Resistencia nominal ( $R_{25}$ )	10 k $\Omega$	10 k $\Omega$
Tolerancia	$\pm 5\%$	$\pm 1\%$
$\beta$ (25 °C a 85 °C)	3470 K	3435 K
$\tau$ (aire)	7,0 s	5,0 s
Constante de disipación (aire quieto)	2,0 mW/(°C)	0,7 mW/(°C)
Rango de operación	-55 °C a 125 °C	-30 °C a 90 °C
Encapsulado	Epóxico	Poliamida (Kapton)

Tabla 4.1: Especificaciones técnicas de los termistores empleados.

En los ensayos principales, así como en las pruebas complementarias orientadas a evaluar la presencia de flujo de calor a través de los cables, se emplearon exclusivamente termistores de tipo película delgada (P/N: USP16673). La elección de este modelo se justifica por su reducida masa térmica y su mayor superficie activa, características que los convierten en dispositivos especialmente adecuados para el análisis de los fenómenos de transferencia de calor no ideales.



Figura 4.3: Termistor de película delgada tras la reducción de sección del encapsulado.

### 4.3. Sistema experimental para la caracterización térmica en flujos compresibles.

Una de las motivaciones iniciales de este trabajo reside en la necesidad de caracterizar dinámicamente el fenómeno de bombeo incipiente en turbocompresores, mediante la monitorización de la temperatura del fluido en la etapa de admisión. A partir de discusiones previas, la temperatura en un flujo compresible constituye una variable altamente sensible al estado energético del gas, especialmente en zonas próximas al límite de estabilidad operativa. En este sentido, diversos estudios experimentales han demostrado que la temperatura del gas en el conducto de admisión presenta aumentos localizados ante la aparición de inestabilidades como el *surge* o el *stall*.

Este fenómeno, abordado con mayor detalle en el Capítulo 1, motiva la estrategia experimental desarrollada en esta sección: diseñar un sistema de medida basado en dos sensores de temperatura tipo NTC. Uno de ellos se ubica en la punta del conducto, enfrentado directamente al flujo del gas, con el fin de captar la temperatura de estancamiento  $T_{01}$ ; el otro se sitúa en el interior del tubo, aislado del impacto directo del flujo y registra la temperatura estática  $T_1$  (véase ecuación 1.3).

Bajo este enfoque, se desarrollaron distintos prototipos de medición, un banco de ensayos con un soplante de velocidad variable y un sistema de adquisición de datos embebido, programado para registrar en tiempo real la respuesta térmica de los sensores. No obstante, los ensayos preliminares revelaron discrepancias relevantes: en determinadas condiciones operativas, la temperatura estática medida superaba a la de estancamiento, contraviniendo los principios fundamentales de la termodinámica. Este comportamiento anómalo condujo a la formulación de una hipótesis alternativa: la existencia de flujos de calor por conducción a través de los cables del sensor, que distorsionaban la señal térmica registrada por los termistores.

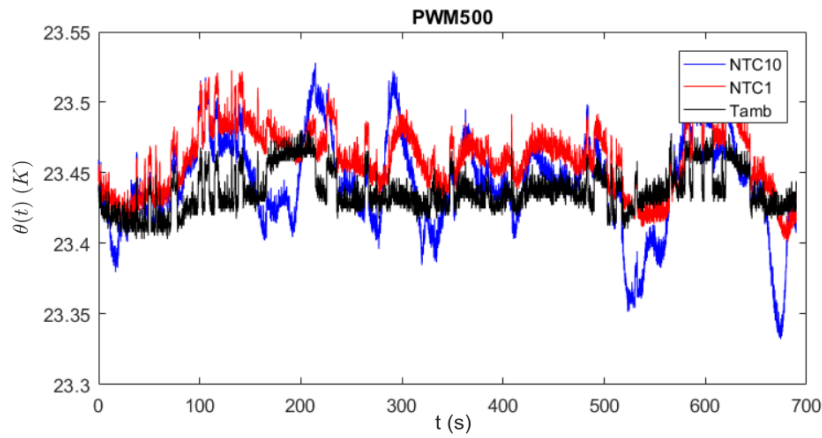


Figura 4.4: Registro experimental del sistema de medida diferencial. Se observan diferencias significativas entre NTC1 y NTC10 en régimen transitorio.

A raíz de estas observaciones, el enfoque experimental se amplió hacia el estudio de efectos no ideales en la medición de temperatura, lo que incluyen el desarrollo de una cámara adiabática y la formulación de aproximaciones que ya incorporan los términos pertinentes a la conducción a través de los cables. Los detalles de este desarrollo metodológico se presentan en los siguientes apartados.

#### 4.3.1. Prototipo de doble sensor en tubo de polipropileno.

En la fase inicial del estudio experimental, se diseñó un dispositivo de medición basado en diferencia de temperaturas, utilizando como encapsulado un cuerpo cilíndrico de polipropileno reciclado, procedente del cartucho de un bolígrafo tipo BIC.



Figura 4.5: Modelo CAD del encapsulado utilizado en los ensayos.

El objetivo de este prototipo era verificar la viabilidad de estimar el contenido energético de un flujo compresible a partir de la diferencia entre la temperatura de estancamiento y la temperatura estática, mediante dos

termistores NTC ubicados estratégicamente.

La configuración del sensor se estructuró del siguiente modo:

- Un termistor montado en la punta del dispositivo (figura 4.7), orientado en sentido contrario al flujo, para registrar la temperatura de estancamiento  $T_{01}$ .
- Un segundo termistor dispuesto lateralmente en el interior del tubo (figura 4.8), aislado del impacto dinámico del flujo, para medir la temperatura estática  $T_1$ .

El esquema conceptual de esta configuración se muestra a continuación:

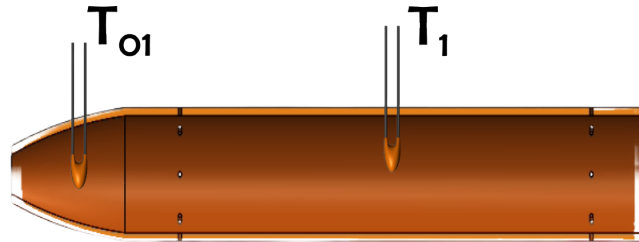


Figura 4.6: Esquema conceptual del sensor doble para estimación del contenido energético.

El primer prototipo físico desarrollado contaba con dos termistores tipo perla y presentaba el siguiente aspecto:

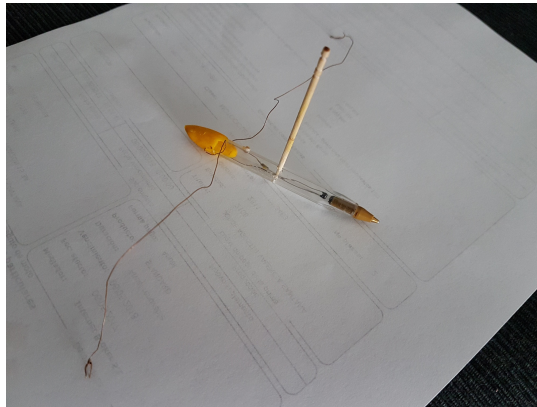


Figura 4.7: Primer prototipo experimental con carcasa de bolígrafo.

Sin embargo, los ensayos preliminares revelaron un comportamiento anómalo: en determinadas condiciones, la temperatura medida en el sensor interno (estática) superaba sistemáticamente a la de estancamiento, contravieniendo los principios de la termodinámica (véase figura 4.4). Este hallazgo

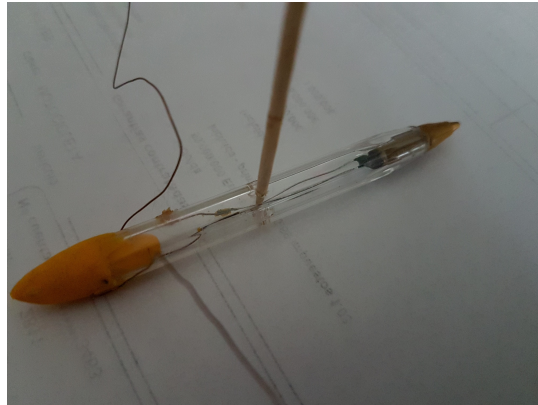


Figura 4.8: Detalle del montaje interno del segundo termistor en el primer prototipo.

motivó una revisión profunda del diseño y del papel de los efectos térmicos no ideales.



Figura 4.9: Prototipo intermedio con termistor de película delgada para reducir interferencias térmicas.

No obstante, la hipótesis más probable apuntó a una conducción de calor a través de los conductores de cobre, que actuaban como canales térmicos desde el entorno o desde zonas calientes del propio encapsulado. Para contrastar esta hipótesis, se desarrollaron nuevas versiones del dispositivo que incorporaban mejoras relevantes:

- Encapsulados optimizados con mayor aislamiento térmico.
- Conductores más delgados y trenzados, con menor sección de conducción efectiva.
- Configuración interna más simétrica, que favoreciera la reproducibilidad experimental.
- Sustitución de los termistores tipo perla por los de película delgada.

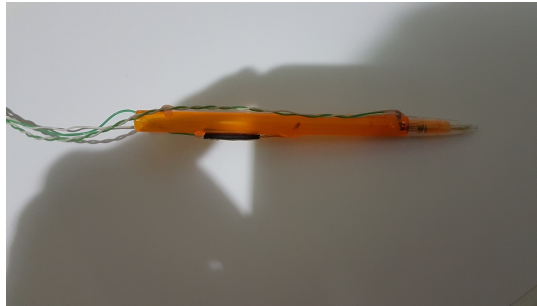


Figura 4.10: Versión final del prototipo con termistores de película delgada y conductores trenzados.

### 4.3.2. Banco de pruebas para los ensayos.

Se diseñó y construyó un banco de pruebas que permitiera inducir un flujo de aire controlado, variando el régimen de giro, registrando así la respuesta de los termistores y, por consiguiente, poder analizar el comportamiento dinámico ante distintas condiciones de operación. Este banco está compuesto por tres elementos principales:

- Sistema de impulsión del fluido.
- El tubo de aspiración junto con el dispositivo de medida.
- Sistema embebido de adquisición de datos.

La corriente de aire se realiza mediante una soplante centrífuga de velocidad variable, modelo Domel, alimentada a 230 V y con una potencia nominal de 450 W (figura 4.11). Este equipo induce regímenes de velocidad media del aire controlables, adecuados para ensayos en el rango de bajas velocidades característico de condiciones de bombeo incipiente.

El aire es conducido a través de un tubo de PVC de 50 mm de diámetro (figura 4.12), que actúa como canal de pruebas. En su interior se instala el prototipo de medición compuesto por los dos termistores NTC de película delgada según la configuración definida anteriormente, registrando la temperatura de estancamiento ( $T_{01}$ ) y la temperatura estática ( $T_1$ ).

La cápsula que contiene los dos termistores se fija mediante una masilla que asegura el sellado térmico y la estabilidad mecánica. Esta disposición experimental está diseñada para capturar el gradiente térmico inducido por el flujo de aire, pudiendo hacer una estimación indirecta del contenido energético del fluido (ver diagrama 1.3).

El sistema de adquisición está basado en plataformas Arduino, las cuales ofrecen una recolección continua de datos a partir de los sensores. La señal analógica de los termistores se introduce a través de un divisor resistivo, se



Figura 4.11: Detalle de la soplante centrífuga utilizada.



Figura 4.12: Vista general del banco de ensayos.

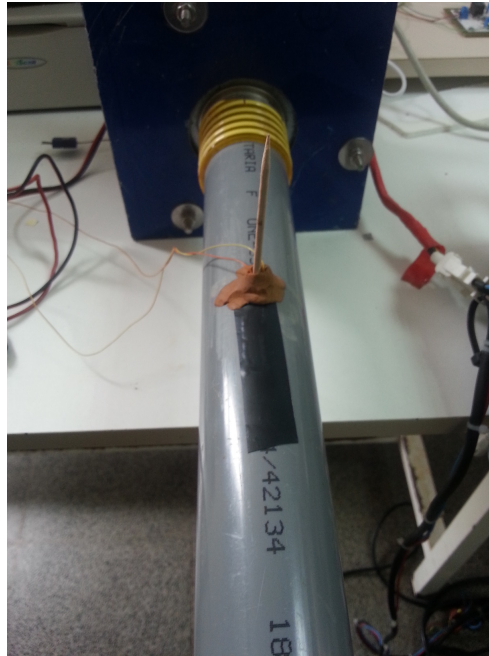


Figura 4.13: Detalle del montaje del prototipo de medida en el tubo de aspiración.

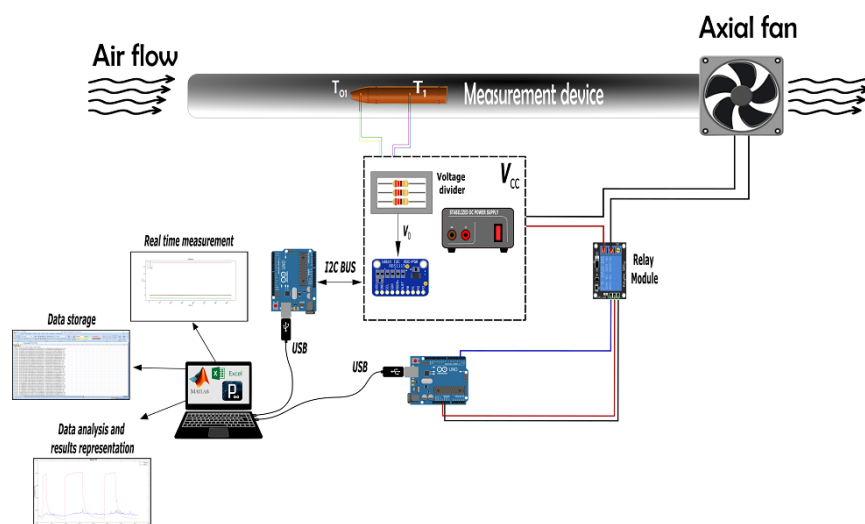


Figura 4.14: Esquema del sistema completo de adquisición.

acondiciona electrónicamente y se digitaliza con mediante un conversor *ADC* con comunicación I2C. La información recogida se transmite a un entorno de visualización en tiempo real implementado inicialmente en Processing, y posteriormente exportada a MATLAB para un análisis más detallado (figura 4.14). Cabe señalar que las primeras versiones del sistema se desarrollaron íntegramente en Processing; sin embargo, con el fin de disponer de una interfaz más robusta y escalable, se migró progresivamente hacia un entorno en Java y, en fases posteriores, hacia Python.

Aunque los datos obtenidos con este banco preliminar no permitieron confirmar experimentalmente todos los modelos propuestos –debido a las inconsistencias térmicas que se han mencionado– sí sirvieron como indicio crítico para formular nuevas hipótesis sobre fenómenos de transferencia de calor. En particular, estas observaciones sentaron las bases para una nueva fase experimental, centrada en el estudio aislado y controlado de los efectos térmicos asociados a la medición de la temperatura de estancamiento, mediante una cámara adiabática diseñada específicamente para este propósito. En este entorno controlado, se empleó una excitación localizada mediante un láser, lo cual pudo reproducir fenómenos transitorios sin interferencias externas.

De este modo, los ensayos ejecutados simulaban condiciones ideales de operación, permitiendo validar las aproximaciones teóricas previamente formuladas y cuantificar el impacto de las pérdidas por conducción a través del cableado del sensor.

## 4.4. Cámara adiabática de ensayo.

### 4.4.1. Diseño CAD y funcionalidad.

En esta etapa del proceso, la necesidad de generar un entorno térmico controlado que permitiera analizar la respuesta dinámica de sensores térmicos bajo condiciones transitorias definidas fue la principal motivación. Para ello, se requería un recinto hermético, compacto y térmicamente estable, capaz de aislar completamente las perturbaciones externas que pudieran interferir en la medición de temperatura.

Tras la evaluación de distintas soluciones comerciales y prototipos, se optó por adaptar un componente neumático industrial –en concreto, una bomba multiplicadora de presión o air booster pump– cuyo cuerpo metálico ofrecía un volumen interno adecuado, un alto grado de estanqueidad y una geometría favorable para su modificación. Estas características la convertían en una base idónea para el desarrollo de la cámara adiabática de ensayos de la que tanto se ha hablado.

El prototipo se fabricó en aleación de aluminio 6082, seleccionada por su adecuada combinación de conductividad térmica, resistencia mecánica y



Figura 4.15: Bomba neumática multiplicadora de presión.

estabilidad dimensional. El cuerpo principal de la cámara se mantuvo sin modificaciones sustanciales, aunque se introdujeron mejoras para reducir pérdidas térmicas por convección y radiación, así como la incorporación de visores ópticos de borosilicato (rosca M22×1,5) que permiten el paso del haz láser sin alteraciones en su propagación. La unión entre el cuerpo y la tapa de válvulas se resolvió mediante dos tornillos Allen DIN 912 M10×40 con arandelas planas y dos tornillos Allen DIN 912 M8×30 con arandelas de presión (tipo Grover), embutidos en el interior de la cámara. Entre ambas piezas se dispuso una junta de goma NBR de 3 mm de espesor, con un orificio central destinado al paso de cables y fluidos. En la parte inferior, la tapa se selló mediante una junta tórica de NBR de 150×5 mm, fijada al cuerpo principal con diez tornillos Allen DIN 912 M5×12 con arandelas planas. El diseño CAD, desarrollado en SolidWorks, incluyó múltiples puertos de acceso para sensores, válvulas, conectores eléctricos y otros elementos necesarios para las pruebas en condiciones de presión positiva y negativa.

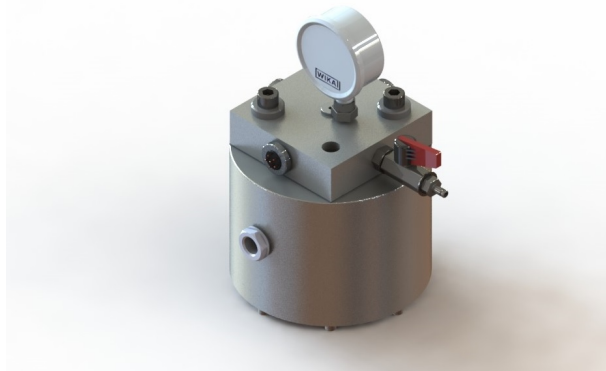


Figura 4.16: Vista general del modelo CAD de la cámara adiabática de ensayo.

Entre los requerimientos funcionales considerados durante la fase de diseño destacan:

- Hermeticidad completa del volumen de ensayo.
- Compatibilidad con gases técnicos, como aire sintético y helio.
- Capacidad para operar bajo condiciones de vacío parcial.
- Aislamiento mecánico, eléctrico y térmico de las líneas de señal y alimentación.

La figura (4.17) muestra el posicionamiento del termistor NTC, estratégicamente ubicado sobre el eje del haz láser con el fin de recibir una excitación térmica puntual y bien definida. Para maximizar la irradiancia absorbida por el sensor, se dispuso un reflector de papel de aluminio en la parte posterior, garantizando una mayor uniformidad en la absorción energética. Esta configuración permite una caracterización precisa del tiempo de respuesta y del comportamiento dinámico del sensor, minimizando las interferencias debidas a gradientes externos.

La cámara incorpora, además, un manómetro analógico para el control de presión interna, válvulas de purga y regulación de flujo, así como unos conectores herméticos roscados, desarrollados ad hoc, que permiten el paso del cableado de los sensores internos sin comprometer la estanqueidad ni las condiciones térmicas del volumen de control.

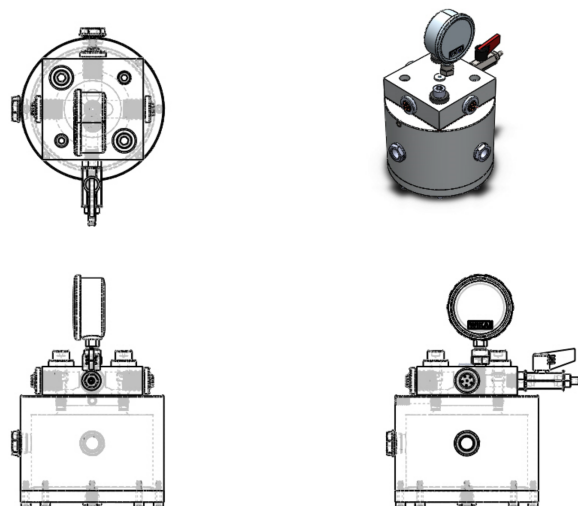


Figura 4.17: Vistas isométrica, frontal, lateral y superior del modelo completo.

#### 4.4.2. Conectores y cableado hermético.

Una de las principales exigencias del diseño experimental fue garantizar la total hermeticidad de la cámara, especialmente en lo relativo al cableado de los dispositivos que irían situados en el interior. Con lo cual, mantener la fiabilidad en las mediciones fue lo que principalmente motivó el desarrollo de conectores personalizados para este propósito.

Cabe mencionar que los conectores comerciales disponibles presentaban una limitación importante en lo que respecta a los requerimientos del ensayo: la estanqueidad frente a condiciones de vacío parcial. Ante esta situación, se optó por fabricar unos conectores a medida que fuesen completamente herméticos, mecanizados a partir de redondos de aluminio de 25 mm de diámetro en un torno paralelo, obteniendo unas piezas con rosca métrica de paso fino ( $M22 \times 1,5$ ), lo que permitió un roscado preciso en la tapa.

En el interior de cada conector se alojaron terminales de cobre de 1,5 mm de diámetro, donde cada terminal fue encapsulado de forma individual empleando una resina epoxi de baja conductividad térmica (Loctite<sup>®</sup> Stycast).



Figura 4.18: Terminales de cobre encapsulados individualmente en epoxi.

Para reforzar la integridad hermética de estos conectores, además se aplicó una segunda capa de silicona RTV (Loctite<sup>®</sup> SI 5910) una vez curada la resina epoxi. Este recubrimiento exterior añade flexibilidad al conjunto, mejorando su resistencia frente a dilataciones térmicas y microfugas asociadas a variaciones de presión interna. Asimismo, durante el montaje definitivo de los conectores, se utilizó un sellador de roscas industrial (Loctite<sup>®</sup> 567) en todas las uniones metálicas, garantizando un cierre seguro y duradero frente a sucesivos ciclos de vacío y presurización.

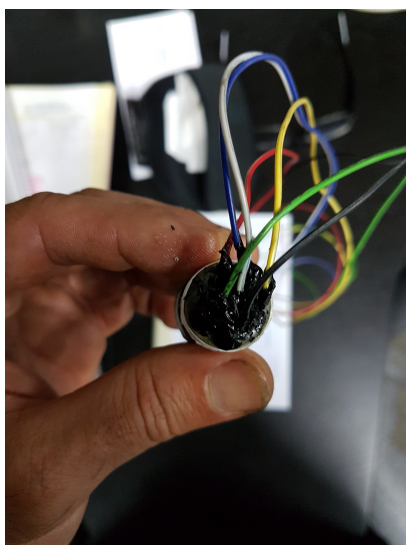


Figura 4.19: Vista del cableado dispuesto en la tapa superior durante el proceso de ensamblaje.

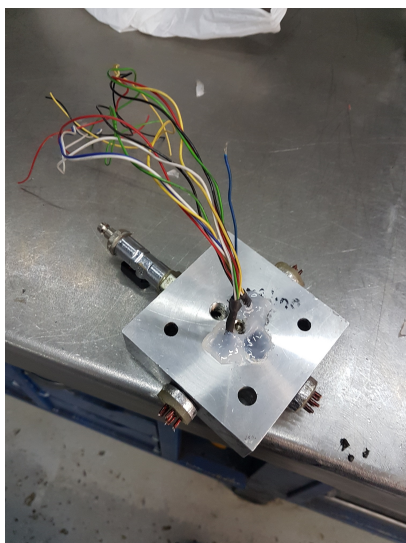


Figura 4.20: Tapa superior de la cámara con paso de conectores mecanizados.

La figura (4.20) muestra el detalle de la distribución de conectores en la tapa superior de la cámara. La ubicación de cada uno de ellos fue definida estratégicamente para reducir interferencias térmicas cruzadas entre líneas de señal, optimizar la gestión del cableado interno y facilitar las operaciones de montaje, calibración y mantenimiento.

Los esquemas de conexión para los conectores desarrollados –denominados Tipo 1 y Tipo 2– se presentan en las figuras (4.21) y (4.22), respectivamente.

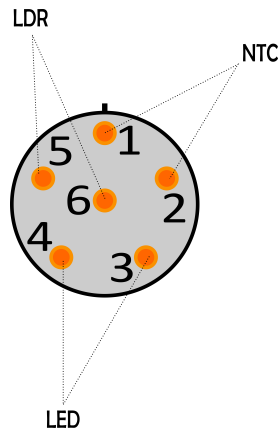


Figura 4.21: Esquema de conexión del conector tipo 1.

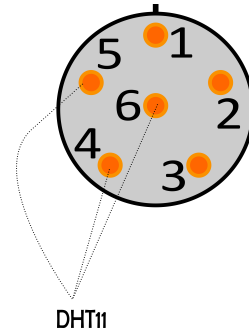


Figura 4.22: Esquema de conexión del conector tipo 2.

La asignación funcional de los pines se resume en la siguiente tabla, donde se describen las señales eléctricas asociadas a cada terminal.

Tabla 4.2: Asignación funcional de pines para los conectores herméticos.

Pin	Conector Tipo 1	Conector Tipo 2
1	NTC Termistor – Señal	Alimentación 5V
2	NTC Termistor – GND	Masa común
3	DHT11 – Datos	Sensor auxiliar – Señal
4	DHT11 – VCC	Sensor auxiliar – VCC
5	LED blanco – Ánodo	LDR – Señal
6	LED blanco – Cátodo	Libre / Reserva

#### 4.4.3. Ensamblaje del prototipo.

Antes del montaje final de la tapa de válvulas, el conexionado eléctrico y el cierre hermético de la cámara, se instalaron en su interior todos los dispositivos de medida necesarios para las pruebas.

La lista de componentes incluidos es la siguiente:

- Termistor NTC, centrado en el eje óptico para recibir de forma directa la excitación del haz láser.
- Un sensor digital DHT11, encargado de registrar la temperatura y la humedad relativa en el interior de la cámara.

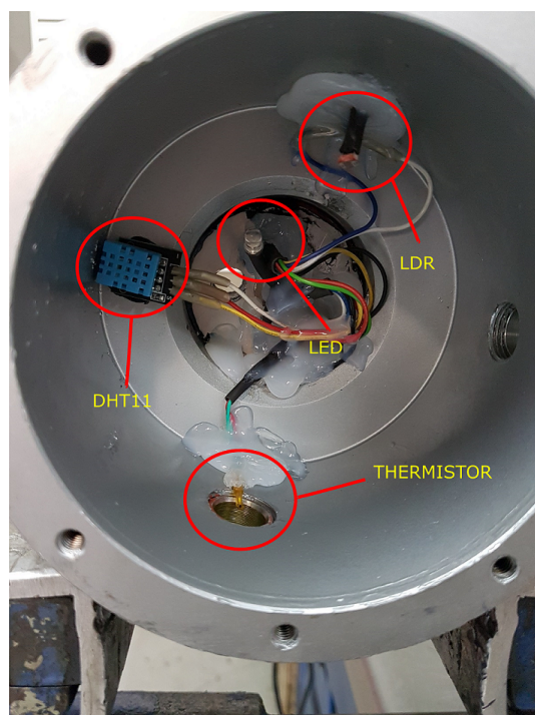


Figura 4.23: Vista del interior de la cámara con los sensores montados y aislados.

- Un LED blanco, utilizado como fuente de referencia óptica para pruebas de calibración.
- Una fotorresistencia (LDR), cuya función es verificar la activación y duración del pulso láser mediante lectura indirecta de intensidad.

Como se observa en la figura 4.23, los sensores fueron fijados directamente mediante silicona termofusible (hot-melt), lo que permitió inmobilizarlos de forma rápida y sencilla dentro de la cámara. Para reforzar la protección de las conexiones se aplicó tubo termorretráctil en los extremos de los conductores, mejorando así el aislamiento eléctrico y la resistencia mecánica local. Se evitó el contacto directo de los cables con las paredes metálicas, minimizando interferencias térmicas por conducción y facilitando la trazabilidad del cableado hasta los conectores estancos externos.

Una vez completada la instalación interna, se procedió al cierre definitivo del volumen de ensayo, atornillando la tapa superior y fijando el conjunto de válvulas y manómetro de presión. Con el fin de garantizar la estanqueidad sin deformar la junta de sellado, a cada tornillo se le aplicó el par de apriete correspondiente a su métrica. El ensamblaje final se muestra en la figura (4.24).

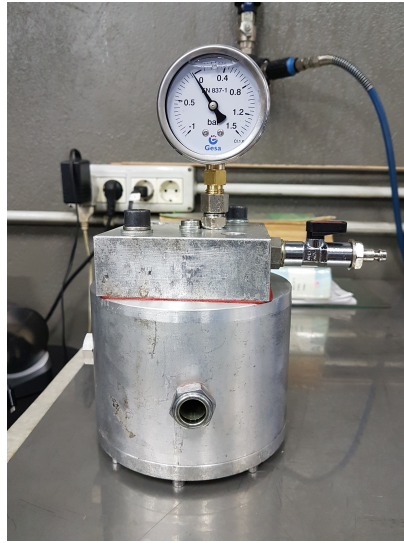


Figura 4.24: Cámara adiabática completamente ensamblada.

#### 4.4.4. Banco de pruebas de la cámara adiabática.

##### 4.4.4.1. Sistema de excitación térmica.

Para inducir perturbaciones sobre el termistor en condiciones controladas, se recurrió al uso de fuentes láser como mecanismo de excitación remota. Esto genera un salto térmico abrupto y focalizado sin contacto físico, lo cual resulta especialmente útil para caracterizar los termistores NTC utilizados en este estudio.

En una primera etapa experimental se empleó un puntero láser verde modelo JD-851, de clase IIIA, con longitud de onda de 532 nm y potencia nominal de 100 mW (figura 4.25).

Éste fue modificado para que estuviese alimentado continuamente por una fuente externa. El conjunto se instaló sobre una bancada metálica con soporte ajustable, por el hecho de alinear de forma axial el haz láser respecto al sensor de temperatura (figura 4.26).



Figura 4.25: Puntero láser JD-851 (verde, clase IIIA, 532nm)[15].

Tabla 4.3: Especificaciones técnicas del puntero láser JD-851 (fase inicial del experimento).

Parámetro	Valor
Fuente de alimentación	Batería de litio (600 mAh)
Autonomía de operación	30 – 60 minutos
Tiempo de respuesta	<3 segundos
Color del láser	Verde
Potencia del láser	100 mW @ 532 nm
Dimensiones	120 × 23 mm
Peso	64 g

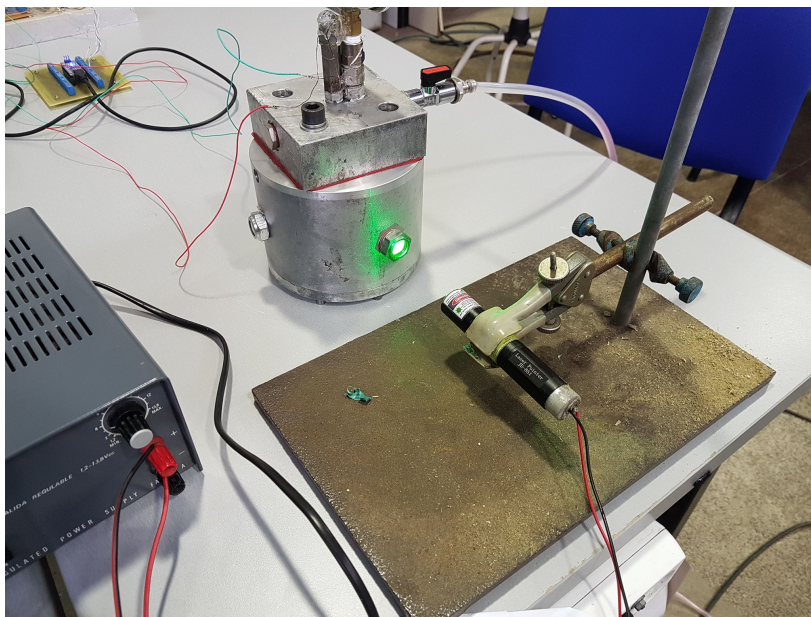


Figura 4.26: Montaje inicial del puntero láser apuntando a la cámara adiabática.

Aunque funcional en los ensayos preliminares, este sistema presentó limitaciones significativas en términos de estabilidad térmica. A pesar de intentos de encapsulado mecánico para mejorar su comportamiento (figura 4.27), se observó una pérdida progresiva de potencia emitida durante los experimentos, generando perturbaciones no reproducibles.



Figura 4.27: Encapsulado del puntero láser para mejora de estabilidad térmica.

Para cuantificar dicha inestabilidad, a través la fotorresistencia LDR incorporada en el eje opuesto al haz, así como un LED blanco de calibración interna (figura 4.33), se pudo visualizar la intensidad luminosa recibida durante cada ensayo. La señal obtenida (figura 4.28) revela una clara caída de irradiancia, lo que justifica la baja fiabilidad del sistema.

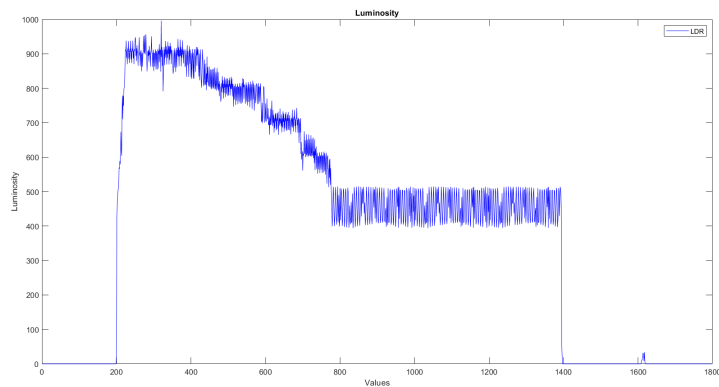


Figura 4.28: Caída progresiva de luminosidad detectada por la LDR.

Para superar estas limitaciones, se integró un proyector láser profesional EMMA EM-*RGB220* (figuras 4.29 y 4.30), capaz de emitir haces RGB modulados con potencias ajustables de hasta 200 mW. Sus características técnicas se muestran en la tabla (4.4).

Tabla 4.4: Especificaciones técnicas del proyector láser EMMA EM-RGB220 (sistema definitivo).

Parámetro	Valor
Fuente de alimentación	AC 90–240 V, 50–60 Hz
Colores de láser disponibles	RGB (rojo, verde, azul), y mezclas: amarillo, rosa, cian y blanco
Potencia del láser rojo	200 mW @ 638 nm
Potencia del láser verde	100 mW @ 520 nm
Potencia del láser azul	200 mW @ 450 nm
Velocidad del escáner Galvo	0–30 kpps
Ángulo de escaneo	$\pm 25^\circ$
Modulación	TTL (por defecto)
Canales DMX	24 canales
Dimensiones	260 × 180 × 90 mm
Peso	3 kg

Este dispositivo ofrece una mayor estabilidad térmica y permite un control más preciso de la energía suministrada.



Figura 4.29: Frontal del proyector EMMA EM-RGB220 [16].



Figura 4.30: Parte trasera del proyector EM-RGB220 con conexiones y controles [16].

Con este equipo, el sistema obtuvo una respuesta lumínica estable (figura 4.31), lo que validó la idoneidad del proyector láser EMMA como fuente de excitación térmica fiable.

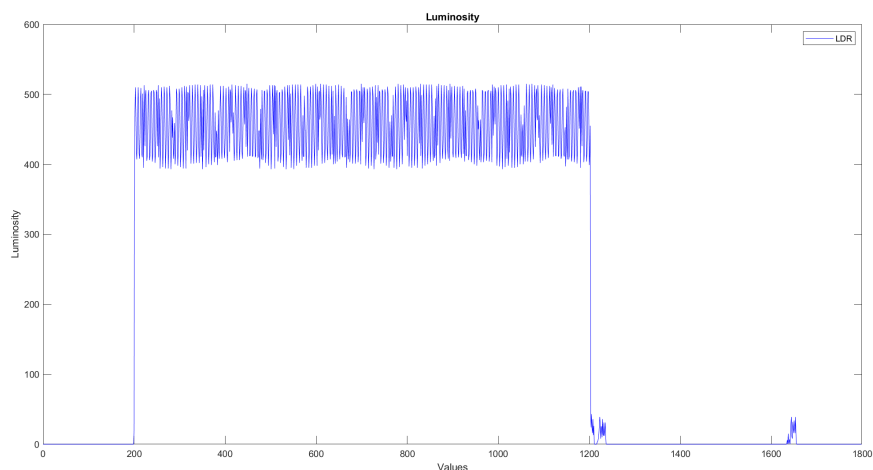


Figura 4.31: Estabilidad lumínica registrada con el proyector EMMA.

La alineación del haz láser se realizó a través de los visores ópticos dispuestos en la cámara adiabática, verificando que el haz incidía directamente sobre el encapsulado del termistor. Esta nueva configuración garantizó una excitación precisa, puntual y reproducible, permitiendo contrastar de una manera rigurosa las aproximaciones propuestas.

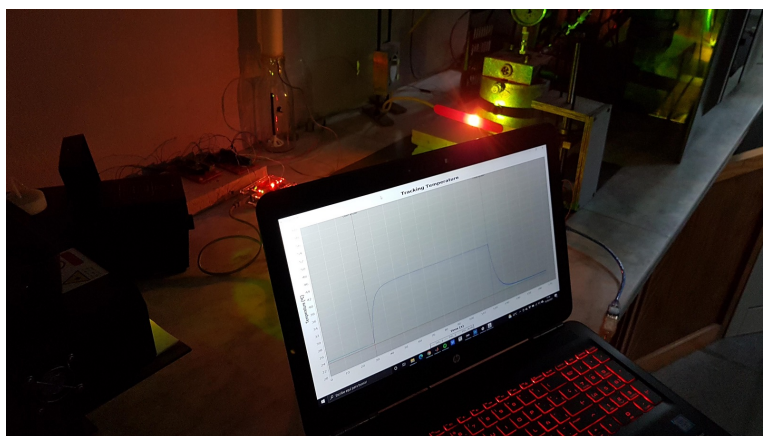


Figura 4.32: Sistema completo con proyector láser. Vista del sistema de adquisición de datos.

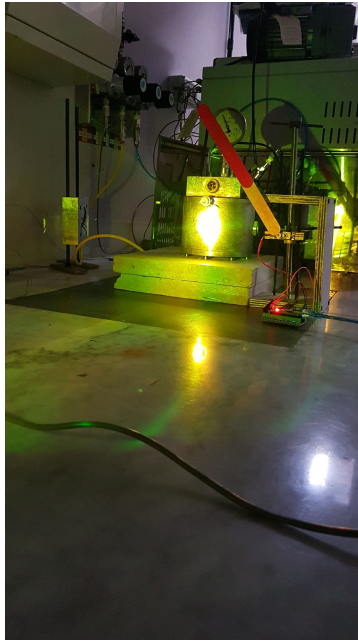


Figura 4.33: Sistema completo con proyector láser. Vista de la cámara y el dispositivo obturador.

#### 4.4.4.2. Diseño y fabricación del circuito de adaptación de señal.

Para evitar la dependencia de cableado provisional tipo DuPont y tener un sistema de medida más robusto, se diseñó y fabricó una placa de circuito impreso (PCB) personalizada que integra las resistencias y conexiones necesarias para adaptar la señal de los sensores al sistema de adquisición. Esta solución no sólo mejora la organización del montaje experimental, sino que reduce las interferencias electromagnéticas, mejora la fiabilidad eléctrica y facilita futuras modificaciones o escalados del sistema.

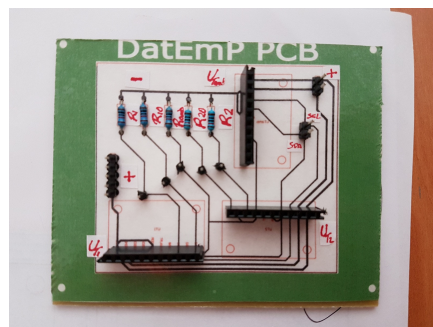


Figura 4.34: Vista superior de la placa PCB desarrollada con resistencias de  $1\text{ k}\Omega$  soldadas.

El diseño del circuito se realizó considerando la disposición física de los sensores conectados, el número de canales requeridos para la adquisición simultánea y las señales de control necesarias para dispositivos como la LDR, el LED o el sensor DHT11. Para la fabricación de la placa se utilizó la técnica de fotograbado con una máscara impresa sobre transparencia, generada a partir del esquemático en formato vectorial.

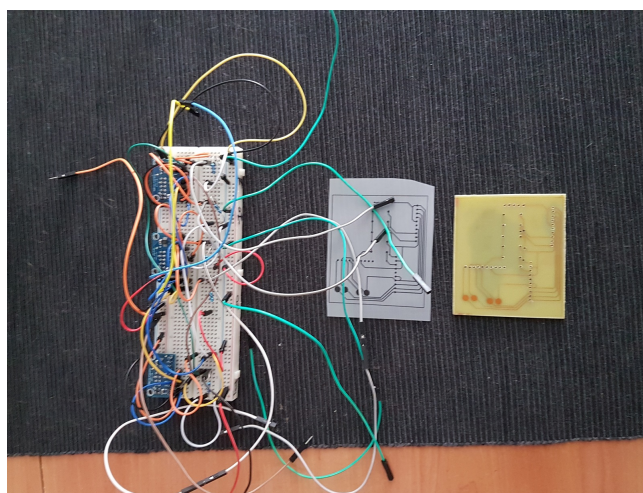


Figura 4.35: Comparación del conexionado en protoboard con el diseño de la PCB.

La figura (4.35) muestra la configuración previa a la implementación definitiva, donde se validaron funcionalmente los niveles de tensión, señales digitales y tiempos de muestreo. Este banco de pruebas permitió verificar la compatibilidad entre la placa de adquisición (Arduino y conversores *ADC* externos) y los sensores empleados en el interior de la cámara.

Como se puede apreciar en la figura (4.36), se empleó una insoladora casera compuesta por tiras LED UV alineadas y una base de sujeción para lograr una exposición uniforme. Posteriormente, se procedió al revelado y ataque químico con cloruro férrico, obteniendo un trazado limpio y funcional.

Cabe mencionar que las pistas del circuito se diseñaron con un ancho mínimo de 0,5 mm para garantizar una baja resistencia eléctrica y una buena capacidad de conducción de corriente, manteniendo separaciones mínimas de 0,8 mm para evitar cortocircuitos durante el proceso de soldadura. Se emplearon conectores tipo hembra de paso estándar (2,54 mm) para facilitar el montaje y desmontaje de los sensores y resto de componentes.

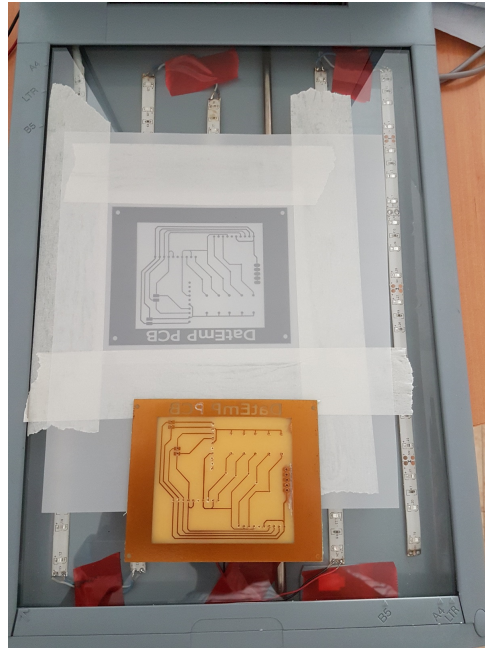


Figura 4.36: Proceso de insolación del fotolito sobre placa fotosensible para la fabricación de la PCB.

#### 4.4.4.3. Integración de todos los sistemas.

Presentados los dos sistemas anteriores, en la figura (4.37) se ofrece una visión general del sistema completo desarrollado. El montaje integra de forma sinérgica los distintos subsistemas que componen el banco de ensayo: la fuente de excitación térmica, el control de las condiciones atmosféricas, el sistema de adquisición de datos y la supervisión en tiempo real a través de una interfaz gráfica.

Cabe destacar la incorporación de un servomotor controlado por un microcontrolador Arduino (modelo SG90), el cual actúa como obturador del sistema óptico, permitiendo el paso del haz láser únicamente durante la fase de excitación térmica del protocolo experimental.

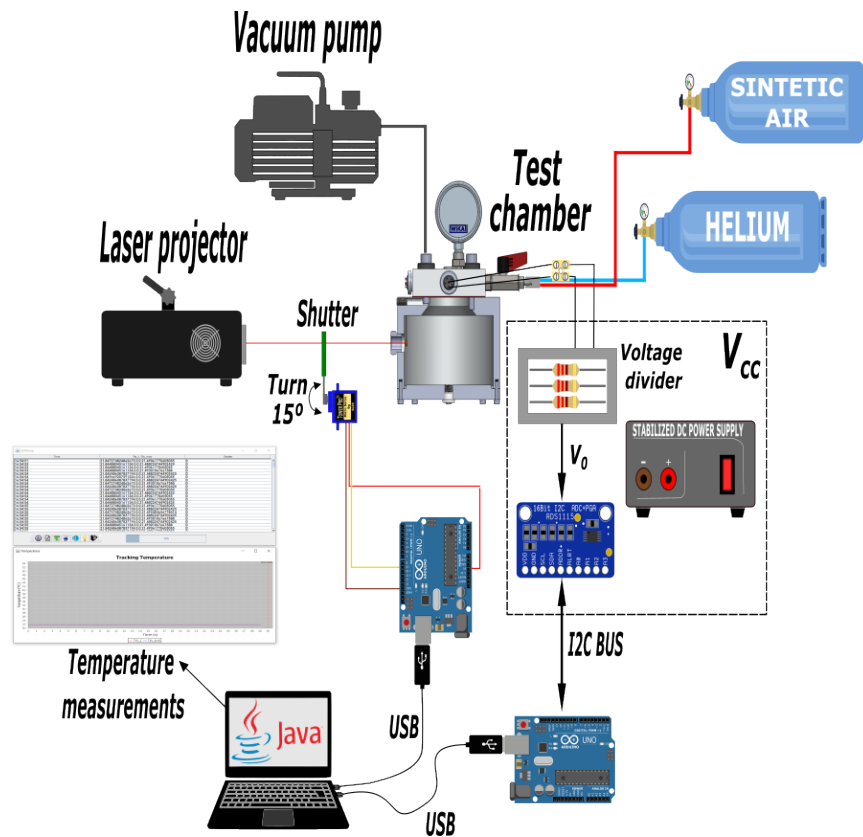


Figura 4.37: Esquema funcional del banco de ensayo con la cámara adiabática [7].

Por otro lado, en lo que respecta al control atmosférico, se ha indicado con anterioridad que la cámara puede operar en atmósfera controlada o en vacío. Para lograr condiciones de vacío parcial, se emplea una bomba de vacío modelo REFCO ECO 5DV, cuyas características se resumen en la tabla (4.5). Asimismo, la cámara admite purgas con gases técnicos, concretamente helio y aire sintético, cuyas especificaciones de pureza se detallan en las tablas (4.6) y (4.7), respectivamente.

Tabla 4.5: Especificaciones de la bomba de vacío REFCO ECO 5DV.

Parámetro	Valor
Tensión de alimentación	240 V AC, 50–60 Hz
Potencia del motor eléctrico	0,37 kW
Caudal volumétrico	141 $\frac{L}{min}$
Vacío alcanzable	25 micras
Capacidad de aceite	281 mL
Dimensiones	260 × 180 × 90 mm
Peso	12,7 kg

Tabla 4.6: Composición del gas helio utilizado en los ensayos.

Parámetro	Valor
Volumen de botella	10 L
H <sub>2</sub> O	≤ 3 ppm
O <sub>2</sub>	≤ 2 ppm
C <sub>n</sub> H <sub>m</sub>	≤ 0,5 ppm
Pureza	≥ 99,999 %

Tabla 4.7: Composición del aire sintético empleado en los experimentos.

Parámetro	Valor
Volumen de botella	50 L
H <sub>2</sub> O	≤ 3 ppm
O <sub>2</sub>	20,9 % ± 1 %
C <sub>n</sub> H <sub>m</sub>	≤ 3 ppm
Pureza	≥ 99,995 %



Figura 4.38: Vista de los equipos del ensayo: cámara adiabática, bomba de vacío y conexiones a la distribución de los gases técnicos.

#### 4.4.5. Protocolo experimental y adquisición de datos.

##### 4.4.5.1. Secuencia del ensayo.

Para evaluar la respuesta dinámica del termistor frente excitaciones abruptas, se estableció un protocolo de ensayo estructurado en tres fases consecutivas: estabilización, excitación y enfriamiento.

- La primera fase corresponde al estado de reposo. Una vez cerrado el sistema y comienza la medición, se mantiene un periodo de estabilización de 30 segundos. En esta etapa se establece la condición inicial del sistema  $T_s(t = 0)$ , así como verificar la estabilidad térmica previa al inicio del estímulo. Además, durante todo el proceso se registran la temperatura y la humedad relativa.
- En la segunda fase se activa el láser durante un intervalo fijo de 90 segundos. La adquisición de datos de temperatura se realiza con una frecuencia de muestreo de 10 Hz.
- La tercera fase contempla el enfriamiento natural del sensor, sin intervención externa, durante un periodo adicional de 60 segundos. Esta etapa resulta clave para evaluar la simetría térmica del modelo dinámico propuesto, así como para analizar fenómenos asociados a la reversibilidad de la respuesta, la capacidad térmica del entorno, o posibles retardos inducidos por la inercia térmica del sistema.

En la figura (4.39) se muestra el comportamiento característico del sensor ante el estímulo láser tipo escalón. Se observa una fase transitoria de

calentamiento seguida de una meseta térmica y, finalmente, una etapa de enfriamiento libre tras la desactivación del láser.

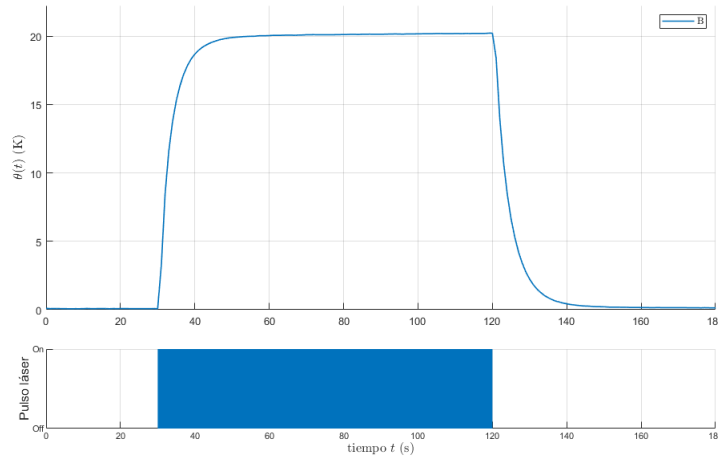


Figura 4.39: Respuesta térmica del termistor ante una excitación láser.

Cada ensayo fue repetido diez veces para cada combinación de gas y potencia láser (longitud de onda), lo que permitió estimar la desviación estándar, validar la dispersión estadística y garantizar la reproducibilidad de los datos utilizados en las aproximaciones.

#### 4.4.5.2. Automatización del sistema.

La gestión integral del ensayo se llevó a cabo mediante un sistema completamente automatizado, orientado a garantizar la precisión, repetibilidad y trazabilidad de las mediciones. Para ello, se diseñó una arquitectura basada en microcontroladores y un entorno de supervisión en tiempo real desarrollado en Java.

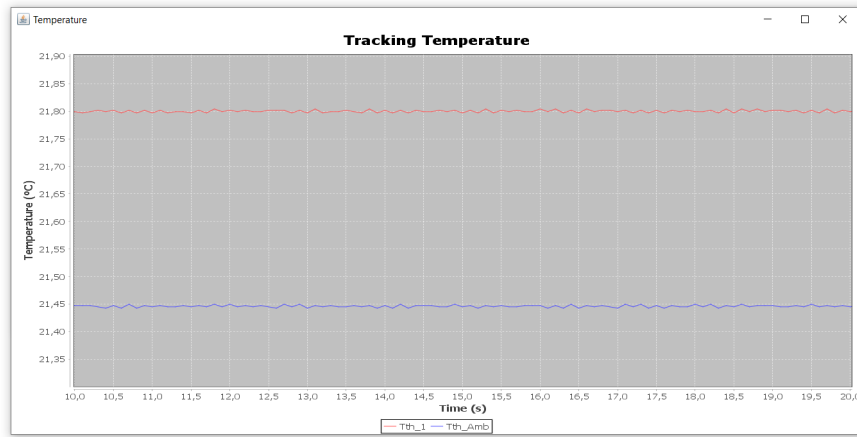


Figura 4.41: Representación gráfica en tiempo real del perfil térmico durante el ensayo.

Time	Tth_1	Tth_Amb	Shutter
16:59:16	21.799389160504326	0.02144754585539632	0
16:59:17	21.79220663781407	0.021440367512152513	0
16:59:17	21.799389160504326	0.02144754585539632	0
16:59:18	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:18	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:18	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:18	21.79699497679703	0.021445153064837854	0
16:59:18	21.794600802566947	0.021445153064837854	0
16:59:18	21.79699497679703	0.021440367512152513	0
16:59:18	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:18	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:18	21.80178335368882	0.021445153064837854	0
16:59:18	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:19	21.80178335368882	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:19	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021442760283756577	0
16:59:19	21.79699497679703	0.021442760283756577	0
16:59:19	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:19	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:19	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021440367512152513	0
16:59:19	21.799389160504326	0.021445153064837854	0
16:59:19	21.794600802566947	0.021440367512152513	0

3%

Start measurement

Figura 4.40: Interfaz de adquisición *DatEmp*.

La plataforma de control incluye dos microcontroladores ATmega328, integrados en sendas placas Arduino Uno<sup>®</sup>: uno dedicado a la gestión del obturador y de los dispositivos auxiliares, mientras que el otro se destina exclusivamente a la adquisición de señales analógicas provenientes del termistor.

Para la medición de temperatura del termistor NTC, se implementó un divisor resistivo adaptado a la dinámica del sensor, cuya salida fue conectada a un convertor analógico–digital de 16 bits (ADS1115, Texas Instruments<sup>®</sup>). La elevada resolución del convertidor permitió una reconstrucción precisa de la señal de temperatura, lo cual era necesario para el análisis detallado del comportamiento dinámico de éste.

El entorno software desarrollado en Java –denominado *DatEmp*– coordinaba de forma secuencial el protocolo de ensayo, con funciones específicas para la activación del sistema, el control del obturador, la adquisición y ex-

portación de datos, así como la visualización gráfica en tiempo real. En su barra de herramientas (figura 4.40), se integraron las siguientes funciones clave:

- Iniciar el protocolo de medición.
- Generar un informe con las condiciones iniciales de la cámara (temperatura y humedad).
- Exportar datos a formato `.xlsx`.
- Activar el obturador.
- Visualizar la evolución térmica en tiempo real.
- Encender el LED de referencia interno.
- Finalizar la adquisición y cerrar el programa.

Todos los datos adquiridos se almacenaron en tiempo real en archivos `.csv` con marcas temporales, lo que posibilita un posterior análisis en MATLAB para el ajuste y validación de las aproximaciones.

Finalmente, se diseñó una versión alternativa del software de adquisición en Python, más ligera y adecuada para configuraciones de bajo consumo o ensayos en campo, donde los recursos computacionales son limitados. Esta implementación permite la monitorización básica en tiempo real y la exportación directa de los datos registrados para su posterior análisis.

Para mayor claridad y trazabilidad, en el Apéndice A se recopilan los códigos empleados tanto para la monitorización como para el procesamiento de los resultados experimentales. Asimismo, el Apéndice B incluye una guía detallada de uso del software *DatEmp*.

## 4.5. Ensayos complementarios.

### 4.5.1. Estudio de conducción térmica por cables.

Tal como se argumentó teóricamente en el Capítulo 2, la conducción de calor a través de los conductores puede introducir errores sistemáticos en la medición de temperatura, particularmente en sensores térmicos de pequeña masa y baja constante de tiempo, como los termistores NTC. Esta vía de transferencia térmica no deseada puede modificar la respuesta dinámica del sistema, especialmente durante fases transitorias.

Por tanto, con el fin de evaluar cuantitativamente la magnitud de este efecto, se diseñó un ensayo específico basado en la exposición simultánea de múltiples sensores idénticos a una fuente de excitación térmica homogénea.

Para ello, se modificó un escáner plano marca Canon® modelo LIDE mediante la incorporación de tiras LED de emisión ultravioleta en su superficie interna. Esta modificación permitió transformar el escáner en una fuente de irradiación luminosa térmicamente constante, capaz de generar un estímulo repetible en una región controlada (figura 4.42).

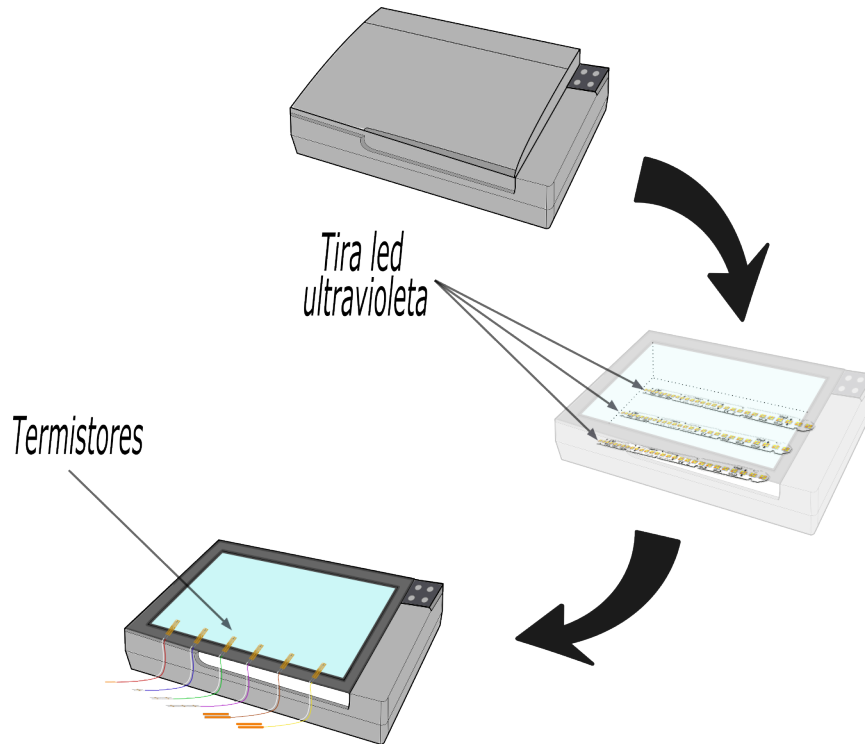


Figura 4.42: Esquema de modificación del escáner para utilizarlo como fuente de radiación UV controlada.

Sobre el cristal superior se colocaron, equiespaciados, seis termistores idénticos de película delgada conectados mediante cables con diferentes configuraciones térmicas. Estas modificaciones estructurales se diseñaron para evaluar la influencia de la conducción parásita de calor a través de los conductores y su efecto en la respuesta térmica medida.

La tabla (4.8) resume las características de cada configuración experimental, incluyendo el tipo de conexión y el elemento añadido para modificar la conductividad térmica. La disposición espacial de los sensores y las configuraciones empleadas se ilustran en la figura (4.43).

Tabla 4.8: Configuraciones analizadas para el estudio de flujo de calor por los cables.

Sensor	Conexión eléctrica	Elemento añadido
NTC1	Cable estándar directo	Sin modificaciones (control)
NTC2	Cable con 1 resistencia en serie	Resistencia de $0 \Omega$ (x1)
NTC3	Cable con 2 resistencias en serie	Resistencias de $0 \Omega$ (x2)
NTC4	Cable con 3 resistencias en serie	Resistencias de $0 \Omega$ (x3)
NTC5	Cable con placa metálica adherida	Placa de cobre ( $50 \times 10$ mm)
NTC6	Cable dentro de tubo metálico	Tubo de cobre hueco ( $6$ mm $\varnothing$ ext.)

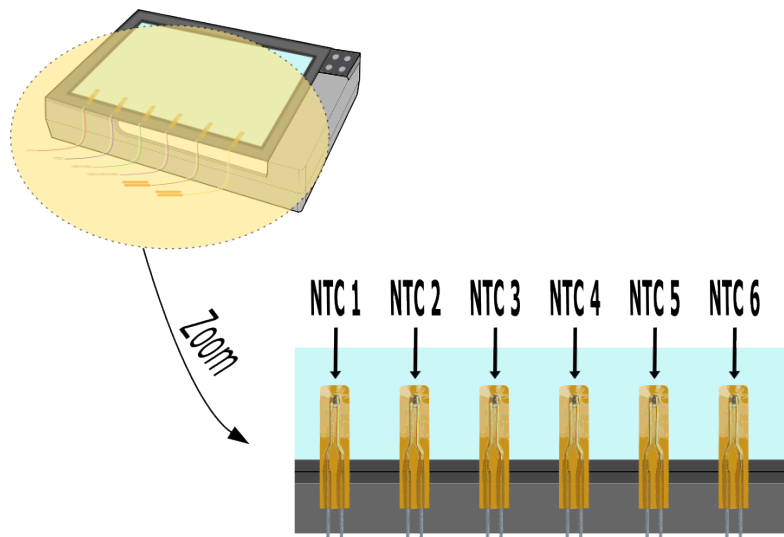


Figura 4.43: Detalle de las configuraciones térmicas aplicadas a cada termistor.

Esta metodología permitió contrastar directamente el impacto de la conducción de calor a través del conductor sobre la temperatura registrada por el sensor, al eliminar el resto de variables que puedan inducir dispersión (encapsulado, irradiancia, orientación, etc.). Los sensores fueron expuestos durante una ventana temporal de aproximadamente una hora y se registraron las curvas térmicas individuales mediante el sistema de adquisición automatizado previamente descrito. La figura (4.44) muestra la configuración real del equipo.



Figura 4.44: Configuración real del escáner modificado.

Aunque los resultados cuantitativos se presentarán con detalle en el siguiente capítulo, el análisis preliminar permite identificar una correlación clara entre la configuración del cable y la respuesta térmica del sensor. En particular, las configuraciones con mayor capacidad de conducción (véase figura 4.46) muestran picos de temperatura más elevados y retardos apreciables en la fase de enfriamiento. Estos efectos se atribuyen a la absorción y posterior reemisión térmica del propio conductor. Por el contrario, los sensores configurados con múltiples resistencias de  $0\ \Omega$  actuaron como aislantes térmicos parciales, reduciendo la transferencia de calor a través del cableado (figura 4.45).

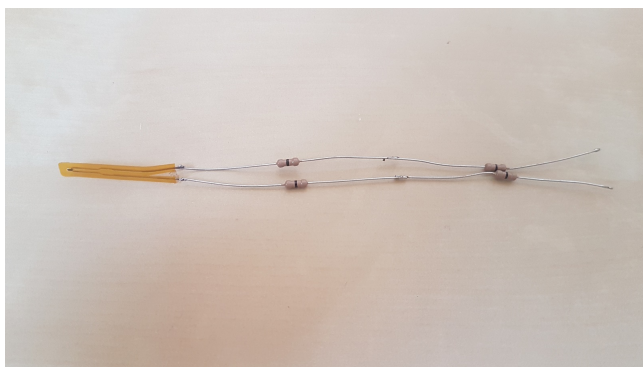


Figura 4.45: Termistor con dos resistencias de  $0\ \Omega$  en serie por rama.



Figura 4.46: Ejemplar con tubos de cobre utilizados como elementos conductores térmicos en los cables.

Este experimento confirma, de forma empírica, que el diseño del sistema de conexión eléctrica tiene un impacto directo sobre la medición térmica, debiendo considerarse como un elemento activo en la modelización de la respuesta del sensor. La inclusión de elementos disipadores, puentes térmicos o materiales conductores en la línea eléctrica modifica de forma mensurable la constante de tiempo efectiva del sistema.



## Capítulo 5

# Resultados y discusión

*Medir lo que es medible y hacer medible  
lo que no lo es.*

Galileo Galilei

En este capítulo se presentan y analizan los resultados experimentales con termistores NTC bajo distintas condiciones de gas y excitación térmica. Se comparan tres enfoques de la respuesta del sensor –convencional, doble exponencial y fraccional– destacando la capacidad superior de éste último para reproducir los efectos observados. Asimismo, se exponen los hallazgos de los experimentos que sustentan las hipótesis del Capítulo 4, incluyendo la influencia del flujo compresible y de la conducción a través de los cables.

### 5.1. Introducción.

Diversos estudios recientes, junto con los resultados de esta investigación, han puesto de manifiesto que la precisión dinámica de las aproximaciones aplicadas a termistores NTC en medios gaseosos depende, principalmente, del régimen de interacción térmica –caracterizado por el número de Biot–, del tratamiento explícito de las pérdidas no ideales por conducción a través de los hilos y de la inclusión de efectos de memoria. A partir de este planteamiento, es importante analizar y comparar tanto las formulaciones clásicas como aquellas basadas en enfoques alternativos, bajo condiciones de referencia bien controladas, con el fin de validar su aplicabilidad y delimitar su rango de validez [7].

Por tanto, en los apartados siguientes se presentan los resultados derivados de los ensayos realizados con termistores NTC, sometidos a distintas condiciones experimentales y siguiendo la metodología descrita en el capítulo

anterior.

La exposición y análisis de estos resultados se organiza en función del medio gaseoso circundante, de la potencia del láser utilizada como fuente de excitación y de la capacidad de cada aproximación para reproducir la dinámica térmica observada. Con este enfoque se evalúa, de forma comparativa, la precisión y la capacidad predictiva de cada aproximación bajo diferentes escenarios experimentales.

## 5.2. Resultados del prototipo de medición basado en diferencias de temperatura.

A continuación, se abordarán los resultados experimentales del prototipo de medición basado en temperaturas diferenciales, que fue diseñado para estimar el valor energético de flujos compresibles mediante el diferencial  $\Delta T = T_{01} - T_1$ .

Durante los ensayos, se registraron simultáneamente las temperaturas de los dos termistores NTC de película delgada según la estrategia expuesta, captando  $T_{01}$  y  $T_1$ . La soplante se activó en torno a  $t = 200$  s, generando un incremento del caudal de aire incidente sobre el sistema de medición. Cada prueba tuvo una duración de 800 segundos, repitiéndose un total de cinco veces bajo condiciones similares.

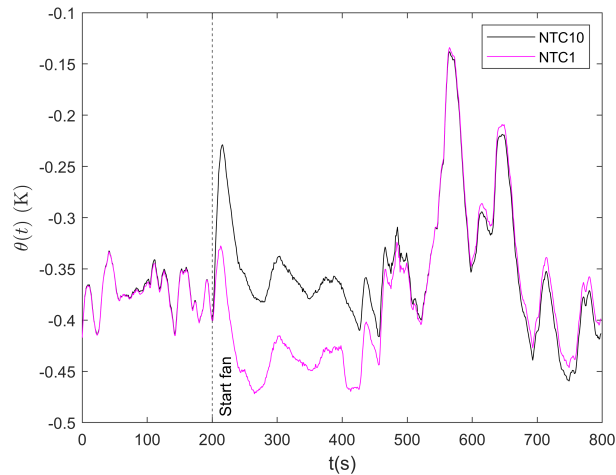


Figura 5.1: Temperaturas  $T_{01}$  y  $T_1$  en el ensayo 1.

En la figura (5.1) se aprecia un aumento progresivo de la temperatura de estancamiento  $T_{01}$  tras el arranque de la soplante, mientras que la temperatura estática  $T_1$  muestra un comportamiento más inercial y una menor variación absoluta. Esta diferencia en la dinámica de respuesta genera un in-

cremento del diferencial térmico  $\Delta T$ , tal como se observa en la figura (5.2).

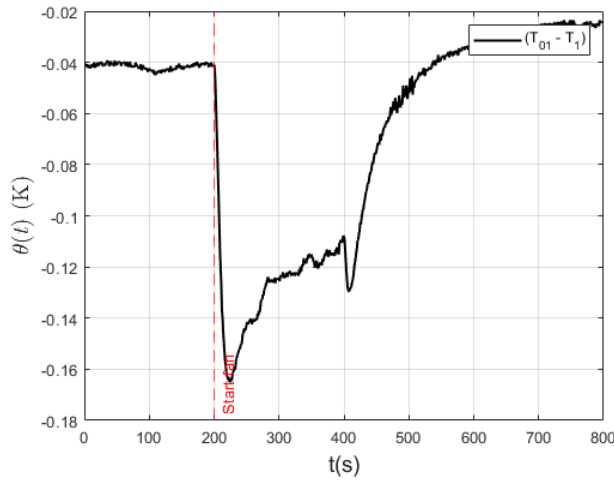


Figura 5.2: Diferencial de temperatura ( $\Delta T = T_{01} - T_1$ ) durante el ensayo 1.

Para evaluar la repetibilidad del sistema, se realizaron cinco experimentos bajo las mismas condiciones experimentales. En las figuras (5.3) y (5.4) se comparten los resultados correspondientes al ensayo 3, tanto en términos de temperaturas individuales como del diferencial. Aunque el patrón global se conserva, se puede ver discrepancias entre las pruebas, atribuibles principalmente a efectos no ideales, como puede ser el flujo de calor a través de los conductores.

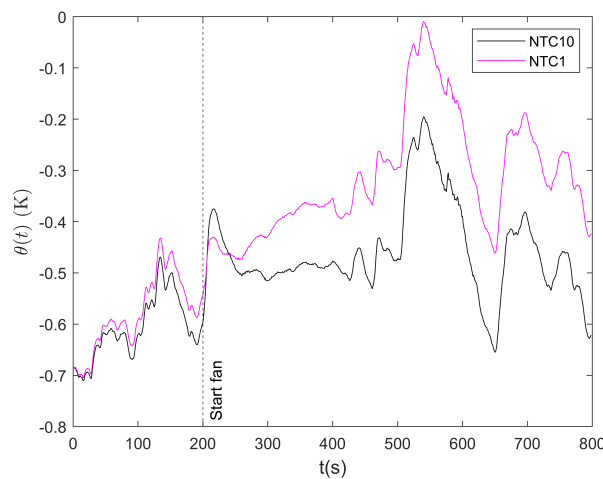


Figura 5.3: Temperaturas  $T_{01}$  y  $T_1$  en el ensayo 3.

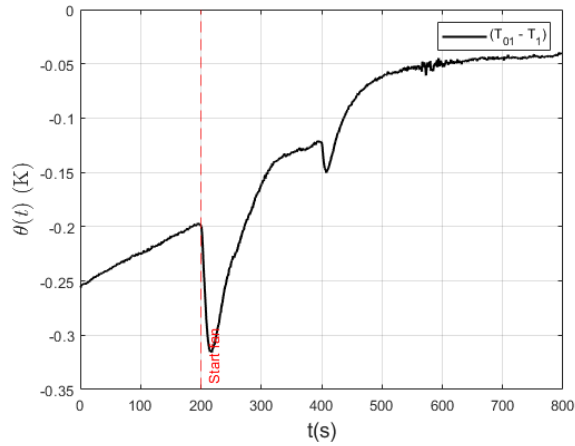


Figura 5.4: Diferencial de temperatura ( $\Delta T = T_{01} - T_1$ ) durante el ensayo 3.

Finalmente, con el fin de cuantificar la dispersión de los resultados y estimar la fiabilidad del sistema, se calcularon la media y la desviación estándar para los cinco experimentos. La figura (5.5) muestra la curva promedio de  $\Delta T$ , acompañada de una región sombreada que representa el intervalo de incertidumbre correspondiente.

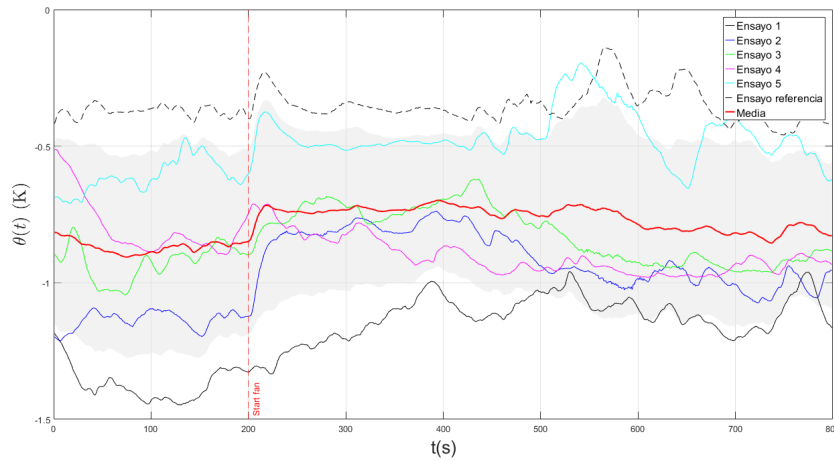


Figura 5.5: Media del diferencial  $\Delta T$  para los ensayos.

Con estos datos se confirma que el prototipo de medida permite identificar de manera consistente la variable sensible al contenido energético del flujo. Sin embargo, la variabilidad experimental observada exige una formulación más exhaustiva de los fenómenos no ideales, incluyendo la conducción a través de cables.

### 5.3. Respuesta transitoria del termistor bajo diferentes condiciones de excitación y del medio gaseoso.

En esta sección se presentan los datos experimentales obtenidos al someter un termistor NTC de película delgada (thin film) a una fuente de calor externa (láser), durante intervalos definidos, empleando distintas potencias –moduladas mediante el cambio en la longitud de onda– y en diferentes medios gaseosos: aire ambiente, aire sintético, helio y vacío parcial. El objetivo es analizar y comparar la respuesta transitoria del sensor bajo diferentes condiciones de transferencia de calor, evaluando su comportamiento dinámico y la influencia del entorno físico.

Los resultados se organizan para permitir una comparación directa entre los distintos medios. Las tablas asociadas recogen los parámetros característicos de las aproximaciones y los valores de los residuos cuadráticos medios obtenidos en cada experimento. La estructura tabular responde a un criterio descendente de potencia, iniciando por la señal máxima del láser (denotada como P), seguida de las componentes individuales del sistema RGB (Red, Green, Blue). Este orden se mantiene constante para cada gas, facilitando la comparación sistemática entre escenarios.

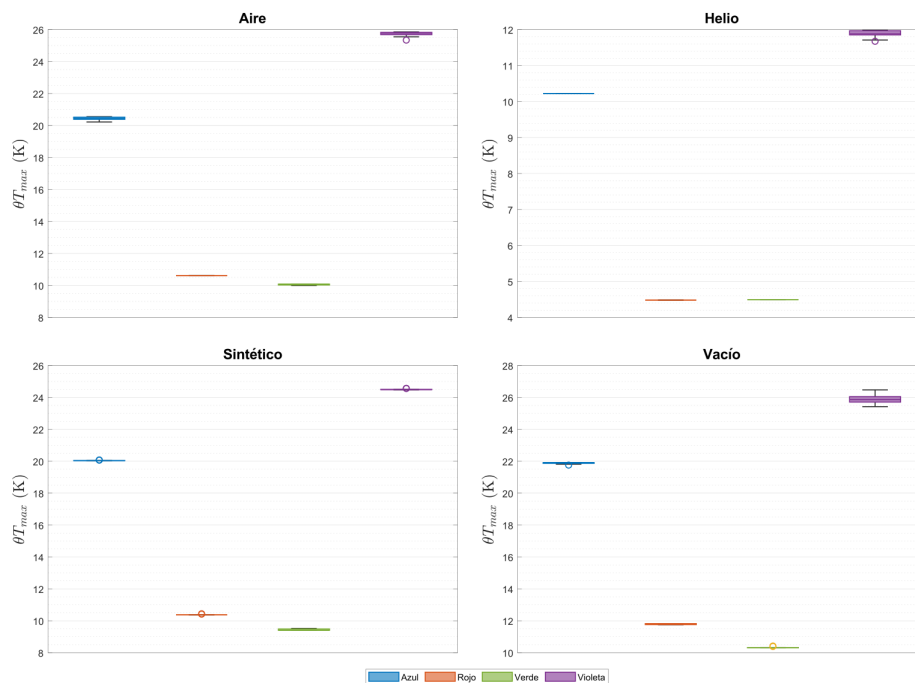


Figura 5.6: Distribución del valor máximo de temperatura relativa  $T_{m\acute{a}x}$  para cada fluido y potencia láser.

Una forma de analizar la distribución del valor máximo de la temperatura registrada durante las pruebas realizadas en las distintas condiciones, se hace mediante la figura (5.6). Ahí, cada subgráfico corresponde a un fluido y dentro del mismo se visualizan los valores de temperatura máxima agrupadas por potencias.

En términos generales, se aprecia que la variabilidad es mínima en todos los casos, lo cual se refleja en la reducida altura de las cajas y la escasa amplitud de los bigotes. Esta baja dispersión evidencia la buena repetibilidad de los ensayos.

Por otro lado, las figuras (5.7) y (5.8) ilustran la ejecución de los experimentos realizados en laboratorio, proporcionando al lector una visión clara sobre el montaje, los procedimientos y el entorno físico donde se llevaron a cabo las pruebas. Como base experimental, este tipo de ensayos son indispensables para la validación de las aproximaciones desarrolladas en el presente trabajo ya que, van a evaluar la capacidad de dichas formulaciones para reproducir el comportamiento térmico observado bajo diferentes condiciones de conducción y convección.

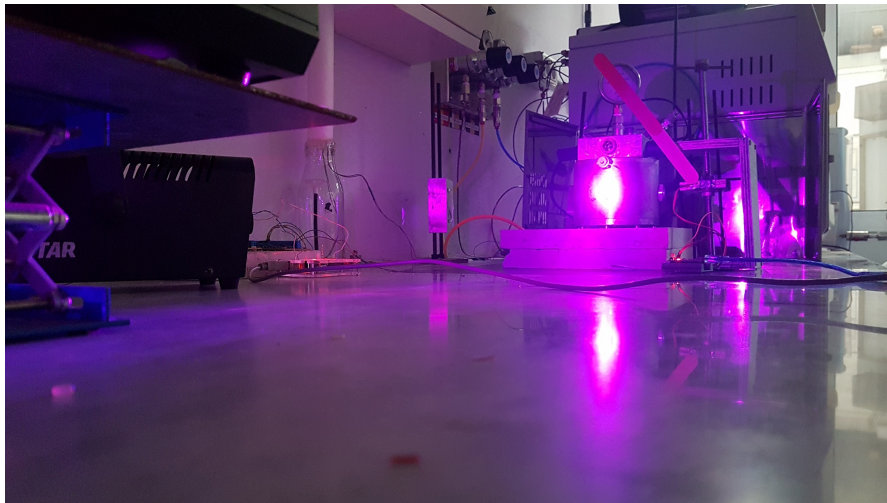


Figura 5.7: Prueba experimental representativa de la señal de máxima potencia láser (P) en la cámara adiabática [7].

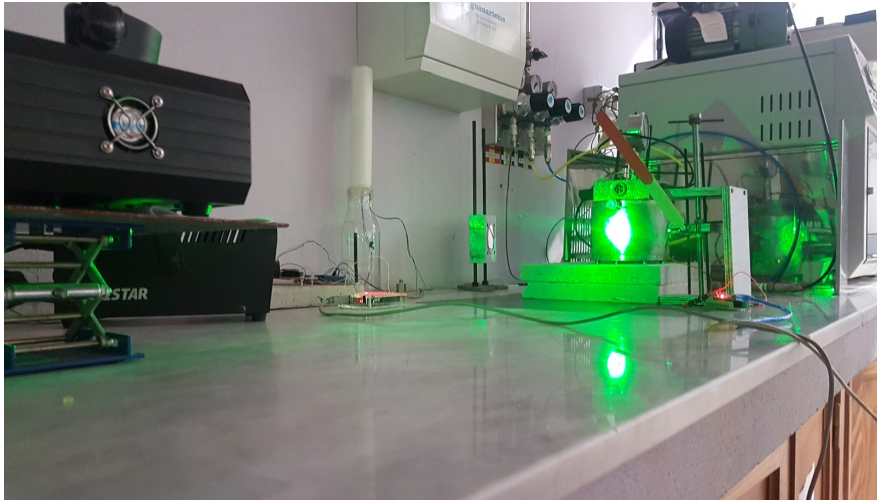


Figura 5.8: Prueba experimental representativa de la señal de mínima potencia láser (G) en la cámara adiabática.

### 5.3.1. Aire ambiente.

Durante las pruebas, se monitorizan los parámetros internos y externos, proporcionando una medida de referencia del entorno, con una temperatura de  $24^{\circ}\text{C}$  y una humedad relativa del 45 %.

La figura (5.9) muestra la respuesta del termistor cuando es el aire ambiente el gas presente en el interior de la cámara, para las cuatro potencias diferentes del láser (P, B, R y G). Con esto, se puede analizar directamente la amplitud correspondiente a cada señal y comprender el efecto de la potencia del láser sobre la respuesta del termistor.

El diagrama 5.6 se complementa con la figura (5.10), en la que se muestran las fases de subida de la respuesta del termistor correspondientes a las diez pruebas realizadas en aire bajo idénticas condiciones de excitación láser (B). La notable superposición de las curvas obtenidas pone de manifiesto la baja dispersión de las mediciones, lo que refuerza la repetibilidad y fiabilidad del diseño experimental empleado.

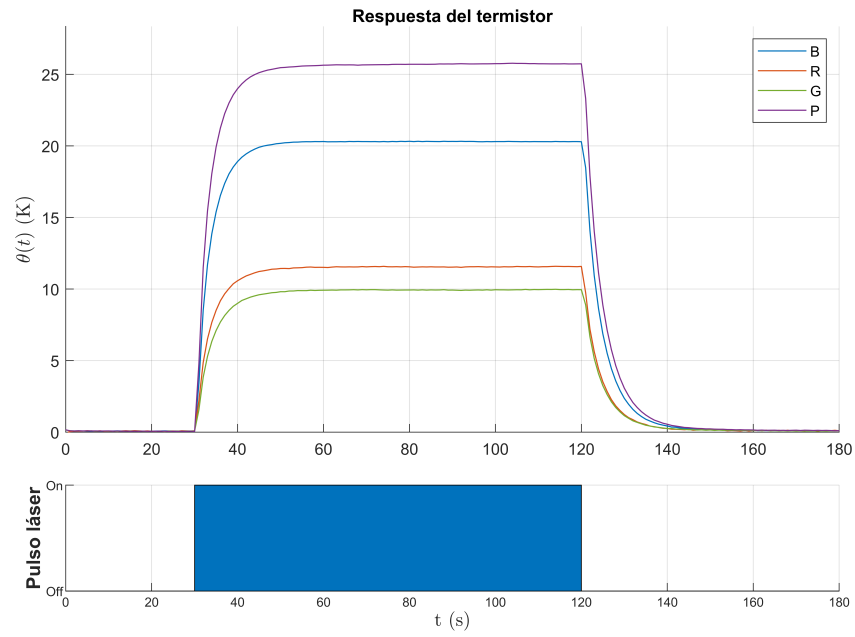


Figura 5.9: Respuesta del termistor en aire ambiente.

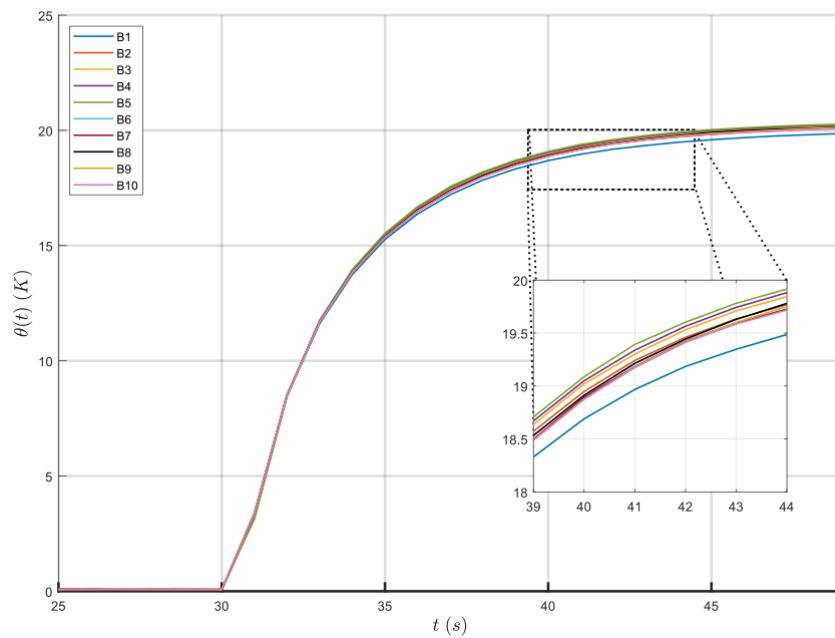


Figura 5.10: Representación de la repetibilidad de las respuestas del termistor.

### 5.3.2. Helio.

La figura (5.11) muestra los resultados en los ensayos realizados con helio en el interior de la cámara. Como puede apreciarse, la respuesta del termistor presenta una pendiente inicial más pronunciada que en el caso del resto de fluidos, lo cual pone de manifiesto una mayor velocidad de intercambio energético entre el sensor y el medio circundante. Este comportamiento es coherente con las propiedades termofísicas del helio, cuya elevada difusividad térmica favorece una rápida transferencia de calor.

En este contexto, los efectos de conducción no local –es decir, el flujo de calor a través de los cables– adquieren una relevancia comparativamente mayor que en medios de menor conductividad térmica.

Por otra parte, cabe indicar que durante las pruebas se mantuvo una presión absoluta en el interior de la cámara cercana a los 1,2 bares, lo cual garantiza condiciones suficientemente estables para interpretar con fiabilidad la respuesta térmica medida.

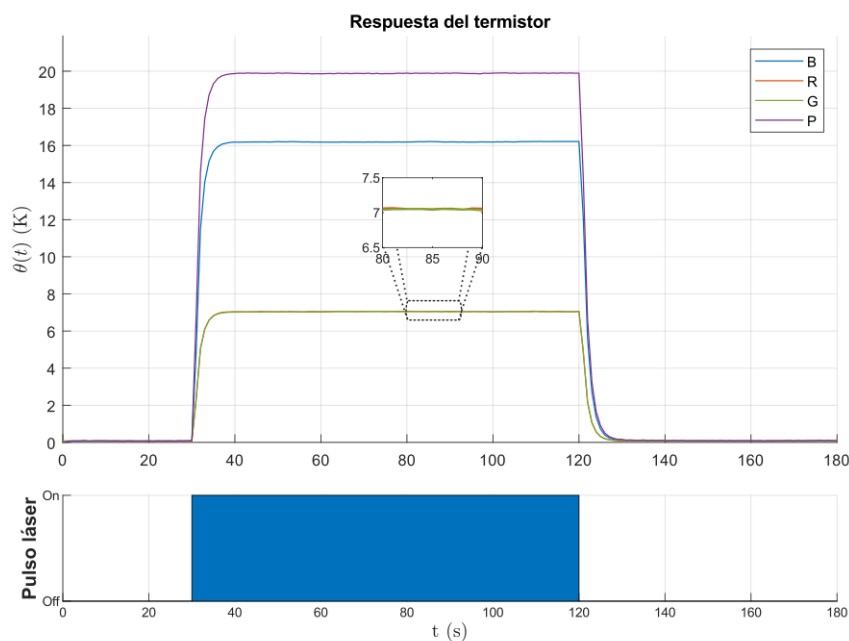


Figura 5.11: Respuesta del termistor al helio en la cámara.

### 5.3.3. Aire sintético.

Para los experimentos con aire sintético se utilizó una mezcla controlada de nitrógeno y oxígeno de alta pureza, libre de vapor de agua, impurezas u otros gases traza habitualmente presentes en el aire atmosférico, tal como se detalló en el capítulo anterior.

La figura (5.12) muestra la evolución de la temperatura registrada por el termistor. Al igual que en el caso del helio, durante las pruebas se mantuvo una presión absoluta en el interior de la cámara cercana a los 1,2 bares, como se muestra en la figura (5.13), lo cual asegura condiciones de operación reproducibles y controladas para el análisis de los resultados.

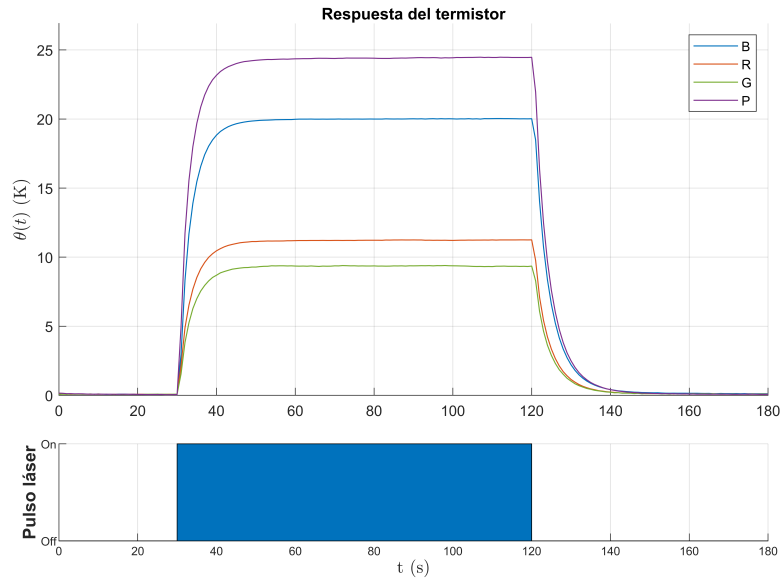


Figura 5.12: Respuesta del termistor en aire sintético.



Figura 5.13: Manómetro de la cámara durante las pruebas con aire sintético.

#### 5.3.4. Vacío parcial.

En las condiciones de vacío parcial, se alcanzó una presión absoluta próxima a 0 bar (equivalente a una presión manométrica de  $-1,0$  bar) en el interior de la cámara. Tal como se ha analizado previamente, esta condición minimiza de forma significativa las pérdidas de calor por convección, dando lugar a un régimen de transferencia térmica dominado por la radiación superficial (cuya contribución se ha demostrado ser marginal, véase figura 3.2) y por la conducción través de los cables.

Una vez más, la figura (5.14) representa la respuesta del termistor tras la aplicación de un pulso láser bajo estas condiciones. Se aprecia un aumento más lento y sostenido, acompañado de una constante de tiempo claramente superior a la observada en los ensayos con helio o aire sintético. Este comportamiento confirma que, en ausencia de convección, la disipación térmica se ve limitada casi exclusivamente a la conducción no local a través de los cables y a una mínima radiación, siendo el primero el mecanismo predominante.

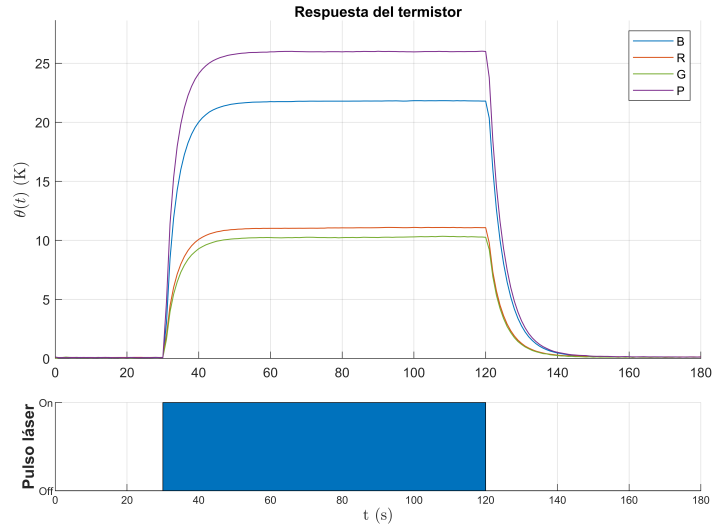


Figura 5.14: Respuesta del termistor en condiciones de vacío parcial.

#### 5.4. Evaluación de las aproximaciones propuestas.

A partir de los datos adquiridos en la cámara adiabática, se ha llevado a cabo una comparación sistemática entre los distintos enfoques resolutivos presentados en el Capítulo 3. Para ello, se ha aplicado algoritmos de ajuste no lineal sobre la evolución temporal de la temperatura medida, utilizando las siguientes formulaciones:

- Aproximación de primer orden basado en constante de tiempo,  $\theta_3(t) = a^*(1 - e^{-t/\tau})$ .
- Aproximación basado en función con doble exponencial,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ .
- Aproximación fraccional basada en la derivada de Caputo, resuelta mediante discretización tipo Grünwald–Letnikov,  $\theta_\alpha(t)$ .

Para cada caso, se ha calculado el error cuadrático medio (estimador de calidad) entre la señal experimental y la predicha por la formulación correspondiente, obteniéndose la media y desviación estándar de los parámetros ajustados en función del gas utilizado (aire, aire sintético, helio y vacío) y de la potencia del láser (P, B, R y G). Asimismo, para evaluar la validez de las propuestas consideradas en este trabajo se aplicó un método de mínimos cuadrados no lineales. Este método se basa en el algoritmo de Gauss–Newton con restricciones sobre los parámetros de la aproximación utilizando el algoritmo de región de confianza. Los residuos cuadráticos o estimador cualitativo

(QE) se obtienen a partir del proceso de mínimos cuadrados para cada experimento, con  $n$  muestras por prueba. En total, se realizaron diez pruebas ( $n = 10$ ) para cada configuración de potencia del láser y fluido.

$$\text{QE} = \sum_{i=1}^m (\theta_{\text{exp},i} - \theta_{\text{model},i})^2 \quad (5.1)$$

Para cada potencia del láser, se ha calculado la media ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ) del estimador de calidad, tal como se muestra en las expresiones siguientes:

$$\mu_{\text{QE}} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{QE}_i}{n}, \quad \sigma_{\text{QE}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{\text{QE}} - \text{QE}_i)^2}{n-1}} \quad (5.2)$$

Además, se ha utilizado la media ( $\mu_{p_i}$ ) y la desviación estándar ( $\sigma_{p_i}$ ) de los parámetros propuestos ( $p_i = \{a^*, \tau, \epsilon, \lambda, \dots\}$ ) para evaluar los resultados de cada prueba, como se indica a continuación:

$$\mu_{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}, \quad \sigma_{p_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{p_i} - p_i)^2}{n-1}} \quad (5.3)$$

Al final de cada tabla comparativa se incluye una gráfica que muestra la evolución temporal de la temperatura relativa del sensor bajo aire ambiente y excitación láser tipo R, junto con la predicción de la aproximación considerada. Estas figuras presentan también el residuo instantáneo y acumulado, permitiendo identificar visualmente las desviaciones localizadas, especialmente en los transitorios debidos a la activación y desactivación del láser. Así, se facilita la comparación visual y la evaluación de su capacidad para describir con precisión los transitorios.

#### 5.4.0.1. Exponencial clásica basada en constante de tiempo: $\theta_3(t) = a^*(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

En esta subsección, las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 recogen todos los valores para la formulación convencional basada en la constante de tiempo (ecuación 3.49) en las distintas condiciones.

Tabla 5.1: Parámetros y valores de  $QE$  para la aproximación de constante de tiempo  $\theta_3(t)$  en aire.

ID	n	$a^*$		$\tau$		$QE$	
		$\mu_{a^*}$	$\sigma_{a^*}$	$\mu_\tau$	$\sigma_\tau$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	25,44	0,10	2,84	0,01	74,27	1,31
B	10	20,20	0,01	3,09	0,02	36,87	2,81
R	10	10,47	0,01	3,41	0,02	15,02	0,31
G	10	9,80	0,04	3,48	0,05	12,32	0,98

Tabla 5.2: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación de constante de tiempo  $\theta_3(t)$  en helio.

ID	n	$a^*$		$\tau$		$QE$	
		$\mu_{a^*}$	$\sigma_{a^*}$	$\mu_\tau$	$\sigma_\tau$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	11,78	0,03	1,35	0,19	2,71	0,11
B	10	10,07	0,002	1,17	0,004	1,04	0,10
R	10	4,43	0,01	1,17	0,002	0,63	0,09
G	10	4,36	0,07	1,24	0,03	4,58	0,21

Tabla 5.3: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación de constante de tiempo  $\theta_3(t)$  en aire sintético.

ID	n	$a^*$		$\tau$		$QE$	
		$\mu_{a^*}$	$\sigma_{a^*}$	$\mu_\tau$	$\sigma_\tau$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	24,32	0,04	2,51	0,01	57,41	1,03
B	10	19,87	0,01	2,95	0,01	37,62	2,74
R	10	10,13	0,01	3,03	0,02	12,35	0,79
G	10	9,27	0,02	3,20	0,02	9,53	1,05

Tabla 5.4: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación de constante de tiempo  $\theta_3(t)$  en vacío.

ID	n	$a^*$		$\tau$		$QE$	
		$\mu_{a^*}$	$\sigma_{a^*}$	$\mu_\tau$	$\sigma_\tau$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	25,72	0,06	2,98	0,01	17,98	2,01
B	10	21,63	0,04	3,35	0,003	29,00	4,82
R	10	11,53	0,02	3,30	0,05	19,29	1,25
G	10	10,08	0,03	3,35	0,35	13,83	0,56

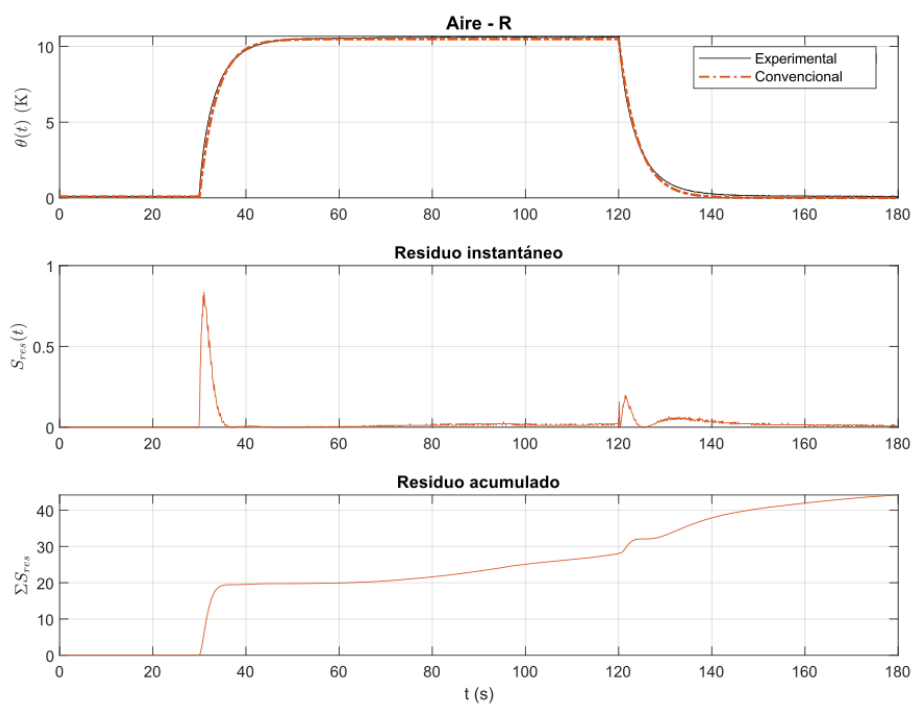


Figura 5.15: Evaluación del ajuste mediante la aproximación de constante de tiempo aplicado a un ensayo con aire y láser P.

#### 5.4.0.2. Aproximación con doble exponencial: $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ .

En este caso, las tablas 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 muestran los valores de los parámetros y los residuos para la aproximación de doble exponencial propuesta en este trabajo (ecuaciones 3.54 y 3.55).

Tabla 5.5: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación  $\theta_1(t)$  en aire.

ID	$n$	$\varepsilon$		$\lambda$		$\delta + \lambda$		$\delta - \lambda$		$QE$	
		$\mu_\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_{\delta+\lambda}$	$\sigma_{\delta+\lambda}$	$\mu_{\delta-\lambda}$	$\sigma_{\delta-\lambda}$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	25,51	0,10	-8,38	0,41	0,98	0,04	0,25	0,003	2,70	0,45
B	10	20,25	0,02	-7,00	0,79	0,78	0,07	0,23	0,01	1,14	0,58
R	10	10,50	0,01	-2,61	0,07	1,13	0,03	0,22	0,001	0,72	0,20
G	10	9,83	0,04	-2,39	0,26	0,89	0,07	0,23	0,01	4,32	0,30

Tabla 5.6: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación  $\theta_1(t)$  en helio.

ID	$n$	$\varepsilon$		$\lambda$		$\delta + \lambda$		$\delta - \lambda$		$QE$	
		$\mu_\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_{\delta+\lambda}$	$\sigma_{\delta+\lambda}$	$\mu_{\delta-\lambda}$	$\sigma_{\delta-\lambda}$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	11,78	0,04	-11,58	0,36	0,68	0,01	0,68	0,01	2,61	0,66
B	10	10,07	0,002	-4,60	0,37	1,30	0,03	0,63	0,02	0,26	0,07
R	10	4,44	0,01	-0,93	0,13	2,56	0,39	0,71	0,01	0,28	0,08
G	10	4,36	0,07	-0,87	0,35	2,40	0,62	0,67	0,05	4,26	0,14

Tabla 5.7: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación  $\theta_1(t)$  en aire sintético.

ID	$n$	$\varepsilon$		$\lambda$		$\delta + \lambda$		$\delta - \lambda$		$QE$	
		$\mu_\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_{\delta+\lambda}$	$\sigma_{\delta+\lambda}$	$\mu_{\delta-\lambda}$	$\sigma_{\delta-\lambda}$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	24,38	0,03	-7,68	0,19	1,14	0,02	0,29	0,003	1,27	0,16
B	10	19,90	0,01	-9,11	0,70	0,57	0,02	0,24	0,01	0,76	0,08
R	10	10,16	0,01	-2,35	0,20	1,42	0,14	0,26	0,005	0,66	0,37
G	10	9,30	0,02	-2,32	0,53	0,92	0,12	0,24	0,01	3,52	0,11

Tabla 5.8: Parámetros y valores  $QE$  para la aproximación  $\theta_2(t)$  en vacío.

ID	$n$	$\varepsilon$		$\lambda$		$\delta + \lambda$		$\delta - \lambda$		$QE$	
		$\mu_\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_{\delta+\lambda}$	$\sigma_{\delta+\lambda}$	$\mu_{\delta-\lambda}$	$\sigma_{\delta-\lambda}$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	25,79	0,06	-8,57	0,33	0,95	0,03	0,24	0,004	1,88	0,08
B	10	21,69	0,03	-8,83	1,17	0,56	0,03	0,21	0,01	0,86	0,87
R	10	11,56	0,02	-2,56	0,23	1,50	0,12	0,24	0,01	0,89	0,32
G	10	10,11	0,05	-2,72	1,11	0,78	0,05	0,21	0,06	3,65	0,36

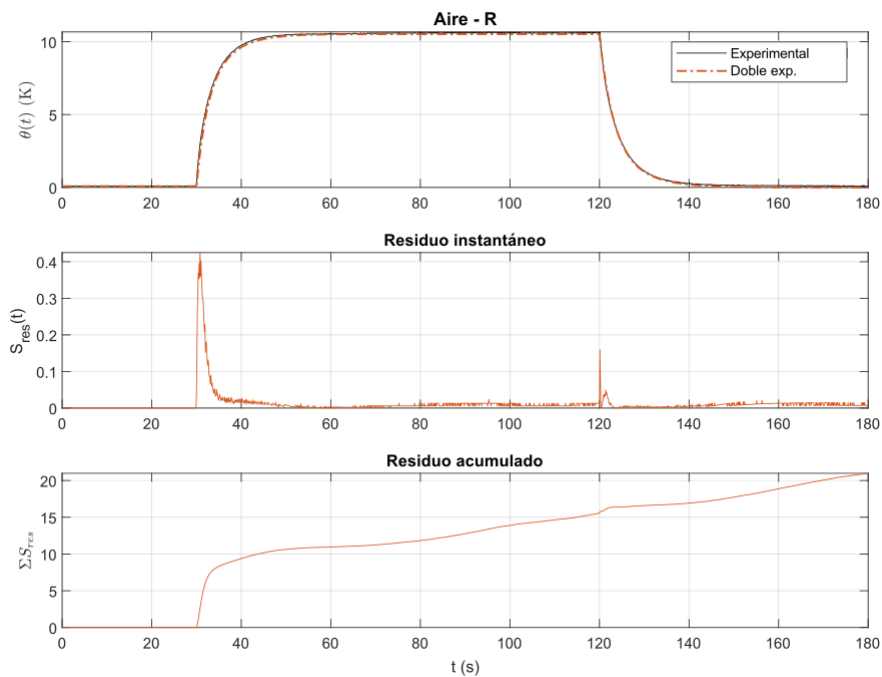


Figura 5.16: Evaluación del ajuste mediante la aproximación de doble exponencial aplicado a un ensayo con aire y láser P.

Como en el caso presentado anteriormente, obsérvese cómo los puntos correspondientes a los transitorios durante la fase de excitación térmica reducen su amplitud al aplicar la aproximación de doble exponencial. Esta mejora es consecuencia de la inclusión explícita de las pérdidas a través de los cables en el balance energético.

### 5.4.0.3. Aproximación basada en la derivada de Caputo, resuelta mediante discretización tipo Grünwald–Letnikov: $\theta_\alpha(t)$ .

En este caso, son las tablas 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12 las que recogen los valores de los parámetros y los residuos para la aproximación fraccional (ecuación 3.88).

Tabla 5.9: Parámetros y valores QE para la aproximación fraccional tipo GL  $\theta_\alpha(t)$  en aire.

ID	$n$	$\alpha$		$\lambda$		$C$		$QE$	
		$\mu_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_C$	$\sigma_C$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	0,69	0,11	7,62E-04	3,98E-04	1,39E-04	2,49E-05	0,27	0,25
B	10	0,90	0,005	2,08E-03	2,83E-05	2,52E-04	7,42E-07	0,05	0,01
R	10	0,81	0,07	3,30E-03	8,64E-04	4,69E-04	5,31E-05	0,05	0,03
G	10	0,90	0,10	4,73E-03	1,18E-03	5,76E-04	7,02E-05	0,10	0,05

Tabla 5.10: Parámetros y valores QE para la aproximación fraccional tipo GL  $\theta_\alpha(t)$  en helio.

ID	$n$	$\alpha$		$\lambda$		$C$		$QE$	
		$\mu_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_C$	$\sigma_C$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	0,99	0,03	2,49E-3	4,56E-4	2,37E-4	3,64E-5	0,10	0,02
B	10	0,98	0,02	2,23E-3	1,36E-4	2,15E-4	4,70E-6	0,04	0,004
R	10	0,94	0,002	4,44E-3	3,35E-5	4,60E-4	2,07E-6	0,02	0,001
G	10	0,95	0,01	5,00E-3	1,08E-4	5,04E-4	3,52E-6	0,07	0,001

Tabla 5.11: Parámetros y valores QE para la aproximación fraccional tipo GL  $\theta_\alpha(t)$  en aire sintético.

ID	$n$	$\alpha$		$\lambda$		$C$		$QE$	
		$\mu_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_C$	$\sigma_C$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	0,89	0,14	1,40E-3	4,23E-4	1,70E-4	2,60E-5	0,06	0,21
B	10	0,85	0,11	1,80E-3	8,50E-4	2,31E-4	7,21E-5	0,26	0,25
R	10	0,88	0,00	3,77E-3	7,77E-5	4,74E-4	4,90E-6	0,03	0,002
G	10	0,91	0,01	4,80E-3	1,42E-4	5,71E-4	5,76E-6	0,07	0,05

Tabla 5.12: Parámetros y valores QE para la aproximación fraccional tipo GL  $\theta_\alpha(t)$  en vacío.

ID	$n$	$\alpha$		$\lambda$		$C$		$QE$	
		$\mu_\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\mu_\lambda$	$\sigma_\lambda$	$\mu_C$	$\sigma_C$	$\mu_{QE}$	$\sigma_{QE}$
P	10	0,79	0,11	1,13E <sup>-3</sup>	4,14E <sup>-4</sup>	1,65E <sup>-4</sup>	2,49E <sup>-5</sup>	0,16	0,12
B	10	0,92	0,01	2,27E <sup>-3</sup>	6,95E <sup>-5</sup>	2,64E <sup>-4</sup>	2,61E <sup>-6</sup>	0,06	0,03
R	10	0,86	0,15	3,37E <sup>-3</sup>	1,09E <sup>-3</sup>	4,42E <sup>-4</sup>	7,21E <sup>-5</sup>	0,04	0,08
G	10	0,89	0,08	4,57E <sup>-3</sup>	8,80E <sup>-4</sup>	5,49E <sup>-4</sup>	3,39E <sup>-5</sup>	0,08	0,06

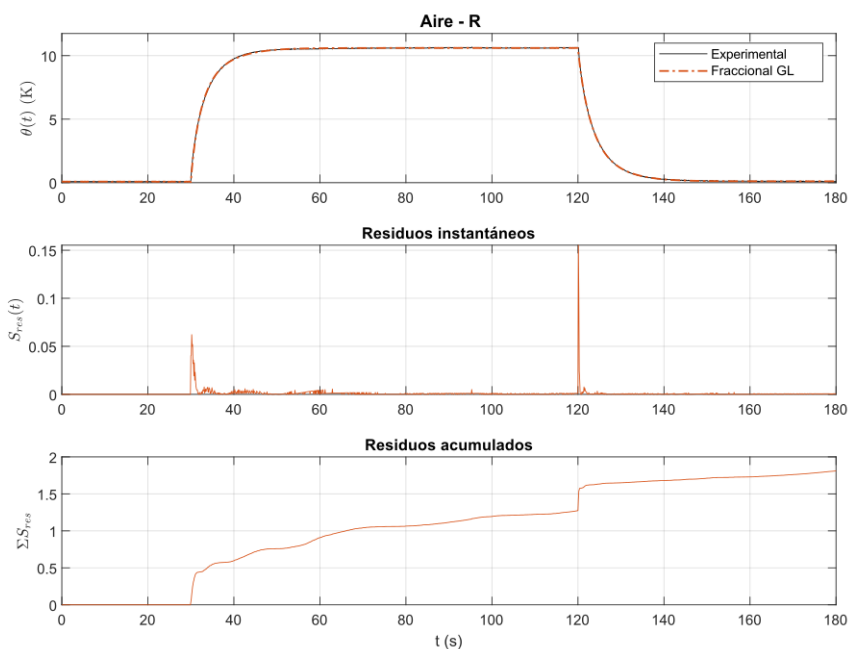


Figura 5.17: Evaluación del ajuste mediante la aproximación fraccional GL aplicado a un ensayo con aire y láser P.

Como se ha ido exponiendo en las dos secciones anteriores, la figura (5.17) ilustra la evaluación cuantitativa del ajuste de la aproximación fraccional mediante la representación conjunta de la evolución temporal de la temperatura relativa del sensor,  $\theta_\alpha(t)$ , y los residuos generados. Introduciendo tanto el residuo instantáneo  $S_{\text{res}}(t)$  como su acumulado  $\sum S_{\text{res}}$ , se puede valorar de forma integral la capacidad de ésta formulación para reproducir la dinámica térmica observada. En comparación con las aproximaciones anteriores, se

aprecia una reducción significativa de los errores, especialmente en los tramos transitorios, donde el enfoque convencional mostraba mayores discrepancias.

## 5.5. Comparación y discusión de resultados.

Los resultados se presentan de forma que facilitan la comparación directa entre los diferentes medios gaseosos. Para cada configuración, se incluyen las gráficas de la temperatura logarítmica  $\Theta(t)$ , lo que permite identificar con mayor claridad las tendencias dinámicas y destacar el efecto del medio sobre la respuesta del termistor.

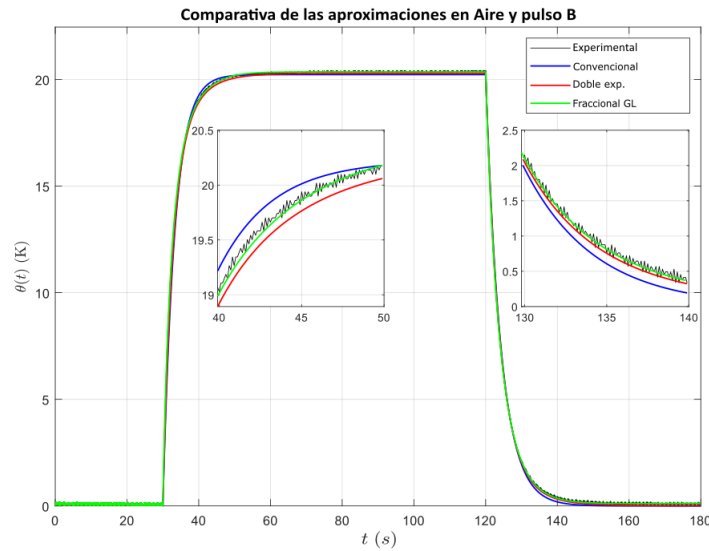


Figura 5.18: Comparación de las respuestas experimental y de las aproximaciones matemáticas en aire y pulso B.

Tomando como punto de partida para la discusión la figura (5.18), ésta ilustra la típica respuesta obtenida en aire con pulso láser tipo B. En ella, se analizan en detalle los transitorios de subida y bajada, permitiendo una observación visual del grado de ajuste de las aproximaciones presentadas respecto a los datos experimentales.

A partir de aquí, en las sucesivas figuras se presenta un análisis desde una perspectiva adimensional de los datos experimentales y las distintas formulaciones propuestas, abarcando los cuatro fluidos para la potencia láser determinada. Estas figuras recogen la comparación entre los resultados de los enfoques analizados (convencional, doble exponencial y fraccional) y las mediciones experimentales, facilitando la identificación de las desviaciones de cada aproximación, especialmente en los transitorios.

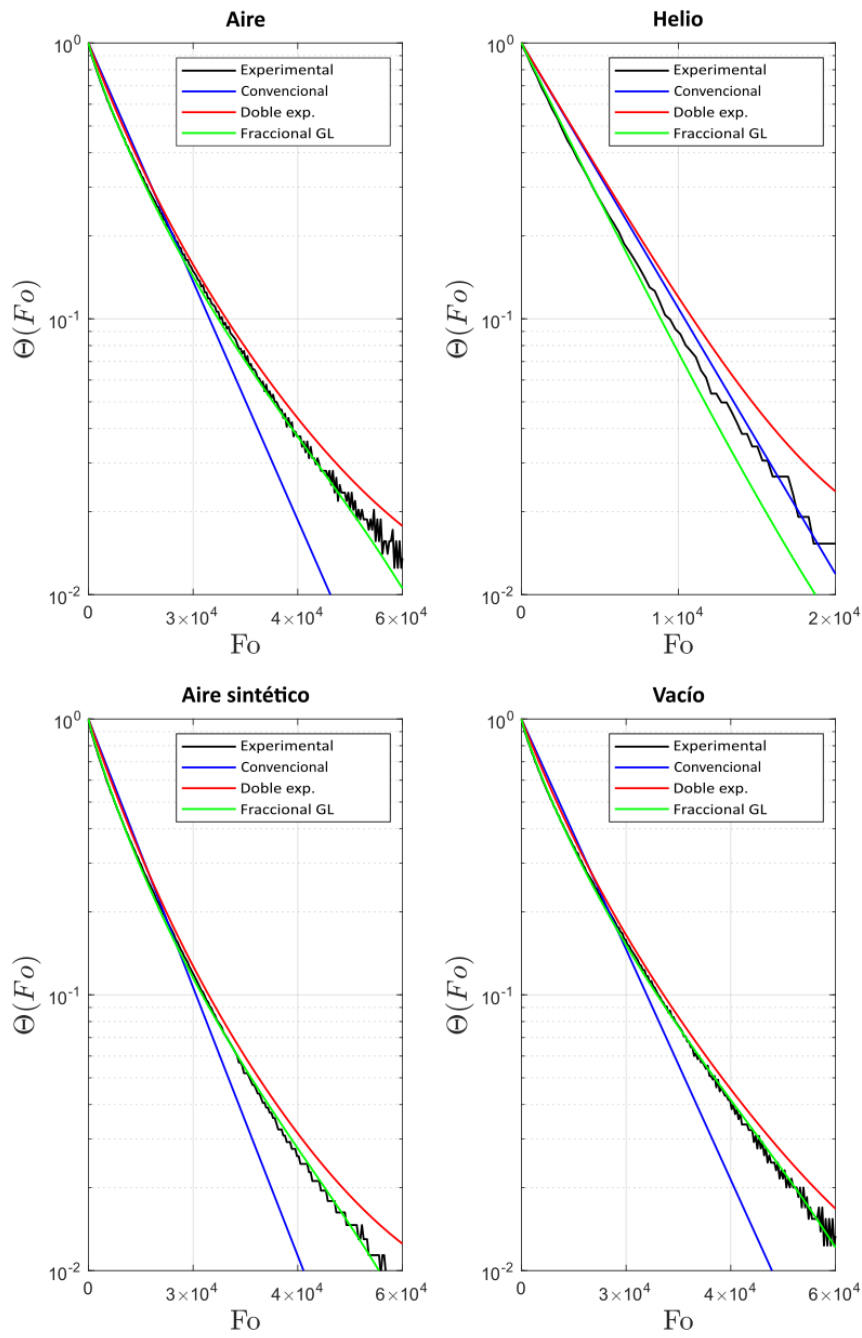


Figura 5.19: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser P en el tramo de subida.

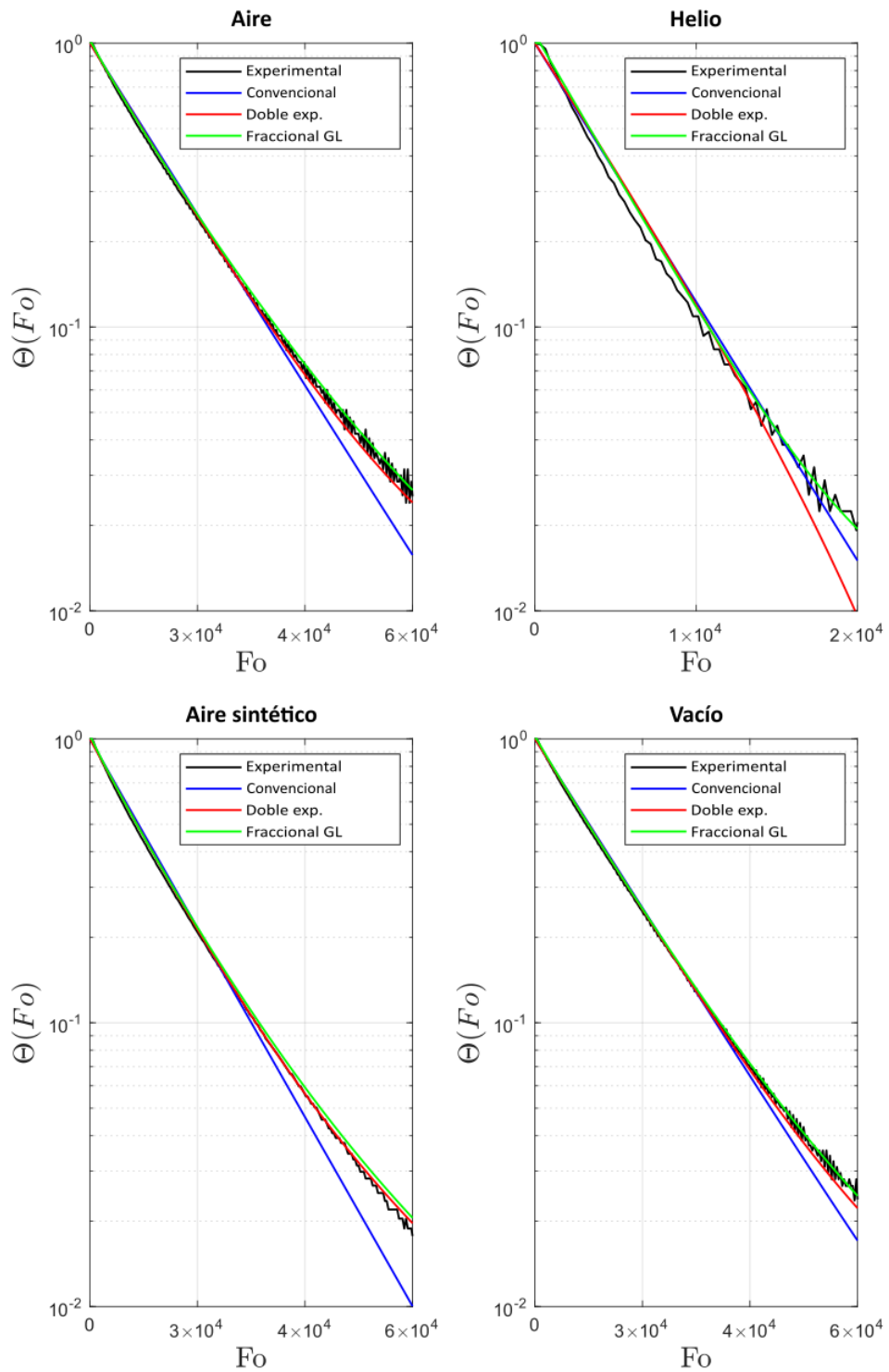


Figura 5.20: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser P en el tramo de bajada.

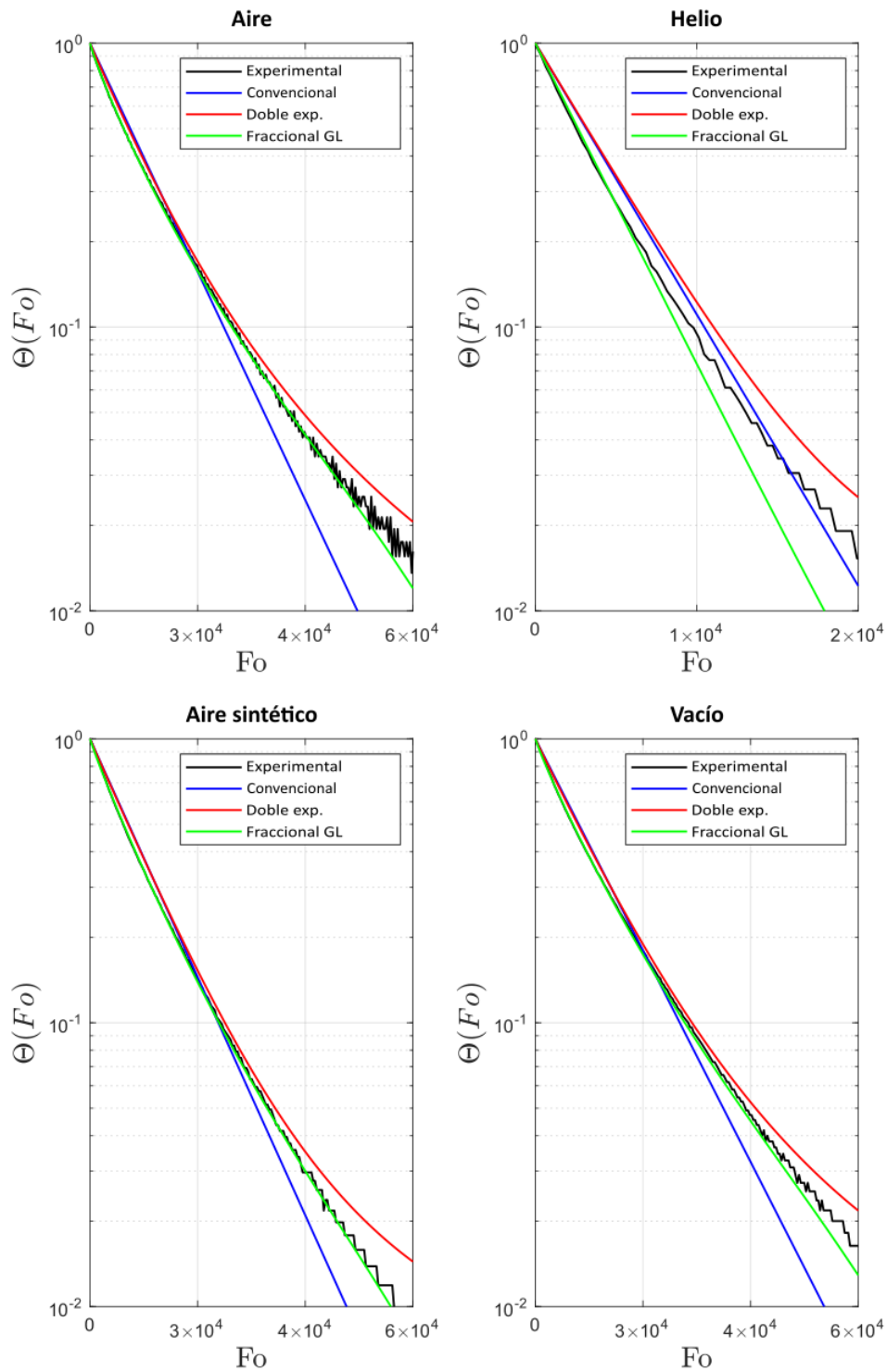


Figura 5.21: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser B en el tramo de subida.

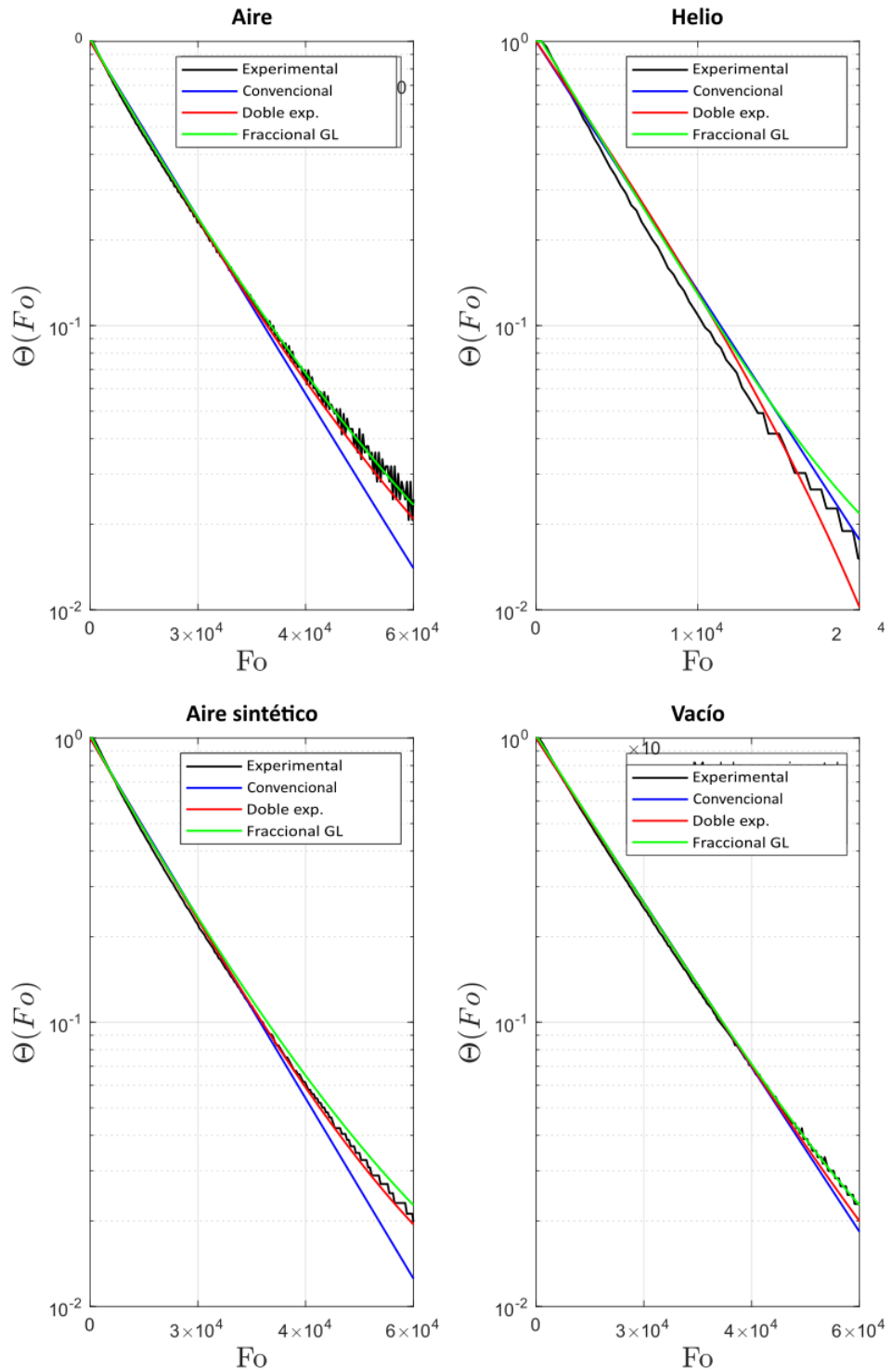


Figura 5.22: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser B en el tramo de bajada.

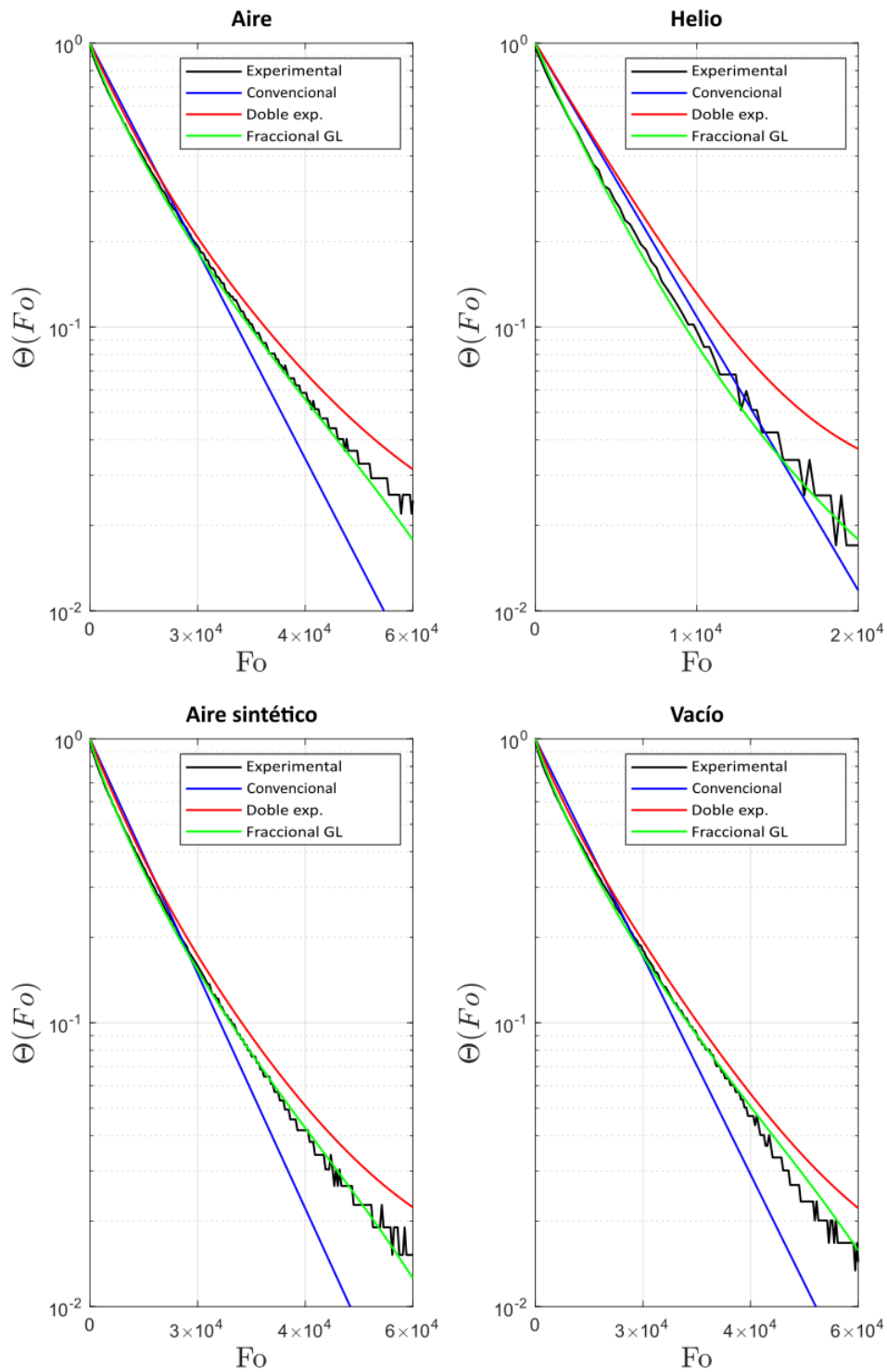


Figura 5.23: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser R en el tramo de subida.

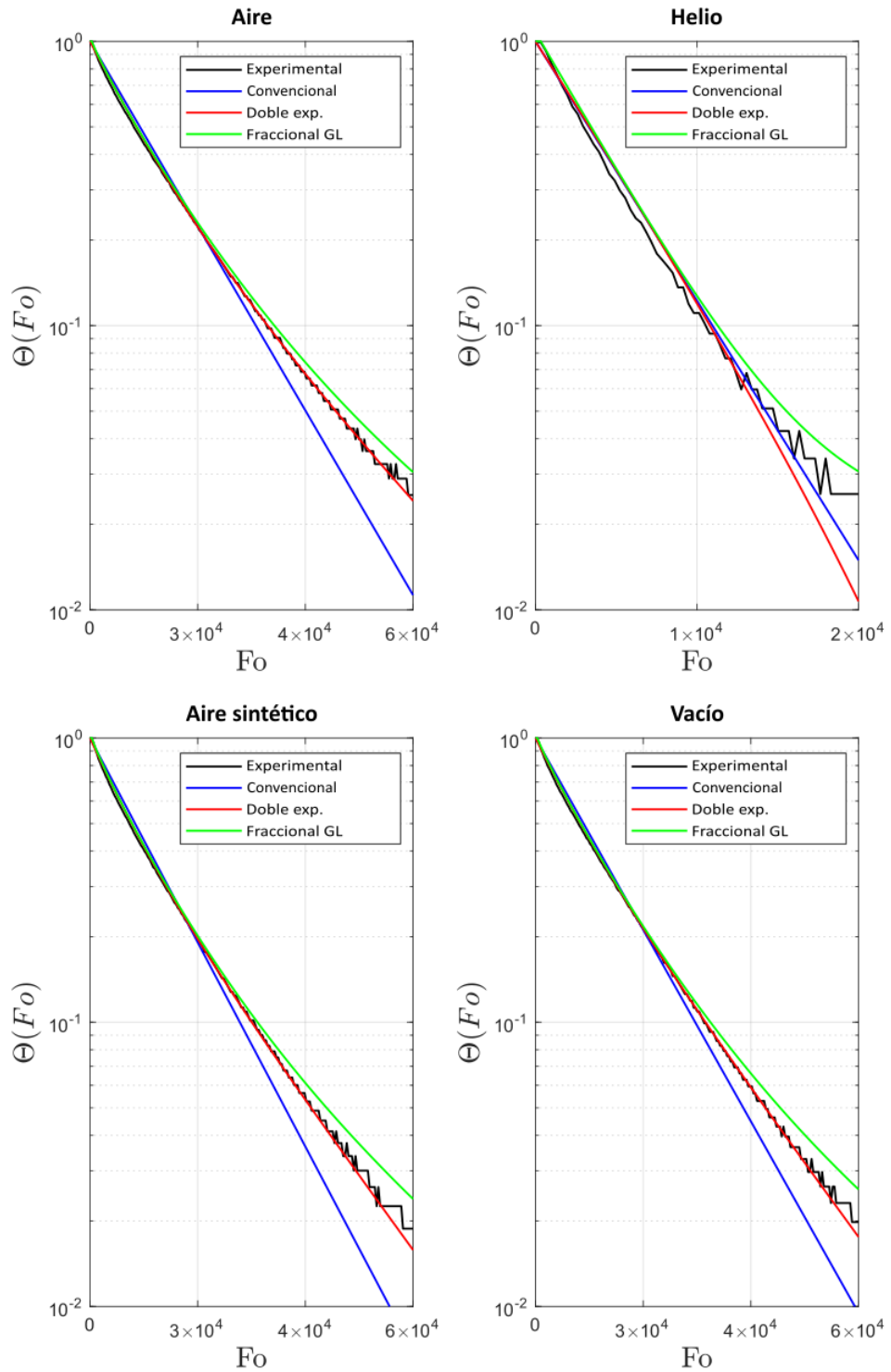


Figura 5.24: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser R en el tramo de bajada.

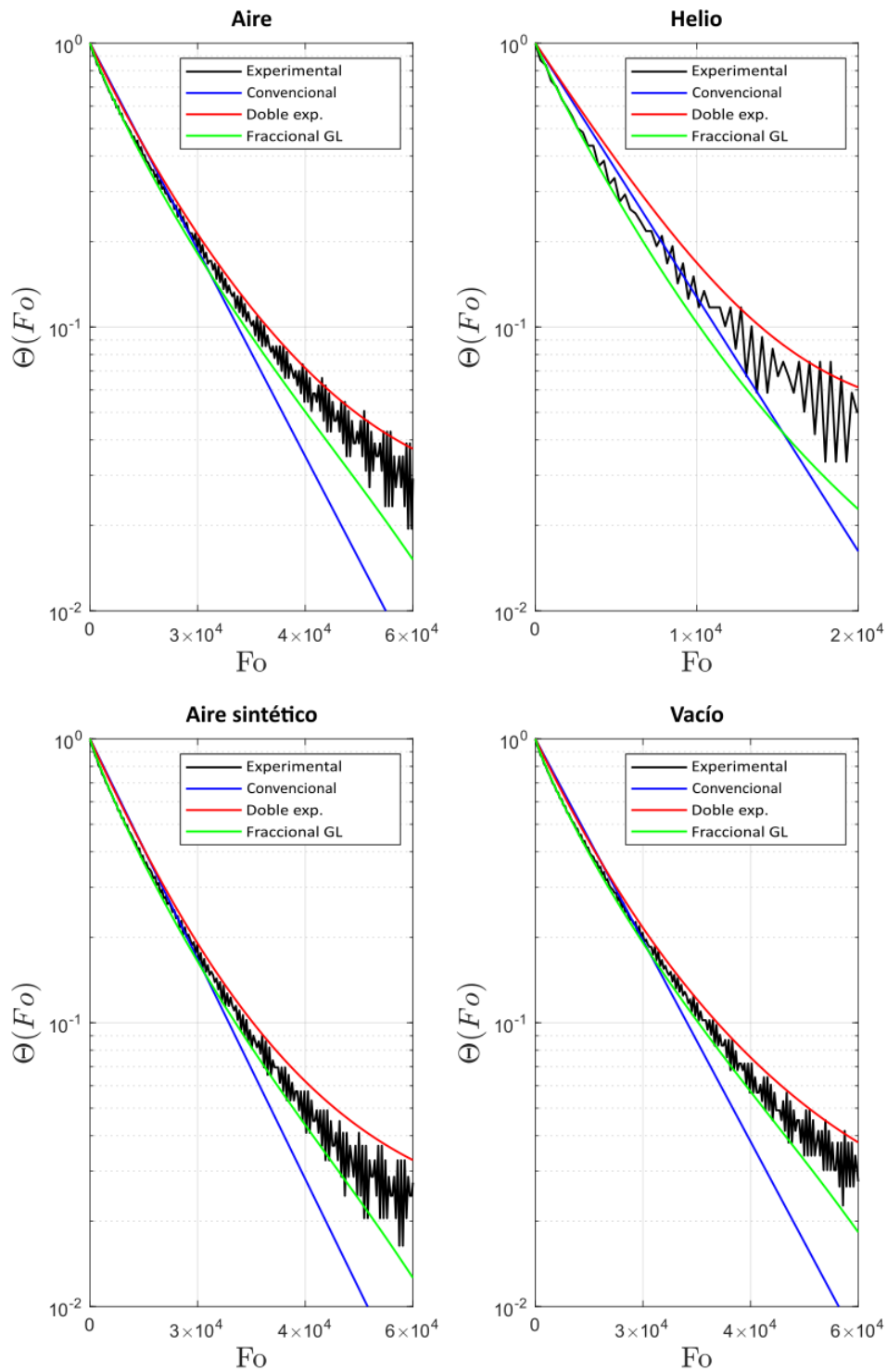


Figura 5.25: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser G en el tramo de subida.

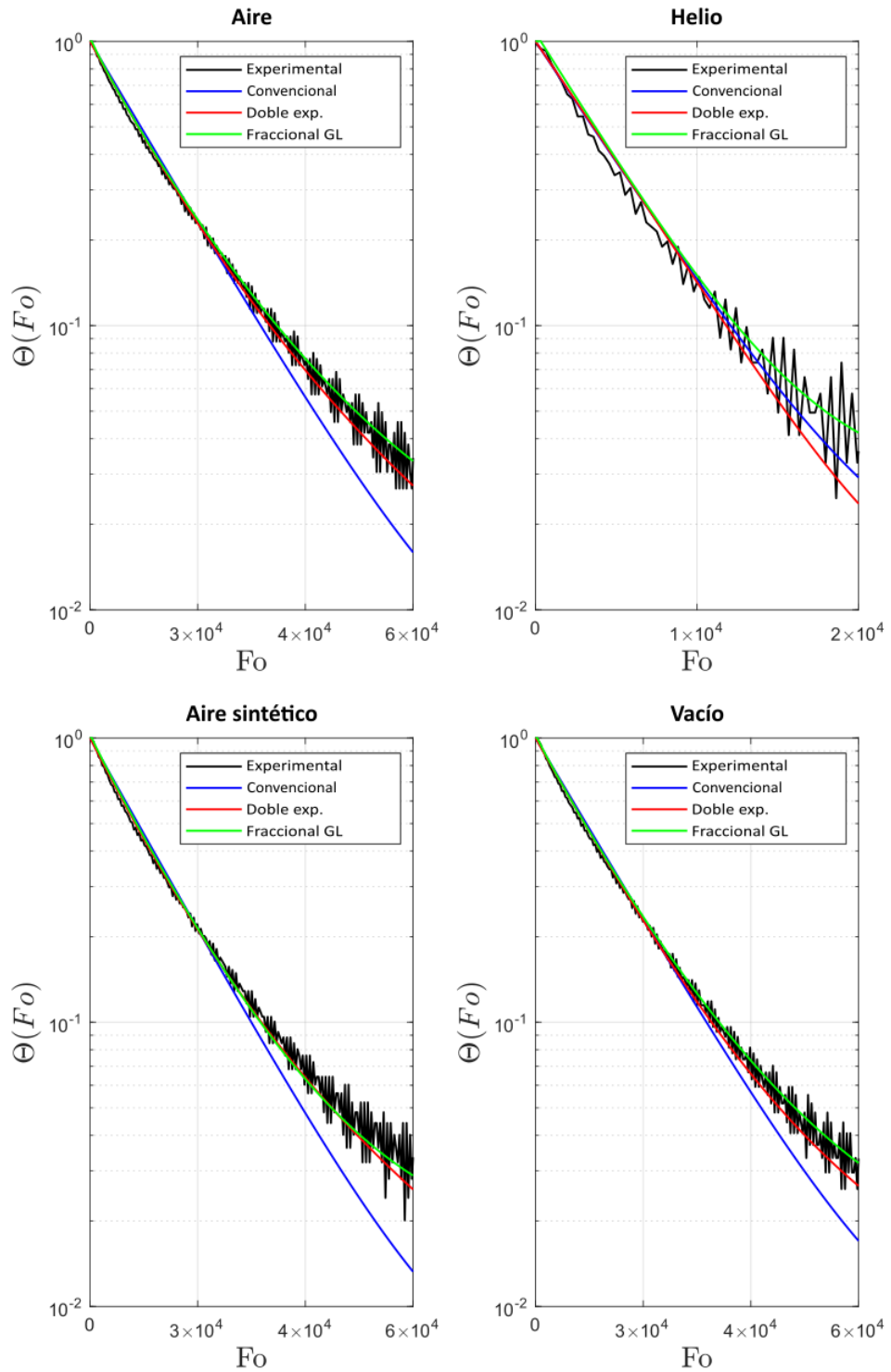


Figura 5.26: Representación adimensional de la temperatura  $\Theta(t)$  para el láser G en el tramo de bajada.

El conjunto de tablas comprendido entre la tabla (5.1) y la (5.12) pone de manifiesto que tanto la aproximación de doble exponencial (ecuaciones 3.54 y 3.55) como la fraccional de tipo Grünwald–Letnikov (ecuación 3.88) logran una reducción significativa de los residuos cuadráticos medios (QE) en comparación con la formulación clásica basada en constante de tiempo (ecuación 3.49). Además, los gráficos presentados tras cada grupo de tablas permiten visualizar cómo la magnitud de los residuos instantáneos en las etapas críticas disminuye de forma notable a medida que aumenta la complejidad de la aproximación.

Estos resultados respaldan la hipótesis de que el flujo de calor a través de los conductores ejerce un efecto relevante en la respuesta térmica del sensor, especialmente en condiciones en las que el número de Biot es inferior a 0,1.

Con el objetivo de cuantificar esta mejora, se propone definir la razón  $R_{QE_i}$  como el cociente porcentual entre el residuo promedio ( $\mu_{QE_i}$ ) obtenido con las aproximaciones extendidas –doble exponencial y fraccional GL– y el correspondiente a la formulación convencional.

Para ello, se consideran por separado las siguientes expresiones:

$$R_{QE_1} = \frac{\mu_{QE,dExp}}{\mu_{QE,conv}} \cdot 100 \quad (5.4)$$

$$R_{QE_2} = \frac{\mu_{QE,GL}}{\mu_{QE,conv}} \cdot 100 \quad (5.5)$$

donde  $R_{QE_1}$  evalúa la mejora la aproximación de doble exponencial y  $R_{QE_2}$  la fraccional respecto al convencional. Cabe señalar que, en el caso del vacío, el análisis requiere especial atención, ya que el término de convección no se considera, tal como se justificó en el capítulo correspondiente.

Aproximación	Aire			Helio			Aire sintético			Vacío		
	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,dExp}$	$R_{QE_1}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,dExp}$	$R_{QE_1}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,dExp}$	$R_{QE_1}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,dExp}$	$R_{QE_1}$ (%)
P	74,27	2,70	3,63	2,71	2,61	96,27	57,41	1,27	2,21	84,33	1,88	2,23
B	36,87	1,14	3,10	1,04	0,26	25,21	37,62	0,76	2,03	29,00	0,86	2,98
R	15,02	0,72	4,80	0,63	0,28	43,34	12,35	0,66	5,35	19,29	0,89	4,61
G	12,32	4,32	35,06	4,58	4,26	93,04	9,53	3,52	36,90	13,83	3,65	26,36
<b>Valor medio</b>	25,95	1,92	7,40	1,88	1,44	76,83	24,98	1,02	4,07	24,14	1,38	5,73

Tabla 5.13: Media y variación relativa  $RQE_1$  de los valores QE por aproximación y tipo de fluido.

Aproximación	Aire			Helio			Aire sintético			Vacío		
	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,frac}$	$R_{QE_2}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,frac}$	$R_{QE_2}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,frac}$	$R_{QE_2}$ (%)	$\mu_{QE,conv}$	$\mu_{QE,frac}$	$R_{QE_2}$ (%)
P	74,27	0,27	0,37	2,71	0,10	3,74	57,41	0,06	0,10	84,33	0,16	0,19
B	36,87	0,05	0,14	1,04	0,04	3,96	37,62	0,26	0,70	29,00	0,06	0,22
R	15,02	0,05	0,35	0,63	0,02	3,10	12,35	0,03	0,27	19,29	0,04	0,20
G	12,32	0,10	0,81	4,58	0,07	1,43	9,53	0,07	0,69	13,83	0,08	0,54
<b>Valor medio</b>	25,95	0,08	0,29	1,88	0,05	2,85	24,98	0,06	0,25	24,14	0,07	0,29

Tabla 5.14: Media y variación relativa  $RQE_2$  de los valores QE por aproximación y tipo de fluido.

Como se observa en la tabla (5.13), los resultados experimentales pueden mejorarse sustancialmente al considerar la contribución del flujo de calor a través de los conductores, como lo plantea la aproximación de doble exponencial. Esta mejora es especialmente significativa en los casos de aire, aire sintético y vacío, mientras que en helio el beneficio es más limitado. En términos cuantitativos, las mejoras en el ajuste promedio con respecto al convencional son del orden del 92,6 % para aire, 95,9 % para aire sintético, 94,3 % para vacío y tan solo un 23,2 % para helio.

Por otro lado, la tabla (5.14), que recoge los resultados mediante la aproximación fraccional formulada con el operador de Grünwald–Letnikov, muestra una mejora aún más marcada. Aunque la ganancia relativa en el caso del helio sigue siendo menor, el rendimiento de esta propuesta supera ampliamente al convencional en todos los fluidos, incluso al de doble exponencial. Las reducciones porcentuales del error cuadrático medio son del orden del 99,7 % para aire, 97,2 % para aire sintético, 99,8 % para vacío y 99,7 % para helio.

Estas observaciones se ven reforzadas por las figuras correspondientes, que recogen la evolución adimensional de la temperatura en cada uno de los transitorios analizados. En todos los casos, las propuestas extendidas –doble exponencial y fraccional– ofrecen una aproximación más precisa del comportamiento térmico, mejorando significativamente la capacidad predictiva frente a la formulación clásica basada en constante de tiempo.

En particular, el comportamiento del helio merece una atención especial. Al tratarse de un gas noble monoatómico con masa molecular muy baja y elevada conductividad térmica, presenta una difusividad térmica muy superior a la del aire. A 20 °C, la conductividad térmica del helio es de aproximadamente  $0,14 \frac{W}{mK}$ , mientras que la del aire es de alrededor de  $0,024 \frac{W}{mK}$ . Esta diferencia facilita una transferencia de calor extremadamente eficiente entre el gas y la superficie del sensor, lo que reduce significativamente el tiempo característico de respuesta térmica del sistema, tal y como se ha podido apreciar en los ensayos. Como consecuencia, las diferencias entre aproximaciones tienden a atenuarse y la capacidad de la formulación convencional para representar el fenómeno no se ve tan comprometida.

En contraste, el comportamiento en vacío representa un caso límite en el que los mecanismos convectivos son prácticamente inexistentes. En este contexto, el planteamiento clásico de constante de tiempo pierde capacidad predictiva al no contemplar adecuadamente la conducción unidimensional dominante. Por el contrario, la aproximación fraccional resulta especialmente adecuado para reproducir la evolución térmica bajo estas condiciones, al incorporar de forma explícita los efectos de memoria térmica asociados a la geometría y propiedades del cableado.

### 5.5.1. Análisis experimental de las pérdidas térmicas a través de los conductores.

Una prueba adicional que permite evidenciar la existencia de flujo de calor a través de los cables cuando el termistor se somete a un cambio abrupto de temperatura es la realizada mediante un experimento controlado, en el cual se evaluaron seis configuraciones distintas de conexión de los sensores, tal como se describió en el capítulo anterior. La metodología consistió en la exposición continua de los sensores a una fuente de radiación ultravioleta durante 60 minutos, seguida de una fase de enfriamiento. Las configuraciones ensayadas incluyeron: un sensor de referencia (NTC1), sin elementos adicionales; tres sensores con una, dos y tres resistencias de  $0 \Omega$  conectadas en serie (NTC2, NTC3 y NTC4, respectivamente); un sensor con una lámina de cobre (NTC5); y otro con un tubo de cobre (NTC6). El objetivo principal del ensayo fue analizar cómo la masa conductora adyacente y la disposición de los cables influyen en la respuesta térmica del sensor.

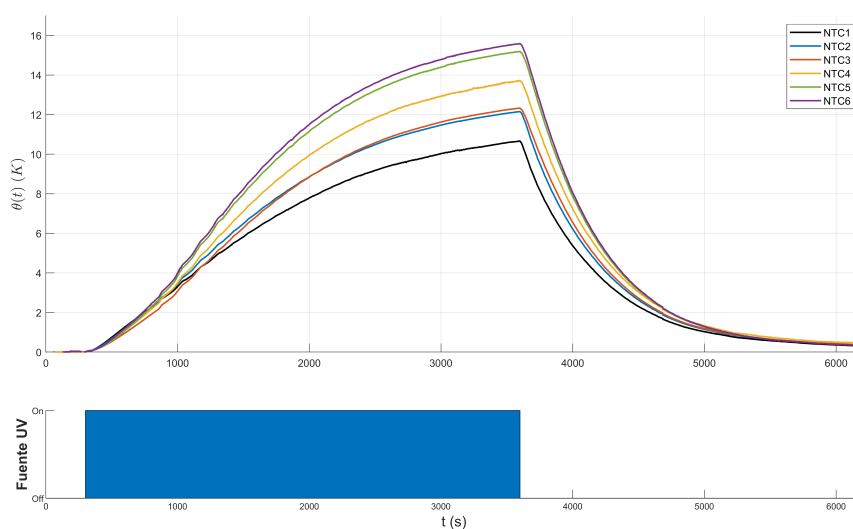


Figura 5.27: Evolución de la temperatura en seis configuraciones del termistor (Ensayo 1).

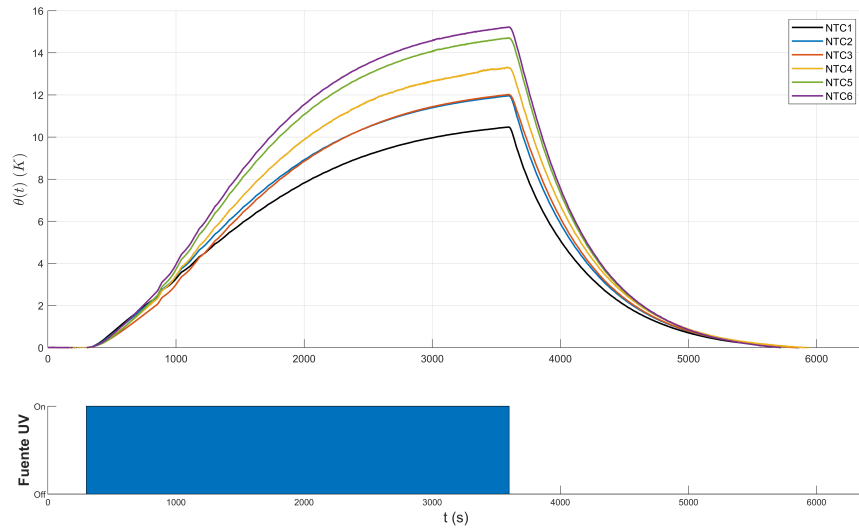


Figura 5.28: Evolución de la temperatura en seis configuraciones del termistor (Ensayo 2).

Las figuras (5.27) y (5.28) muestran la evolución temporal de la temperatura registrada por las seis configuraciones de termistor. Se observa con claridad que la temperatura máxima alcanzada por cada sensor depende directamente de su configuración geométrica y de los elementos conductores asociados. En particular, el sensor NTC1, que actúa como referencia al no incorporar ningún componente adicional, presentando la menor amplitud, lo que indica una mayor capacidad para disipar calor hacia el entorno a través de su simple conexión. En contraste, el sensor NTC6, dotado de un tubo de cobre, alcanza la mayor temperatura pico, lo cual revela un acoplamiento térmico más eficiente entre la fuente de calor y el elemento sensor.

Estas diferencias en la respuesta entre configuraciones revelan el papel que desempeñan los elementos metálicos adyacentes –tales como resistencias de  $0 \Omega$ , láminas o tubos conductores– en la propagación y disipación del flujo de calor. La presencia de una mayor masa metálica en contacto térmico directo con el sensor incrementa la capacidad de almacenamiento y conducción de energía, modulando el perfil térmico observado y, en consecuencia, afectando la señal medida.

Estos resultados no sólo evidencian la existencia de una vía adicional de transferencia de calor a través de los cables y elementos de conexión, sino que refuerzan la necesidad de incorporar este mecanismo en las aproximaciones dinámicos de sensores, especialmente en situaciones en las que la precisión de la medición depende de escalas temporales cortas o de gradientes térmicos elevados. La validación experimental de este fenómeno mediante la comparación entre distintas configuraciones permite avanzar hacia una representa-

ción más realista del comportamiento del sistema sensor-cable, superando las limitaciones de los planteamientos simplificados basados únicamente en la constante de tiempo.

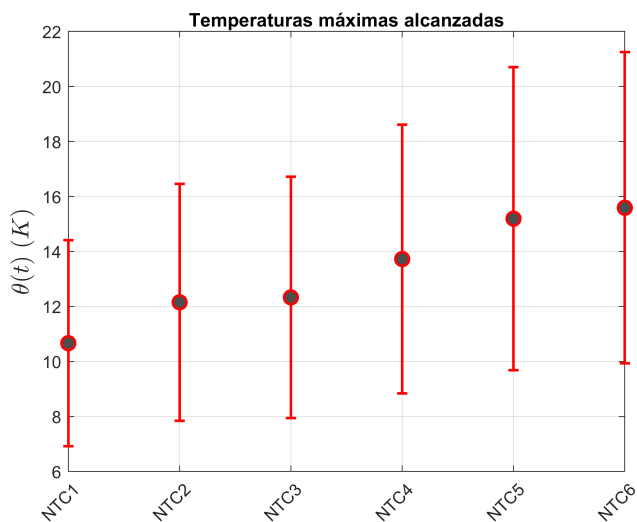


Figura 5.29: Temperaturas máximas alcanzadas en cada configuración (Ensayo 1).

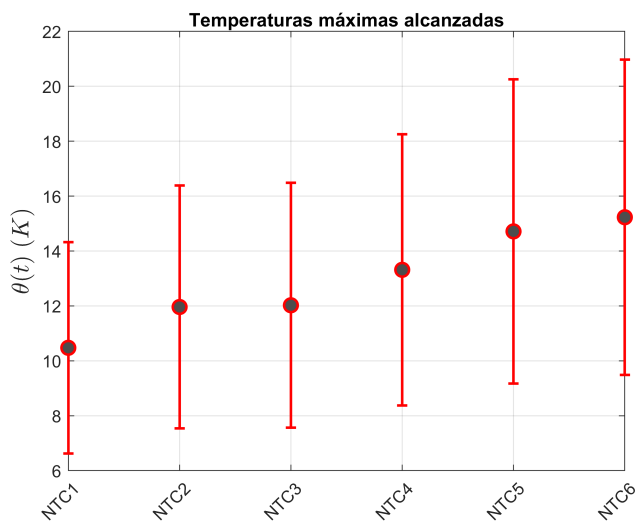


Figura 5.30: Temperaturas máximas alcanzadas en cada configuración (Ensayo 2).

Por último, las figuras (5.29) y (5.30) muestran las temperaturas máximas alcanzadas en cada configuración, incluyendo las barras de error correspon-

dientes a la desviación estándar. Se observa una tendencia creciente conforme aumenta la conductividad térmica efectiva del sistema sensor–conductor. Como se ha señalado a lo largo de este trabajo, este comportamiento refuerza la necesidad de considerar la influencia de la geometría de conexión y los materiales conductores en las aproximaciones, especialmente en contextos donde la variabilidad y la velocidad de los transitorios térmicos sean elevadas.

## Capítulo 6

# Conclusiones y líneas futuras

*El corazón tiene razones que la razón no entiende.*

Blaise Pascal

Este capítulo final ofrece una síntesis de los principales hallazgos y avances alcanzados a lo largo del trabajo, con énfasis en las aportaciones al modelado de sensores cuando el número de Biot tiene a cero ( $Bi < 0,1$ ) en medios gaseosos y condiciones de transferencia no ideales. Se presentan primero las conclusiones generales del estudio, poniendo en valor la capacidad de las aproximaciones propuestas –doble exponencial y fraccional tipo Grünwald–Letnikov– para describir con mayor precisión la respuesta del termistor. A continuación, se exploran diversas líneas futuras orientadas a la implementación práctica de estas aproximaciones en plataformas embebidas, al desarrollo de arquitecturas de procesamiento optimizadas y a su aplicación en nuevos contextos experimentales. Este recorrido busca ofrecer una visión integrada del conocimiento generado y de su proyección hacia desarrollos tecnológicos en instrumentación avanzada.

### 6.1. Conclusiones.

Los avances presentados en esta investigación subrayan la necesidad de superar los planteamientos clásicos de primer orden para describir con precisión la dinámica real de los sensores de temperatura, especialmente en aplicaciones donde intervienen múltiples escalas temporales, efectos de memoria térmica y pérdidas no ideales asociadas a la conducción de calor a través de los cables. El análisis comparativo ha puesto en evidencia que las aproximaciones fraccionales ofrecen una representación significativamente más precisa

de la respuesta transitoria del sistema, al capturar tanto los retardos como la dispersión energética observada experimentalmente, en particular en medios de alta difusividad térmica como el helio o bajo condiciones de mínima convección [7].

En el caso del helio, dadas sus propiedades físico-químicas, las diferencias entre los tres enfoques analizados tienden a reducirse, lo que sugiere que el planteamiento convencional basado en la constante de tiempo puede seguir ofreciendo una aproximación razonable en estas condiciones. La alta eficiencia en la transferencia de calor entre el gas y el sensor atenúa los efectos de memoria y dispersión, haciendo menos crítica la necesidad de aproximaciones más complejas. Por ello, queda reflejado que el tipo de fluido influye de forma notable en el valor máximo alcanzado por el sensor: el helio, debido a sus características, conduce a menores incrementos de temperatura; mientras que el vacío, al eliminar prácticamente las pérdidas por convección, favorece una mayor acumulación térmica. Estas observaciones confirman que el diseño experimental empleado permite discriminar de manera efectiva los efectos combinados del medio y de la fuente térmica, proporcionando una base sólida para la validación de diferentes propuestas dinámicas.

Las aproximaciones propuestas en este trabajo integran la respuesta transitoria del termistor considerando la interacción sinérgica entre el medio gaseoso y el propio sensor, lo que se traduce en un bajo número de Biot ( $Bi < 0,1$ ) en aplicaciones de mínima interacción con el entorno. Esta aproximación complementa y amplía el planteamiento clásico basado en la constante de tiempo, incorporando de forma explícita el flujo de calor a través de los conductores, tratados como sólidos semi-infinitos. La utilización, por un lado, de aproximaciones racionales para la impedancia térmica de los conductores, mediante funciones de transferencia equivalentes, ha permitido mantener la simplicidad computacional sin sacrificar la precisión de éste.

Por otro lado, la incorporación del cálculo fraccional en formulación se justifica no solo por su capacidad para reproducir con fidelidad los efectos de memoria, sino también por su versatilidad para adaptarse a distintas configuraciones experimentales y condiciones de contorno. Este enfoque ha permitido una validación rigurosa de la aproximación planteada, ya que facilita el aislamiento del término  ${}_0^L D_{Fo}^\alpha \Theta_\alpha(Fo)$  en la ecuación general y posibilita la evaluación de su peso relativo frente a otros mecanismos de transferencia.

Además, la mínima influencia de corrientes de aire o del entorno gaseoso en las condiciones de experimentales ha favorecido una alta reproducibilidad de los resultados.

En ambos casos, la validación experimental ha demostrado que las dos aproximaciones propuestas superan de manera consistente al enfoque convencional, con mejoras medias en el ajuste superiores al 92 % para aire, 95 % para aire sintético y 94 % para vacío. En el caso del helio, la formulación de doble exponencial mejora en un 23,2 %, mientras que la aproximación fraccional alcanza una mejora del 97,2 %, tal y como se muestra en las Ta-

blas 5.13 y 5.14.

Estos resultados confirman que el intercambio de calor a través de los cables constituye un factor determinante en la respuesta térmica global, especialmente bajo regímenes transitorios y condiciones de baja convección. La capacidad de ambos planteamientos para adaptarse a distintos medios y condiciones de contorno refuerza su aplicabilidad en el diseño y selección de sensores para sistemas reales, incluyendo entornos con flujos compresibles y aplicaciones en turbomaquinaria.

Más allá de la mejora cuantitativa en la predicción de la respuesta térmica, este trabajo aporta una metodología sistemática para la incorporación de efectos no ideales en el modelado de sensores, proporcionando herramientas analíticas y numéricas que pueden ser fácilmente implementadas en plataformas de simulación y control. La aproximación fraccional no solo permite una mejor interpretación física de los fenómenos de memoria térmica y retardo, sino que también facilita la identificación de parámetros relevantes para el diseño y la optimización de sensores en función de su entorno operativo.

Entre las principales limitaciones identificadas, cabe destacar que, si bien es robusto para sensores de pequeña escala y geometría simple, podría requerir ajustes adicionales para configuraciones más complejas o materiales con propiedades térmicas no lineales. Asimismo, la influencia de la radiación y la convección forzada en regímenes extremos podría demandar la integración de enfoques multifísicos o el acoplamiento con simulaciones *CFD* para una predicción aún más precisa.

En síntesis, este trabajo establece un marco metodológico robusto y versátil para el modelado de sensores de temperatura, integrando avances teóricos y validación experimental. La aproximación fraccional propuesta abre nuevas vías para el diseño optimizado de sensores y para el desarrollo de algoritmos de compensación y corrección en sistemas de medición avanzada. Futuros trabajos podrán profundizar en la extensión del planteamiento a otras geometrías, materiales y regímenes de flujo, así como en la integración con técnicas de identificación y control en tiempo real. Además, se vislumbra la posibilidad de aplicar este enfoque a otros tipos de sensores y actuadores térmicos, así como su transferencia a aplicaciones industriales donde la precisión y la respuesta dinámica sean críticas.

## 6.2. Líneas futuras.

La integración de aproximaciones con dinámicas avanzadas en instrumentación térmica requiere no solo rigor teórico, sino también soluciones de implementación eficientes y robustas en hardware. En este sentido, una de las líneas de trabajo más prometedoras consiste en la aplicación de sistemas embebidos de altas prestaciones, capaces de ejecutar algoritmos de correc-

ción y compensación en tiempo real, incluso bajo restricciones de consumo energético y espacio físico.

En particular, el desarrollo de arquitecturas de doble núcleo –como las que ofrecen plataformas modernas tipo Arduino Portenta H7 o Raspberry Pi Pico– posibilita la paralelización de tareas críticas: un núcleo puede dedicarse a la adquisición y preprocesamiento de la señal, mientras el otro ejecuta en paralelo la convolución y la compensación dinámica basada en la aproximación fraccional desarrollada. Esta estrategia puede minimizar la latencia y maximizar la fidelidad de la medición térmica, acercando la estimación a la temperatura real del fenómeno de interés.

Un aspecto diferencial de esta línea es la posibilidad de emplear módulos FPGA o coprocesadores programables de bajo nivel, que permiten introducir instrucciones específicas para el procesamiento de señales y la gestión de algoritmos de convolución o deconvolución directamente en el hardware. Esta aproximación, ampliamente reconocida en la literatura de instrumentación avanzada [21], aporta ventajas clave:

- Flexibilidad y reconfigurabilidad: los módulos FPGA permiten adaptar la lógica de procesamiento a las necesidades de la aproximación, optimizando el uso de recursos y permitiendo actualizaciones futuras sin modificar la plataforma física.
- Procesamiento en tiempo real: la ejecución de operaciones matemáticas complejas (como la convolución con funciones de transferencia fraccionales) directamente en hardware reduce significativamente el tiempo de respuesta, permitiendo la corrección instantánea de la señal medida.
- Portabilidad y escalabilidad: plataformas como Arduino Portenta H7 (basada en doble núcleo ARM Cortex–M7 y M4) y Raspberry Pi Pico (con doble núcleo ARM Cortex–M0+) ofrecen una base ideal para la integración de algoritmos avanzados en sistemas de adquisición industrial y científico, manteniendo bajo consumo y alta fiabilidad.

La literatura reciente subraya la necesidad de trasladar los avances en modelado y compensación térmica a plataformas embebidas, para su aplicación en contextos donde la precisión y la velocidad de respuesta son críticas (por ejemplo, instrumentación científica, monitorización de procesos industriales o sistemas de control en tiempo real) [21]. La posibilidad de programar instrucciones de bajo nivel en módulos FPGA o mediante bibliotecas optimizadas para microcontroladores ARM permite implementar algoritmos de corrección basados en aproximaciones fraccionales, asegurando la integridad de la señal y la adaptabilidad a diferentes condiciones de operación.

Como parte de los trabajos futuros, se plantea:

- El diseño y validación de prototipos embebidos con doble núcleo, optimizados para la ejecución eficiente de algoritmos de convolución y

compensación térmica en tiempo real.

- La integración de módulos FPGA o coprocesadores dedicados para acelerar el procesamiento de señales y permitir la actualización dinámica de parámetros del planteamiento.
- El desarrollo de bibliotecas y firmware específicos para plataformas como Arduino Portenta H7 y Raspberry Pi Pico, facilitando la transferencia tecnológica a aplicaciones industriales y científicas.
- La evaluación experimental de la precisión, robustez y latencia de la medición corregida, en condiciones de operación reales y bajo diferentes regímenes térmicos y ambientales.
- La extensión del enfoque a sistemas multicanal y a la integración con redes de sensores inteligentes, donde la compensación dinámica puede ser distribuida y coordinada entre nodos.

En definitiva, la convergencia entre modelado térmico avanzado y hardware embebido reconfigurable representa un paso decisivo hacia la instrumentación inteligente, capaz de ofrecer mediciones precisas, fiables y adaptativas en tiempo real para una amplia gama de aplicaciones en ingeniería y ciencia.



# Apéndice A

## Códigos de programación

*La creatividad consiste en unir cosas que  
antes no se han unido.*

Alan Turing

Este apéndice recopila los principales códigos desarrollados en Java, Python y MATLAB, orientados a la monitorización de los valores de temperatura registrados por los termistores NTC durante los experimentos realizados, así como al posterior análisis, simulación y validación de los modelos propuestos. Los scripts implementan modelos que consideran efectos de transferencia de calor no ideales, como las pérdidas a través de los conductores y la inercia térmica, tal y como se ha expuesto a lo largo del trabajo. Cada lenguaje de programación ha sido seleccionado en función de su idoneidad para distintas etapas del proceso, permitiendo tanto la adquisición de datos en tiempo real como la integración con sistemas embebidos de bajo coste y la simulación avanzada de los modelos matemáticos. Los códigos están documentados para garantizar la reproducibilidad y su aplicación directa en entornos experimentales o industriales, facilitando así la validación y la transferencia tecnológica.

### A.1. Matlab.

#### A.1.1. Código para dispositivo de medición de temperatura basado en la diferencia de $T_{01}$ y $T_1$ .

```
1 clear; clc; warning('off','all');  
2  
3 % === Archivos ===
```

```

4 archivos = {'Test0', 'Test1', 'Test2', 'Test3', 'Test4', 'Test5
  '};
5 ensayos_para_conjunto = {'Test0', 'Test1', 'Test2', 'Test3', '
  Test4', 'Test5'};
6
7 % === Procesar y guardar cada ensayo individual ===
8 for i = 1:numel(archivos)
9 procesar_ensayo_individual(archivos{i});
10 end
11
12 % === Procesar gráfico conjunto con sombreado ===
13 graficar_conjunto(ensayos_para_conjunto);
14
15 % === FUNCIONES AUXILIARES ===
16 function procesar_ensayo_individual(nombre_archivo)
17 t = readtable([nombre_archivo, '.xls']);
18 C = table2cell(t);
19 dim = height(t) - 2;
20
21 datos = cellfun(@(x) str2double(strsplit(x, ',')), C(2:end-1,2)
  , 'UniformOutput', false);
22 datos = vertcat(datos{:});
23 T10 = datos(:,1);
24 T1 = datos(:,2);
25 Tamb = datos(:,3);
26 Tdiff10 = datos(:,4);
27 Tdiff1 = datos(:,5);
28
29 % Promediar cada 10 muestras
30 bloques = floor(dim / 10);
31 prom = @(v) mean(reshape(v(1:bloques*10), 10, []), 1);
32 T10_med = prom(T10);
33 T1_med = prom(T1);
34 Tamb_med = prom(Tamb);
35 Tdiff10_med = prom(Tdiff10);
36 Tdiff1_med = prom(Tdiff1);
37
38 dt=0.1;
39 t=0:dt:((length(T10)-1)*dt); %Vector tiempo que acumula diez
  datos por segundo
40 tM=0:(0.1*length(T10)-1); %Vector tiempo MEDIO que acumula diez
  datos por segundo
41
42 % Correcciones
43 cor2 = T1_med(1) - T10_med(1);
44 cor3 = Tdiff1_med(1) - Tdiff10_med(1);
45
46 % === Gráfico 1: Temperatura corregida ===
47 figure('Visible','off');
48 plot(tM, 273.15 + T10_med + cor2, 'r', tM, 273.15 + T1_med, 'b'
  );
49 xlabel('t (s)', 'FontSize', 12); ylabel('T (K)');
50 legend('NTC10', 'NTC1');

```

```

51 xline(200, '--k', 'Start fan', 'LabelVerticalAlignment', '
    bottom', ...
52 'LabelHorizontalAlignment', 'right', 'HandleVisibility', 'off')
    ;
53 print(['temperaturaIndividual_', nombre_archivo], '-dpng', '-
    r500');
54 close;
55
56 % === Gráfico 2: Diferencia corregida ===
57 figure('Visible','off');
58 plot(tM, Tdiff10_med + cor3, 'k', tM, Tdiff1_med, 'm');
59 xlabel('t(s)', 'FontSize', 12); ylabel('\theta (t) (K)', '
    FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
60 legend('NTC10', 'NTC1');
61 xline(200, '--k', 'Start fan', 'LabelVerticalAlignment', '
    bottom', ...
62 'LabelHorizontalAlignment', 'right', 'HandleVisibility', 'off')
    ;
63 print(['varDiferencialindividual_', nombre_archivo], '-dpng', '
    -r500');
64 close;
65
66 % === Gráfico 3: Diferencial absoluto T0 - Ts ===
67 figure('Visible','off');
68 plot(tM, T10_med - T1_med, 'k', 'LineWidth', 1.5);
69 xlabel('t(s)', 'FontSize', 12); ylabel('\theta (t) (K)', '
    FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
70 grid on;
71 xline(200, '--r', 'Start fan', 'LabelVerticalAlignment', '
    bottom', ...
72 'LabelHorizontalAlignment', 'right', 'HandleVisibility','off');
73 legend('(T_{0} - T_{s})');
74 print(['Diff_Temperature_', nombre_archivo], '-dpng', '-r500');
75 close;
76 end
77
78 function graficar_conjunto(lista_archivos)
79 num_archivos = numel(lista_archivos);
80 differential_data = cell(1, num_archivos);
81
82 for j = 1:num_archivos
83 t = readtable([lista_archivos{j}, '.xls']);
84 C = table2cell(t);
85 dim = height(t) - 2;
86
87 datos = cellfun(@(x) str2double(strsplit(x, ',')), C(2:end-1,2)
    , 'UniformOutput', false);
88 datos = vertcat(datos{:});
89 Tdiff10 = datos(:,4);
90 Tdiff1 = datos(:,5);
91
92 % Promediar cada 10 muestras
93 bloques = floor(dim / 10);
94 prom = @(v) mean(reshape(v(1:bloques*10), 10, []), 1);

```

```

95 Tdiff10_med = prom(Tdiff10);
96 Tdiff1_med = prom(Tdiff1);
97
98 cor3 = Tdiff1_med(1) - Tdiff10_med(1);
99 differential_data{j} = Tdiff10_med + cor3;
100 end
101
102 dt = 0.1;
103 num_puntos = length(differential_data{1});
104 tM = 0:dt:(num_puntos - 1)*dt;
105
106 % Matriz de datos
107 Y = cell2mat(differential_data');
108 Y = Y'; % N x ensayos
109
110 % Media y desviación
111 Y_mean = mean(Y, 2);
112 Y_std = std(Y, 0, 2);
113
114 % Gráfico conjunto
115 f1=figure;
116 f1.Position(1:4)=[6.6,189,1500,750];
117 hold on;
118
119 % Área sombreada
120 x_fill = [1:num_puntos, fliplr(1:num_puntos)];
121 y_fill = [Y_mean + Y_std; flipud(Y_mean - Y_std)];
122 fill(x_fill, y_fill, [0.9 0.9 0.9], 'EdgeColor', 'none', ...
123 'FaceAlpha', 0.5, 'HandleVisibility','off');
124
125 % Ensayos individuales y media
126 colores = {'k', 'b', 'g', 'm', 'c', '--k'};
127 for j = 1:num_archivos
128 if j == num_archivos % último ensayo
129 display_name = 'Ensayo de referencia';
130 else
131 display_name = ['Ensayo ', num2str(j)];
132 end
133 plot(Y(:,j), colores{j}, 'DisplayName', display_name);
134 end
135 plot(Y_mean, 'r', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'Media');
136
137 xline(200, '--r', 'Start fan', ...
138 'LabelVerticalAlignment', 'bottom', ...
139 'LabelHorizontalAlignment', 'right', 'HandleVisibility','off');
140
141 xlabel('t(s)', 'FontSize', 12); ylabel('$\theta(t)$ (K)', '
142 FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
143 title('Diferencial de temperatura de los ensayos', 'Interpreter
144 ', 'latex');
145
146 lgd = legend('Location', 'northeast', 'FontSize', 10);
147 lgd.Box = 'on'; % (opcional) para ver el
148 contorno

```

```

145 lgd.ItemTokenSize = [10, 5];           % (opcional) para reducir
      tamaño de iconos
146 grid on; box on;
147
148 print('Resumen_Diferenciales', '-dpng', '-r600');
149 end

```

Listing A.1: Dispositivo de medición de temperatura basado en la diferencia de  $T_{01}$  y  $T_1$

### A.1.2. Código para la representación de resultados de los ensayos en cámara adiabática.

```

1      clear; warning('off','all');
2
3      % Mapa de colores asociado al nombre del láser
4      color_map = containers.Map( ...
5      {'Azul', 'Verde', 'Violeta', 'Rojo'}, ...
6      {'#0072BD', '#77AC30', '#7E2F8E', '#D95319'});
7
8      % === Procesar todos los entornos ===
9      procesar_entorno({'0_Azul_Aire_7', '0_Rojo_Aire_15', '0
      _Verde_Aire_3', '0_Violeta_Aire_11'}, 'All_Aire_Kelvin'
10     );
11     procesar_entorno({'2_Azul_Sintético_1', '2_Rojo_Sintético_0
      ', '2_Verde_Sintético_2', '2_Violeta_Sintético_5'}, '
      All_Sintetico_Kelvin');
12     procesar_entorno({'3_Azul_Helio_23', '3_Rojo_Helio_16', '3
      _Verde_Helio_19', '3_Violeta_Helio_24'}, '
      All_Helio_Kelvin');
13     procesar_entorno({'1_Azul_Vacío_3', '1_Rojo_Vacío_4', '1
      _Verde_Vacío_3', '1_Violeta_Vacío_6'}, '
      All_Vacío_Kelvin');
14
15     % === Función auxiliar ===
16     function procesar_entorno(lista_archivos, nombre_salida)
17     color_map = containers.Map({'Azul', 'Verde', 'Violeta', '
      Rojo'}, ...
18     {'#0072BD', '#77AC30', '#7E2F8E', '#D95319'});
19
20     f = figure('Color', 'w');
21     f.Position = [6.6, 189, 831.2, 587.2];
22
23     % Subplot superior (respuesta del termistor)
24     ax1 = subplot(2,1,1); hold on; grid on;
25     legendEntries = {};
26
27     for j = 1:length(lista_archivos)
28     nombre_archivo = fullfile([lista_archivos{j}, '.mat']);
29     load(nombre_archivo);
30
31     % Determinar color desde el nombre

```

```

31 clave_color = extractBetween(lista_archivos{j}, '_', '_');
32 if isempty(clave_color)
33     c = 'k'; name_color = 'Desconocido';
34 else
35     clave = clave_color{1};
36     if isKey(color_map, clave)
37         c = color_map(clave);
38         name_color = clave;
39     else
40         c = 'k'; name_color = 'Desconocido';
41     end
42 end
43
44 plot(tM, (T2_med - TT_mean), ...
45     'Color', c, 'LineWidth', 0.75, 'DisplayName', name_color);
46
47 legendEntries{end+1} = name_color;
48
49 % Si estamos en Helio, almacenar rojo y verde para el zoom-
50 inset
51 if strcmp(nombre_salida, 'All_Helio_Kelvin') && any(strcmp(
52     clave, {'Rojo', 'Verde'}))
53     zoom_data(j).t = tM; % o bien tM(400:500) si quieres
54     acotarlo
55     zoom_data(j).T = T2_med - TT_mean;
56     zoom_data(j).color = c;
57     zoom_data(j).label = name_color;
58 end
59
60 ylabel('$\theta (t)$ (K)', 'FontSize', 12, 'Interpreter', '
61     latex');
62 title('Respuesta del termistor');
63 xlim([0 180]); ylim([0 max(T2_med-TT_mean)*1.1]);
64 legend('Location', 'northeast');
65
66 % ===== Insertar zoom si es Helio =====
67 if strcmp(nombre_salida, 'All_Helio_Kelvin')
68     insetPos = [0.45 0.65 0.1 0.1]; % [x y w h]
69     axInset = axes('Position', insetPos);
70     box on; hold on;
71     for k = 1:length(zoom_data)
72         % Limita el zoom a 40-45 segundos
73         idx_zoom = zoom_data(k).t >= 80 & zoom_data(k).t <= 90;
74         plot(zoom_data(k).t(idx_zoom), zoom_data(k).T(idx_zoom),
75             ...
76             'Color', zoom_data(k).color, 'LineWidth', 1.2, ...
77             'DisplayName', zoom_data(k).label);
78     end
79
80 ylim auto;
81 set(gca, 'FontSize', 8);
82 xlim([80 90]); ylim([6.5 7.5]);
83 end

```

```

80
81 % Subplot inferior (Láser)
82 ax2 = subplot(2,1,2); hold on; grid on;
83 rectangle('Position', [0 0 30 0], 'FaceColor', '#D3D3D3');
84 rectangle('Position', [30 0 90 1], 'FaceColor', '#0072BD');
85 rectangle('Position', [120 0 60 0], 'FaceColor', '#D3D3D3')
86 ;
87 axis([0 180 0 1]);
88 yticks([0 1]); yticklabels({'Off', 'On'});
89 xlabel('t (s)', 'FontSize', 12, 'Interpreter', 'latex');
90 ylabel('Pulso láser', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold')
91 ;
92
93 % Ajustar manualmente la posición de los subgráficos
94 ax1.Position = [0.13 0.375 0.775 0.575];
95 ax2.Position = [0.13 0.15 0.775 0.15];
96
97 % Exportar figura
98 print(nombre_salida, '-dpng', '-r800');
99 end

```

Listing A.2: Representación de resultados de los ensayos en cámara adiabática.

### A.1.3. Código para la representación de modelos de constante de tiempo aplicados a los ensayos en cámara adiabática.

```

1 clear;
2 warning('off','all');
3
4 %% Configuración de rutas
5 baseDir = 'C:\ruta\al\directorio\del\proyecto'; % CAMBIAR según
6           el usuario
7 ruta = fullfile(baseDir, 'Datos');
8 ruta_Save = fullfile(baseDir, 'Resultados', '
9           images_primer_orden');
10
11 archivos = dir(fullfile(ruta, '*.mat'));
12
13 for I = 1:length(archivos)
14 nombreArchivo = archivos(I).name;
15
16 if contains(nombreArchivo, 'mod')
17 continue; % Saltar archivos con 'mod'
18 end
19
20 nombreBase = erase(nombreArchivo, '.mat');
21 datos = load(fullfile(ruta, nombreArchivo));
22
23 %% Identificar color del láser
24 sep = strsplit(nombreBase, '_');

```

```

23 laser = sep{1};
24 switch laser
25 case 'Azul',      color_laser = '#0072BD'; frec_laser = 'Azul';
26 case 'Rojo',     color_laser = '#D95319'; frec_laser = 'Rojo';
27 case 'Verde',    color_laser = '#77AC30'; frec_laser = 'Verde';
28 case 'Violeta',  color_laser = '#7E2F8E'; frec_laser = 'Violeta'
29     ;
29 otherwise,      color_laser = 'k';
30 end
31
32 %% Identificar fluido
33 if contains(nombreBase, 'aire') | contains(nombreBase, 'Aire')
34 fluido_actual = 'Aire';
35 elseif contains(nombreBase, 'helio') | contains(nombreBase, '
36     Helio')
36 fluido_actual = 'Helio';
37 elseif contains(nombreBase, 'sintético') | contains(nombreBase,
38     'Sintético')
38 fluido_actual = 'Aire sintético';
39 elseif contains(nombreBase, 'vacío') | contains(nombreBase, '
40     Vacío')
40 fluido_actual = 'Vacío';
41 end
42
43 %% Variables de entrada
44 T_0 = datos.TT_mean;
45 T2 = datos.T2;
46 T2_med = datos.T2_med;
47
48 %% Primer tramo (encendido del láser)
49 Tth1 = T2(299:1200) - mean(T2(1:300));
50 t1 = 0:0.1:0.1*(length(Tth1)-1);
51
52 %% Segundo tramo (apagado del láser)
53 Tth2 = T2(1200:end) - mean(T2(1:300));
54 t2 = 0:0.1:0.1*(length(Tth2)-1);
55
56 %% Ajuste 1º tramo
57 fo1 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares', ...
58 'Lower',[0,0], ...
59 'Upper',[50,1], ...
60 'StartPoint',[10, 0.1]);
61
62 ft1 = fittype('a*(1 - exp(-b*x))', 'options', fo1);
63 [curve1, gof1] = fit(t1', Tth1', ft1);
64 a1 = curve1.a;
65 b1 = curve1.b;
66
67 %% Ajuste 2º tramo
68 fo2 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares', ...
69 'Lower', 0, ...
70 'Upper', 1, ...
71 'StartPoint', 0.1);
72

```

```

73 ft2 = fittype('a*exp(-b*x)', 'problem', 'a', 'options', fo2);
74 [curve2, gof2] = fit(t2', Tth2', ft2, 'problem', a1);
75 b2 = curve2.b;
76
77 %% Evaluaciones
78 Tth1_eval = a1 * (1 - exp(-b1 * t1));
79 Tth2_eval = a1 * exp(-b2 * t2);
80
81 %% Reconstrucción señal completa
82 Tth_total_eval = zeros(size(T2)); % del mismo tamaño que T2
83 Tth_total_eval = T2 - T_0;
84
85 % Asigna tramo 1 (desde el índice 301)
86 idx1_start = 301;
87 idx1_end = idx1_start + length(Tth1_eval) - 1;
88
89 if idx1_end <= length(Tth_total_eval)
90 Tth_total_eval(idx1_start:idx1_end) = Tth1_eval;
91 else
92 warning('Ajustando longitud de Tth1_eval para evitar
          desbordamiento.');

```

```

122 title(sprintf('%s - %s (RMSE: %.3f K)', freq_laser,
123         fluido_actual, rmse));
124
125 legend('Modelo 1er orden', 'Modelo experimental'); grid on;
126
127 subplot(3,1,2);
128 plot(t, error_res, 'Color', color_laser);
129 ylabel('Sres(t)', 'Interpreter', 'latex'); grid on; title('
130     Residuo instantáneo');
131
132 subplot(3,1,3);
133 plot(t, error_res_acum, 'Color', color_laser); ylabel('$\Sigma
134     S_{res}$', 'Interpreter', 'latex');
135 xlabel('tiempo (s)'); grid on; title('Residuo acumulado');
136
137 % Guardar
138 print(f1, fullfile(ruta_Save, [nombreBase ' Residuals first
139     order']), '-dpng', '-r800');
140 close(f1);
141 end

```

Listing A.3: Modelo de constante de tiempo.

#### A.1.4. Código para la representación de modelos de doble exponencial aplicados a los ensayos en cámara adiabática.

```

1 clear;
2 warning('off','all');
3
4 %% Configuración de rutas
5 baseDir = 'C:\ruta\al\directorio\del\proyecto'; % CAMBIAR según
6         el usuario
7 ruta = fullfile(baseDir, 'Datos');
8 ruta_Save = fullfile(baseDir, 'Resultados', '
9         images_segundo_orden');
10
11 archivos = dir(fullfile(ruta, '*.mat'));
12
13 for I = 1:length(archivos)
14     nombreArchivo = archivos(I).name;
15     if contains(nombreArchivo, 'mod')
16         continue; % Saltar archivos con 'mod'
17     end
18     nombreBase = erase(nombreArchivo, '.mat');
19     datos = load(fullfile(ruta, nombreArchivo));
20
21     %% Identificar color del láser
22     sep = strsplit(nombreBase, '_');
23     laser = sep{1};
24     switch laser

```

```

25 case 'Azul',      color_laser = '#0072BD'; frec_laser = 'Azul';
26 case 'Rojo',     color_laser = '#D95319'; frec_laser = 'Rojo';
27 case 'Verde',    color_laser = '#77AC30'; frec_laser = 'Verde';
28 case 'Violeta',  color_laser = '#7E2F8E'; frec_laser = 'Violeta'
29 ;
30 otherwise,      color_laser = 'k';
31 end
32 %% Identificar fluido
33 if contains(nombreBase, 'aire') | contains(nombreBase, 'Aire')
34 fluido_actual = 'Aire';
35 elseif contains(nombreBase, 'helio') | contains(nombreBase, '
36 Helio')
37 fluido_actual = 'Helio';
38 elseif contains(nombreBase, 'sintético') | contains(nombreBase,
39 'Sintético')
40 fluido_actual = 'Aire sintético';
41 elseif contains(nombreBase, 'vacío') | contains(nombreBase, '
42 Vacío')
43 fluido_actual = 'Vacío';
44 end
45 %% Variables de entrada
46 T_0 = datos.TT_mean;
47 T2 = datos.T2;
48 T2_med = datos.T2_med;
49 %% Primer tramo (encendido del láser)
50 Tth1 = T2(299:1200) - mean(T2(1:300));
51 t1 = 0:0.1:0.1*(length(Tth1)-1);
52 %% Segundo tramo (apagado del láser)
53 Tth2 = T2(1200:end) - mean(T2(1:300));
54 t2 = 0:0.1:0.1*(length(Tth2)-1);
55 %% Ajuste 1º tramo
56 fo1 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...
57 'Lower',[0,-30,0,0], 'Upper',[50,50,20,20],...
58 'StartPoint',[10 10 0.1 0.1]);
59 ft1 = fittype('a+b*exp(-(c+d)*x)-(a+b)*exp(-(c-d)*x)', 'options'
60 ,fo1);
61 [curve1, ~] = fit(t1', Tth1', ft1);
62 coef1 = coeffvalues(curve1);
63 %% Ajuste 2º tramo
64 fo2 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...
65 'Lower',[0,0,0], 'Upper',[200,20,20],...
66 'StartPoint',[10 0.1 0.1]);
67 ft2 = fittype('a*exp(-(b+c)*x)+(e-a)*exp(-(b-c)*x)', 'problem', '
68 e', 'options', fo2);
69 [curve2, ~] = fit(t2', Tth2', ft2, 'problem', coef1(1));
70 coef2 = coeffvalues(curve2);
71 %% Evaluaciones
72

```

```

73 Tth1_eval = coef1(1) + coef1(2)*exp(-(coef1(3)+coef1(4))*t1)
74     ...
74 - (coef1(1)+coef1(2))*exp(-(coef1(3)-coef1(4))*t1);
75 Tth2_eval = coef2(1)*exp(-(coef2(2)+coef2(3))*t2) ...
76 + (coef1(1)-coef2(1))*exp(-(coef2(2)-coef2(3))*t2);
77
78 %% Reconstrucción señal completa
79 Tth_total_eval = zeros(size(T2)); % del mismo tamaño que T2
80 Tth_total_eval = T2 - T_0;
81
82 % Asigna tramo 1 (desde el índice 301)
83 idx1_start = 301;
84 idx1_end = idx1_start + length(Tth1_eval) - 1;
85
86 if idx1_end <= length(Tth_total_eval)
87 Tth_total_eval(idx1_start:idx1_end) = Tth1_eval;
88 else
89 warning('Ajustando longitud de Tth1_eval para evitar
90     desbordamiento.');
```

```

90 len = length(Tth_total_eval) - idx1_start + 1;
91 Tth_total_eval(idx1_start:end) = Tth1_eval(1:len);
92 end
93
94 % Asigna tramo 2 (desde el índice 1201)
95 idx2_start = 1201;
96 idx2_end = idx2_start + length(Tth2_eval) - 1;
97
98 if idx2_end <= length(Tth_total_eval)
99 Tth_total_eval(idx2_start:idx2_end) = Tth2_eval;
100 else
101 warning('Ajustando longitud de Tth2_eval para evitar
102     desbordamiento.');
```

```

102 len = length(Tth_total_eval) - idx2_start + 1;
103 Tth_total_eval(idx2_start:end) = Tth2_eval(1:len);
104 end
105
106 %% Residuos
107 t = 0.1*(0:length(T2)-1);
108 rmse = sqrt(mean(((T2 - T_0) - Tth_total_eval).^2));
109 error_res = ((T2 - T_0) - Tth_total_eval).^2;
110 error_res_acum = cumsum(error_res);
111
112 %% Gráficas
113 f1 = figure('Position', [6.6, 189, 831.2, 587.2]);
114
115 subplot(3,1,1);
116 plot(t, (T2 - T_0), 'k'); hold on;
117 plot(t, Tth_total_eval, 'Color', color_laser, 'LineStyle','-.',
118     'LineWidth', 1.5);
119 xlim([0 180]); ylabel('\theta(t) (K)', 'Interpreter', 'latex'
120 );
119 title(sprintf('%s - %s (RMSE: %.3f K)', freq_laser,
120     fluido_actual, rmse));
120 legend('Modelo 2^{\do} orden', 'Modelo experimental'); grid on;
```

```

121
122 subplot(3,1,2);
123 plot(t, error_res, 'Color', color_laser);
124 ylabel('S_{res}(t)'); grid on; title('Residuo instantáneo');
125
126 subplot(3,1,3);
127 plot(t, error_res_acum, 'Color', color_laser); ylabel('$\Sigma$
128 S_{res}$', 'Interpreter','latex');
129 xlabel('tiempo (s)'); grid on; title('Residuo acumulado');
130
131 % Guardar
132 print(f1, fullfile(ruta_Save, [nombreBase ' Residuals first
133 order']), '-dpng', '-r800');
134 close(f1);
135 end

```

Listing A.4: Modelo de doble exponencial.

### A.1.5. Código para la representación de modelos fraccionales tipo GL aplicados a los ensayos en cámara adiabática.

```

1 clear; clc; warning('off', 'all');
2
3 clear; clc; warning('off', 'all');
4
5 ruta = 'C:\ruta\al\directorio\del\proyecto';
6 datos = load(ruta);
7 T2 = datos.T2;
8 T_0 = datos.TT_mean;
9
10 %% === Tiempo y segmentación
11 dt = 0.1;
12 t = 0:dt:(length(T2)-1)*dt;
13
14 % Segmentación de los tiempos
15 idx_ini = find(t < 30);
16 idx_sub = find(t >= 30 & t <= 120);
17 idx_baj = find(t >= 120 & t <= 180);
18
19 t_ini = t(idx_ini);
20 t_sub = t(idx_sub);
21 t_baj = t(idx_baj);
22
23 T_ini = T2(idx_ini) - T_0;
24 T_sub = T2(idx_sub) - T_0;
25 T_baj = T2(idx_baj) - T_0;
26 T_exp = [T_ini, T_sub, T_baj];
27 t_total = [t_ini, t_sub, t_baj];
28
29 t_sub_rel = t_sub - t_sub(1); % Tiempo relativo de subida
30 t_baj_rel = t_baj - t_baj(1); % Tiempo relativo de bajada
31

```

```

32 P_sub = 0.002 * ones(size(t_sub_rel)); % Potencia térmica
    constante en subida
33 P_baj = 0.002 * ones(size(t_baj_rel)); % Potencia térmica
    constante en bajada
34
35 %% === Ajuste con fminsearchbnd ===
36 params0 = [0.5, 0.01, 1e-3]; % [alpha, lambda, C]
37 lb = [0.01, 1e-4, 1e-5];
38 ub = [1, 1, 1e-1];
39 opts_fmin = optimset('Display','iter','MaxFunEvals',5000,'
    MaxIter',5000);
40
41 % === Subida ===
42 obj_sub = @(p) sqrt(mean((modelo_GL(t_sub_rel, P_sub, struct('
    alpha', p(1), 'lambda', p(2), 'C', p(3))) - T_sub).^2));
43 p_sub = fminsearchbnd(obj_sub, params0, lb, ub, opts_fmin);
44 Tth_sub = modelo_GL(t_sub_rel, P_sub, struct('alpha', p_sub(1),
    'lambda', p_sub(2), 'C', p_sub(3)));
45 T_fin_subida = Tth_sub(end);
46
47 % === Bajada ===
48 obj_baj = @(p) sqrt(mean(((T_fin_subida - modelo_GL(t_baj_rel,
    P_baj, struct('alpha', p(1), 'lambda', p(2), 'C', p(3)))) -
    T_baj).^2));
49 p_baj = fminsearchbnd(obj_baj, params0, lb, ub, opts_fmin);
50 Tth_baj = T_fin_subida - modelo_GL(t_baj_rel, P_baj, struct('
    alpha', p_baj(1), 'lambda', p_baj(2), 'C', p_baj(3)));
51
52 % === Reconstrucción global ===
53 Tth_total = [T_ini, Tth_sub, Tth_baj];
54
55 %% === Cálculo de errores ===
56 rmse_gl = sqrt(mean((T_exp - Tth_total).^2));
57 error_res = ((T_exp) - (Tth_total)).^2;
58 error_res_acum = cumsum(error_res);
59 fprintf('\nRMSE (Grünwald-Letnikov): %.4f K\n', rmse_gl);
60 fprintf('Subida: alpha = %.4f, lambda = %.4f, C = %.4e\n',
    p_sub(1), p_sub(2), p_sub(3));
61 fprintf('Bajada: alpha = %.4f, lambda = %.4f, C = %.4e\n',
    p_baj(1), p_baj(2), p_baj(3));
62
63 %% === Gráfica comparativa ===
64 figure(1);
65 subplot(3,1,1);
66 plot(t_total, T_exp, 'k', 'LineWidth', 1.2); hold on;
67 plot(t_total, Tth_total, '--m', 'LineWidth', 1.5); % modelo
    por tramos
68 legend('Experimental', sprintf('GL (RMSE=%.3f)', rmse_gl), '
    Location', 'best');
69 ylabel('$\theta(t)$ [K]', 'Interpreter','latex');
70 xlabel('Tiempo (s)');
71 title('Modelo GL vs Experimental');
72 grid on;
73

```

```

74 subplot(3,1,2);
75 plot(t_total, error_res, '--m');
76 ylabel('$S_{res}(t)$', 'Interpreter','latex'); grid on;
77 title('Residuos instantáneos');
78
79 subplot(3,1,3);
80 plot(t_total, error_res_acum, '--m');
81 ylabel('$\Sigma S_{res}$', 'Interpreter','latex');
82 xlabel('Tiempo (s)'); grid on;
83 title('Residuos acumulados');
84
85 %% === Cálculo de la respuesta adimensional y logarítmica ===
86 T_0 = 0; % temperatura inicial (offset ya restado)
87
88 % Ajuste en la subida
89 T_exp_sub = T2(301:551) - datos.TT_mean;
90 Tth_total_sub = Tth_total(301:551);
91
92 % Ajuste en la bajada
93 T_exp_baj = T2(1201:1451) - datos.TT_mean; % Ajuste de datos
94 Tth_total_baj = Tth_total(1201:1451); % Ajuste de datos
95
96 % Temperatura adimensional (normalizada)
97 Theta_exp_sub = (T_exp_sub - max(T_exp)) / (T_0 - max(T_exp));
98 % experimental
99 Theta_modelo_sub = (Tth_total_sub - max(Tth_total)) / (T_0 -
100 max(Tth_total)); % modelo
101
102 Theta_exp_baj = (T_exp_baj - min(T_exp)) / (max(T_exp) - min(
103 T_exp)); % experimental
104 Theta_modelo_baj = (Tth_total_baj - min(Tth_total)) / (max(
105 Tth_total) - min(Tth_total)); % modelo
106
107 %% === PARÁMETROS DEL SENSOR (para Fourier)
108 tau = 5.0; % Constante de tiempo (referencia)
109 tt = 0:0.1:5*tau; % Vector de tiempo hasta 5*tau
110 Fo = tt; % Número de Fourier (en este caso,
111 % adimensionalizado por tiempo)
112
113 alpha = 148 / (2330 * 700); % para silicio, en m2/s
114 L = 1e-3 / 6; % longitud característica
115 Fo = alpha * tt / L^2;
116
117 %% === GRÁFICA: SUBIDA ===
118 f2=figure(2);
119 f2.Position(1:4)=[188 100 320 500];
120 % Aseguramos que Fo y Theta_exp tengan la misma longitud
121 semilogy(Fo, Theta_exp_sub(1:length(tt)), 'k', 'LineWidth',
122 1.5); hold on; % Aseguramos que Fo y Theta_exp tengan la
123 % misma longitud
124 semilogy(Fo, Theta_modelo_sub(1:length(tt)), '--m', 'LineWidth'
125 , 1.5); % Aseguramos que Fo y Theta_modelo tengan la misma
126 % longitud

```

```

118 ylabel('$\log(\frac{\theta_t}{\theta_0})$', 'Interpreter', '
    latex', 'fontsize',16);
119 xlabel('$\mathrm{Fo}$', 'Interpreter','latex', 'fontsize',16);
120 xticks([0 2e4 4e4 6e4])
121 xticklabels({'0', '2{\times}10^4', '4{\times}10^4', '6{\times}
    }10^4'});
122 title('Fase de subida', 'Interpreter','latex');
123 legend('Experimental', 'Modelo GL', 'Location','northeast');
124 grid on;
125 xlim([0 6e4]);
126 ylim([1e-2 1]);
127
128
129 %% === GRÁFICA: BAJADA
130 f3=figure(3);
131 f3.Position(1:4)=[188 100 320 500];
132 % Aseguramos que Fo y Theta_exp tengan la misma longitud
133 semilogy(Fo, Theta_exp_baj(1:length(tt)), 'k', 'LineWidth',
    1.5); hold on; % Aseguramos que Fo y Theta_exp tengan la
    misma longitud
134 semilogy(Fo, Theta_modelo_baj(1:length(tt)), '--m', 'LineWidth'
    , 1.5); % Aseguramos que Fo y Theta_modelo tengan la misma
    longitud
135 ylabel('$\log(\frac{\theta_t}{\theta_0})$', 'Interpreter', '
    latex', 'fontsize',16);
136 xlabel('$\mathrm{Fo}$', 'Interpreter','latex', 'fontsize',16);
137 xticks([0 2e4 4e4 6e4])
138 xticklabels({'0', '2{\times}10^4', '4{\times}10^4', '6{\times}
    }10^4'});
139 title('Fase de bajada', 'Interpreter','latex');
140 legend('Experimental', 'Modelo GL', 'Location','northeast');
141 grid on;
142 xlim([0 6e4]);
143 ylim([1e-2 1]);
144
145 %% === LLAMADA A LA FUNCIÓN GRÜN WALD - LETNIKOV
146 function theta = modelo_GL(t, P, p)
147 % Solucion con esquema de GL optimizado
148 dt = t(2) - t(1);
149 N = length(t);
150 theta = zeros(1, N);
151
152 alpha = p.alpha;
153 lambda = p.lambda;
154 C = p.C;
155
156 max_k = min(300, N);
157 w = zeros(1, max_k);
158 w(1) = 1;
159 for k = 2:max_k
160 w(k) = (-1)^(k-1) * gamma(alpha + 1) / (gamma(k) * gamma(alpha
    - (k - 1) + 1));
161 end
162

```

```

163 % Evaluar theta paso a paso
164 for n = 2:N
165 GL_sum = 0;
166 k_max = min(n, max_k);
167 for k = 1:k_max
168 GL_sum = GL_sum + w(k) * theta(n - k + 1);
169 end
170 theta(n) = (P(n) - C * GL_sum / dt^alpha) / lambda;
171 end

```

Listing A.5: Código para representación de modelos fraccionales tipo GL.

### A.1.6. Código para representación de resultados a los ensayos en escáner.

```

1 clear; clc; warning('off', 'all');
2
3 % === Archivos a procesar ===
4 archivos = {'3_Test_0', '4_Test_3'}; % sin extensión .mat
5
6 % === Definir colores y etiquetas ===
7 colores = ["#000000", "#0072BD", "#D95319", "#EDB120", "#77
8 AC30", "#7E2F8E"];
9 labels = {'NTC1', 'NTC2', 'NTC3', 'NTC4', 'NTC5', 'NTC6'};
10
11 for idx = 1:numel(archivos)
12 nombre_archivo = archivos{idx};
13 load([nombre_archivo, '.mat']); % Variables: T1, T2...,
14 T_med_spline, tM, etc.
15
16 % === Vectorizar datos ===
17 T_raw = [T1(:), T2(:), T3(:), T4(:), T5(:), T6(:)];
18 T_med_spline = [T1_med_spline(:), T2_med_spline(:),
19 T3_med_spline(:), ...
20 T4_med_spline(:), T5_med_spline(:), T6_med_spline(:)];
21 T_mean = mean(T_raw(1:3000,:), 1);
22 max_dT = max(max(T_med_spline - T_mean));
23
24 %% === Figura 1: Temperaturas centradas spline ===
25 figure('Visible', 'off'); set(gcf, 'Position', [6.6, 189,
26 1350, 750]); grid on; hold on;
27 for i = 1:6
28 plot(tM, T_med_spline(:,i) - T_mean(i), 'Color', colores(i)
29 , 'LineWidth', 1.5);
30 end
31 legend(labels, 'Location', 'northeast', 'FontSize', 10);
32 ylabel('$\theta(t) \hspace{1mm} (K) $', 'Interpreter', 'latex',
33 'FontSize', 14);
34 xlim([0 length(tM)]); ylim([0, ceil(max_dT*1.05)]);
35 print(['TempCentrada_', nombre_archivo], '-dpng', '-r500');
36 close;

```

```

31     %% === Figura 2: Activación UV ===
32     figure('Visible', 'off'); set(gcf, 'Position', [6.6, 189,
33         1350, 750]);
34     ax1 = subplot(2,1,1); grid on; hold on;
35     for i = 1:6
36         plot(tM, T_med_spline(:,i) - T_mean(i), 'Color', colores(i)
37             , 'LineWidth', 1.5);
38     end
39     legend(labels, 'Location', 'northeast', 'FontSize', 10);
40     ylabel('$\theta(t) \hspace{1mm} (K) $', 'Interpreter', 'latex
41         ', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
42     xlim([0 length(tM)]); ylim([0, ceil(max_dT*1.05)]);
43
44     ax2 = subplot(2,1,2); hold on;
45     rectangle('Position', [0 0 300 0], 'FaceColor', '#0072BD');
46     rectangle('Position', [300 0 3300 1], 'FaceColor', '#0072BD'
47         );
48     rectangle('Position', [3600 0 length(tM) 0], 'FaceColor', '
49         #0072BD');
50     axis([0 length(tM) 0 1]); yticks([0 1]); yticklabels({'Off'
51         ', 'On'});
52     xlabel('t (s)', 'FontSize', 14); ylabel('Fuente UV', '
53         FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
54     ax1.Position = [0.13 0.4 0.775 0.575];
55     ax2.Position = [0.13 0.15 0.775 0.15];
56     print(['UV_', nombre_archivo], '-dpng', '-r500'); close;
57
58     %% === Figura 3: Errorbar ===
59     figure('Visible', 'off');
60     mean_Tmax = max(T_med_spline - T_mean, [], 1);
61     std_Tmax = std(T_med_spline - T_mean, 0, 1);
62     errorbar(1:6, mean_Tmax, std_Tmax, 'o', ...
63         'MarkerSize', 8, 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r', ...
64         'MarkerFaceColor', [0.3 0.3 0.3]);
65     xticks(1:6); xticklabels(labels); xtickangle(45);
66     ylabel('$\theta(t) \hspace{1mm} (K) $', 'Interpreter', 'latex
67         ', 'FontSize', 14);
68     title('Temperaturas máximas alcanzadas', 'Interpreter', '
69         none');
70     grid on;
71     print(['MaxTemp_', nombre_archivo], '-dpng', '-r500');
72     close;
73
74     %% === Figura 4: Temperaturas crudas + subgráfica ===
75     figure('Visible', 'off');
76     set(gcf, 'Position', [6.6, 189, 1000, 650]);
77     T_med = [T1_med(:), T2_med(:), T3_med(:), T4_med(:), T5_med
78         (:), T6_med(:)];
79     T_all = [T1(:), T2(:), T3(:), T4(:), T5(:), T6(:)];
80     T_mean_raw = mean(T_all(1:3000,:), 1);
81     max_dT_raw = max(max(T_med - T_mean_raw));
82     hold on;
83     for i = 1:6

```

```

73     plot(tM, T_med(:,i) - T_mean_raw(i), 'Color', colores(i), '
        LineWidth', 1.5);
74     end
75     title('Respuesta de los termistores', 'FontSize', 14);
76     legend({'NTC1 (simple)', 'NTC2 (0\Omega)', 'NTC3 (0\Omega x
        2)', ...
77           'NTC4 (0\Omega x 3)', 'NTC5 (Copper tube)', 'NTC6 (
        Copper sheet)'}), ...
78           'Position', [0.75 0.7 0.1 0.2]);
79     ylabel('$\theta(t) \hspace{1mm} (K) $', 'Interpreter', 'latex
        ', 'FontSize', 14);
80     xlabel('t (s)', 'FontSize', 14);
81     xlim([0, length(tM)]); ylim([0, ceil(max_dT_raw*1.05)]);
82     grid on;
83
84     % === Subgráfica de zoom ===
85     idx_zoom = 3500:3800;
86     ax_inset = axes('Position', [0.69 0.375 0.2 0.3]); hold on;
87     for i = 1:6
88         plot(tM(idx_zoom), (T_med(idx_zoom,i) - T_med(1,i)), 'Color
            ', colores(i), 'LineWidth', 1.5);
89     end
90     box on; grid on;
91
92     print(['Zoom_', nombre_archivo], '-dsvg'); close;
93     end

```

Listing A.6: Código para representación de resultados a los ensayos en escáner.

### A.1.7. Código para la validación de las aproximaciones mediante ecuaciones diferenciales fraccionales.

```

1  clear; clc;
2  h = 0.01;
3  t = 0:h:10;
4  x = t;
5
6  % Parámetros fraccionales
7  alpha = 0.5;
8  beta = 1;
9  k = 1;
10 N = length(t);
11
12 %% === Derivadas fraccionales para x(t) = t ===
13 % Derivada clásica
14 dx = diff(x) / h;
15 dt = t(1:end-1);
16
17 % Riemann-Liouville
18 fracc_RL = gamma(k+1)/gamma(k - alpha + 1) * t.^(k - alpha);
19

```

```

20 % Caputo
21 fracc_Caputo = zeros(size(t));
22 fracc_Caputo(t > 0) = gamma(k+1)/gamma(k - alpha + 1) * t(t >
    0).^(k - alpha);
23
24 % Grünwald-Letnikov
25 fracc_GL = zeros(1, N);
26 max_terms = 200;
27 coef = zeros(1, max_terms);
28 coef(1) = 1;
29 for j = 2:max_terms
30 coef(j) = coef(j-1) * (1 - (alpha + 1)/(j-1));
31 end
32 for n = 2:N
33 m = min(n-1, max_terms);
34 suma = 0;
35 for j = 1:m
36 suma = suma + coef(j) * x(n - j + 1);
37 end
38 fracc_GL(n) = suma / h^alpha;
39 end
40
41 % Mittag-Leffler (1 parámetro)
42 mlf1 = zeros(size(t));
43 for i = 1:length(t)
44 mlf1(i) = sum(t(i).^(0:50) ./ gamma(1 + alpha*(0:50)));
45 end
46
47 %% === Gráfico para x(t) = t ===
48 figure(1); clf;
49 plot(t, x, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
50 plot(dt, dx, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
51 plot(t, fracc_RL, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
52 plot(t, fracc_Caputo, 'm:', 'LineWidth', 1.5);
53 plot(t, fracc_GL, 'g-.', 'LineWidth', 1.5);
54 plot(t, mlf1, 'c--', 'LineWidth', 1.5);
55 legend('x(t)', 'Clásica: dx/dt', ...
56 'RL: D^{0.5}x', 'Caputo: D^{0.5}x', 'GL: D^{0.5}x', ...
57 'Mittag-Leffler E_\alpha(t)', ...
58 'Location', 'northwest');
59 grid on; xlim([0 3]); ylim([0 3]);
60 xlabel('t'); ylabel('D^\alpha x(t)');
61 title('Comparación de derivadas fraccionales para x(t) = t');
62
63 %% === Comparación para función constante x(t) = 1 ===
64 x_const = ones(1, N);
65 dx_const = zeros(1, N);
66 RL_const = t.^(-alpha) / gamma(1 - alpha);
67 Caputo_const = zeros(1, N);
68
69 % GL para constante
70 fracc_GL_const = zeros(1, N);
71 for n = 2:N
72 m = min(n-1, max_terms);

```

```

73 suma = 0;
74 for j = 1:m
75 suma = suma + coef(j); %  $x[n-k] = 1$ 
76 end
77 fracc_GL_const(n) = suma / h^alpha;
78 end
79
80
81
82 %% === Gráfico para  $x(t) = 1$  ===
83 figure(2); clf;
84 plot(t, x_const, 'k', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'x(t) =
      1'); hold on;
85 plot(t, dx_const, 'r--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', '
      Clásica dx/dt');
86 plot(t, RL_const, 'b-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'RL:  $D
      ^{0.5}x$ ');
87 plot(t, Caputo_const, 'm:', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', '
      Caputo:  $D^{0.5}x$ ');
88 plot(t, fracc_GL_const, 'g-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', '
      GL:  $D^{0.5}x$ ');
89 plot(t, mlf1, 'c--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'Mittag-
      Leffler  $E_{\alpha}(t)$ ');
90 legend('Location', 'northeast'); grid on;
91 xlim([0.01 5]); ylim([-0.5 3]);
92 xlabel('t'); ylabel('D^alpha x(t)');
93 title('Comparación de derivadas fraccionales para  $x(t) = 1$ ');

```

Listing A.7: Código para la representación de las aproximaciones mediante ecuaciones diferenciales fraccionales.

## A.2. Java.

### A.2.0.1. Código DaTEMP.

```

1 import java.awt.EventQueue;
2 import java.awt.Font;
3 import javax.swing.JFrame;
4 import javax.swing.JMenuItem;
5 import javax.swing.JOptionPane;
6 import javax.swing.JPanel;
7 import javax.swing.JPopupMenu;
8 import javax.swing.JProgressBar;
9 import java.awt.GridLayout;
10 import java.awt.Toolkit;
11 import java.awt.datatransfer.Clipboard;
12 import java.awt.datatransfer.StringSelection;
13 import java.awt.datatransfer.Transferable;
14 import java.awt.event.ActionEvent;
15 import java.awt.event.ActionListener;
16 import java.awt.event.InputEvent;

```

```
17 import java.awt.event.KeyEvent;
18 import java.awt.event.MouseAdapter;
19 import java.awt.event.MouseEvent;
20 import java.util.Calendar;
21 import java.util.StringTokenizer;
22 import java.util.logging.Level;
23 import java.util.logging.Logger;
24 import javax.swing.AbstractAction;
25 import javax.swing.GroupLayout;
26 import javax.swing.GroupLayout.Alignment;
27 import javax.swing.Icon;
28 import javax.swing.ImageIcon;
29 import javax.swing.JButton;
30 import javax.swing.JFileChooser;
31 import javax.swing.JScrollPane;
32 import javax.swing.JSeparator;
33 import javax.swing.JTable;
34 import javax.swing.JTextArea;
35 import javax.swing.JTextPane;
36 import javax.swing.table.DefaultTableModel;
37 import javax.swing.table.TableColumnModel;
38 import org.apache.poi.hssf.usermodel.HSSFCell;
39 import org.apache.poi.hssf.usermodel.HSSFRow;
40 import org.apache.poi.hssf.usermodel.HSSFSheet;
41 import org.apache.poi.hssf.usermodel.HSSFWorkbook;
42 import org.jfree.chart.ChartFactory;
43 import org.jfree.chart.ChartPanel;
44 import org.jfree.chart.JFreeChart;
45 import org.jfree.chart.axis.ValueAxis;
46 import org.jfree.chart.plot.PlotOrientation;
47 import org.jfree.chart.plot.XYPlot;
48 import org.jfree.data.xy.XYSeries;
49 import org.jfree.data.xy.XYSeriesCollection;
50 import com.panamahitek.ArduinoException;
51 import com.panamahitek.PanamaHitek_Arduino;
52 import jssc.SerialPortException;
53 import javax.swing.border.BevelBorder;
54 import javax.swing.border.MatteBorder;
55 import javax.swing.border.SoftBevelBorder;
56 import java.awt.BorderLayout;
57 import java.awt.Color;
58 import javax.swing.JToolBar;
59 import javax.swing.KeyStroke;
60 import javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement;
61
62 public class main {
63
64     private JFrame frame;
65     private JTable tablaDatos;
66     private JPanel mainPanel;
67     private JProgressBar pB;
68     private JTextPane info;
69     private javax.swing.JScrollPane panelDatos;
70     private JPopupMenu popUp;
```

```
71 private JMenuItem cortarpop, copiarpop, pegarpop;
72 private JSeparator separador = new JSeparator();
73 private StringSelection ss;
74
75 private JButton iniciar = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\start.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java.awt
    .Image.SCALE_SMOOTH)));
76 private JButton documento = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\documento.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java
    .awt.Image.SCALE_SMOOTH)));
77 private JButton exportar = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\excel.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java.awt
    .Image.SCALE_SMOOTH)));
78 private JButton temperatura = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\temp3.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java.awt
    .Image.SCALE_SMOOTH)));
79 private JButton luminosidad = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\luz.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java.awt
    .Image.SCALE_SMOOTH)));
80 private JButton presion = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\press1.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java
    .awt.Image.SCALE_SMOOTH)));
81 private JButton salir = new JButton(new ImageIcon(new
    ImageIcon("C:\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\salir.png").getImage().getScaledInstance(30, 30, java.awt
    .Image.SCALE_SMOOTH)));
82
83 JFreeChart GraficaTemp;
84 JFreeChart GraficaLuz;
85 JFreeChart GraficaPres;
86
87 //SENTENCIAS PARA LOS GRÁFICOS EN TIEMPO REAL
88 final XYSeries TempTh_1 = new XYSeries("T_th1");
89 final XYSeries TempTh_2 = new XYSeries("T_th2");
90 final XYSeries RLight = new XYSeries("R_light");
91 final XYSeries PressChamber = new XYSeries("P_chamber");
92
93 final XYSeriesCollection ColeccionTemp = new
    XYSeriesCollection();
94 final XYSeriesCollection ColeccionLuz = new
    XYSeriesCollection();
95 final XYSeriesCollection ColeccionPres = new
    XYSeriesCollection();
96
97 DefaultTableModel modelo;
98 Calendar Calendario = Calendar.getInstance();
99
100 String datos = "";
```

```

101 String convertidos = "";
102 String Humedad = "";
103 String valorInicial = "";
104
105 public String Tth_1 = "";
106 public String Tth_2 = "";
107 public String Luz = "";
108 public String Press = "";
109 public String Humd = "";
110
111 public StringTokenizer str;
112
113 double p1=.5507;
114 double p2=17.69;
115 double p3=-22.65;
116 double factor1=0.125/1000;
117 double Tth1_real;
118 double Tth2_real;
119 double R_luz;
120 double Pres_real;
121 double H_real;
122 double ajuste=0.15; //parámetro de calibración
123
124 int valorTemp;
125 int valorLuz;
126 int valorPres;
127
128 int Lecturas = 0;
129 int Lecturas_3 = 0;
130 int desfaseEje = 20;
131
132 PanamaHitek_Arduino ino = new PanamaHitek_Arduino();
133 PanamaHitek_Arduino ino_2 = new PanamaHitek_Arduino();
134 //PanamaHitek_Arduino ino_3 = new PanamaHitek_Arduino();
135
136 int Slot = 1;
137
138 private static boolean inicio = false;
139 private static int counter = 0;
140 private int points = 1000;
141 private String puerto_1 = "COM3"; #Definir puerto principal
142
143 //----- SUBROUTINA A EJECUTAR POR ARDUINO 1
-----
144
145 jssc.SerialPortEventListener evento = new jssc.
SerialPortEventListener(){
146     public void serialEvent(jssc.SerialPortEvent spe){
147         try{
148             if(ino.isMessageAvailable()){
149                 Lecturas += 1;
150                 datos = ino.printMessage();
151

```

```

152     str = new StringTokenizer(datos.toString(), ",");
153     while(str.hasMoreTokens()){
154         Tth_1 = str.nextToken();
155         Tth_2 = str.nextToken();
156         Luz = str.nextToken();
157         Press = str.nextToken();
158     }
159
160     Tth1_real= Math.pow(p1*(factor1*(Double.parseDouble(
161         Tth_1))),2)+p2*factor1*(Double.parseDouble(Tth_1)
162         )+p3;
163     Tth2_real= Math.pow(p1*(factor1*(Double.parseDouble(
164         Tth_2))),2)+p2*factor1*(Double.parseDouble(Tth_2)
165         )+p3+(ajuste);
166     R_luz = Double.parseDouble(Luz);
167     Pres_real = Double.parseDouble(Press);
168
169     convertidos = Double.toString(Tth1_real).concat(",").
170         concat(Double.toString(Tth2_real)).concat(",").
171         concat(Double.toString(R_luz)).concat(",").concat
172         (Double.toString(Pres_real));
173
174     if(Lecturas == 6){
175         TempTh_1.add(counter, (Tth1_real));
176         TempTh_2.add(counter, (Tth2_real));
177         RLight.add(counter, (R_luz));
178         PressChamber.add(counter, (Pres_real));
179         jTableUpdate();
180     }if(Lecturas >= 6){
181         TempTh_1.add(counter, (Tth1_real));
182         TempTh_2.add(counter, (Tth2_real));
183         RLight.add(counter, (R_luz));
184         PressChamber.add(counter, (Pres_real));
185         jTableUpdate();
186         incCounter();
187     }
188     }
189     }catch (jssc.SerialPortException|com.panamahitek.
190     ArduinoException e){
191         e.printStackTrace();
192     }catch (InterruptedException e){
193         e.printStackTrace();
194     }
195     };
196
197     public void incCounter() throws com.panamahitek.
198     ArduinoException, SerialPortException{ counter += 1;
199     if (counter == points) { //Finalizar medición
200         ino.killArduinoConnection();
201         javax.swing.JOptionPane.showMessageDialog(null, "Medición
202             finalizada");
203     }
204     pB.setValue(counter);

```

```
196     }
197
198     public void jTableUpdate() throws InterruptedException{
199         String Output = "";
200         String hora = Calendario.get(Calendar.HOUR_OF_DAY) + "";
201         String minuto = Calendario.get(Calendar.MINUTE) + "";
202         String segundos = Calendario.get(Calendar.SECOND) + "";
203
204         if(Integer.parseInt(hora) < 10){
205             hora = "0" + hora;
206         }if(Integer.parseInt(minuto) < 10){
207             minuto = "0" + minuto;
208         }if(Integer.parseInt(segundos) < 10){
209             segundos = "0" + segundos;
210         }
211
212         Output = hora + ":" + minuto + ":" + segundos;
213         Calendario = Calendario.getInstance();
214         modelo.addRow(new Object[] { Output, convertidos});
215     }
216
217     public void FicheroExcel(String input){
218         HSSFWorkbook libro = new HSSFWorkbook();
219         HSSFSheet hoja = libro.createSheet();
220         HSSFRow fila = hoja.createRow(0);
221         HSSFCell celda = fila.createCell(0);
222         celda.setCellValue("DATA LOGGING");
223
224         fila = hoja.createRow(1);
225         celda = fila.createCell(0);
226         celda.setCellValue("TIME");
227         celda = fila.createCell(1);
228         celda.setCellValue("Tth_1, Tth_2, Luz, Pres");
229
230         for(int i = 0; i <= modelo.getRowCount() - 1; i++){
231             fila = hoja.createRow(i + 2);
232             for(int j = 0; j < 2; j++){
233                 celda = fila.createCell(j);
234                 celda.setCellValue(tablaDatos.getValueAt(i, j).toString
235                     ());
236             }
237         }try{
238             java.io.FileOutputStream Fichero = new java.io.
239                 FileOutputStream(input);
240             libro.write(Fichero);
241             Fichero.close();
242         }catch (Exception e) {
243             e.printStackTrace();
244         }
245     }
246
247     private JToolBar getToolBar(){
248         JToolBar barraBotones = new JToolBar();
```

```
247     barraBotones.setFont(new Font("Century Gothic", Font.PLAIN,
248         14));
249     barraBotones.setBounds(12, 13, 321, 39);
250
251     barraBotones.add(iniciar);
252     barraBotones.add(documento);
253     barraBotones.add(exportar);
254     barraBotones.add(presion);
255     barraBotones.add(temperatura);
256     barraBotones.add(luminosidad);
257     barraBotones.add(salir);
258
259     return barraBotones;
260 }
261
262 private JProgressBar getProgressBar(){
263     pB = new JProgressBar();
264     pB.setToolTipText("");
265     pB.setBounds(459, 13, 261, 39);
266
267     pB.setMinimum(0);
268     pB.setMaximum(points);
269     pB.setStringPainted(true);
270
271     return pB;
272 }
273
274 private void iconoExportar(ActionEvent evt){
275     JFileChooser Ventana = new JFileChooser();
276     String ruta = "";
277
278     try{
279         if(Ventana.showSaveDialog(null) == 0){
280             ruta = Ventana.getSelectedFile().getAbsolutePath() + ".
281                 xls";
282             FicheroExcel(ruta);
283         }
284     }catch (Exception ex) {
285         ex.printStackTrace();
286     }
287 }
288
289 private void areaMousePressedLista(MouseEvent ev){
290     boolean textoSeleccionado=info.getSelectedText()!=null;
291     cortarpop.setEnabled(textoSeleccionado);
292     copiarpop.setEnabled(textoSeleccionado);
293
294     ss = new StringSelection(info.getSelectedText());
295
296     if(copiarpop.isEnabled()==true){
297         Clipboard clipboard = Toolkit.getDefaultToolkit().
298             getSystemClipboard();
299         clipboard.setContents(ss, ss);
300     }
```

```
298     }
299
300     private void areaMousePressed(MouseEvent ev){
301         boolean textoSeleccionado=info.getSelectedText()!=null;
302         cortarpop.setEnabled(textoSeleccionado);
303         copiarpop.setEnabled(textoSeleccionado);
304
305         if(ev.getButton()==MouseEvent.BUTTON3){
306             popUp.show(info, ev.getX(), ev.getY());
307         }
308     }
309
310
311     public static void main(String[] args){
312         EventQueue.invokeLater(new Runnable(){
313
314             public void run(){
315                 try{
316                     main window = new main();
317                     window.frame.setVisible(true);
318                 }catch (Exception e){
319                     e.printStackTrace();
320                 }
321             }
322         });
323     }
324
325
326     public main(){
327         initialize();
328         modelo = ((DefaultTableModel)tablaDatos.getModel());
329         try{
330             ino.arduinoRXTX(puerto_1, 9600, evento);
331             //ino_2.arduinoRXTX("COM3", 9600, evento_2);
332         }catch(Exception ex){
333             Logger.getLogger(source.class.getName()).log(Level.SEVERE
334                 , null, ex);
335         }
336     }
337
338     private void initialize(){
339         frame = new JFrame();
340         frame.setFont(new Font("Bodoni MT Poster Compressed", Font.
341             PLAIN, 14));
342         frame.setIconImage(Toolkit.getDefaultToolkit().getImage("C
343             :\\eclipse-workspace\\DaTemp_v4\\images\\temperature.
344             png"));
345         frame.setTitle("DaTemp");
346         frame.setBounds(100, 100, 750, 450);
347         frame.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
348         frame.getContentPane().setLayout(new GridLayout(0, 1, 0, 0)
349             );
350
351         mainPanel = new JPanel();
```

```
347     frame.getContentPane().add(mainPanel);
348
349     JScrollPane panelDatos = new JScrollPane();
350     panelDatos.setViewportBorder(new SoftBevelBorder(
351         BevelBorder.LOWERED, null, null, null, null));
352
353     tablaDatos = new JTable();
354     tablaDatos.setBorder(new SoftBevelBorder(BevelBorder.
355         LOWERED, null, null, null, null));
356     tablaDatos.setFont(new Font("Century Gothic", 0, 16));
357     tablaDatos.setModel(new DefaultTableModel(
358         new Object[0][],
359         new String[] {
360             "Tiempo", "Tth_1", "Tth_2", "Luz", "Pres" }));
361     panelDatos.setViewportViewView(tablaDatos);
362
363     JPanel panelBotonera = new JPanel();
364     panelBotonera.setBorder(new SoftBevelBorder(BevelBorder.
365         LOWERED, null, null, null, null));
366     panelBotonera.setLayout(null);
367
368     JToolBar toolBar = getToolBar();
369     panelBotonera.add(toolBar);
370
371     JProgressBar progressBar = getProgressBar();
372     panelBotonera.add(progressBar);
373
374     GroupLayout gl_mainPanel = new GroupLayout(mainPanel);
375     gl_mainPanel.setHorizontalGroup(
376         gl_mainPanel.createParallelGroup(Alignment.LEADING)
377         .addComponent(panelBotonera, GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
378             732, Short.MAX_VALUE)
379         .addGroup(gl_mainPanel.createSequentialGroup())
380         .addComponent(panelDatos, GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 732,
381             Short.MAX_VALUE)
382         .addGap(12))
383     );
384     gl_mainPanel.setVerticalGroup(
385         gl_mainPanel.createParallelGroup(Alignment.LEADING)
386         .addGroup(gl_mainPanel.createSequentialGroup())
387         .addComponent(panelDatos, GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 331,
388             GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
389         .addPreferredGap(ComponentPlacement.RELATED)
390         .addComponent(panelBotonera, GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
391             65, GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
392         .addContainerGap(244, Short.MAX_VALUE)
393     );
394     mainPanel.setLayout(gl_mainPanel);
395
396     documento.setToolTipText("Valores iniciales");
397     exportar.setToolTipText("Exportar a Excel");
398     temperatura.setToolTipText("Gráfico de temperatura");
399     presion.setToolTipText("Gráfico de presión");
400     luminosidad.setToolTipText("Gráfico de luminosidad");
```

```
394 salir.setToolTipText("Salir del programa");
395
396 iniciar.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener
397     ){
398     public void actionPerformed(ActionEvent evt) {
399         inicio = true;
400     }
401 });
402
403 documento.addActionListener(new java.awt.event.
404     ActionListener(){
405     public void actionPerformed(ActionEvent evt){
406         JFrame Ventana = new JFrame("Valores Iniciales");
407         info = new JTextPane();
408
409         popUp = new JPopupMenu();
410         pegarpop=new JMenuItem("Pegar");
411         copiarpop=new JMenuItem("Copiar");
412         cortarpop=new JMenuItem("Cortar");
413
414         copiarpop.setAccelerator(KeyStroke.getKeyStroke(
415             KeyEvent.VK_C, InputEvent.CTRL_MASK));
416         popUp.add(copiarpop);
417         popUp.add(separador);
418
419         cortarpop.setAccelerator(KeyStroke.getKeyStroke(
420             KeyEvent.VK_X, InputEvent.CTRL_MASK));
421         popUp.add(cortarpop);
422         popUp.add(separador);
423
424         pegarpop.setAccelerator(KeyStroke.getKeyStroke(KeyEvent
425             .VK_V, InputEvent.CTRL_MASK));
426         popUp.add(pegarpop);
427
428         copiarpop.addMouseListener(new MouseAdapter(){
429             public void mousePressed(MouseEvent evt){
430                 areaMousePressedLista(evt);
431             }
432         });
433
434         info.addMouseListener(new MouseAdapter(){
435             public void mousePressed(MouseEvent evt){
436                 areaMousePressed(evt);
437             }
438         });
439
440         info.setFont(new Font("Century Gothic", Font.PLAIN, 14)
441             );
442         valorInicial =
443         "Temperatura inicial del termistor Tth1: "+Double.
444             toString(Tth1_real)+" °C\n"+
445         "Temperatura inicial del termistor Tth2: "+Double.
446             toString(Tth2_real)+" °C\n"+
```

```
439         "Humedad inicial del interior de la cámara: "+Double.  
440             toString(H_real)+"\n"+  
441         "Luminosidad inicial del interior de la cámara: "+  
442             Double.toString(R_luz)+"\n"+  
443         "Presión inicial del interior de la cámara: "+Double.  
444             toString(Pres_real);  
445         info.setText(valorInicial);  
446  
447         Ventana.getContentPane().add(info);  
448         Ventana.pack();  
449         Ventana.setVisible(true);  
450         Ventana.setBounds(100, 100, 600, 400);  
451         Ventana.setDefaultCloseOperation(Ventana.  
452             DISPOSE_ON_CLOSE);  
453     }  
454 }  
455 });  
456  
457 exportar.addActionListener(new java.awt.event.  
458     ActionListener(){  
459     public void actionPerformed(ActionEvent evt){  
460         main.this.iconoExportar(evt);  
461     }  
462 });  
463  
464 temperatura.addActionListener(new java.awt.event.  
465     ActionListener(){  
466     public void actionPerformed(ActionEvent arg0){  
467         ColeccionTemp.addSeries(TempTh_2);  
468         ColeccionTemp.addSeries(TempTh_1);  
469  
470         GraficaTemp = ChartFactory.createXYLineChart("Tracking  
471             Temperature","Time", "Temperature", ColeccionTemp,  
472             PlotOrientation.VERTICAL, true, true, false);  
473  
474         XYPlot xyPlot = (XYPlot) GraficaTemp.getPlot();  
475         ValueAxis yAxis = xyPlot.getRangeAxis();  
476         yAxis.setRange(5, 60);  
477  
478         ChartPanel Panel = new ChartPanel(GraficaTemp);  
479         JFrame Ventana = new JFrame("Temperatura");  
480         Ventana.getContentPane().add(Panel);  
481         Ventana.pack();  
482         Ventana.setVisible(true);  
483         Ventana.setDefaultCloseOperation(Ventana.  
484             DISPOSE_ON_CLOSE);  
485     }  
486 });  
487  
488 presion.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener(  
489     ){  
490     public void actionPerformed(ActionEvent arg0){
```

```

484     ColeccionPres.addSeries(PressChamber);
485     GraficaPres = ChartFactory.createXYLineChart("Tracking
         Pressure","Time", "Pressure", ColeccionPres,
486     PlotOrientation.VERTICAL, true, true, false);
487
488     XYPlot xyPlot = (XYPlot) GraficaPres.getPlot();
489     ValueAxis yAxis = xyPlot.getRangeAxis();
490     yAxis.setRange(-110, 110);
491
492     ChartPanel Panel = new ChartPanel(GraficaPres);
493     JFrame Ventana = new JFrame("Presión");
494     Ventana.getContentPane().add(Panel);
495     Ventana.pack();
496     Ventana.setVisible(true);
497     Ventana.setDefaultCloseOperation(Ventana.
         DISPOSE_ON_CLOSE);
498 }
499 });
500
501 luminosidad.addActionListener(new java.awt.event.
     ActionListener(){
502     public void actionPerformed(ActionEvent arg0){
503         ColeccionLuz.addSeries(RLight);
504         GraficaLuz = ChartFactory.createXYLineChart("Tracking
         LDR","Time", "LDR", ColeccionLuz,
505     PlotOrientation.VERTICAL, true, true, false);
506
507     XYPlot xyPlot = (XYPlot) GraficaLuz.getPlot();
508     ValueAxis yAxis = xyPlot.getRangeAxis();
509     yAxis.setRange(0, 800);
510
511     ChartPanel Panel = new ChartPanel(GraficaLuz);
512     JFrame Ventana = new JFrame("Luminosidad");
513     Ventana.getContentPane().add(Panel);
514     Ventana.pack();
515     Ventana.setVisible(true);
516     Ventana.setDefaultCloseOperation(Ventana.
         DISPOSE_ON_CLOSE);
517 }
518 });
519
520 salir.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener()
     {
521     public void actionPerformed(ActionEvent evt){
522         System.exit(0);
523     }
524 });
525
526 }
527 }

```

Listing A.8: Programa de control y adquisición de datos.

## A.3. Python.

### A.3.0.1. Código DaTEMP.

```

1  import serial
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import matplotlib.animation as animation
4  import numpy as np
5  from datetime import datetime
6
7  # === CONFIGURACIÓN ===
8  PORT_MAIN = 'COM4' #Definir puerto principal
9  PORT_CONTROL = 'COM8' #Definir puerto de control
10 BAUDRATE = 9600
11 OUTPUT_FILE = 'nombre_del_fichero.txt'
12 TEST_TYPE = 'C' # Opciones: 'A', 'B', 'C'
13
14 # === PARÁMETROS DE CONVERSIÓN ===
15 P1, P2, P3 = 0.5507, 17.69, -22.65
16 FACTOR = 0.125 / 1000
17
18 # === INICIALIZACIÓN DE GRÁFICA ===
19 fig, ax = plt.subplots()
20 xs, ys1, ys2, ys3, ys4 = [], [], [], [], []
21
22 # === EVENTOS PROGRAMADOS PARA TEST C ===
23 eventos_C = {
24     14000: b'5', 14060: b'6', 17660: b'5', 17720: b'6',
25     21320: b'5', 21380: b'6', 24980: b'5', 25040: b'6',
26     28640: b'5', 28700: b'6', 32300: b'5', 32360: b'6',
27     35960: b'3', 39560: b'4', 43500: b'4'
28 }
29
30 # === FUNCIONES ===
31 def convertir(x):
32     return (P1 * (FACTOR * x)) ** 2 + P2 * FACTOR * x + P3
33
34 def configurar_grafico():
35     ax.clear()
36     ax.plot(xs, ys1, label='T1')
37     ax.plot(xs, ys2, label='T2')
38     ax.plot(xs, ys3, label='T3')
39     ax.plot(xs, ys4, label='Tamb')
40     ax.set_title('DaTemp')
41     ax.set_xlabel('time (s)')
42     ax.set_ylabel('T (°C)')
43     ax.legend(loc='upper left')
44     plt.xticks(rotation=45)
45     plt.subplots_adjust(bottom=0.30)
46
47 def controlar_ventilador(i, ser_ctrl):
48     if TEST_TYPE == 'C' and i in eventos_C:
49         ser_ctrl.write(eventos_C[i])

```

```

50
51 # === LECTURA Y ANIMACIÓN ===
52 def animate(i):
53     try:
54         linea = ser.readline().decode().strip()
55         valores = list(map(float, linea.split(',')))
56         if len(valores) != 4:
57             return
58         t1_raw, t2_raw, t3_raw, t4_raw = valores
59
60         T1 = convertir(t1_raw) - convertir(t4_raw)
61         T2 = convertir(t2_raw) - convertir(t4_raw)
62         T3 = convertir(t3_raw) - convertir(t4_raw)
63         Tamb = convertir(t4_raw)
64
65         xs.append(i)
66         ys1.append(T1)
67         ys2.append(T2)
68         ys3.append(T3)
69         ys4.append(Tamb)
70
71         # Escribir en archivo
72         with open(OUTPUT_FILE, 'a') as f:
73             f.write(f"{T1 + Tamb},{T2 + Tamb},{T3 + Tamb},{Tamb}\n")
74
75         configurar_grafico()
76         controlar_ventilador(i, ser_2)
77
78         if TEST_TYPE == 'C' and i >= 43500:
79             ser_2.write(b'4')
80             ser.close()
81             ser_2.close()
82             plt.close('all')
83
84         except Exception as e:
85             print(f"Error en lectura: {e}")
86
87     # === INICIO ===
88     ser = serial.Serial(PORT_MAIN, BAUDRATE)
89     ser_2 = serial.Serial(PORT_CONTROL, BAUDRATE)
90
91     print("[INFO] Adquisición iniciada. Cerrando con Ctrl+C o
92           al finalizar test.")
93     ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, interval=1000)
94     plt.show()

```

Listing A.9: Lectura de datos de termistor en Python.

### A.3.0.2. Código para agrupación y visualización de imágenes en paneles con escala logarítmica.

```
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.gridspec as gridspec
4 from PIL import Image
5 import os
6
7 # Ruta a las imágenes
8 rutaFiguras = 'ruta/carpeta/proyecto'
9
10 # Definir colores y claves
11 color_map = {
12     'Azul': 'B',
13     'Rojo': 'R',
14     'Verde': 'G',
15     'Violeta': 'P'
16 }
17 colores = ['Azul', 'Rojo', 'Verde', 'Violeta']
18 fases = ['subida', 'bajada']
19 fluidos = ['Aire', 'Helio', 'Sintético', 'Vacío']
20
21 # Función para buscar archivos correspondientes
22 def buscar_archivos(color, fase):
23     return [
24         next(
25             (f for f in os.listdir(rutaFiguras)
26              if f.startswith(f"{color}_{fluido}") and f"log_{fase}" in f),
27             None
28         )
29         for fluido in fluidos
30     ]
31
32 for color in colores:
33     for fase in fases:
34         archs = buscar_archivos(color, fase)
35         # Comprueba existencia de todos los archivos
36         if None in archs:
37             print(f'Archivos faltantes para {color}-{fase}:', archs)
38             continue
39
40 # Crear figura y ejes 2x2
41 fig = plt.figure(figsize=(8, 8), dpi=600)
42 gs = gridspec.GridSpec(2, 2, wspace=0, hspace=0)
43
44 for i, archivo in enumerate(archs):
45     img = Image.open(os.path.join(rutaFiguras, archivo))
46     row, col = divmod(i, 2)
47     ax = fig.add_subplot(gs[row, col])
48     ax.imshow(img)
49     ax.axis('off')
50
51 plt.subplots_adjust(left=0, right=1, top=1, bottom=0, wspace=0,
52                    hspace=0)
53
54 # Nombre de salida
55 suf_fase = 'subida' if fase == 'subida' else 'bajada'
```

```
55 suf_color = color_map[color]
56 fname = f'panels_log_{suf_fase}_{suf_color}.png'
57
58 fig.savefig(fname, dpi=800, bbox_inches='tight', pad_inches=0)
59 plt.close()
60
61 print(f'Guardado: {fname}')
```

Listing A.10: Visualización de paneles con escala logarítmica.

## Apéndice B

# Software de control y adquisición de datos

*The best way to predict the future is to invent it.*

Alan Kay

En esta sección se detalla el software desarrollado específicamente para el sistema de control y adquisición de datos utilizado en los experimentos de caracterización térmica con termistores NTC. Se incluyen capturas de pantalla de la interfaz de usuario y un recorrido por las distintas ventanas y utilidades de la aplicación, describiendo en cada caso las principales funcionalidades implementadas para la monitorización, registro y procesamiento en tiempo real de las señales térmicas captadas por los sensores.

### **B.1. DatEmp.**

Al abrir el ejecutable, la interfaz inicial permite seleccionar entre los dos modos de operación disponibles: TIC Sensor y Chamber tracking. Cada botón está diseñado para activar rutinas específicas de medición, visualización y adquisición de datos asociadas a los ensayos llevados a cabo. El diseño se enfoca en facilitar la interacción inicial del usuario con el sistema.

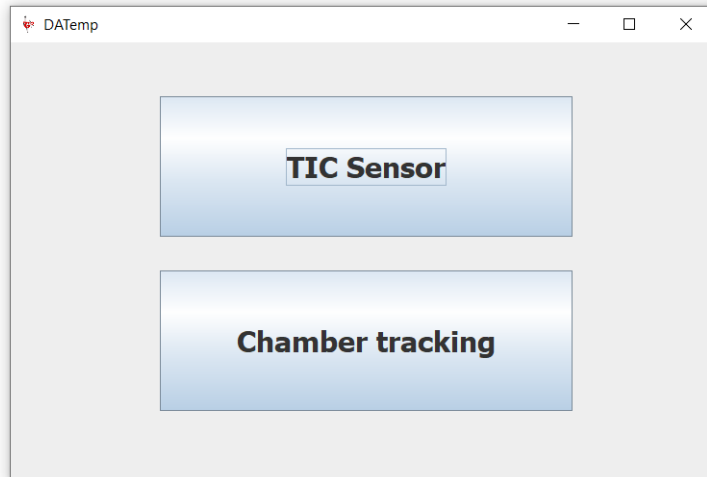


Figura B.1: Pantalla principal.

La ventana principal muestra una tabla con las variables registradas: tiempo (columna 1), temperatura del termistor activo ( $T_{th_1}$ ), temperatura ambiente corregida ( $T_{th_{amb}}$ ), y el estado del obturador que regula el paso del haz láser. La interfaz gráfica dispone además de una barra de progreso que indica el estado de la adquisición en tiempo real. En la parte inferior se presenta un conjunto de iconos que permiten ejecutar funciones como el inicio y finalización de la medición, la exportación de datos a Excel, la generación de gráficos y la visualización de condiciones iniciales. Al situar el cursor sobre cada icono, se despliega automáticamente una breve descripción de su funcionalidad.

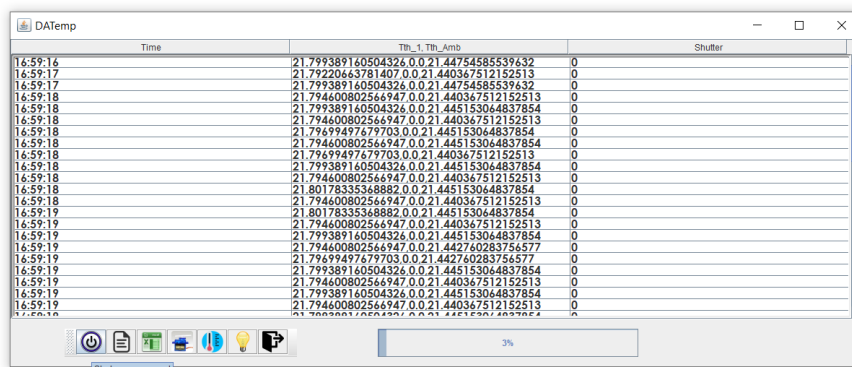


Figura B.2: Pantalla de inicio de medición.

El segundo icono permite abrir una ventana emergente que muestra las condiciones iniciales antes de comenzar la medición. Estos valores de referencia son especialmente útiles para validar el punto de partida de la simulación térmica, así como para verificar el estado de equilibrio térmico inicial. La información presentada incluye tanto la temperatura del sensor activo ( $T_1$ ) como la temperatura ambiente corregida ( $T_{th,amb}$ ).

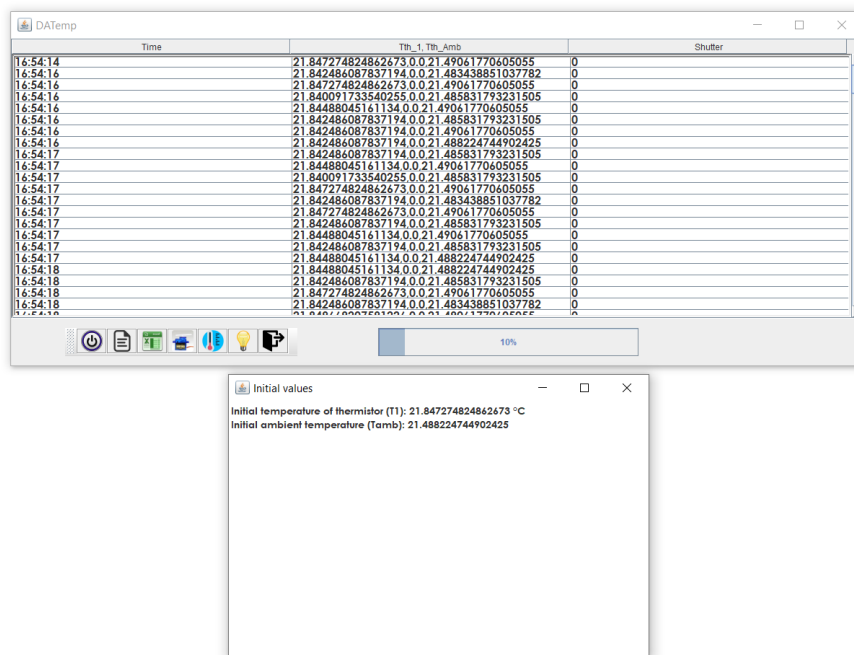


Figura B.3: Ventana de valores iniciales.

Con independencia de los iconos que se activen, la ventana principal de *DatEmp* muestra en tiempo real la adquisición de datos correspondientes a la temperatura del termistor activo ( $T_{th1}$ ) y a la temperatura ambiente ( $T_{th,amb}$ ).

No obstante, si se desea visualizar con mayor detalle la evolución térmica, al seleccionar el icono *Tracking Temperature*, se despliega en paralelo un gráfico dinámico generado con *JFreeChart*, que permite monitorizar en tiempo real las variaciones de temperatura registradas por los termistores.

Time	Th_1	Th_Amb	Shutter
17:11:43	21.818542971341934	0.021469081396896726	0
17:11:45	21.813754461769307	0.021464295654667325	0
17:11:45	21.818542971341934	0.021469081396896726	0
17:11:45	21.813754461769307	0.021466688521043423	0
17:11:45	21.81614871181702	0.021466688521043423	0
17:11:45	21.81614871181702	0.021466688521043423	0
17:11:45	21.813754461769307	0.021469081396896726	0
17:11:45	21.813754461769307	0.021469081396896726	0
17:11:45	21.813754461769307	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021471474282227227	0
17:11:46	21.8136022119881	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021471474282227227	0
17:11:46	21.81136022119881	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021469081396896726	0
17:11:46	21.8136022119881	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021471474282227227	0
17:11:46	21.813754461769307	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021466688521043423	0
17:11:46	21.81614871181702	0.021466688521043423	0
17:11:47	21.813754461769307	0.021466688521043423	0
17:11:47	21.818542971341934	0.021471474282227227	0
17:11:47	21.813754461769307	0.021464295654667325	0

Figura B.4: Selección de monitorización de temperatura.

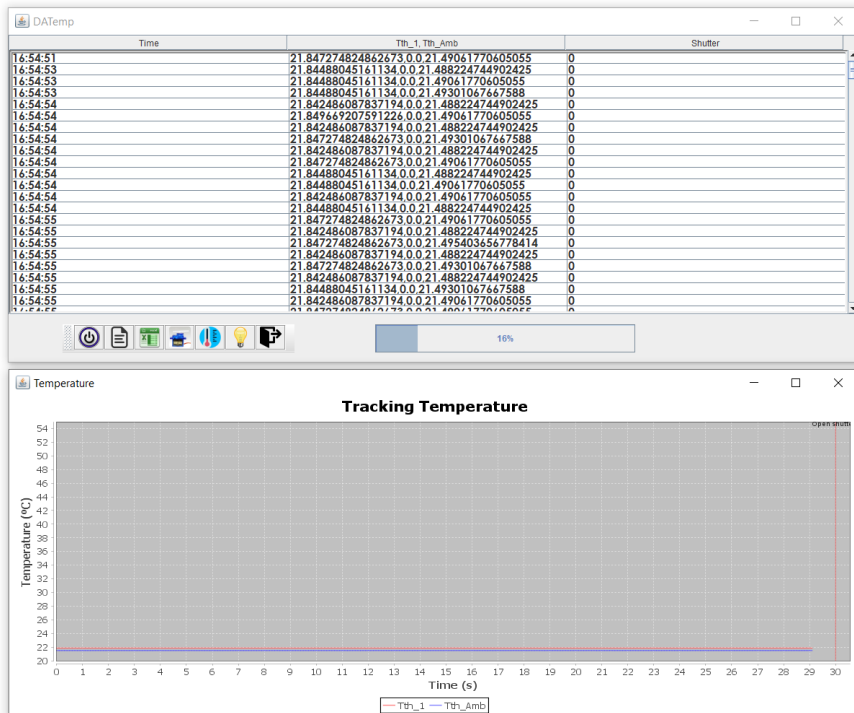


Figura B.5: Ventana de monitorización de temperatura.

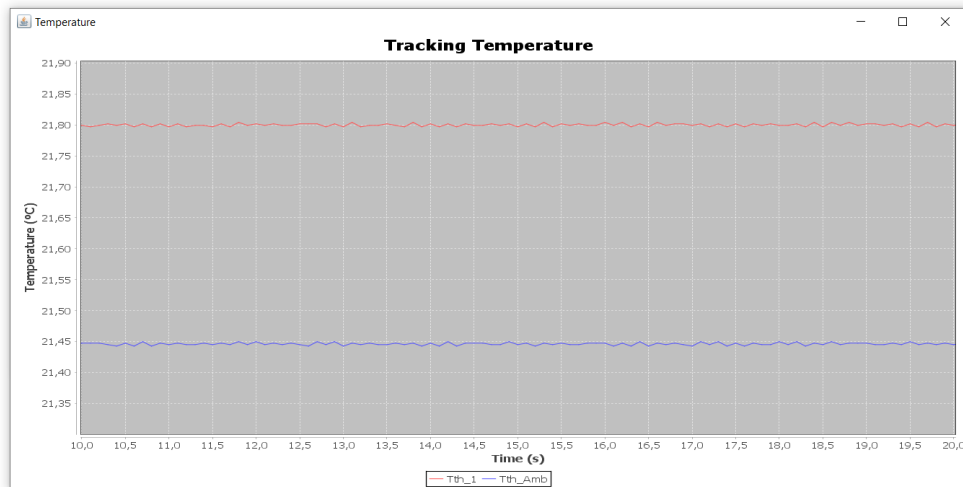


Figura B.6: Vista en detalle de la ventana de monitorización de temperatura.

El icono *Servo On* permite controlar manualmente el obturador del sistema, aunque su activación está automatizada para garantizar que los tiempos de apertura y cierre sean idénticos en todas las pruebas. No obstante, esta funcionalidad manual resulta útil durante tareas de calibración o diagnóstico, ya que permite comprobar el estado operativo del sistema en condiciones específicas.

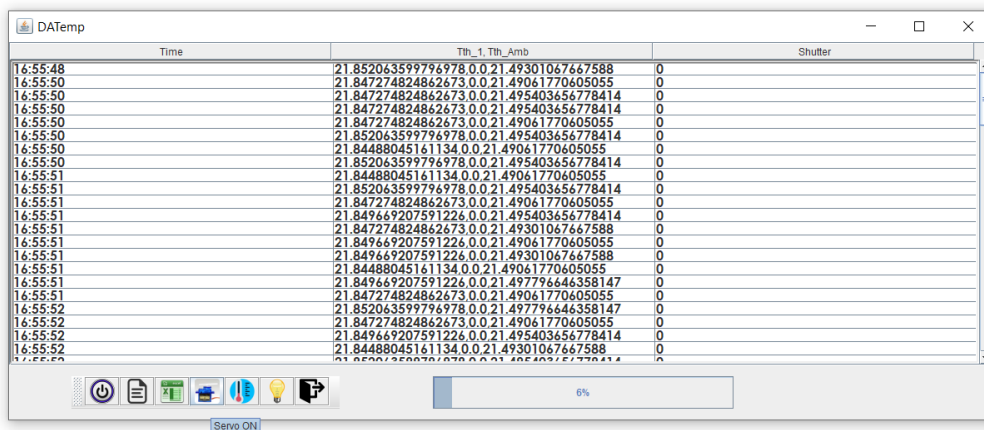


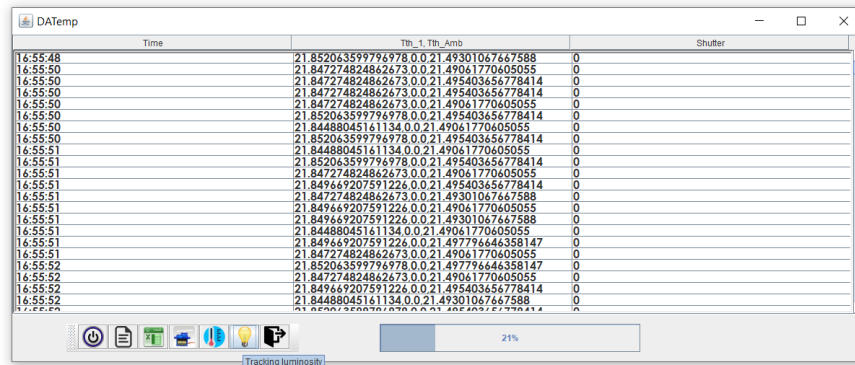
Figura B.7: Activación del obturador.

Al activar esta función, el estado del obturador se refleja en tiempo real en la pantalla de medición, concretamente en el campo correspondiente a *Shutter*. Un valor igual a cero indica que no se ha producido ninguna inter-

vención externa, como la apertura de la compuerta o la activación del láser, lo que resulta útil para verificar que el sistema permanece en reposo antes de iniciar la adquisición.

Por otra parte, como parte del proceso de diagnóstico, el icono con forma de bombilla permite activar el seguimiento de luminosidad en el interior de la cámara. Aunque el valor asociado aún no se encuentra integrado en la tabla principal de adquisición, su lectura se presenta en una ventana emergente similar a la utilizada para la monitorización de temperatura.

Dicha ventana permite visualizar en tiempo real la respuesta de la resistencia foto-dependiente (LDR) situada dentro del recinto experimental, lo cual resulta útil para comprobar el nivel de iluminación asociado a la apertura del obturador o a la activación del láser durante las pruebas.



The screenshot shows a software window titled 'DAtemp'. It contains a table with the following columns: 'Time', 'Th\_1', 'Th\_Amb', and 'Shutter'. The table lists data points from 16:55:48 to 17:55:52. Below the table, there is a 'Tracking luminosity' progress bar showing 21% completion. At the bottom of the window, there are several icons for system control and data management.

Time	Th_1	Th_Amb	Shutter
16:55:48	21.852063599796978	0.0 21.49301067667588	0
16:55:50	21.847274824862673	0.0 21.49061770605055	0
16:55:50	21.847274824862673	0.0 21.495403656778414	0
16:55:50	21.847274824862673	0.0 21.495403656778414	0
16:55:50	21.847274824862673	0.0 21.49061770605055	0
16:55:50	21.852063599796978	0.0 21.495403656778414	0
16:55:50	21.84488045161134	0.0 21.49061770605055	0
16:55:50	21.852063599796978	0.0 21.495403656778414	0
16:55:51	21.84488045161134	0.0 21.49061770605055	0
16:55:51	21.847274824862673	0.0 21.49061770605055	0
16:55:51	21.849669207591226	0.0 21.495403656778414	0
16:55:51	21.847274824862673	0.0 21.49301067667588	0
16:55:51	21.849669207591226	0.0 21.49061770605055	0
16:55:51	21.849669207591226	0.0 21.49301067667588	0
16:55:51	21.84488045161134	0.0 21.49061770605055	0
16:55:51	21.849669207591226	0.0 21.497796646358147	0
16:55:51	21.847274824862673	0.0 21.49061770605055	0
16:55:52	21.852063599796978	0.0 21.497796646358147	0
16:55:52	21.847274824862673	0.0 21.49061770605055	0
16:55:52	21.849669207591226	0.0 21.495403656778414	0
16:55:52	21.84488045161134	0.0 21.49301067667588	0

Figura B.8: Seguimiento de la luminosidad.

Cuando la barra de progreso alcanza el 100 % del proceso, se considera que la adquisición ha finalizado correctamente y, por tanto, la prueba se ha completado. En ese momento, se habilita la funcionalidad de exportación mediante el icono correspondiente, que permite guardar los datos adquiridos en formato .xls para su posterior análisis.

Esta opción genera automáticamente un archivo estructurado que incluye todas las variables medidas durante el experimento (tiempo, temperatura del termistor, temperatura ambiente, estado del obturador, etc.), preservando tanto el orden temporal como la integridad de los registros. De esta forma, se garantiza la trazabilidad completa del experimento, desde la adquisición en tiempo real hasta el almacenamiento estructurado de los resultados.

Este enfoque no solo facilita la explotación posterior de los datos mediante herramientas como MATLAB o SCILAB, sino que además permite documentar adecuadamente cada ensayo, facilitando su replicación, comparación y análisis estadístico. En conjunto, el diseño de la interfaz está orientado a reforzar la reproducibilidad de los experimentos y a proporcionar una base sólida para la validación de los modelos a partir de datos experimentales.

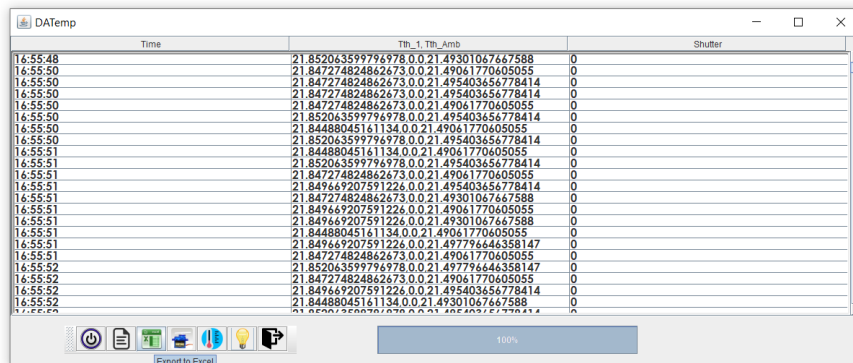


Figura B.9: Exportar datos a Excel.

Por último, el icono de salida (*Exit*) permite cerrar completamente la ventana principal de la aplicación. Al activarlo, se finalizan todos los procesos activos, y se restablecen las variables internas a su estado inicial, poniendo todos los indicadores y funciones a cero.

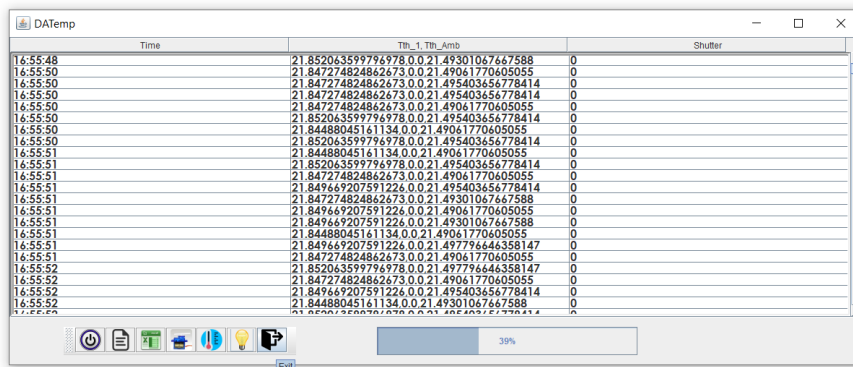


Figura B.10: Icono para cerrar la interfaz de DatEmp.

Esta acción ofrece la garantía que no quede ninguna tarea de adquisición, control o visualización en ejecución, evitando posibles conflictos en futuras sesiones de medición.



## Apéndice C

# Solución de ecuaciones fraccionales

*La mente es como un paracaídas. Sólo funciona si se abre.*

James Dewar

Como se presentó en detalle en el Capítulo 3, en este apéndice se recogen los fundamentos matemáticos relacionados con los diferentes regímenes de solución de la ecuación característica que modela la respuesta térmica del sensor. Allí se analizaron los efectos de los valores del número de Biot y el parámetro  $\gamma$  sobre la naturaleza de las soluciones, distinguiendo entre oscilatorias, sobreamortiguadas y críticas. En este apéndice se exponen las expresiones explícitas de los términos fraccionales involucrados, las constantes asociadas que aseguran condiciones iniciales adecuadas, y la formulación final de la temperatura adimensional  $\Theta( Fo )$  en función del número de Fourier, que permiten evaluar la evolución temporal del sensor en escenarios específicos, incluyendo condiciones de contorno no estacionarias y variabilidad funcional del número de Biot.

### C.1. Análisis de soluciones y formulación fraccional.

De acuerdo con la relación entre los valores del parámetro  $\gamma$  y Bi, la solución del modelo puede exhibir componentes oscilatorias, sobreamortiguadas o críticas, como se sintetiza en la tabla C.1.

La tabla C.2 presenta las expresiones explícitas para el término  $e_{1/2}^{\lambda_1 Fo}$  –

$e_{1/2}^{\lambda_2 Fo}$  correspondiente a cada tipo de solución, junto con los coeficientes  $C_1$  que aseguran la condición inicial  $\Theta(0) = 1$ .

Finalmente, la tabla C.3 expone las soluciones finales adimensionales  $\Theta(Fo)$  en función del número de Fourier, lo que permite evaluar directamente la respuesta temporal del sensor bajo diferentes escenarios térmicos.

Una vez establecida la formulación fraccional empleando el operador de Grünwald–Letnikov, se extiende el análisis a casos donde las condiciones de contorno varían con el tiempo. En particular, se consideran situaciones en las que el número de Biot deja de ser constante para adoptar un comportamiento funcional del tipo  $Bi = Bi(Fo)$ , incorporando así la variabilidad en la transferencia térmica debido a cambios en las propiedades del entorno

Tabla C.1: Tipos de soluciones de la ecuación característica en función de los valores de  $Bi$  y  $\gamma$ .

Tipo de solución	$Bi$	$\gamma$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
1	0	$> 0$	0	$-\gamma$
2	$> 0$	0	$+i \cdot \sqrt{Bi}$	$-i \cdot \sqrt{Bi}$
3	$> 0$	$> 0$	$\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}{2}$	$\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}{2}$
4	$> 0$	$> 0$	$\frac{-\gamma + i \cdot \sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}{2}$	$\frac{-\gamma - i \cdot \sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}{2}$
$i = \sqrt{-1}$				

Tabla C.2: Expresiones de la solución tipo y coeficiente  $C_1$  para distintos regímenes térmicos.

Tipo de solución	$e_{1/2}^{\lambda_1 \cdot Fo} - e_{1/2}^{\lambda_2 \cdot Fo}$	$C_1$
1	$-\gamma \cdot E_{1/2}(\gamma \cdot Fo^{1/2})$	$-\frac{1}{\gamma}$
2	$2 \cdot i \cdot \sqrt{Bi} \cdot e^{-Bi \cdot Fo}$	$\frac{1}{2 \cdot i \cdot \sqrt{Bi}}$
3	$e_{1/2}^{\lambda_1 \cdot Fo} - e_{1/2}^{\lambda_2 \cdot Fo}$	—
4	$2 \cdot i \cdot r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sin((k+1) \cdot \delta) \cdot \frac{r^k \cdot Fo^{1/2 \cdot k}}{\Gamma(1/2 \cdot k + 1)}$	$\frac{1}{2 \cdot i \cdot r \cdot \sin(\delta)}$
$r = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} - Bi}; \delta = \arctan\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}{\gamma}\right)$		

Tabla C.3: Soluciones adimensionales  $\Theta(Fo)$  para distintos casos particulares.

Tipo de solución	$\Theta(Fo)$
1	$E_{1/2}(\gamma \cdot Fo^{1/2})$
2	$e^{-Bi \cdot Fo}$
3	$\frac{e^{\lambda_1 \cdot Fo} - e^{\lambda_2 \cdot Fo}}{\sqrt{\gamma^2 - 4 \cdot Bi}}$
4	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((k+1) \cdot \delta)}{\sin(\delta)} \cdot \frac{r^k \cdot Fo^{1/2 \cdot k}}{\Gamma(1/2 \cdot k + 1)}$



# Bibliografía

*Y así, del mucho leer y del poco dormir,  
se le secó el cerebro de manera que vino  
a perder el juicio.*

Miguel de Cervantes Saavedra



# Bibliografía

- [1] N. Watson and M. S. Janota, *Turbocharging the Internal Combustion Engine*. London: The Macmillan Press Ltd, 1982.
- [2] “Goodesensor - temperature sensor manufacturer,” <https://goodesensor.com/>, Último acceso: 3 de septiembre de 2025.
- [3] TESPRO Perú, “Catálogo de sensores de temperatura industrial,” <https://app.tespro.com.pe/>, 2025, Último acceso: 3 de septiembre de 2025.
- [4] Temperature Controls (TCAus), “RTD element designs,” Temperature Controls Australia, 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.tcaus.com.au/thermocouple-and-rtd-guide/rtd-element-designs.html>
- [5] Scientific Instruments, Inc., “Model RO-215-100K temperature sensor,” Scientific Instruments Product Page, 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.scientificinstruments.com/product/model-ro-215-100k/>
- [6] P. Roriz, S. Silva, O. Fração, and S. Novais, “Optical fiber temperature sensors and their biomedical applications,” *Sensors*, vol. 20, no. 7, 2020. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/7/2113>
- [7] J. Valencia-Santana, A. Ramos-Martín, and V. Henríquez-Concepción, “Upgrading the dynamic mathematical model of temperature sensors in gaseous media for low Biot number ( $Bi < 0.1$ ),” *Measurement*, vol. 237, Sep 2024.
- [8] Support, ACE AUTOMATION Europe. (2024) Sondas termopar no conectadas a tierra vs conectadas a tierra vs expuestas. Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.support.aceautomation.eu/es/knowledge-base/sondas-termopar-no-conectadas-a-tierra-vs-conectadas-a-tierra-vs-expuestas/>
- [9] M. O. A. Sanusi, T. A. Adelabu, and D. O. Aworinde, “Modeling of heat transfer in transient thermal sensors using fractional calculus,”

- IEEE Access*, vol. 7, pp. 174 046–174 055, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2949458>
- [10] Thermal Engineering, “¿Qué es la convección natural, laminar y turbulenta? definición,” Portal Thermal Engineering, 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.thermal-engineering.org/es/que-es-la-conveccion-natural-laminar-y-turbulenta-definicion/>
- [11] Y. Zhang, L. Liu, and Q. Wang, “Experimental validation of biot number thresholds for thermal sensor design,” *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 112, p. 109976, 2020.
- [12] G. GmbH, “Tiempo de respuesta en sensores de temperatura,” Tech. Rep., 2023. [Online]. Available: <https://www.guenther.eu/93030e9b-94b0-9c19-91e1-e58d55091143?Edition=es>
- [13] Digi-Key Electronics, “Ficha técnica del termistor NTC Cantherm MF52A2103J3470,” Distribuidor Digi-Key Electronics (España), 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.digikey.es/es/products/detail/cantherm/MF52A2103J3470/1191033>
- [14] —, “Ficha técnica del producto Littelfuse USP16673,” Distribuidor Digi-Key Electronics (España), 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.digikey.es/es/products/detail/littelfuse-ibu/USP16673/5169688>
- [15] Laser Pointer Store, “Sitio web corporativo de Laser Pointer Store,” Página web institucional, 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.laserpointerstore.com/es/>
- [16] EMMA Laser Technology Co., Ltd., “Sitio web corporativo de EMMA laser technology,” Página web institucional, 2024, Último acceso: 3 de septiembre de 2025. [Online]. Available: <https://www.emma-laser.com/>
- [17] E. Power, “NTC thermistor | Resistor types,” 2024.
- [18] E. T. Wevolver, “What is an NTC thermistor: A guide to this temperature-sensitive resistor,” 2024.
- [19] P. B. M. Jr., “Dynamic response characteristics of meteorological sensors,” *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 46, no. 9, pp. 533–538, 1965. [Online]. Available: [https://journals.ametsoc.org/downloadpdf/journals/bams/46/9/1520-0477-46\\_9\\_533.pdf](https://journals.ametsoc.org/downloadpdf/journals/bams/46/9/1520-0477-46_9_533.pdf)

- [20] J. Sancho and et al., “Experimental and analytical evaluation of the response time of fast high temperature fiber optic sensors,” *Sensors and Actuators A: Physical*, 2024. [Online]. Available: <https://riUNET.upv.es/bitstream/handle/10251/83246/Manuscript%20author%20version.pdf?tl=a>
- [21] J. Fraden, *Handbook of Modern Sensors. Physics, designs and applications*, 5th ed. Springer, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6466-3>
- [22] H. Wang and et al., “Fast response characteristics of fiber bragg grating temperature sensors and explosion temperature measurement tests,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 354, p. 114236, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2023.114236>
- [23] V. D. Beybalaev, A. A. Aliverdiev, and J. Hristov, “Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a robin boundary condition,” *Fractal and Fractional*, vol. 7, no. 10, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770>
- [24] L. Dorčák, V. Leško, and I. Košťál, “Identification of fractional-order dynamical systems,” 2002.
- [25] K. Rupnik, J. Kutin, and I. Bajšić, “Identification and prediction of the dynamic properties of resistance temperature sensors,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 197, pp. 69–75, 2013.
- [26] K. Oprzędkiewicz, M. Rosoł, and W. Mitkowski, “Modeling of thermal traces using fractional order, a discrete, memory-efficient model,” *Energies*, vol. 15, no. 6, 2022.
- [27] M. N. Özisik, *Heat Conduction*. Wiley, 1993.
- [28] Y. A. Çengel, *Heat transfer. A practical approach*, 2nd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2002.
- [29] M. N. Özisik, *Heat transfer: a basic approach*, 1985.
- [30] B. R. Hollis, *User’s manual for the one-dimensional hypersonic experimental aero-thermodynamic (1DHEAT) data reduction code*. National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center ; National Technical Information Service, distributor [Cleveland, Ohio] : [Springfield, Va, 1995.
- [31] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, *Generalized functions for the fractional calculus*. National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center ; National Technical Information Service, distributor [Cleveland, Ohio] : [Springfield, Va, 1999.

- [32] D. L. Schultz, “AD-758 590 Heat transfer measurements in short duration hypersonic facilities,” 1973.
- [33] E. Zupic and M. Č. Brodnjak, “Bibliometric methods in management and organization,” *Organizational Research Methods*, vol. 20, no. 3, pp. 429–472, 2017.
- [34] R. Khanra, S. K. Dhull, and P. K. Singh, “A bibliometric analysis of artificial intelligence in healthcare,” *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 146, pp. 49–62, 2019.
- [35] D. de Solla Price, “A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes,” *Journal of the American Society for Information Science*, vol. 27, no. 5, pp. 292–306, 1976.
- [36] L. Waltman, N. J. van Eck, and E. C. M. Noyons, “A unified approach to mapping and clustering of bibliometric networks,” *Journal of Informetrics*, vol. 4, no. 4, pp. 629–635, 2010.
- [37] M. Aria and C. Cuccurullo, “bibliometrix: An r-tool for comprehensive science mapping analysis,” *Journal of Informetrics*, vol. 11, no. 4, pp. 959–975, Nov 2017.
- [38] D. DeBellis, N. Schubert, J. Adams, D. Faulds, and J. Woollen, “A review of bibliometric indicator calibrations,” *Frontiers in Research Metrics and Analytics*, vol. 6, 2021.
- [39] T. A. Boyack and R. Klavans, “Co-citation analysis, bibliographic coupling, and direct citation: Which citation approach represents the present structure of science best?” *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, vol. 61, no. 12, pp. 2385–2404, 2010.
- [40] L. Leydesdorff, L. Bornmann, W. Marx, and S. Milojević, “Referenced publication years spectroscopy applied to imetrics: Scientometrics, journal of informetrics, and a relevant subset of jasist,” *Journal of Informetrics*, vol. 8, no. 1, pp. 162–174, 2014.
- [41] M. Aria, C. Cuccurullo, L. D. Aniello, M. Misuraca, and M. Spano, “Comparative science mapping: a novel conceptual structure analysis with metadata,” *Scientometrics*, Nov 2024.
- [42] S. K. Manjhi and R. Kumar, “Transient heat flux measurement analysis from coaxial thermocouples at convective based step heat load,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 75, no. 3, pp. 200–216, 2019.

- [43] S. Manjhi and R. Kumar, “Numerical investigation of calibration of coaxial thermocouples by water immersion for fast transient heat flux measurement,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 75, no. 3, pp. 203–221, 2019.
- [44] S. K. Manjhi and R. Kumar, “Surface heat flux measurements for short time-period on combustion chamber with different types of coaxial thermocouples,” *Experimental Heat Transfer*, vol. 33, no. 3, pp. 282–303, 2020.
- [45] R. Goswami and R. Kumar, “Transient heat fluxes measurement analysis from platinum based thin film gauges in open and closed cavities,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 76, no. 7, pp. 576–592, 2019.
- [46] S. K. Manjhi and R. Kumar, “Transient surface heat flux measurement for short duration using k-type, e-type and j-type of coaxial thermocouples for internal combustion engine,” *Measurement*, vol. 136, pp. 256–268, 2019.
- [47] A. F. J. van Raan, “Measuring science with citation analysis,” in *Handbook of Quantitative Science and Technology Research*. Springer, 2005, pp. 19–50.
- [48] M. Tagawa, K. Kato, and Y. Ohta, “Response compensation of thermistors: Frequency response and identification of thermal time constant,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 74, no. 3, pp. 1350–1358, Mar 2003. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1542668>
- [49] M. J. Cobo, A. G. López-Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera, “Science mapping software tools: Review, analysis, and cooperative study among tools,” *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, vol. 62, no. 7, pp. 1382–1402, 2011.
- [50] J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. McGraw-Hill, 2003.
- [51] A. H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald Press, 1953.
- [52] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 1990.
- [53] G. S. Settles, *Schlieren and Shadowgraph Techniques: Visualizing Phenomena in Transparent Media*. Springer, 2001.
- [54] J. D. Anderson, *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. AIAA, 2006.

- [55] P. Hill and C. Peterson, *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Pearson Education, 2013.
- [56] J. Andersen, F. Lindström, and F. Westin, “Surge definitions for radial compressors in automotive turbochargers,” *SAE Technical Paper*, pp. 2008–01–0296, 2008, 17 April 2008.
- [57] N. Kämmer and M. Rautenberg, “A distinction between different types of stall in a centrifugal compressor stage,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 108, pp. 83–92, 1986.
- [58] J.-L. Gardarein, J.-L. Battaglia, and S. Löhle, “Heat flux sensor calibration using noninteger system identification: Theory, experiment, and error analysis,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 80, no. 2, p. 025103, Feb 2009. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.3079328>
- [59] J.-D. Gabano and T. Poinot, “Fractional modelling and identification of thermal systems,” *Signal Processing*, vol. 91, pp. 531–541, 2011.
- [60] S. Rudtsch and C. von Rohden, “Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements,” *Measurement*, vol. 76, pp. 1–6, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.07.028>
- [61] G. Liu, L. Guo, C. Liu, and Q. Wu, “Evaluation of different calibration equations for ntc thermistor applied to high-precision temperature measurement,” *Measurement*, vol. 120, pp. 21–27, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.02.007>
- [62] V. C. V. Santos and T. L. M. Santos, “On the variance propagation of thermistor-based measurements with a digital temperature controller,” *Measurement*, vol. 192, p. 110863, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.110863>
- [63] D. Ross-Pinnock and P. G. Maropoulos, “Review of industrial temperature measurement technologies and research priorities for the thermal characterisation of the factories of the future,” *Proc Inst Mech Eng B J Eng Manuf*, vol. 230, pp. 793–806, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1177/0954405414567929>
- [64] TDK Group Company, “NTC thermistors. General technical information,” <https://www.tdk-electronics.tdk.com/download/531116/19643b7ea798d7c4670141a88cd993f9/pdf-general-technical-information.pdf>, 2012.

- [65] J. Kim and J. D. Kim, "Voltage divider resistance for high-resolution of the thermistor temperature measurement," *Measurement*, vol. 44, no. 10, pp. 2054–2059, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2011.08.004>
- [66] H. E. Darkhaneh, "Measurement error caused by self-heating in ntc and ptc thermistors," Dallas, Texas. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:203587887>, 2019.
- [67] Z. Cui, W. Li, S. Yu, and M. Jin, "Similarity analysis of dynamic temperature measurements," *Metrology and Measurement Systems*, vol. 29, no. 2, pp. 285–298, 2022.
- [68] C. de Frutos, M. Villalba, M. A. Sanz, and J. M. Martínez, "Evaluación del comportamiento dinámico de sensores de temperatura," 2017.
- [69] D. Maillet, S. André, J. C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Myoyne, *Thermal Quadrupoles: Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, 2000.
- [70] R. Heyd, "One-dimensional systemic modeling of thermal sensors based on miniature bead-type thermistors," *Sensors*, vol. 21, no. 23, p. 7866, Nov 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/s21237866>
- [71] D. B. Spalding, "Heat transfer. By Alan J. Chapman. The MacMillan Company, New York. 1960. 452pp. 63s." *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 10, no. 2, pp. 317–319, 1961.
- [72] O. G. Martynenko and R. I. Soloukhin, "Heat conduction: M. N. özışık."
- [73] M. Planck, *Treatise on Thermodynamics*. New York: Dover Publications, 1927, reprint of the 3rd English edition, originally published in 1927.
- [74] T. D. McGee, *Principles and Methods of Temperature Measurement*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- [75] E. O. Doebelin, *Measurement Systems: Application and Design*, 5th ed. McGraw-Hill, 2004.
- [76] A. S. Morris and R. Langari, *Measurement and Instrumentation: Theory and Application*, 2nd ed. Elsevier, 2012.
- [77] J. R. Leigh, *Temperature Measurement and Control*, ser. IEE Control Engineering Series 33. Peter Peregrinus Ltd. on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988.

- [78] M. Manufacturing, *NTC thermistors for Temperature Measurement*, 2023. [Online]. Available: <https://www.murata.com/products/thermistor/ntc>
- [79] J. Valvano, “A thermistor-based method for measurement of thermal conductivity,” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 106, pp. 33–38, 1984.
- [80] F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th ed. Wiley, 2013.
- [81] N. Instruments, “Medir temperatura con termopares, RTDs o termistores,” 2023. [Online]. Available: <https://www.ni.com/es/shop/data-acquisition/sensor-fundamentals/measuring-temperature-with-thermocouples-rtDs-and-thermistors.html>
- [82] Q. Wang, W. Kong, J. Yao, and A. Chang, “Fabrication and electrical properties of the fast response  $\text{Mn}_{1,2}\text{Co}_{1,5}\text{Ni}_{0,3}\text{O}_4$  miniature NTC chip thermistors,” *Ceramics International*, vol. 45, no. 1, pp. 378–383, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2018.09.177>
- [83] G. Abdulrahman, “Laminar and turbulence forced heat transfer convection correlations inside tubes. A review,” *arXiv preprint*, 2024.
- [84] S. B. Pope, *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 8 2000.
- [85] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 2006.
- [86] W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, 1993.
- [87] J. L. Lumley, *Stochastic Tools in Turbulence*. Academic Press, 1978.
- [88] H. Tennekes and J. Lumley, *A First Course in Turbulence*. MIT Press, 1972.
- [89] Y. Iritani *et al.*, “Heat transfer mechanism and associated turbulence structure in the near-wall region of a turbulent boundary layer,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 26, no. 9, pp. 1419–1431, 1983.
- [90] L. Krishnamoorthy *et al.*, “Temperature dissipation measurements in a turbulent boundary layer,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, pp. 265–281, 1987.
- [91] J. R. P. F. S. Vera, M. Cortés and W. Bustamante, “Testing turbulence models to predict interzonal mass airflows through a stairwell opening

- for both natural and mixed convection flows in buildings,” *Revista Ingeniería de Construcción*, vol. 30, no. 2, pp. 85–97, 2015. [Online]. Available: [https://www.scielo.cl/pdf/ric/v30n2/en\\_art01.pdf](https://www.scielo.cl/pdf/ric/v30n2/en_art01.pdf)
- [92] F. Erdoğan, “A review on simultaneous determination of thermal diffusivity and heat transfer coefficient,” *Journal of Food Engineering*, vol. 86, no. 3, pp. 453–459, 2008.
- [93] C. L. Silva *et al.*, “Optimization of inverse algorithms for the estimation of thermal diffusivity and heat transfer coefficient,” *Journal of Food Engineering*, vol. 109, pp. 104–113, 2012.
- [94] L. F. Richardson, “Some measurements of atmospheric turbulence,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 221, pp. 1–28, 1921.
- [95] A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers,” *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 434, no. 1890, pp. 9–13, 1991, english translation of the original 1941 paper.
- [96] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [97] J. Jiménez, “The contributions of A.N. Kolmogorov to the theory of turbulence,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, vol. 109, pp. 595–608, 2015.
- [98] Y. A. Çengel and A. J. Ghajar, *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill, 2015.
- [99] T. Sommer, R. So, and Y. Lai, “A near-wall two-equation model for turbulent heat fluxes,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 36, no. 6, pp. 1525–1534, 1993.
- [100] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, and D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, 2011.
- [101] J. A. T. M. *et al.*, “Recent history of fractional calculus,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, vol. 16, pp. 1140–1153, 2011.
- [102] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, 1st ed. California: Academic Press, INC.

- [103] L. Feng, F. Liu, I. Turner, and P. Zhuang, “Memory effect modeling for heat conduction in heterogeneous materials using fractional derivatives,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 127, pp. 203–214, 2018.
- [104] F. Liu, V. Anh, I. Turner, and K. Burrage, “Numerical approximation of fractional differential equations with memory effect,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 76, no. 7, pp. 1636–1652, 2018.
- [105] I. Podlubny, I. Petráš, B. M. Vinagre, P. O’Leary, and L. Dorčák, “Analogue realizations of fractional-order controllers,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 281–296, 2002.
- [106] G. E. Carlson and C. A. Halijak, “Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular newton process,” *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 11, no. 2, pp. 210–213, 1964.
- [107] R. Gorenflo and F. Mainardi, “Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order,” *Springer Verlag*, 2002.
- [108] D. D. Joseph and L. Preziosi, “Heat waves,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 41–73, 1989.
- [109] B. H. R. and J. Ignaczak, “Generalized thermoelasticity,” *Journal of Thermal Stresses*, vol. 22, no. 4-5, pp. 451–476, 2009.
- [110] I. Podlubny, “Fractional differential equations,” *Academic Press*, 1999.
- [111] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer, 2010.
- [112] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [113] S. Rogosin and M. Dubatovskaya, “Letnikov vs. Marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives,” *Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 1–15, 2018.
- [114] I. Petrás, “Handbook of fractional calculus with applications. volume 6: Applications in control,” 2019.
- [115] B. M. Vinagre, V. Feliu, I. Podlubny, and A. Hernández, “Some approximations of fractional order operators used in control. theory and applications.” *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 3, pp. 231–248, 2000. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/228392562>

- [116] L. Abadias, M. D. León-Contreras, and J. L. Torrea, “Non-local fractional derivatives. discrete and continuous,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 449, no. 1, pp. 734–755, 2017.
- [117] H. R. Pandey, G. R. Phajjoo, and D. B. Gurung, “A comprehensive study of fractional-order derivative and their interplay with basic functions,” *Journal of Nepal Mathematical Society*, vol. 6, pp. 38–52, 2024.
- [118] T. R. Prabhakar, “A singular integral equation with a generalized mittag-leffler function in the kernel,” *Yokohama Mathematical Journal*, vol. 19, pp. 7–15, 1971.
- [119] F. Mainardi and R. Gorenflo, “Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey,” *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 10, no. 3, pp. 269–308, 2007.
- [120] H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, “Mittag-leffler functions and their applications,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2011, p. Article ID 298628, 2011.
- [121] H. Carslaw and J. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1959.
- [122] Y. Jannot, C. Moyne, and A. Degiovanni, *Heat Transfer, Volume 1: Conduction and Convection*, 2nd ed. Wiley, 2023, vol. 1.
- [123] J. Taler and P. Duda, *Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [124] G. E. Carlson, “Simulation of the fractional derivative operator  $\sqrt{s}$  and the fractional integral operator  $1/\sqrt{s}$ ,” in *Advanced Computational Methods and Experiments in Heat Transfer XIII*. WIT Press, 2013, pp. 149–158.
- [125] C. Li and F. Zeng, “Numerical methods for fractional calculus,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 67, no. 3, p. 030802, 2015.
- [126] H. Ding, Q. Yang, and D. Baleanu, “Fractional dynamic models and simulations of heat transfer processes with variable coefficients,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 186, p. 116496, 2021.
- [127] H. Duan, F. Liu, and W. Wang, “Numerical modeling of anomalous heat conduction with time and space-dependent coefficients,” *Journal of Computational Physics*, vol. 403, p. 109033, 2020.
- [128] A. Fernandez, J. E. Restrepo, and D. Suragan, “A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients,” *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 20, 2023.

- 
- [129] T. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica, *Time-Fractional Differential Equations*. Springer, 2014.
- [130] M. A. Zaky, A. M. A. El-Sayed, and M. I. Syam, “Fractional modeling of transient heat conduction in heterogeneous media with time-dependent boundary conditions,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, no. 7, pp. 5947–5958, 2022.
- [131] G. Jumarie, “Modified riemann-liouville derivative and fractional taylor series of nondifferentiable functions further results,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 51, pp. 1367–1376, 5 2006.
- [132] B. S. Alkahtani, D. Baleanu, and A. Ghaffari, “Solving a variable-order time fractional heat equation with nonhomogeneous source term,” *Mathematics*, vol. 9, no. 22, p. 2859, 2021.

*-¿Qué te parece desto, Sancho? - Dijo Don Quijote -  
Bien podrán los encantadores quitarme la ventura,  
pero el esfuerzo y el ánimo, será imposible.*

*Segunda parte del Ingenioso Caballero  
Don Quijote de la Mancha  
Miguel de Cervantes*

*-Buena está - dijo Sancho -; fírmela vuestra merced.  
-No es menester firmarla - dijo Don Quijote-,  
sino solamente poner mi rúbrica.*

*Primera parte del Ingenioso Caballero  
Don Quijote de la Mancha  
Miguel de Cervantes*



