



TESIS DOCTORAL

ESTUDIO DE LOS EFECTOS DE LA RADIACIÓN
DE PUNTO CERO EN EXPERIMENTOS DE
COMUNICACIÓN CUÁNTICA CON LUZ
GENERADA EN EL PROCESO DE CONVERSIÓN
PARAMÉTRICA A LA BAJA, UTILIZANDO EL
FORMALISMO DE LA FUNCIÓN DE WIGNER

Autor: Santiago Ramón Guerra Guillén

Julio 2011
Las Palmas de Gran Canaria



**Programa de Doctorado de
Física, Matemática, Geología y Clima
Departamento de Física**

**ESTUDIO DE LOS EFECTOS DE LA RADIACIÓN
DE PUNTO CERO EN EXPERIMENTOS DE
COMUNICACIÓN CUÁNTICA CON LUZ
GENERADA EN EL PROCESO DE CONVERSIÓN
PARAMÉTRICA A LA BAJA, UTILIZANDO EL
FORMALISMO DE LA FUNCIÓN DE WIGNER**

Autor

Fdo: Santiago Ramón Guerra Guillén

Director

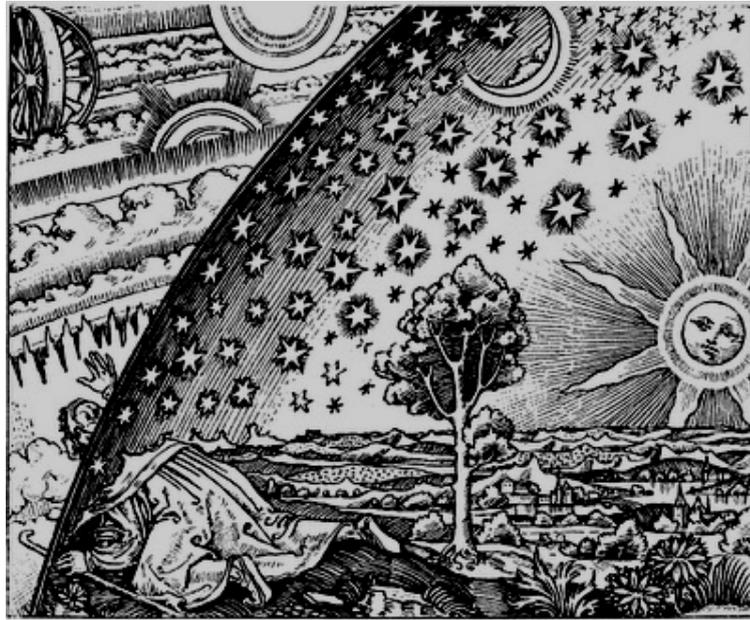
Director

Fdo: Alberto Casado Rodríguez

Fdo: José Plácido Suárez

Agradecimientos

La elaboración de la presente Tesis Doctoral no hubiese sido posible sin la inestimable ayuda y apoyo de mis directores Dr. D. Alberto Casado Rodríguez y Dr. D. José Plácido Suárez.



Science is not and will never be a closed book. Every important advance brings new questions. Every development reveals, in the long run, new and deeper difficulties.

*Albert Einstein and Leopold Infeld,
The Evolution of Physics, 1937.*

INDICE DE ACRÓNIMOS

- **BS:** Divisor de Haz (*del inglés Beam-Splitter*)
- **BSM:** Medida de Bell (*del inglés Bell-State Measurement*)
- **CP:** Polarizador circular (*del inglés Circular Polarizer*)
- **EP:** Polarizador Elíptico (*del inglés Elliptical Polarizer*)
- **EPR:** Einstein-Podolsky-Rosen
- **GHZ:** Greenberger-Horne-Zeilinger
- **HWP:** Placa de Media Onda (*del inglés Half-Wave Plate*)
- **LHV:** Variables Ocultas Locales (*del inglés Local Hidden Variable*)
- **LOCC:** Operaciones Locales y Comunicación Clásica (*del inglés Local Operations and Classical Communication*).
- **PBS:** Divisor de Polarización (*del inglés Polarizing Beam-Splitter*)
- **PDC:** Conversión Paramétrica a la Baja (*del inglés Parametric Down Conversion*)
- **PR:** Rotador de Polarización (*del inglés Polarization Rotator*)
- **QC:** Criptografía Cuántica (*del inglés Quantum Cryptography*)
- **QED:** Electrodinámica Cuántica (*del inglés Quantum Electrodynamics*)
- **QKD:** Distribución Cuántica de Clave (*del inglés Quantum Key Distribution*)
- **QSS:** Secreto Cuántico Compartido (*del inglés Quantum Secret Sharing*)

- **QWP:** Lámina de cuarto de onda (*del inglés Quarter-Wave Plate*)
- **SED:** Electrodinámica Estocástica (*del inglés Stochastic Electrodynamics*)
- **SPUC:** Conversión Paramétrica a la Alta Espontánea (*del inglés Spontaneous Parametric Up Conversion*)
- **WRHP:** Representación de Wigner en el marco de Heisenberg (*del inglés Wigner Representation in the Heisenberg Picture*)
- **ZPF:** Campo de punto cero (*del inglés Zeropoint Field*)

Índice

1. ANTECEDENTES Y MOTIVACIONES	1
1.1. Introducción	1
1.2. Contexto histórico	1
1.2.1. Mecánica cuántica frente a realismo local	1
1.2.2. La electrodinámica estocástica	3
1.2.3. La función de Wigner y la óptica estocástica	4
1.2.4. La información cuántica	4
1.3. Motivaciones	5
1.4. Organización de la tesis	6
2. UN ACERCAMIENTO A LA INFORMACIÓN CUÁNTICA	9
2.1. Introducción	9
2.2. El bit cuántico	11
2.2.1. Puertas lógicas cuánticas sobre un qubit	12
2.2.2. Qubits múltiples. La puerta CNOT	13
2.3. La paradoja EPR y las desigualdades de Bell	14
2.4. Evolución cuántica reversible	16
2.5. Influencia del entorno	17
2.6. El paralelismo cuántico	19
2.7. Teoría de la información cuántica	19
2.8. Compresión cuántica	20
2.9. Corrección de errores	21
2.10. Fotones entrelazados como recurso en computación y comunicación cuánticas	22
2.11. Codificación densa	23
2.12. Teletransporte	25
2.13. Destilado	25
2.14. Criptografía	27
3. EXPERIMENTOS DE COMUNICACIÓN CUÁNTICA CON PDC	31
3.1. Introducción	31
3.2. La Conversión Paramétrica a la Baja	31
3.2.1. PDC tipo I	33
3.2.2. PDC tipo II	34
3.3. Medida de los estados de Bell (BSM)	36
3.4. Experimentos	39
3.4.1. Criptografía con fotones entrelazados	39
3.4.2. Experimentos en el aire libre con fotones entrelazados	41

3.4.3. Teletransporte	43
4. LA FUNCIÓN DE WIGNER	45
4.1. Introducción	45
4.2. La función de Wigner en mecánica cuántica	46
4.2.1. Ecuación de Wigner-Moyal	47
4.3. Óptica cuántica en el espacio de las fases	47
4.3.1. Descripción estocástica del campo electromagnético clásico	48
4.3.2. Función de correlación en óptica cuántica	48
4.3.3. La representación P	49
4.3.4. La representación Q	50
4.3.5. Funciones características	50
4.4. La función de Wigner en óptica cuántica	51
4.4.1. Ejemplos de función de Wigner	53
4.5. La función de Wigner en el marco de Heisenberg (WRHP)	55
4.5.1. Descripción de un haz de luz	55
4.5.2. La radiación de punto cero	57
4.6. La teoría de la detección	58
4.6.1. Probabilidad simple y conjunta	58
4.6.2. Detección triple y cuádruple	59
5. LA CONVERSIÓN PARAMÉTRICA A LA BAJA EN LA WRHP	61
5.1. Introducción	61
5.2. Conversión a la baja en la WRHP	63
5.3. Entrelazamiento de fotones en la WRHP	67
5.3.1. Descripción de la base de Bell	68
5.4. El problema de la detección	70
6. INFORMACIÓN CUÁNTICA EN ÓPTICA CON LA WRHP	73
6.1. Introducción	73
6.2. El qubit espacial en la WRHP	74
6.3. Elementos ópticos lineales en comunicación cuántica, en la WRHP	78
6.3.1. La acción del BS sobre el qubit en la WRHP	79
6.3.2. El PBS y los efectos del ZPF en la puerta CNOT	81
6.3.3. Retardadores	85
6.3.4. El rotador de polarización	86
6.3.5. Mach-Zhender	87
6.3.6. El polarizador	87
6.4. Los generadores aleatorios cuánticos	89
6.5. La función de Wigner en la Teoría de la Información Cuántica	90
6.6. Conclusiones	92
7. CRIPTOGRAFÍA CUÁNTICA CON PDC EN LA WRHP	95
7.1. Introducción	95
7.2. Entrelazamiento y distribución de clave (no segura) en la WRHP	96
7.3. Experimentos con PDC tipo II para distribución de clave segura	98
7.3.1. Codificación en polarización	99
7.3.2. Codificación en fase	102

7.4. El espionaje en el formalismo de Wigner	103
7.5. Estados GHZ en la Representación de Wigner	107
7.6. Experimentos con PDC tipo I: entrelazamiento tiempo-energía en la WRHP	112
7.6.1. Codificación en fase	112
7.7. Conclusiones	119
8. CODIFICACIÓN DENSA Y BSM EN LA WRHP	123
8.1. Introducción	123
8.2. Estadística de dos fotones en un BS en la WRHP	124
8.3. Análisis parcial de los estados de Bell en la WRHP	127
8.4. Hiperentrelazamiento polarización-momento en la WRHP	130
8.5. BSM con hiperentrelazamiento polarización-momento en la WRHP	133
8.6. Conclusiones	138
9. TELETRANSPORTE EN LA WRHP	141
9.1. Introducción	141
9.2. Intercambio de entrelazamiento en la WRHP	142
9.2.1. Introducción	142
9.2.2. Campo eléctrico en los detectores	143
9.2.3. Intercambio de entrelazamiento y correlaciones cuádruples	147
9.2.4. Protocolo de teleportación de entrelazamiento	152
9.3. Experimento de Teletransporte de Innsbruck en la WRHP	153
9.3.1. Introducción	153
9.3.2. Campo eléctrico en los detectores y correlaciones cruzadas	156
9.3.3. Medida de Bell y correlaciones cuádruples	161
9.4. Teletransporte de un qubit de polarización en la WRHP	168
9.5. Experimento de teletransporte de Roma en la WRHP	174
9.5.1. Introducción	174
9.5.2. Análisis	176
9.6. Conclusiones	182
10. CONCLUSIONES GENERALES	185
ANEXO A	189
.1. Probabilidad triple en la representación de Wigner para PDC	189
ANEXO B	193
.2. Probabilidad cuádruple en la Representación de Wigner para PDC	193
Bibliografía	195

ANTECEDENTES Y MOTIVACIONES

1.1. Introducción

El objetivo de esta tesis es el estudio de los efectos que produce la radiación de punto cero en los experimentos de comunicación cuántica con fotones generados en el proceso de conversión paramétrica a la baja. Para ello, utilizaremos el formalismo de la función de Wigner de la óptica cuántica. En este primer capítulo vamos a exponer someramente cuáles son los antecedentes que han desembocado en este trabajo, así como las motivaciones que nos han llevado a desarrollar la línea de investigación que lo ha generado.

Comenzamos en la sección 1.2 estableciendo el contexto en que se desarrolla la tesis: la confrontación entre la mecánica cuántica y el realismo local (apartado 1.2.1), la electrodinámica estocástica (apartado 1.2.2), el formalismo de la función de Wigner y la óptica estocástica (apartado 1.2.3), y finalmente la teoría de la información cuántica (apartado 1.2.4). En la sección 1.3 explicamos las motivaciones de esta tesis, y finalmente en la sección 1.4 se indican los diferentes capítulos en los que se organiza.

1.2. Contexto histórico

1.2.1. Mecánica cuántica frente a realismo local

Bien sabido es que la mecánica cuántica revolucionó la física y la tecnología en el siglo XX, y hoy en día, en el incipiente siglo XXI, nos sigue impresionando con la enorme cantidad de aplicaciones que aporta. No obstante, la mecánica cuántica ha generado una serie de importantes paradojas que emanan de sus postulados, y que han motivado desde su nacimiento un enorme debate en la comunidad científica, dadas las discrepancias evidentes entre esta teoría y la física clásica. Aspectos como la dualidad onda-partícula, la superposición cuántica, el principio de indeterminación de Heisenberg y el entrelazamiento, están detrás de los fenómenos más llamativos del mundo cuántico.

En el año 1935, Einstein, Podolsky y Rosen formularon la paradoja EPR, icono de los problemas generados por los aspectos más elementales de esta teoría en base a su contraposición al concepto de realismo local. El trío EPR trató de argumentar que el resultado de una medición en un sistema físico se determina antes y con independencia de la medida (realismo) y que el resultado no puede depender de las acciones en regiones del espacio separadas (localidad de Einstein). Además, sugirieron que las correlaciones cuánticas perfectas, que se producen en sistemas de dos partículas en un estado de máximo entrelazamiento, se pueden utilizar para definir los elementos de la realidad, sin contrapartida en la teoría cuántica. La conclusión del argumento EPR es que la mecánica cuántica es una teoría incompleta, porque no describe adecuadamente la existencia de elementos de realidad deducidos a lo largo del argumento, en base a la aceptación del principio de localidad. Es más, introdujeron el concepto de *variables ocultas*, como una forma de completar la teoría cuántica. El entrelazamiento¹ es básico en la paradoja, representado en la versión posterior de Bohm a través del estado singlete.

La formulación de la paradoja EPR fue sólo el principio de un largo periodo (unos 30 años), de un intenso debate, llevado siempre en el terreno teórico, sobre cómo se comporta la naturaleza, hasta que en 1964 John Bell dio la clave para poder discernir si el realismo local era violado por la naturaleza a través de algún experimento. Bell obtuvo unas desigualdades que violaban las correlaciones predichas por cualquier teoría de variables ocultas realista local, y demostró que hay estados cuánticos que violan estas desigualdades (teorema de Bell).

Hasta el trabajo de Bell, podemos decir que la cuestión *mecánica cuántica frente a realismo local* se había convertido en algo filosófico o metafísico; no obstante, Bell consiguió que este tema de tan magna importancia regresara al campo de la física, abriendo un enorme abanico de posibilidades. Tuvieron que transcurrir algunos años hasta que esta cuestión pudiera llevarse al laboratorio de una forma efectiva, y en este período de tiempo surgieron distintos tipos de desigualdades que se podían contrastar en el laboratorio. La mayoría de los experimentos se han realizado con fotones, y hasta la fecha actual, el realismo local no se ha llegado a violar experimentalmente. Por el contrario, lo que se ha violado ha sido la conjunción entre el realismo local y ciertas hipótesis adicionales (no-enhancement, fair sampling,...), cuyo papel en las desigualdades tiene como objetivo el salvar dificultades técnicas de envergadura, la más importante la baja eficiencia de los detectores. Podemos afirmar que son las desigualdades no genuinas, basadas en un conjunto de hipótesis constituido por el realismo local más ciertas hipótesis adicionales, las que se han violado experimentalmente.

La mayor parte de los experimentos tipo Bell se han realizado en el campo de la óptica cuántica. Los primeros experimentos fueron realizados, en 1978, por Clauser y Shimony, utilizando pares de fotones entrelazados en polarización mediante cascadas atómicas. A finales de 1980 esta técnica fue eclipsada por la conversión paramétrica a la baja, proceso que se

¹El término entrelazamiento o enredo cuántico fue introducido por Schrodinger, en 1935. Consideraba el entrelazamiento como la característica esencial de la mecánica cuántica. La versión de Bohm del EPR, en 1951, utilizó el estado singlete de espín 1/2 de dos partículas, que hoy en día es un icono y un punto de referencia del entrelazamiento.

ha venido utilizando desde entonces, no sólo para mostrar los aspectos contraintuitivos de la luz, que emanan del concepto de fotón como excitación elemental del campo electromagnético cuantizado, sino para el contraste de desigualdades de Bell.

La naturaleza cuántica del campo electromagnético se revela actualmente en experimentos multifotónicos. Sin embargo, el experimento clave en el que se estudió por primera vez la dualidad onda-partícula en la luz es el experimento de Aspect, Grangier y Roger en 1986. Partiendo de pares de fotones emitidos en cascadas atómicas, usando uno de ellos como disparador, el otro fotón fue introducido en un interferómetro Mach-Zehnder, observándose un patrón de interferencia en la medida de la tasa de detección simple en uno de los detectores a la salida del interferómetro, cuando se variaba la diferencia de camino óptico. Sin embargo, si se observa la tasa de detección conjunta correspondiente a las dos salidas del interferómetro, ésta es nula, lo que parece revelar el comportamiento corpuscular de la luz.

1.2.2. La electrodinámica estocástica

A principios del siglo XX, Planck intentó explicar la cuantización de la luz, defendida por Einstein en su explicación del efecto fotoeléctrico, en base a las fluctuaciones de lo que llamó, energía o campo de punto cero². Planck introdujo este concepto con el objeto de salvar la naturaleza ondulatoria de la luz, bien asentada a finales del siglo XIX en base a las ecuaciones de Maxwell, pero que volvía a descartarse a partir de la interpretación de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico.

La alternativa de la radiación de punto cero, como base para explicar los fenómenos cuánticos, dio lugar en los años 60 del siglo pasado al desarrollo de una nueva disciplina, la electrodinámica estocástica (SED), cuyo objeto era reproducir los resultados cuánticos, y reinterpretar los fenómenos en base a la intervención de la radiación de punto cero del campo electromagnético. Aunque esta teoría dio lugar a importantes resultados, no consiguió explicar aspectos como la cuantización de la energía en el átomo de hidrógeno, por lo que tuvo que descartarse como alternativa a la teoría cuántica. Si bien se lograron algunos éxitos notables, como por ejemplo la explicación del efecto Casimir, hay aspectos que hoy por hoy la SED no ha conseguido explicar.

Sin embargo, una ramificación de la electrodinámica estocástica en el campo de la óptica, la denominada óptica estocástica, ideada por los Drs. T. W. Marshall y E. Santos, surgió a principios de los 80 como alternativa a la óptica cuántica. La óptica estocástica se creó con la idea de explicar los resultados de los experimentos de óptica cuántica utilizando el concepto de radiación de punto cero en lugar del concepto de fotón, regresando a la idea de la luz como algo intrínsecamente ondulatorio. La detección de fotones se entiende, en el ámbito de la óptica

²En principio, se llamó energía residual, el término energía del punto cero es una traducción del germano *Nullpunktsenergie*. Todos los sistemas mecanocuánticos tienen energía de punto cero, cuyo término emerge como referencia al estado base del oscilador armónico cuántico y sus oscilaciones nulas. En la teoría cuántica de campos, la energía de punto cero es un sinónimo de la energía del vacío o de la energía oscura, una cantidad de energía que se asocia con la vacuidad del espacio vacío.

estocástica a partir de la sustracción, a la intensidad total, de la correspondiente al punto cero en la posición del detector, de modo que la intensidad medible es aquella que está por encima del umbral definido por el campo de punto cero.

1.2.3. La función de Wigner y la óptica estocástica

Fue a principios de los 90 cuando óptica cuántica y óptica estocástica encontraron un puente formal a través de la mecánica cuántica en el espacio de fases. La representación de Wigner de la óptica cuántica recupera la idea del punto cero como umbral en la detección, y muestra los efectos del vacío cuántico en los experimentos, en contraposición con el espacio de Hilbert, que lo sustrae directamente a través del ordenamiento normal de operadores. Más aún, todos los experimentos con fotones utilizando la conversión paramétrica a la baja, realizados con el objetivo de mostrar los aspectos no clásicos de la luz, y la violación experimental de desigualdades de Bell, tienen una interpretación estocástica fundamentada en la positividad de la función de Wigner para este proceso, lo que añadió la posibilidad de estudiar el proceso típicamente cuántico de la conversión paramétrica a la baja, mediante ecuaciones de evolución clásicas, simplemente añadiendo a la onda clásica correspondiente al láser la radiación de punto cero a la entrada del cristal. El comportamiento cuántico se trasladaba entonces a la detección, debido a la aparición de "probabilidades negativas", cuando la intensidad total quedaba por debajo del umbral del punto cero. Este trabajo fue desarrollado en la década de los 90, y constituye la línea de investigación que precede a la actual.

Además, la gran similitud entre la función de Wigner para la conversión paramétrica a la baja, y las teorías de variables ocultas locales, llevó a un intento por reproducir los resultados experimentales, modificando la teoría cuántica de la detección, con objeto de tener un modelo de variables ocultas basado en la función de Wigner para el PDC. Sin embargo, los modelos de detección propuestos para tal fin no consiguieron su objetivo.

1.2.4. La información cuántica

Es bien sabido que cualquier tratamiento de la información se realiza siempre utilizando medios físicos, en un principio por medios clásicos pero, en los último 25 años, muchos científicos desarrollaron una idea que Richard Feynman había sugerido en 1982. Feynman se percató de que podría haber serias dificultades para simular sistemas mecánico-cuánticos en computadores clásicos, y sugirió que construyendo computadoras basadas en principios de mecánica cuántica se podrían evitar tales dificultades. Pocos años más tarde, en los 90, varios equipos de investigadores desarrollaron esta idea, demostrando que, sí es posible utilizar computadores cuánticos para simular eficientemente sistemas que no tienen simulación eficiente conocida en un computador clásico.

De este modo, las ventajas que ofrece la teoría cuántica, a través de propiedades que no tienen contrapartida en la física clásica, junto con los experimentos realizados con el fin de mostrar los resultados a que den lugar estas propiedades "mágicas", han constituido la base

para el desarrollo, en la década de los 80, de la información cuántica, en sus aspectos teórico y prácticos.

Entre los temas cubiertos se incluyen: la teleportación cuántica, sin contrapartida clásica; la codificación densa, mediante la cual, son transmitidos dos bits clásicos de información con el envío de sólo un bit cuántico desde el emisor al receptor; la computación cuántica, con el diseño de algoritmos, utilizando efectos cuánticos, muy diferentes a los de los computadores clásicos; la criptografía cuántica, para la que las propiedades de la mecánica cuántica permite establecer una clave de forma que la seguridad entre emisor y receptor no pueda ser vulnerada; corrección cuántica de errores y corrección cuántica tolerante a fallos, para proteger los estados cuánticos del ruido.

1.3. Motivaciones

Esta tesis se nutre de los resultados obtenidos en la línea de investigación anterior, desarrollada en la década de los 90 del pasado siglo, y cuyos padres fueron los Drs. Emilio Santos de la Universidad de Cantabria y Trevor W. Marshall de la Universidad de Manchester, quienes habían desarrollado con anterioridad la óptica estocástica, y encontraron en el formalismo de Wigner el puente entre esta teoría y la óptica cuántica a través de la radiación de punto cero. Esta línea generó una serie de resultados, dentro de la ortodoxia cuántica, encaminados a buscar un modelo realista local, basado en punto cero y electromagnetismo clásico, para todos los experimentos con fotones generados en la conversión paramétrica a la baja. El uso de la función de Wigner en la imagen de Heisenberg permitió establecer la frontera entre mecánica cuántica y realismo local a través de la radiación de punto cero.

Con el desarrollo de la teoría de la información cuántica, los experimentos con fotones que durante muchos años buscaron la violación experimental de las desigualdades de Bell, se convirtieron en los exponentes de la experimentación en el campo de la comunicación cuántica. De este modo, la conversión a la baja se ha convertido en un recurso fundamental en este campo. Más aún, el uso de desigualdades de Bell en procesos de distribución cuántica de clave es un ejemplo claro del vínculo que existe entre los fundamentos de la mecánica cuántica y la teoría de la información cuántica.

El objetivo de esta tesis es manifestar la compleja naturaleza de la luz y del vacío, así como mostrar la belleza de la manipulación multifotónica y sus aplicaciones en los increíbles protocolos de comunicación y computación cuántica, usando el formalismo de la función de Wigner, donde aparece de forma natural un ingrediente esencial de la teoría, el punto cero, como asiento para la dinámica de los fenómenos de la óptica cuántica con fotones generados con PDC. El análisis de los efectos que la radiación de punto cero tiene en estos experimentos, se fundamentará, por un lado, en su intervención en los distintos elementos ópticos, y por otro en su sustracción en la detección, dado que son los dos puntos claves del comportamiento cuántico de la luz. Así, este trabajo aporta, no sólo una perspectiva nueva de evidente interés,

en la que se enfatizan los aspectos ondulatorios de la luz, sino que también se da una visión que contribuye de forma enriquecedora, desde nuestra modesta opinión, al análisis, reinterpretación y esclarecimiento de la dinámica de los procesos de la comunicación cuántica con fotones entrelazados con PDC. Con nuestro análisis, los experimentos de comunicación cuántica con fotones pueden verse bajo el ángulo de la ingeniería del vacío (*vacuum engineering*).

Debemos decir no obstante que este estudio tiene un carácter ortodoxo, puesto que, utilizando un formalismo cuántico, se encuentran reinterpretaciones basadas exclusivamente en la intervención del ZPF. A diferencia de la línea anterior a la que seguimos en esta tesis, no buscamos ninguna relación con el realismo local, aunque entendemos que esa puerta sigue abierta. Sin embargo, también entendemos que la consecución de nuestros objetivos, a partir de estos trabajos y la continuación con posteriores aplicaciones, podría llevar a que la comunidad científica tomase en consideración las interpretaciones alternativas a los distintos experimentos, en base a la acción del punto cero³.

Esta es, actualmente, nuestra motivación.

1.4. Organización de la tesis

El estudio se inicia en el capítulo 2 exponiendo las propiedades de la mecánica cuántica que aportan ventajas en el campo de la información, en relación con su tratamiento clásico, como son: la superposición cuántica; puertas cuánticas y evolución unitaria reversible; la imposibilidad de clonación; los estados entrelazados, la paradoja EPR y desigualdad de Bell; la influencia del entorno y la decoherencia; paralelismo cuántico; interferencia cuántica; y corrección de errores. Propiedades que, además de permitir realizar operaciones imposibles de llevar a cabo por medios clásicos, tienen grandes ventajas, tanto en relación al ahorro de tiempo como de espacio, al aplicarlo a operaciones de computación, criptografía, codificación densa y teleportación; todas ellas sin contrapartida clásica. El futuro de la computación cuántica es prometedor, hay que superar muchos impedimentos antes de comenzar a ver sus ventajas. En nuestra exposición, estas aplicaciones han sido expuestas en el formalismo de Hilbert.

En el capítulo 3 se describe la conversión paramétrica a la baja, y se hace una revisión bibliográfica de los experimentos de comunicación cuántica con fotones, centrándonos en la medida de los estados de Bell, la criptografía cuántica y el teletransporte.

En el capítulo 4 se estudia la función de distribución de Wigner en el campo de la óptica cuántica y sus propiedades más importantes. Para introducir las funciones de distribución de óptica cuántica, hablamos de la conexión entre la descripción estocástica de la radiación electromagnética clásica y las funciones de correlación en óptica cuántica. Expondremos los

³La diferencia fundamental está, dentro de que las dos líneas trabajan en el mismo formalismo, en que la línea precedente buscaba una reinterpretación de los resultados de los experimentos basada en la consecución de un modelo de variables ocultas locales basado en el punto cero, y la línea actual pone énfasis en la influencia del punto cero en los experimentos de comunicación cuántica, e incide sobre la importancia del uso del punto cero para comprender mejor la comunicación cuántica con fotones, pero dentro de la ortodoxia cuántica.

aspectos fundamentales de la óptica cuántica con la función de Wigner en el marco de Heisenberg (WRHP), como la descripción de un haz de luz, las propiedades de la radiación de punto cero, y la teoría de la detección.

En el capítulo 5 se hace primeramente un resumen de los aspectos fundamentales del PDC en la función de Wigner, para continuar con la descripción de los estados de Bell en la WRHP, lo que da comienzo al núcleo de aportaciones originales de la tesis, continuadas en los capítulos 6, 7, 8 y 9.

En el capítulo 6 introduciremos los conceptos básicos de la información cuántica en la WRHP en el campo de la óptica, incidiendo en los efectos que produce la radiación de punto cero. Así, comenzaremos con la descripción del qubit espacial, donde mostraremos la influencia del ZPF que entra por uno de los canales vacíos de un BS en la generación de un qubit fotónico y en sus propiedades. Posteriormente revisaremos los elementos ópticos utilizados en óptica lineal, analizando el efecto que producen sobre las amplitudes del campo eléctrico en la WRHP. En concreto, el análisis del divisor de polarización (PBS) nos permitirá entender la relevancia del ZPF en la implementación de la puerta CNOT. Finalmente haremos una revisión bibliográfica de otros trabajos en los que se usa la función de Wigner en el campo de la información cuántica.

En el capítulo 7, correspondiente a criptografía, estudiamos experimentos de distribución de clave con fotones generados en una PDC tipo II, utilizados en el protocolo de Ekert. Se analiza también la intervención del espía y la influencia del punto cero en la detección de los ataques, en el caso de medidas proyectivas, lo que da ventaja a la distribución cuántica de clave sobre la criptografía clásica. Se compara nuestra interpretación con la usual en el espacio de Hilbert, basada en la relación de incertidumbre y el teorema de compatibilidad. También se analizan en este capítulo los estados GHZ, base teórica del secreto cuántico compartido, y los experimentos de criptografía cuántica con PDC tipo I.

En el capítulo 8 mostramos la importancia del campo de punto cero en la distinguibilidad de los estados de Bell y la relación entre la consideración de un mayor número de grados de libertad para la medida de la base de Bell, lo que da lugar en el espacio de Hilbert al concepto de hiperentrelazamiento, y la extracción de un mayor número de modos de punto cero independientes a la entrada del cristal. También, el análisis de la estadística de dos fotones en un divisor de haz revela la influencia del punto cero en el comportamiento fermiónico de los fotones en el divisor, cuando su estado de polarización está descrito por el singlete.

En el estudio de la teleportación, realizada en el capítulo 9, se comienza con el estudio del intercambio de entrelazamiento a través de las correlaciones cuádruples, lo que revela la estrecha relación entre el colapso del vector de estado y las correlaciones en el formalismo de Wigner a través del punto cero. Analizamos también los dos grandes exponentes del teletransporte cuántico con fotones a nivel experimental, conocidos comúnmente como los experimentos de Innsbruck y de Roma. El desarrollo de los cálculos exige el uso de probabilidades triples y cuádruples en la teoría de la detección, lo que hemos estudiado en los Anexos I y II.

Aunque cada uno de los capítulos 6, 7, 8 y 9 tiene un apartado de conclusiones, dedicaremos el capítulo 10 a la exposición de unas conclusiones generales.

UN ACERCAMIENTO A LA INFORMACIÓN CUÁNTICA

2.1. Introducción

Con el desarrollo de la mecánica cuántica, las teorías de la información y de la computación han experimentado un gran avance, cuando se han extendido, para abarcar el hasta entonces intacto territorio de la transmisión y el procesamiento de los estados cuánticos y la interacción de esta información cuántica con las formas tradicionales de la información. Hasta hace poco se pensaba en la información en términos clásicos, sin embargo, ahora se sabe que una teoría completamente cuántica nos ofrece muchas ventajas. Estas ventajas son debidas a las propiedades cuánticas como: la incertidumbre, la interferencia y el entrelazamiento.

Una teoría de la información basada en principios cuánticos amplía y completa la teoría clásica de la información. Además de las nociones clásicas, la nueva teoría incluye dos tipos de recursos cuantificables: la información clásica y el entrelazamiento cuántico. La información clásica puede copiarse a voluntad, pero sólo puede transmitirse hacia adelante en el tiempo a una velocidad no superior a la de la luz. Por el contrario, el entrelazamiento no puede copiarse, pero puede conectar dos puntos cualesquiera en el espacio-tiempo. El entrelazamiento puede ser destruido con las operaciones clásicas, pero las operaciones cuánticas pueden crearlo y usarlo para acelerar ciertas operaciones clásicas, o ayudar en la transmisión de información clásica o de estados cuánticos.

Muchos de los experimentos que se realizan para contrastar desigualdades de Bell derivan en el entrelazamiento de dos o más partículas, con objeto de aplicarlo en el desarrollo de nuevos sistemas de comunicación y procesamiento de información y encriptación segura, transmitiendo fotones, en estados entrelazados, a través de fibra óptica y por aire a varios kilómetros de distancia. A su vez, el desarrollo de la teoría de la información cuántica está desarrollando elementos, como puede ser el hiperentrelazamiento de fotones (entrelazamiento en más de un grado de libertad), para su aplicación en contrastar el realismo local. La violación de desigualdades de Bell se utiliza en la actualidad, no sólo para destacar los aspectos no clásicos que predice la mecánica cuántica, sino como testigo de entrelazamiento en las medidas realizadas

en sitios remotos. Implícitamente, los autores de estos experimentos parecen asumir que la mecánica cuántica es la mejor descripción de la realidad que tenemos y - como se ha hecho durante los últimos 100 años - por eso, es por lo que la ponen a trabajar.

La información cuántica trata de la información que utiliza propiedades cuánticas de los sistemas físicos. Es un campo que abarca tanto esfuerzos teóricos como implementaciones experimentales, y que incluye, entre otros, los siguientes subcampos interrelacionados: computación cuántica (ordenadores cuánticos, algoritmos cuánticos y simuladores cuánticos), criptografía cuántica (y su generalización, la comunicación cuántica), corrección cuántica de errores, entrelazamiento y complejidad en la comunicación cuántica.

Aunque las propiedades de las superposiciones y del entrelazamiento cuántico, que hemos comentado, se conocen desde los años 30 del siglo pasado, el nacimiento de la información cuántica está ligado a las ideas de ordenador cuántico (Benioff [26], Feynman [117] y Deutsch [108]) y distribución segura de claves por métodos cuánticos en los años 80 del pasado siglo [38]. Su rápido crecimiento, en los 90, está motivado por el descubrimiento de los primeros algoritmos cuánticos, particularmente el de Shor, los métodos cuánticos de corrección de errores, las propuestas de implementación experimental de ordenadores cuánticos, la realización práctica de la criptografía cuántica, y toda una serie de avances tecnológicos relacionados con la manipulación de sistemas genuinamente cuánticos.

La teoría de la información clásica se interesa, principalmente, en el problema del envío de información sobre canales de comunicación, los cuales operan de acuerdo con las leyes de la física clásica. La información clásica está contenida en el estado de un sistema físico, descrito por medio de parámetros continuos como los voltajes, desconocidos para un receptor que, al realizar una medida, siempre consigue la identificación de ese estado lo cual, en física clásica y en principio, siempre es posible. La situación más simple consiste en un sistema físico, denominado bit, preparado en uno de los dos posibles estados: 0 y 1, restaurados periódicamente para que no se pierdan a causa de diferentes motivos. Una memoria de n bits puede estar en cualquiera de los 2^n estados, desde el $00\dots 0$ hasta el $11\dots 1$. Los ordenadores clásicos los almacenan y los manipulan mediante operaciones booleanas para realizar cualquier operación.

En esta descripción se recalca el papel que juega la teoría física en el concepto de información y, ahora, se considera la situación análoga en el contexto de la teoría cuántica, donde cada bit cuántico puede hallarse en un instante dado en una de las infinitas superposiciones que se pueden generar a partir de los estados clásicos, reduciéndose así el tiempo de ejecución de algunos algoritmos de miles de años a segundos. De este modo, la información cuántica está contenida en un estado cuántico dado, desconocido. Esta aparente generalización natural de la situación cuántica difiere drásticamente de su imagen clásica.

2.2. El bit cuántico

El sistema cuántico más simple es un sistema de dos niveles, al que se le denomina *qubit* (un espín nuclear o un fotón), para referirse a un sistema de dos niveles con una base ortonormal preferentemente elegida como $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. El qubit estaría representado por una combinación lineal de los estados de la base antedicha (base computacional):

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1)$$

donde α y β son números complejos y frente a cualquier medida del observable del cual el $|0\rangle$ y el $|1\rangle$ son estados propios, $|\alpha|^2$ es la probabilidad de obtener 0, y $|\beta|^2$ la de encontrar 1. Obviamente, debido a la condición de normalización, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

La implementación de qubits con fotones (*qubits fotónicos*) se puede hacer de varias formas [208]:

1. Utilizando la polarización del fotón tendríamos dos estados en la conocida como base rectilínea: el correspondiente a polarización vertical, $|V\rangle = |0\rangle$ y el autoestado de polarización horizontal, $|H\rangle = |1\rangle$. El qubit vendría representado por la superposición:

$$|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle. \quad (2.2)$$

2. También, utilizando el momento del fotón (modos espaciales o caminos), se tiene lo que se conoce como *qubit espacial*. Se consigue, por ejemplo, a partir de un divisor de haz. Si un fotón con momento definido incide por uno de los canales de entrada del divisor, siendo a y b los modos de salida, el qubit que surge del divisor de haz se puede expresar:

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle. \quad (2.3)$$

3. Otra posibilidad es generar un *time-bin qubit* a partir de un interferómetro Mach-Zehnder. Si un pulso (conteniendo un fotón) incide sobre el primer divisor del interferómetro, y éste tiene una diferencia de caminos mayor que el tamaño del pulso, el estado correspondiente al fotón que sale por una de las salidas del segundo divisor, suponiendo que la otra salida no contiene ningún fotón, es una superposición de estados (dos pulsos):

$$|\psi\rangle = \alpha|l\rangle + \beta|s\rangle, \quad (2.4)$$

donde l y s se refieren a los caminos largo y corto del interferómetro respectivamente. La fase relativa puede ajustarse mediante un *phase-shifter* en uno de los brazos.

El estado general de un qubit puede representarse por dos parámetros θ y φ :

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (2.5)$$

Y gráficamente, a partir de un punto de la esfera de Bloch.

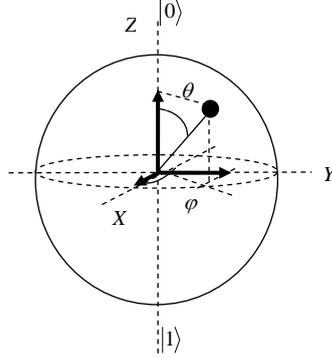


Figura 2.1: Representación de un qubit en la esfera de Bloch. Los estados ortogonales se corresponden con puntos opuestos en la esfera, y el bit cuántico está representado por un punto de la superficie esférica.

El qubit se puede expresar por medio de una matriz columna. Así, la ecuación (2.1), es equivalente a

$$|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2.2.1. Puertas lógicas cuánticas sobre un qubit

Al igual que los bits clásicos, que son manipulados por puertas lógicas clásicas, un qubit puede ser manipulado utilizando puertas cuánticas. Lo mismo que un qubit, una puerta cuántica puede ser descrita en forma matricial

$$G \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En forma de matriz, una puerta cuántica G debe ser unitaria, es decir, que satisfaga $GG^+ = G^+G = I$, donde G^+ es la conjugada traspuesta de G . Esto se debe a que cualquier puerta puede ser descrita gráficamente como una rotación en la esfera de Bloch, de modo que, cuando un qubit pasa a través de puertas cuánticas, el nuevo vector de estado que lo representa resulta ser un giro en la esfera de Bloch. Estas puertas se implementan en el laboratorio, mediante apropiados dispositivos ópticos.

Esta matriz, al $|0\rangle$ lo convierte en $a|0\rangle + c|1\rangle$, y al $|1\rangle$, en $b|0\rangle + d|1\rangle$. Un ejemplo de puerta cuántica es la puerta cuántica U_{NOT} , que tiene la representación de la matriz

$$U_{NOT} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Utilizando la forma matricial, el nuevo estado, después de una puerta cuántica, puede

calcularse mediante el producto de matrices. Por ejemplo, cuando un qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ atraviesa una puerta NOT (U_{NOT}), el estado cambia a

$$|\psi'\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Otra puerta cuántica de gran importancia es la Hadamard (U_H). La forma matricial de esta puerta es

$$U_H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

y es capaz de hacer los siguientes cambios de estados

$$U_H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.11)$$

$$U_H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle). \quad (2.12)$$

Junto con la puerta Hadamard, la puerta “cambio de fase”:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

constituyen las operaciones básicas sobre un qubit, de tal modo que cualquier otra operación unitaria sobre un qubit puede expresarse a partir del producto de sucesivas operaciones Hadamard y cambio de fase [25].

2.2.2. Qubits múltiples. La puerta CNOT

El espacio de Hilbert de un sistema multiqubit es el producto tensorial de los espacios asociados a los qubits individuales. Por ejemplo, un estado de dos qubits es una combinación lineal de los cuatro estados de la base, $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \quad (2.14)$$

con α , β , γ y δ , números complejos, y

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (2.15)$$

Un número n de qubits puede estar en 2^n estados y en cualquier superposición de ellos

$$|\psi\rangle = \sum_{00\dots 0}^{11\dots 1} c_x |x\rangle. \quad (2.16)$$

Este vector tiene dimensión 2^n , donde c_x son números complejos tal que $\sum_x |c_x|^2 = 1$. La mayor dimensionalidad de este espacio distingue los ordenadores cuánticos de los clásicos, ya que en estos, el estado tiene un número de parámetros que crece linealmente con el tamaño del sistema.

Al igual que en el caso de un solo qubit, un sistema de dos qubit puede ser representado mediante una matriz columna de 4×1 , y una puerta de dos qubit se puede representar con un matriz de 4×4 . Un ejemplo de una puerta de dos qubit es la control-NOT ó XOR, U_{XOR} . Esta puerta se compone de un qubit control, $|x\rangle$, y de un qubit objetivo, $|y\rangle$. El qubit objetivo se invierte sólo cuando el qubit de control sea $|1\rangle$. Suponiendo que $|x\rangle$ es el qubit de control, la acción de la puerta se puede escribir como $U_{\text{XOR}}|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle$. Realmente, realiza una permutación sobre la base, de la siguiente manera:

$$U_{\text{XOR}}|00\rangle \rightarrow |00\rangle ; U_{\text{XOR}}|01\rangle \rightarrow |01\rangle ; U_{\text{XOR}}|10\rangle \rightarrow |11\rangle ; U_{\text{XOR}}|11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (2.17)$$

Esto es equivalente a

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Si el segundo qubit es $|0\rangle$, siendo el primero $|x\rangle$, al primero no lo cambia y al segundo lo convierte en una copia del primero $U_{\text{XOR}}|x0\rangle \rightarrow |xx\rangle$, ($x=0$ ó 1). Esto no significa que pueda copiarse cualquier superposición $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (teorema de *no cloning*) [264], puesto que el resultado sería un estado entrelazado. Veámoslo:

$$U_{\text{XOR}}|\psi0\rangle \rightarrow \alpha U_{\text{XOR}}|00\rangle + \beta U_{\text{XOR}}|10\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle. \quad (2.19)$$

2.3. La paradoja EPR y las desigualdades de Bell

En la física clásica hay dos aspectos ampliamente aceptados: por un lado, la condición de *realismo*, según la cual las magnitudes físicas tienen valores que son independientes de la observación, de tal modo que el resultado de una medición en un sistema físico se determina antes y con independencia de la medida. Por otro lado, el resultado de una medida no puede depender de las acciones en regiones separadas del espacio, lo que constituye la condición de *localidad*.

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen llegaron a la conclusión de que la mecánica cuántica era una teoría incompleta [111]. Para ello, propusieron el siguiente criterio como condición suficiente de realidad:

“Si, sin perturbar de ningún modo a un sistema físico, se puede predecir con certeza el valor de una magnitud, entonces existe un elemento de realidad correspondiente a dicha magnitud.”

El argumento EPR consistió en llegar a identificar en un sistema físico elementos de realidad asociados a magnitudes que en mecánica cuántica son incompatibles¹, para lo cual el uso del entrelazamiento es crucial. A continuación, daremos una explicación de la paradoja similar a la versión de Bohm [49, 50], pero usando un lenguaje característico de la información cuántica. Imaginemos que Alicia y Bob comparten un sistema de dos qubits en el estado singlete.

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle)_{ab}, \quad (2.20)$$

donde a y b representan a Alicia y a Bob, respectivamente. Según la mecánica cuántica, si Alicia hace una medida sobre el qubit a , el estado del qubit colapsará a $|0\rangle$ con una probabilidad de $1/2$. Por otra parte, Alicia de inmediato sabe que el estado del otro qubit (qubit b) debe de ser $|1\rangle$. En otras palabras, una vez que se obtiene el resultado de la medición de un qubit, el estado del otro qubit se conoce instantáneamente, sin importar a qué distancia se encuentran Alicia y Bob. Un resultado similar ocurre si el resultado de la medida de Alicia es $|1\rangle$. Por tanto, si se verifica la condición de localidad, se puede afirmar que este elemento de realidad en la parte de Bob existía incluso antes de la medida de Alicia, lo cual es inconsistente con la descripción dada en (2.20), en la que no se puede afirmar nada sobre las propiedades de los sistemas individuales. Además, la invariancia rotacional que caracteriza al singlete es fundamental para llegar a otra contradicción: la existencia de elementos de realidad en magnitudes incompatibles.

El argumento EPR sugiere la incorporación de las denominadas *variables ocultas locales*, para completar la mecánica cuántica, pero este tema no avanzó de forma sustancial hasta tres décadas más tarde, cuando John Bell demostró que existen estados cuánticos cuyas predicciones no pueden ser reproducidas por teorías de variables ocultas locales (LHVT) [23].

Bell encontró que la correlación entre dos mediciones, para cualquier modelo local, debe necesariamente cumplir con un conjunto de desigualdades que hoy conocemos como las desigualdades de Bell, cuya forma más usual es [96]:

$$S(a, b, a', b') = |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| \leq 2, \quad (2.21)$$

donde $E(a, b)$ es el coeficiente de correlación de las mediciones a lo largo de, a , a' , b y b' . S es el parámetro de Bell y tiene el significado de una correlación de segundo orden. Se ve fácilmente que, un estado singlete de dos partículas de spin $1/2$ (estado de Bell) viola esta desigualdad, con $S = 2\sqrt{2}$ para un conjunto específico de direcciones analizadas. Llegamos a la conclusión de que, un sistema regido por variables ocultas locales (LHV) - un sistema que puede describirse por una teoría local - no puede imitar el comportamiento de los estados entrelazados y, por lo tanto, que la teoría cuántica debe ser una teoría no local. Es interesante

¹Sus observables asociados no conmutan entre sí.

notar que, la puesta a punto para pruebas de las desigualdades de Bell es idéntica a la que se necesita para medir la matriz densidad de un estado de dos qubits.

Otro enfoque, para ver si las teorías de variables ocultas pueden imitar el comportamiento cuántico, se basa en el concepto de no contextualidad. Esto significa que el valor de medida de un observable no debe depender del contexto, por ejemplo, otros observables de la trayectoria, que se miden de forma simultánea. Kochen y Specker [158] e, independientemente Bell [24], mostraron que, dado un espacio de Hilbert de al menos tres dimensiones y, partiendo del supuesto de la no contextualidad, sí es posible demostrar un teorema que vaya en contra de teorías de variables ocultas. Por muchos años fue una pregunta abierta, cómo probar experimentalmente el teorema Bell-Kochen-Specker, hasta que en el año 2000, Simon et al. [237] propusieron un experimento basado en las mediciones de una sola partícula que está en un estado entrelazado de dos grados de libertad².

2.4. Evolución cuántica reversible

Un sistema cuántico aislado evoluciona de forma reversible. La ecuación de Schrödinger nos dice que:

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Aquí $|\psi\rangle$ es el estado del sistema - que podría ser cualquiera, desde un simple qubit hasta cualquier interacción compleja de grados de libertad - y \hat{H} es el hamiltoniano total. Esto puede integrarse para dar el estado en cualquier momento. Evolución unitaria y superposición son los principios básicos de la mecánica:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle, \quad (2.23)$$

donde el operador unitario es $\hat{U} = \exp\left[-(i/\hbar) \int_0^t dt' \hat{H}\right]$.

Consideremos un gran número de sistemas cuánticos idénticos que no interactúan, donde cada miembro de este conjunto está en el estado $|\psi\rangle$. El conjunto se puede describir por el operador densidad, definido por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \beta\alpha^* \\ \alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

La entropía por miembro del sistema puede describirse como:

$$S = -kTr(\rho \ln \rho), \quad (2.25)$$

donde k es la constante de Boltzmann. Para cualquier conjunto puro, en el que todos los sus miembros están en el mismo estado ($\rho^2 = \rho$), es fácil mostrar que la entropía desaparece. Como

²Para una revisión del problema EPR ver [165].

todos los miembros están en el mismo estado no hay falta de conocimiento. La ecuación de Schrödinger, para ρ será:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho], \quad (2.26)$$

que integrada da $\rho(t) = U\rho(0)U^+$. Esto nos dice que la evolución unitaria de Schrödinger preserva la entropía, o sea que es una evolución reversible. La entropía de un sistema cuántico cerrado no cambia, cuando evoluciona reversiblemente.

2.5. Influencia del entorno

Un canal clásico es una ruta de comunicación que puede utilizarse para transmitir información clásica de un emisor a un receptor. Por ejemplo, una fibra óptica que permita a Alicia enviar mensajes de voz a Bob es un típico canal clásico. Dependiendo de si el canal se puede escuchar o leer por un tercero no autorizado, los canales clásicos pueden clasificarse en canales clásicos públicos y canales clásicos privados.

Un canal clásico privado es un canal, con ciertos mecanismos adecuados, capaces de mantener la privacidad e integridad de los mensajes transmitidos a través del mismo. El término privacidad se refiere al hecho de que los datos transmitidos por el canal no pueden ser leídos por ninguna persona o revelados sin autorización. Se trata principalmente de algoritmos de cifrado de datos y claves secretas. Un mecanismo de cifrado, junto con una clave secreta, puede utilizarse para traducir el mensaje de tal forma que no se pueda leer sin la clave secreta. Por integridad se entiende que el mensaje de la fuente no puede ser alterado o destruido. En otras palabras, los mensajes intercambiados entre Alicia y Bob, se mantienen inalterados durante el proceso de transmisión.

Como contraste, un canal clásico público es un canal que mantiene sólo la integridad de los datos, independientemente de la privacidad. En otras palabras, un canal clásico se puede utilizar para transmitir información clásica de Alicia a Bob sin ser modificada por espías. Sin embargo, cualquier persona, espías incluidos, puede leer el mensaje original. La radiodifusión, en un entorno sin interferencias, es un ejemplo de un canal clásico público. En general, este tipo de canal es un supuesto más débil en comparación con un canal clásico privado.

Un canal cuántico es un canal de comunicación que se puede utilizar para transmitir información cuántica, de un emisor a un receptor, en contraste con un canal clásico que transmite sólo la información clásica. En otras palabras, un canal cuántico puede ser utilizado para transmitir un estado cuántico descrito en la ecuación (2.1). Un ejemplo de canal cuántico es una fibra óptica que se puede utilizar para transmitir y mantener la polarización de fotones.

La dependencia de los sistemas macroscópicos en su entorno se estudia bajo el supuesto de que la teoría cuántica es universalmente válida. La decoherencia resultante determina las propiedades clásicas de los sistemas macroscópicos. De esta manera, las propiedades locales clásicas tienen su origen en el carácter no local de los estados cuánticos, por lo que habrá una

forma de representar los datos y operaciones clásicas dentro del formalismo cuántico.

Un canal clásico es capaz de transmitir bits 0's y 1's, de manera fiable, que son equivalentes a los qubits $|0\rangle$ y $|1\rangle$, pero no superposiciones. No obstante, éstas pueden ejecutarse utilizando la puerta XOR, pues según esta puerta, $U_{\text{XOR}}|x0\rangle \rightarrow |xx\rangle$, con un $|0\rangle$ en la posición del objetivo y desechándolo a continuación. Es decir, la información clásica es como un proceso cuántico que interactúa con el entorno de forma irreversible transmitiéndose el qubit control que ha tomado el valor 0 ó 1.

Cualquier procesado de datos clásicos se puede hacer de manera similar por procesamientos cuánticos, complementándolos por la interacción con un entorno cuántico que luego se descarta. Estas interacciones, que entrelazan con el entorno, se conocen como decoherencia y cambian el comportamiento de un sistema, desde el cuántico al clásico. La decoherencia está siempre presente cuando un sistema interactúa con otros sistemas, por lo tanto, debe considerarse como un sistema abierto.

La decoherencia representa un problema importante para la realización práctica de la computación cuántica, ya que ésta depende, en gran medida, de la evolución sin alteración alguna de la coherencia cuántica. El número máximo de pasos posibles en una computación está dado, más o menos, por la relación entre, τ_ζ , tiempo para el que un sistema permanece mecanocuánticamente coherente y τ_{op} , tiempo que tarda en realizar transformaciones unitarias elementales (que involucra al menos a dos qubits). Estos dos tiempos están realmente relacionados entre sí, ya que, dependen de la fuerza de acoplamiento del sistema con el mundo exterior. No obstante, la relación $\lambda = \tau_{op}/\tau_\zeta$, puede variar en un amplio rango.

Buena parte de este pesimismo se ha disipado con el descubrimiento de la computación cuántica tolerante a fallos (*Fault-tolerant quantum computation*, FTQC). El descubrimiento de la corrección cuántica de errores ha mejorado las perspectivas a largo plazo para la tecnología de la computación cuántica. El codificado de la información se puede ver protegido de los errores que surgen, debido a la interacción no controlada con el medio ambiente, o debido a la implementación imperfecta de las operaciones de lógica cuántica. La recuperación del estado debido a errores puede trabajar con eficacia, aunque ocasionalmente se producen errores durante el procedimiento de recuperación. Además, la información cuántica codificada puede procesarse sin la propagación de errores graves. En principio, una computación cuántica arbitrariamente larga se puede realizar de forma fiable, siempre que la probabilidad promedio de error por la puerta sea inferior a un cierto valor crítico, el umbral de precisión. Puede ser posible incorporar tolerancia a fallos intrínsecos en el diseño de hardware de la computación cuántica, tal vez al recurrir a interacciones topológicas de Aharonov-Bohm en procesos de información cuántica.

2.6. El paralelismo cuántico

El paralelismo cuántico surge de la capacidad de un registro de memoria cuántica de poder estar en una superposición de estados de la base. Cada componente de esta superposición puede considerarse como un solo argumento de una función. Una vez ejecutada la función, ésta se ejecuta en cada una de las componentes de la superposición. Dado que el número de estados posibles es 2^n , donde n es el número de qubits en el registro cuántico, en un ordenador cuántico se puede realizar una operación para la que sería necesario un número exponencial de operaciones en un ordenador clásico, es decir se transforma un problema exponencial en polinomial. Esto es fantástico, pero en cuanto mayor es el número de estados superpuestos en el registro, menor es la probabilidad de que al hacer una medida, resulte un valor particular.

La computación de la función f corresponde a una evolución unitaria U_f que transforma $|a\rangle|b\rangle$ en $|a\rangle|b \oplus f(a)\rangle$. Si el registro de entrada es una superposición de valores $\sum_{a \in A} |a\rangle$, aplicando U_f con $b=0$, por linealidad de las evoluciones cuánticas, la salida será $|a\rangle|f(a)\rangle$. Al actuar U_f una vez, todos los valores de f estarán en superposición $\sum_{a \in A} |a\rangle|f(a)\rangle$ de estados entrelazados en los registros de entrada y salida.

2.7. Teoría de la información cuántica

La información cuántica trata las nociones clásicas de fuente y canal, así como de las técnicas de codificación, destacando la compresión y el cálculo de entrelazamiento y las capacidades de los distintos canales.

Físicamente, un canal cuántico puede describirse como la transferencia de un cierto sistema cuántico desde el emisor hasta el receptor. Si durante la transferencia, la información permanece intacta y sin perturbación, el canal es sin ruidos, si el sistema cuántico interactúa en ruta con algún otro sistema, de forma que la información queda perturbada el resultado es un canal con ruido cuántico. Los canales cuánticos pueden ser utilizados para transportar información clásica, y, si no son demasiado ruidosos, son aptos para transmitir estados cuánticos intactos y compartir entrelazamiento entre partes separadas en distancia. A diferencia de los canales clásicos, que están debidamente caracterizados por una capacidad única, los canales cuánticos tienen varias capacidades diferentes. Estos incluyen una capacidad clásica C , para la transmisión de información clásica, una capacidad cuántica Q , para la transmisión de estados cuánticos de manera fidedigna, una capacidad cuántica asistida clásicamente, Q_2 , para transmitir estados cuánticos de forma fidedigna con la ayuda de una doble vía clásica en ambos sentidos y, por último, C_E que es la capacidad clásica asistida por entrelazamiento, que definimos como una capacidad de canal cuántico para transmitir información clásica con la ayuda ilimitada de entrelazados puros, compartidos previamente, entre emisor y receptor [56]. En la mayoría de los casos se conocen sólo las cotas superior e inferior de estas capacidades, no la capacidad en sí mismo [41, 13].

En el caso de pares de partículas entrelazadas, compartidas entre dos partes, entre el emisor y el receptor no se atribuye ninguna capacidad para transmitir información clásica, ni puede crecer la capacidad de un canal clásico más allá de lo que habría sido sin el entrelazamiento. Esto se deriva del hecho de que la manipulación local de uno de los dos subsistemas entrelazados, no puede influir en la expectativa de cualquier observable local del otro subsistema [33]. Esto, a veces, se denomina restricción de la causalidad, ya que su violación haría posible el envío de mensajes al pasado.

Por otra parte, es bien sabido que el previo entrelazado puede mejorar la capacidad clásica de los canales cuánticos. En el efecto conocido como código denso, descubierto por Wiesner [39], la capacidad clásica de un canal cuántico sin ruido se duplica por entrelazamiento previo. En otras palabras, $C_E=2C$, para cualquier canal cuántico sin ruido. Se demuestra que, para algunos canales, esta mejora persiste, e incluso aumenta, cuando el canal se hace más ruidoso, incluso después de que el canal se ha vuelto tan ruidoso que sus capacidades cuánticas, Q y Q_2 , desaparecen, y los canales pueden ser simulados por acciones locales y comunicación clásica entre el emisor y el receptor. Esto es, tal vez sorprendente, ya que podría parecer que cualquier canal cuántico, que pudiera simularse clásicamente, debería comportarse como un canal clásico en todos los sentidos, en particular, no tener una mayor capacidad por entrelazamiento previo. De hecho, no hay contradicción porque, incluso, cuando un canal cuántico puede ser simulado clásicamente, la simulación, necesariamente, implica una cierta cantidad de comunicación clásica progresiva desde el emisor al receptor, y esta información nunca es menor que la capacidad del canal asistido por entrelazado. Así, para cualquier canal cuántico, $C \leq C_E \leq \text{FCCC}$, donde FCCC es el coste de la comunicación clásica favorecida, es decir, el avance de la capacidad clásica necesaria, junto con otros recursos, para simular el canal cuántico.

2.8. Compresión cuántica

Existe analogía entre la teoría clásica y la cuántica en las técnicas de codificación de fuentes y canales. Supongamos que se muestrean n caracteres de un alfabeto finito Σ , dando una distribución de probabilidad p . En teoría de la información clásica, la entropía de Shannon de cada carácter es $H = -\sum p(a) \log p(a)$. La tasa de compresión es el cociente entre la longitud de una cadena sin comprimir y la longitud cuando está comprimida. Hay muchos algoritmos para la compresión de datos en el dominio clásico.

Un algoritmo de compresión de datos tan eficiente como ampliamente utilizado se debe a Ziv y Lempel [99]. Es un simple algoritmo de compresión sin pérdida lineal en el tiempo, que tiene una tasa de compresión asintótica, al acercarse a la entropía de la fuente, es decir permite que una cadena de longitud n , se comprima sin pérdida, en una cadena de bits de longitud que se aproxima asintóticamente a $H_\Sigma(p)n$ al crecer n . En el primer paso, utilizan un esquema de análisis para codificar la cadena de origen en prefijos únicos. En el segundo paso, se utiliza esta información codificada para recuperar la cadena original sin error.

Desafortunadamente, desarrollar una analogía cuántica de compresión de datos, de Ziv y Lempel, en el dominio clásico, no es trivial, pues al conservar la traza de prefijos, se requieren múltiples mediciones de los qubits, que hace la operación irreversible. La misma dificultad aparece en el resto de los algoritmos de compresión clásica conocidos [99].

Para disminuir, en lo posible, el número de qubits utilizados para la comunicación y almacenamiento cuánticos, puede ser muy ventajoso utilizar métodos de compresión. Holevo [145] y Fuchs y Cuevas [121], tienen resultados que implican que los métodos cuánticos no pueden aumentar el ancho de banda para transmitir información clásica. Sin embargo, los estados cuánticos entrelazados se pueden comprimir mucho más de lo que es posible vía compresión sin pérdida clásica. Según Schumacher [228], se supone que hay un conjunto de estados cuánticos finitos $(\Sigma'p)$, que es un estado mixto que consiste en un número finito de estados $\Sigma = [|a_0\rangle \dots \dots |a_{|\Sigma|-1}\rangle]$, donde $|a_i\rangle$ tiene una probabilidad p_i . El compresor actúa sobre los bloques de n qubits (lo que es un compresor de bloque), componiendo el conjunto $(\Sigma'p)$: la matriz densidad de $(\Sigma'p)$ es $\rho = \sum p_i |a_i\rangle \langle a_i|$ donde $|a_i\rangle \langle a_i|$ es el operador que proyecta sobre $|a_i\rangle$. La entropía de von Neumann [255, 228], correspondiente a $(\Sigma'p)$ es $H_{VN}(\rho) = -Tr(\rho \log \rho)$, donde Tr es la traza del operador. En general, la entropía de Shannon, $H(p)$, es mayor o igual que la entropía de von Neumann. Estas entropías son iguales sólo cuando los estados en Σ' son ortogonales.

La compresión y descompresión unitarias han de conservar el número de bits (algunos de los cuales se ignoran). Una compresión cuántica de n a n' es una transformación unitaria que asigna a cadenas de n qubits, cadenas de n' qubits. Los primeros n' , que salen del compresor, se toman como la versión comprimida de su entrada, y los restantes, $n - n'$, se descartan. Una descompresión de n' a n es una transformación unitaria que asigna cadenas de n qubits a cadenas de n' qubits; los primeros n' que entran al descompresor son la versión comprimida de los n qubits sin comprimir, y los restantes $n - n'$ qubits son todos 0. La fuente para el esquema de compresión se supone que es una secuencia de n qubits muestreados de forma independiente, a partir de los $(\Sigma'p)$. La emisión que se observa es el resultado de la compresión de los primeros qubits de entrada, a continuación los descomprime y, finalmente, mide los resultados (sobre una base que contiene n entradas). La fidelidad del esquema de compresión es la probabilidad de que el producto observado sea igual al de entrada original (es decir, la probabilidad de que los qubits sean los originales, correctamente recuperados, de los qubits comprimidos). El objetivo a conseguir es una compresión cuántica con alta fidelidad y alta relación de compresión.

2.9. Corrección de errores

Sabemos que los estados cuánticos son muy delicados. La principal diferencia entre un estado cuántico y un estado clásico es que un estado cuántico puede estar en una superposición de múltiples estados clásicos diferentes. Sin embargo, cualquier medida de la superposición derrumbará el estado cuántico en uno de los estados clásicos de sus componentes. De hecho,

la mayoría de las interacciones con el medio ambiente actúan como una medida, con el consiguiente colapso del estado. Esta es la razón de que el mundo a escala humana se vea clásico: los objetos grandes interactúan, por poco que sea, con su entorno, por lo que están constantemente colapsando en sus estados clásicos. Este proceso se conoce por *decoherencia*.

La decoherencia es un gran problema para un ordenador cuántico. Si no podemos detener su interacción con el medio ambiente, no será mejor que un ordenador clásico. Detener la decoherencia es el mismo problema que detener el ruido. La solución al problema es usar un código de corrección de errores cuánticos. El código clásico de corrección de errores, más sencillo, es el código de repetición. Nos codifica un 0 como 000 y un 1, como 111. Entonces, si cambia un sólo bit, se obtendría el estado de 011, pudiendo deducirse que el estado inicial era el 111.

Para un código cuántico, necesitamos un bit más. Los signos de los estados en una superposición cuántica son importantes, por lo que necesitamos poder corregir errores de signo, así como errores de cambio de bit. Para ello, podemos utilizar nueve qubits en lugar de tres:

$$|0\rangle \rightarrow (|000\rangle + |111\rangle) \otimes (|000\rangle + |111\rangle) \otimes (|000\rangle + |111\rangle), \quad (2.27)$$

$$|1\rangle \rightarrow (|000\rangle - |111\rangle) \otimes (|000\rangle - |111\rangle) \otimes (|000\rangle - |111\rangle). \quad (2.28)$$

A continuación, mediante la comparación de los qubits dentro de los bloques de tres, podemos detectar errores de cambios de bit, y al comparar los signos de los tres bloques, podemos detectar errores de signos. Utilizando este código, es posible corregir un error cuántico en un qubit arbitrario.

Este es el código cuántico más simple. Se conocen muchos más, existiendo, además, una teoría bien desarrollada de códigos de corrección de errores cuánticos.

Si queremos preservar un estado cuántico por largo tiempo, sin hacer ningún cálculo, o, si queremos enviarlo a través de un canal de comunicación con ruido, podemos codificar el estado, utilizando un código cuántico y decodificarlo cuando hayamos terminado. Si queremos hacer el cálculo en un estado, con puertas con ruido, necesitamos saber cómo realizar operaciones en los estados que ya están codificados. Por otra parte, habrá que hacerlo de tal manera que, no se introduzcan más errores que no se puedan corregir. En otras palabras, necesitamos que la computación sea tolerante a fallos [239, 240, 212, 138, 236, 8, 157].

2.10. Fotones entrelazados como recurso en computación y comunicación cuánticas

El entrelazado cuántico se ha convertido en un recurso importante para muchas tareas que procesan información cuántica, como la computación cuántica, ó la comunicación cuántica. Desde el primer momento, el entrelazamiento demostró ser una herramienta esencial para

la física cuántica, tanto en la teoría como en la práctica: desde un principio, las prácticas experimentales del entrelazado de pares de fotones se utilizaron para demostrar la naturaleza cuántica de las correlaciones de polarización, y entre otras aplicaciones probar el teorema de Bell. Una vez descubierto el procesamiento de la información por medio de la física cuántica, en parte provocado por la introducción de la criptografía cuántica y, por lo tanto, el principio de la ciencia de la información cuántica, el entrelazado, se ha ganado el derecho de ser un recurso fundamental, como un canal para la comunicación cuántica, por ejemplo, para la teleportación cuántica, o la codificación densa cuántica, o como un recurso en la computación cuántica.

La codificación densa es una forma de transmitir dos bits de información por medio de sólo una de dos partículas entrelazadas, cada una de las cuales, individualmente, puede llevar sólo un bit de información [39]. La idea básica de teleportación cuántica es transferir el estado de un sistema cuántico a otro sistema cuántico, localizado a distancia, habiendo sido propuesto por: Bennett, Brassard, Crépeau, Jozsa, Peres y Wootters [33].

La óptica cuántica ha probado, con mucho éxito, la implementación, tanto de la codificación densa como de la teleportación cuántica. Los dos ingredientes cruciales para las implementaciones ópticas son: la fuente de fotones entrelazados y los analizadores de estados de Bell.

En [195] se presenta la demostración experimental de la codificación densa cuántica. En [63,33] se describe el experimento de la teleportación cuántica realizada en Innsbruck, en el cual, el estado de polarización de un fotón es teleportado, utilizando un par de fotones entrelazados como auxiliar. En [211] se describe el experimento propuesto por Popescu realizado en Roma [55] en el cual, el estado de polarización preparado en uno de los fotones de un par entrelazado en momento es transferido a su pareja localizada a distancia.

2.11. Codificación densa

La capacidad de un solo qubit para una comunicación clásica no puede ser mayor de un bit. Para establecer la capacidad máxima, el emisor, Bob, prepara el qubit en uno de los estados $|0\rangle$ ó $|1\rangle$ con igual probabilidad. El receptor, Alicia, puede distinguir perfectamente estos estados ortogonales, mediante una medida en la base conveniente y adquiere, consecuentemente, un bit de información. Según el teorema de Holevo [144], si Bob intenta codificar más información en el qubit utilizando señales con estados no ortogonales, Alicia no podrá distinguirlos suficientemente, para obtener más de un bit de información sobre la identidad de la señal. Sin embargo, si el qubit está entrelazado con otro qubit, por ejemplo, $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$, entonces, se puede utilizar para comunicar dos bits de información clásica desde Alicia a Bob. Este es el proceso de codificación densa ideado por C.H. Bennet and S.J. Wiesner [39], doblando la capacidad de información, al utilizar un qubit entrelazado con otro.

Alicia y Bob están separados, sin importar la distancia, compartiendo un par de qubits

entrelazados, en el estado:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.29)$$

Con este estado, Bob puede preparar cualquiera de los estados de Bell, manipulando localmente su qubit, con las operaciones:

$$U_{00} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$U_{01} = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$U_{10} = -X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$U_{11} = -iY = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

donde I es la identidad, y X , Y , y Z son las *matrices de Pauli*. De este modo, el estado de los dos qubits queda en uno de los siguientes estados entrelazados:

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (2.34)$$

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.35)$$

$$|\phi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (2.36)$$

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (2.37)$$

Con lo que, para comunicar dos bits, ij , Bob aplica U_{ij} a su bit y lo envía a Alicia, que, al recibirlo, realiza una medida de Bell sobre el estado conjunto de las dos partículas, distinguiendo así los cuatro estados, y sabrá los valores de i y j .

Como vemos, la codificación densa es una comunicación asistida por entrelazamiento, y muestra que, para un canal sin ruido de un qubit, la capacidad clásica asistida por entrelazamiento es, $C_E=2$, mientras que, las capacidades clásica y cuántica, respectivamente, son, $C=Q=1$. Sorprendentemente, el cociente C_E/C aumenta al aumentar el ruido, y de hecho, puede alcanzar valores tan grandes, para canales con mucho ruido, que su capacidad cuántica, Q , y su capacidad cuántica asistida clásicamente, Q_2 , se hagan despreciables.

2.12. Teletransporte

Suponemos que Alicia tiene un fotón en el estado $|\psi\rangle_1 = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1$, de identidad desconocida para ella, el cual desea transferir a Bob, para comunicarle la información que dicho estado posee. $|\psi\rangle_1$ puede ser un estado fundamental, a medio camino de una computación cuántica, y Bob va a completar la computación en su computadora cuántica. Si Alicia intenta identificar el estado, entonces, irrevocablemente, destruirá la mayor parte de la información cuántica, resultando inútil el esfuerzo computacional inicial.

Si Alicia conociera la identidad del estado $|\psi\rangle_1$, ella podría enviar a Bob una descripción del mismo, por medios convencionales clásicos. Bob podría entonces reconstruir $|\psi\rangle_1$ en su laboratorio. Sin embargo, éste es un medio poco eficiente de comunicar el estado de un qubit, cuando Alicia necesite enviar una gran cantidad de información clásica, si Bob quiere conseguir una razonable seguridad para la reconstrucción de $|\psi\rangle_1$.

Alicia siempre podría colocar su qubit en una caja segura, blindándola de un posible ruido ambiental, y enviar el qubit intacto a través del espacio a Bob. ¿Pero hay alguna otra forma de comunicar la información cuántica completa de $|\psi\rangle_1$? El entrelazado cuántico puede servir como canal para la transmisión de información cuántica. Este es el proceso de teleportación cuántica que ahora exponemos.

Supongamos que Alicia y Bob comparten algunos entrelazados cuánticos, en la forma del estado EPR, $|\psi^-\rangle_{23} = (1/\sqrt{2})(|H\rangle_2|V\rangle_3 - |H\rangle_3|V\rangle_2)$, como en la codificación densa. Alicia también posee un qubit extra en el estado desconocido $|\psi\rangle_1$, que es el estado a transferir a Bob. El estado del sistema será:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= |\psi\rangle_1 \otimes |\psi^-\rangle_{23} = -\frac{1}{2}|\psi^-\rangle_{12}(\alpha|H\rangle_3 + \beta|V\rangle_3) - \frac{1}{2}|\psi^+\rangle_{12}(\alpha|H\rangle_3 - \beta|V\rangle_3) \\ &+ \frac{1}{2}|\phi^-\rangle_{12}(\beta|H\rangle_3 + \alpha|V\rangle_3) + \frac{1}{2}|\phi^+\rangle_{12}(-\beta|H\rangle_3 + \alpha|V\rangle_3). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si Alicia realiza una medida de Bell en sus partículas, todos los resultados tienen la misma probabilidad. Esta medida no le da a Alicia ninguna información sobre la identidad del estado $|\psi\rangle_1$, quedando la partícula de Bob, respectivamente, en el estado $(-1)^{ij+1} U_{ij}|\psi\rangle_3$, para $(i, j) = 0, 1$. Las expresiones de U_{ij} , vienen dadas por las ecuaciones (2.30) a (2.33).

Lo importante es que, la partícula de Bob, una vez aplicada la transformación reseñada, es $|\psi\rangle_1$. O sea que, si Alicia envía los dos bits, ij , de información clásica, resultante de la medida de Bell, Bob podrá aplicar la correspondiente transformación inversa $-U_{ij}$ a su partícula, restaurando el estado $|\psi\rangle_1$, en cada caso.

2.13. Destilado

El entrelazamiento por destilación o purificación [28, 40, 109, 175, 128] indica la obtención de pares de qubits fuertemente entrelazados, partiendo de un número mayor de pares débilmen-

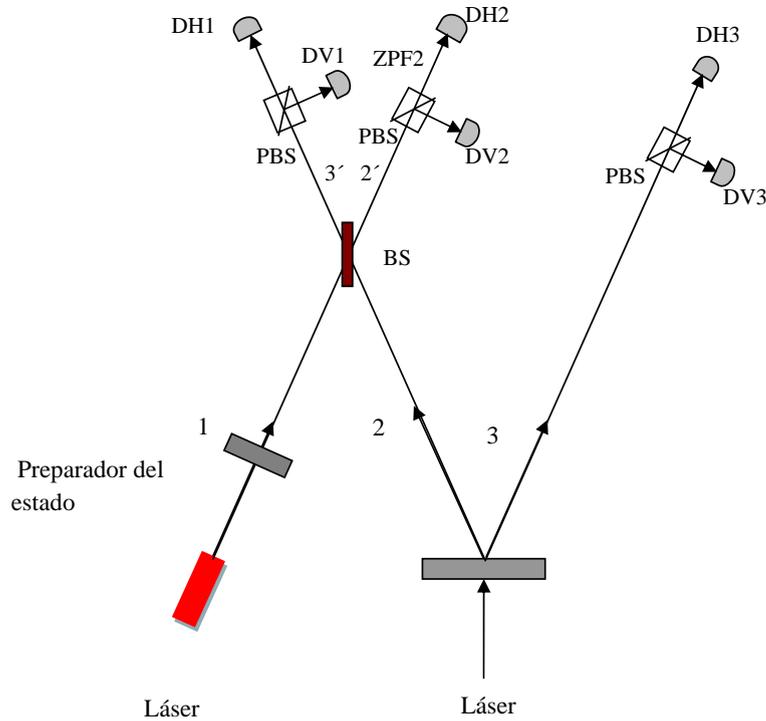


Figura 2.2: Esquema básico de teletransporte cuántico.

te entrelazados. El objetivo es compartir qubits fuertemente correlacionados entre las partes distantes, con el fin de permitir que la teleportación [33,63,204,122,55] cuántica o la criptografía [112,69,246] cuántica sean fiables. Todos los métodos de purificación requieren que las dos partes realicen en sus sistemas sólo operaciones locales y que se intercambie entre ellos información clásica, solamente, sin transferencia de los qubits adicionales. Las operaciones locales posibles incluyen: (i) transformaciones unitarias, con lo que cada parte entrelaza las partículas de que dispone; (ii) proyecciones no unitarias, con lo que cada parte mide una porción de sus partículas proyectando, así, el resto del sistema en un nuevo estado. Estas proyecciones son, generalmente, seguidas de una comunicación clásica de los resultados medidos entre las partes. Otra operación no unitaria es el filtrado [39], por el que un par, con cierta probabilidad que depende del estado, se descarta o se conserva después de cada proyección.

Supongamos que a Alicia y a Bob, en lugar de suministrarles una copia simple de un estado $|\psi\rangle$, se les suministra un gran número de copias. La idea de entrelazamiento por destilación es convertir un número grande de copias de un estado puro conocido $|\psi\rangle$, en tantas copias del estado de Bell $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ como sean posibles, utilizando operaciones locales y comunicación clásica (LOCC), no se requiere un éxito total, pero sí una alta fidelidad. Dilución de entrelazado es el proceso inverso de utilizar LOCC para convertir un gran número de copias del estado de Bell $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ en copias $|\psi\rangle$, de nuevo, con alta fidelidad, donde hay disponible un gran número de copias del estado de Bell. Si asumimos que el entrelazado es un recurso físico, como tal, sería posible su cuantificación, tal como cuantificamos otros recursos

como la energía y la entropía. Supongamos que cogemos el estado de Bell $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ como unidad estándar de entrelazamiento. Podemos asociar una medida de entrelazamiento a un estado cuántico $|\psi\rangle$ de igual forma que asociamos una masa a un objeto.

Para definir la cantidad de entrelazado presente en un estado puro, imaginemos que se nos da un gran número n , de estados de Bell, $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$, y nos piden producir tantas copias de $|\psi\rangle$ como sea posible, utilizando LOCC. Si el número de copias de $|\psi\rangle$ que se puede producir es m , definimos el entrelazado de formación del estado $|\psi\rangle$, como el límite de la relación n/m . Podemos considerar el proceso inverso, partiendo de m copias de $|\psi\rangle$ y obtener n copias de $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ mediante LOCC, y definir el límite de la relación n/m como el destilado del entrelazado. Estas dos definiciones dan el mismo número. El entrelazado de formación y la destilación dan, exactamente, lo mismo.

Hemos definido el entrelazado por destilación para estados puros, pero no hay razón para que la definición no pueda ser extendida a estados mezcla. Supongamos un estado ρ de un sistema de dos qubits pertenecientes a Alicia y a Bob, respectivamente. Ambos tienen un gran número, m , de copias de estos estados y, mediante LOCC, intentan convertir estos estados en el mayor número posible, n , de estados de Bell, con alta fidelidad. El entrelazado por destilación, $D(\rho)$, es el límite de n/m para el mejor protocolo de destilación posible. Ahora, imaginemos que Alicia intenta enviar información cuántica a Bob, por medio de un canal cuántico con ruido. Alicia prepara un gran número, m , de estados de Bell, y envía la mitad de cada par a través del canal. Supongamos que la acción del ruido es crear el estado ρ , por lo que, Alicia y Bob acaban compartiendo m copias de ρ . A continuación destilan entrelazados, produciendo $D(\rho)$ pares de Bell. Por último, Alicia puede teleportar a Bob un número igual a $mD(\rho)$ qubits, utilizando los pares de Bell que comparten.

2.14. Criptografía

Mientras que la criptografía clásica emplea diversas técnicas matemáticas para evitar que los espías conozcan el contenido de los mensajes cifrados, no pudiendo garantizarse una seguridad absoluta de la información, en la criptografía cuántica los contenidos están protegidos por las leyes de la física, así, el principio de incertidumbre de Heisenberg y el entrelazamiento cuántico pueden ser explotados en un sistema de comunicación segura [29]. La criptografía cuántica proporciona los medios a las dos partes, emisor y receptor, para intercambiar una clave de cifrado en un canal privado, con la seguridad completa de la comunicación.

Existe abundante bibliografía que abarca tanto aspectos teóricos como experimentales de la criptografía cuántica [129, 267, 3, 2, 4, 10, 14, 15, 19, 16, 18, 20, 21, 22, 27, 32, 35, 37, 36, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51].

Hay, al menos, tres tipos de sistemas criptográficos cuánticos para la distribución de claves, estos son:

1. (A) Criptosistemas con codificación basada en dos observables que no conmutan pro-

puestos por S. Wiesner, y por C.H. Bennett y G. Brassard, protocolo BB84 [261, 38, 31]. Posteriormente se han propuesto muchos protocolos teóricos sobre distribución de clave cuántica [129, 34, 70, 71] además, con la mecánica cuántica se puede realizar otras formas de cifrado, como la comunicación cuántica segura y directa [235, 263, 74, 59, 105, 106, 258].

2. (B) Criptosistemas con la codificación basada en el entrelazamiento cuántico y el teorema de Bell, propuestos por A.K. Ekert [112, 113].
3. (C) Criptosistemas con la codificación basada en dos vectores de estados no ortogonales, propuesto por C.H. Bennett [30].

El sistema criptográfico cuántico (A) incluye: un transmisor, Alicia y un receptor, Bob. El emisor puede utilizar el transmisor para enviar fotones en una de las cuatro polarizaciones: 0, 45, 90, ó 135 grados. El receptor, en el otro extremo, utiliza un detector para medir la polarización. De acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica, el detector puede distinguir entre polarización rectilínea (0 y 90 grados), o puede ser rápidamente reconfigurado para discriminar entre polarización diagonal (45 y 135 grados). Nunca puede distinguir entre ambos tipos. La distribución de claves requiere varios pasos. El remitente envía fotones con una de las cuatro polarizaciones que elige al azar. Por cada fotón transmitido, el receptor elige al azar el tipo de medida: el tipo rectilíneo o el tipo diagonal. El receptor registra los resultados de las mediciones, pero los mantiene en secreto. Posteriormente, el receptor anuncia públicamente el tipo de medida (pero no los resultados) y el remitente le dice al receptor qué medidas fueron ó no del tipo correcto. Las dos partes (el emisor y el receptor) mantienen todos los casos en los que las mediciones del receptor eran del tipo correcto. Estos casos se traducen en bits (1 y 0) y, por lo tanto, convertidos en la clave. Un *escucha* está obligado a introducir errores de esta transmisión, porque él/ella no sabe, de antemano, el tipo de polarización de cada fotón y, la mecánica cuántica no le permite adquirir valores de dos observables que no conmutan (en este caso polarizaciones rectilínea y diagonal), toda la información obtenida por un tercero no autorizado, va unida a un aumento de la *tasa de error del bit cuántico* (QBER) de los datos transmitidos, que se puede comprobar con un subconjunto adecuado de los datos.

Mientras el QBER de la clave, después de la comprobación de uso de la misma base, esté por debajo de un umbral determinado, dependiendo de la estrategia utilizada por el espía [120], Alicia y Bob todavía pueden destilar una clave segura por medio de la corrección de errores clásica y los protocolos de ampliación de privacidad [31]. Esta clave secreta puede ser utilizada junto con *one-time-pad* (OTP, es un tipo de cifrado que se ha demostrado imposible de romper si se usa correctamente) para intercambiar de forma confidencial mensajes de forma segura y con privacidad.

Finalmente, los dos usuarios prueban si han sido espiados, revelando un subconjunto aleatorio de los bits de la clave, comprobando la tasa de error resultante. Aunque no puedan evitar la interceptación, nunca serán engañados por un curioso, porque de todos modos, el esfuerzo que

hiciera para aprovecharse del canal, sería detectado. Cada vez que no están satisfechos con la seguridad del canal se puede tratar de establecer de nuevo la distribución de claves.

La idea básica de la criptografía (B) es la siguiente: mediante la correspondiente fuente se genera una secuencia de pares de fotones correlacionados. Cada parte, Alicia y Bob, detecta un miembro de cada par cuya polarización miden, utilizando al azar las bases rectilínea y diagonal. Las dos partes conservan los datos obtenidos en las respectivas medidas cuando las bases coinciden. Un espía, en esta comunicación, tendría que detectar una partícula, medir su polarización, y retransmitirla, para que su presencia siga siendo ignorada. Sin embargo, el acto de la detección de una partícula de un par destruye su correlación cuántica con la otra, y las dos partes pueden comprobar si esto se ha hecho, sin revelar los resultados de sus propias medidas, al comunicarlo a través de un canal público.

El papel de una fuente de creación de pares entrelazados, no es sólo generar dos fotones al mismo tiempo sino que posibilita, mediante la correlación cuántica, generar una clave idéntica entre el emisor y el receptor, y detectar la presencia de un espía mediante la comprobación de la desigualdad de Bell. El montaje es similar exceptuando que Alicia y Bob deben de elegir entre tres bases diferentes. Dependiendo de las bases elegidas para cada par de fotones los datos medidos se utilizarán para establecer la clave, para probar la desigualdad de Bell o son desechados.

La seguridad del protocolo Ekert es muy fácil de entender: si un espía consigue algún conocimiento sobre el estado de los fotones que viajan a Bob, añade algunas variables ocultas (ocultas en el sentido de que sólo él conoce su valor). Si el espía tiene un conocimiento completo de todos los estados, el conjunto de fotones analizados por Bob puede describirse por las variables ocultas, y no se viola la desigualdad de Bell. Pero si Eva sólo tiene un conocimiento parcial, la violación es menor que la máxima, y si no tiene información de todas las filtraciones, Alicia y Bob observarán una violación máxima.

El protocolo de Ekert no es muy eficiente en relación al número bits transmitidos/longitud de la clave. Como fue señalado por Bennett et al. [34] y por Ekert et al. [113], en 1992, los protocolos ideados para fotones simples también se pueden utilizar basándonos en entrelazamiento. Esto no es sorprendente si se tiene en cuenta la acción de Alicia como una preparación de un estado no local del fotón que viaja a Bob. Curiosamente, resulta que, si la perturbación del canal cuántico (el QBER) es tal que el conocimiento mutuo de la información de Shannon entre Alicia-Bob es igual a la información máxima de Shannon de Eva, entonces la desigualdad de Bell, no puede ser violada ninguna vez [120, 130].

Por otro lado, para realizar distribución de claves cuánticas entre más de dos usuarios, se necesitan protocolos multipartitos de criptografía cuántica, por ejemplo, compartiendo el secreto cuántico (*Quantum Secret Sharing*, QSS), así como la criptografía cuántica del tercer hombre (QTC) [275]. Es de destacar que, la mayoría de los protocolos existentes de QSS usan estados entrelazados [266, 153, 249, 97, 107, 250, 166, 104, 103].

EXPERIMENTOS DE COMUNICACIÓN CUÁNTICA CON PDC

3.1. Introducción

Desde un punto de vista experimental, se hace necesario encontrar una forma útil y sencilla de crear estados entrelazados, con los cuales, construir sistemas eficientes de manipulación de la información cuántica. En este sentido, la naturaleza ha jugado un papel fundamental en la generación de entrelazamiento mediante el proceso de conversión paramétrica a la baja (PDC), el cual se sustenta en las propiedades no lineales de un cristal birrefringente. Este proceso ha sido, y es en la actualidad, uno de los pilares en que se sustenta la experimentación en información cuántica con fotones.

En este capítulo se hace una revisión del proceso de conversión paramétrica a la baja, y de los experimentos realizados en el campo de la comunicación cuántica con fotones entrelazados generados en PDC. En la sección 3.2 resumimos las características de la conversión paramétrica a la baja tipo I y tipo II. En la sección 3.3 hacemos una revisión de los experimentos para la medida de los estados de Bell, y finalmente, en la sección 3.4 abordamos los experimentos realizados en criptografía cuántica y en teletransporte.

3.2. La Conversión Paramétrica a la Baja

En la Conversión Paramétrica a la Baja un láser de luz monocromática incide sobre un cristal con una susceptibilidad eléctrica no lineal¹, $\chi^{(2)}$ (magnitud tensorial de orden 2), dando lugar a una radiación visible en forma de anillos de diferentes colores, alrededor del eje del haz incidente. Esta radiación está formada por pares de haces conjugados que verifican las denominadas condiciones de emparejamiento y con una alta correlación temporal, pues los

¹Las no linealidades aparecen sólo en los materiales con centro no simétrico. Algunos de los cristales más utilizados son PDK (KD2PO4), LiIO3, KNbO3 y BBO (BaB2O4).

fotones, conocidos como: señal y gemelo, salen casi simultáneamente².

La creación espontánea de fotones en interacciones no lineales fue descubierta por Burnham y Weinberg [68], en 1970. Este fenómeno no tiene explicación con la óptica clásica no lineal, donde se necesitan dos entradas de diferentes frecuencias para que en el cristal se produzca una onda cuya frecuencia sea la diferencia entre las frecuencias incidentes. Por esta razón, se utiliza frecuentemente el término de *Spontaneous parametric down conversion*, donde se enfatiza el carácter espontáneo del fenómeno, que en una visión corpuscular de la radiación se interpreta a partir de la división de un fotón del láser en dos fotones de menor frecuencia, verificándose las condiciones de conservación de la energía y el momento en la escisión del fotón. Así, a partir de un fotón incidente, perteneciente a un haz (vector de onda \mathbf{k}_p y frecuencia ν_p), las dos componentes de polarización recorren caminos ópticos diferentes para producir dos fotones emergentes, denominados comúnmente señal y gemelo, de momentos \mathbf{k}_s y \mathbf{k}_i , y frecuencias ν_s y ν_i , respectivamente, correlacionados en polarización, y que emergen en direcciones conjugadas.

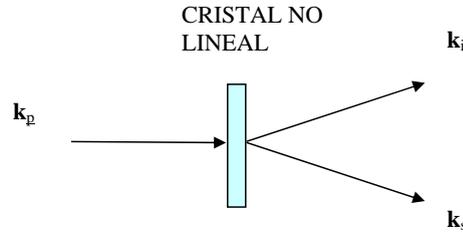


Figura 3.1: En el proceso de conversión paramétrica a la baja, un fotón incidente de momento \mathbf{k}_p y frecuencia ν_p da lugar a dos fotones emergentes de momentos \mathbf{k}_i y \mathbf{k}_s , y frecuencias ν_i y ν_s . La PDC no tiene explicación con óptica clásica no lineal, donde hace falta dos entradas de diferente frecuencia, para generar a la salida un haz a la diferencia de frecuencias. Como veremos en el capítulo 5, la consideración de la radiación de punto cero a la entrada del cristal es el elemento que se necesita para una descripción completa del fenómeno en términos clásicos.

El cristal no cambia de estado en el proceso, de modo que se conserva el momento lineal y la energía, lo que da lugar a las condiciones siguientes (*phase matching*):

$$\nu_p = \nu_s + \nu_i, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (3.2)$$

En los experimentos se usa normalmente el caso degenerado, donde los fotones emergentes

²La ecánica cuántica predice que existe cierta probabilidad de que un fotón del láser se descomponga en dos fotones que salen del cristal prácticamente al mismo tiempo, pues ambos se producen dentro de su tiempo de coherencia, el cual es del orden de 100 fs . La tasa de la conversión es lineal con la intensidad del láser y con las magnitudes de las componentes de $\chi^{(2)}$ y, en general, es muy bajo, del orden de 10^{10} fotones por segundo de luz convertida con un cristal de unos pocos milímetros de longitud.

tienen la misma longitud de onda,

$$\lambda_i = \lambda_s = 2\lambda_p. \quad (3.3)$$

Hay dos tipos de conversión paramétrica a la baja, conocidas como tipo I y tipo II, respectivamente, dependiendo de la polarización de los fotones emergentes, figura (3.2).

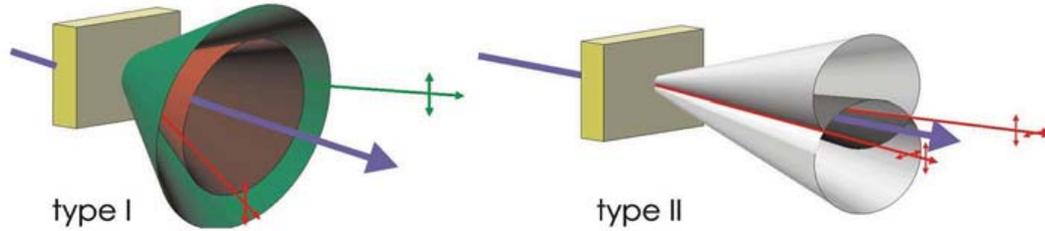


Figura 3.2: Los dos tipos de PDC: en el PDC tipo I señal y gemelo tienen igual polarización y en el PDC tipo II, tienen polarizaciones ortogonales, una ordinaria y la otra extraordinaria.

3.2.1. PDC tipo I

En el PDC tipo I los fotones emergentes tienen la misma polarización lineal, ortogonal a la polarización del haz incidente, de modo que los fotones se generan en un estado de polarización bien definida. En la figura 3.3 se muestra el esquema de las experiencias [205, 231] basadas en fotones generados con PDC tipo I, para la violación de desigualdades de Bell³. Con la idea de generar entrelazamiento en polarización, se rota 90° la polarización de uno de los haces (usando una placa de media onda, HWP) y se hacen coincidir sendos haces en un separador de haz, de igual transmisividad y reflectividad (ver figura 3.3). Los fotones inciden sobre analizadores cuya orientación se puede modificar y luego se detectan (detección de un canal).

Sin embargo, en estos experimentos se necesitaba un proceso de post-selección dado que el estado de los fotones que salen de la fuente es un estado separable (no entrelazado), y con el BS tampoco se consigue entrelazamiento, dado que se superponen en un estado factorizable las cuatro posibilidades de polarización, HH, VV, HV, VH. Sólo con un proceso de post-selección se seleccionaban las amplitudes de probabilidad correspondientes a la situación en que los fotones salen por caminos distintos en el BS (50% de los casos). Posteriormente, se propuso un esquema basado en el uso de dos cristales birrefringentes con ejes ortogonales entre sí para producir, mediante la PDC tipo I, pares de fotones hiperentrelazados en polarización y en momento [163], lo que otorgó a la conversión tipo I un papel relevante en el problema de la

³La conversión tipo I se utilizó durante varios años con la idea de contrastar desigualdades de Bell y, así, refutar las teorías de variables ocultas, y de alguna manera, intentar aclarar los aspectos conceptuales sobre el determinismo o no de la teoría cuántica. Para más detalle de estos experimentos y una revisión del problema EPR y las variables ocultas locales, la tesis del Dr. Ramón Risco de la Universidad de Sevilla [216], así como la referencia [1]. Paralelamente, el tipo I se utilizó para los primeros experimentos en información cuántica.

medida de los estados de Bell, de gran importancia en comunicación cuántica, tal y como veremos en la sección 3.3.

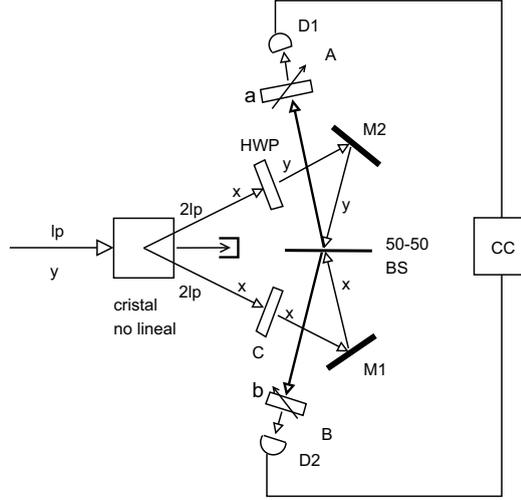


Figura 3.3: Esquema de las experiencias basadas en fotones generados por PDC de tipo I.

3.2.2. PDC tipo II

En la conversión tipo II, ambos fotones emergen con direcciones de polarización ortogonales entre sí, ordinaria y extraordinaria [161], lo cual elimina la dificultad de generar estados entrelazados a posteriori usando elementos ópticos adicionales a la salida del cristal, y sobre todo, el proceso de postselección en la detección, lo cual resulta bastante discutible desde un punto de vista teórico [1]. En estos experimentos podemos diferenciar entre los que utilizan conversión colineal, en la que dos conos, ordinario y extraordinario, se intersecan en una recta en la dirección del haz incidente [218, 234, 233, 232, 230], y los de conversión no colineal en los cuales los conos se intersecan en dos rectas. La conversión no colineal es una fuente de estados entrelazados, debido a que el estado correspondiente a los haces en los que intersecan los conos ordinario y extraordinario puede hacerse corresponder con uno de los estados de Bell, en concreto, el estado singlete, utilizado por Bohm en su versión de la paradoja EPR [162]. En la figura 3.4 (a) se muestra la geometría del proceso PDC tipo II. Los fotones que salen del cristal están en dos conos con vértice común en el propio cristal, y se distribuyen en conos a lados opuestos de la dirección de incidencia. Los fotones, en cada cono, tienen polarizaciones ortogonales entre sí, un cono corresponde al rayo ordinario (o), y el otro al extraordinario (e). En la intersección de ambos conos, los fotones están en un estado de superposición de ambas alternativas de polarización. Las trayectorias de los fotones entrelazados están dadas por la intersección de los conos, figura 3.4 (b) [161].

La expresión general para describir el estado⁴ generado en el tipo II es [162]:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|H_1, V_2\rangle + e^{i\alpha}|V_1, H_2\rangle]. \quad (3.4)$$

Cada uno de los subíndices 1 y 2 se refiere a uno de los fotones de la pareja, las direcciones de polarización ortogonales se indican como H y V , y la fase relativa puede ajustarse experimentalmente.

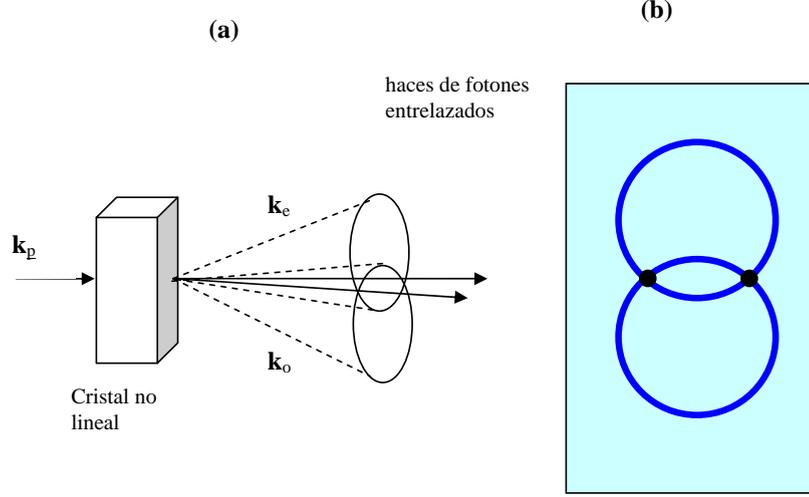


Figura 3.4: Los fotones emergentes en la conversión tipo II están en dos conos: un cono corresponde al rayo ordinario (o) y el otro al extraordinario (e). Cuando se seleccionan los dos haces correspondientes a la intersección de los dos conos, la pareja de fotones que los representa se halla en un estado entrelazado en polarización.

Utilizando una notación característica de la información cuántica, y haciendo $\alpha = \pi$, tenemos el estado singlete:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2], \quad (3.5)$$

caracterizado por la *invariancia rotacional*, tan importante en el argumento de Bohm de la paradoja EPR [111, 52, 53, 49, 50]. El estado singlete, junto con los estados siguientes constituye la *base de Bell*:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2], \quad (3.6)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2], \quad (3.7)$$

⁴La parte espacial del estado no se escribe en la ecuación (3.4), dado que factoriza, y el entrelazamiento se produce sólo en polarización. Para ser más estrictos, habría que multiplicar tensorialmente por un término de la forma $|\mathbf{k}_e\rangle \otimes |\mathbf{k}_o\rangle$, donde \mathbf{k}_e y \mathbf{k}_o representan los momentos de los fotones emergentes. La consideración del grado de libertad correspondiente al momento será necesaria en el capítulo 8 cuando se trate el hiperentrelazamiento polarización-momento.

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle_1|1\rangle_2 - |0\rangle_1|0\rangle_2]. \quad (3.8)$$

En la figura 3.5 se muestra cómo los fotones de un diodo láser, de longitud de onda 405 nm se dividen en dos fotones de menor energía 810 nm en un cristal no lineal BBO. Cada cono en el esquema indica las direcciones posibles de emisión de los fotones, dependiendo de si el fotón es vertical u horizontal. En los puntos de cruce se produce una superposición de un par horizontal-vertical con un par vertical-horizontal, lo que da lugar a un estado singlete máximamente entrelazado. Los cuatro estados de Bell se usarán de forma reiterada en todos

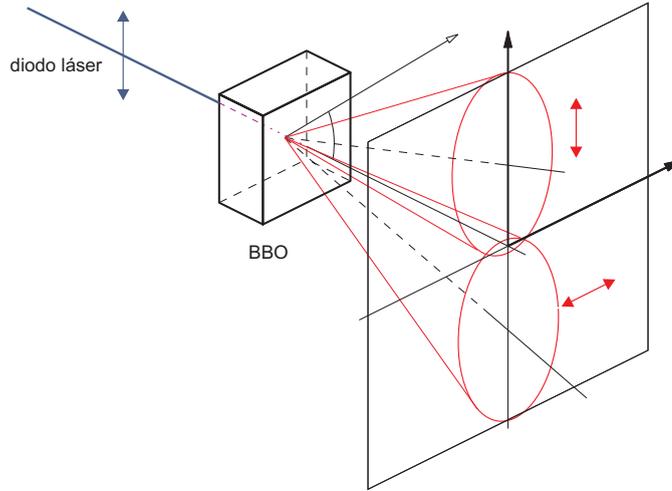


Figura 3.5: Detalles del proceso de conversión paramétrica a la baja tipo II. En el plano de la figura se muestran las direcciones, horizontal y vertical, correspondientes a la polarización en la base rectilínea.

los capítulos de la tesis, debido a la gran importancia que tienen en todos los aspectos de la comunicación cuántica.

3.3. Medida de los estados de Bell (BSM)

La medición de los estados de Bell (BSM), es decir, la distinguibilidad de los cuatro estados de Bell máximamente entrelazados, se necesita en muchos sistemas de comunicación cuántica, incluyendo la codificación densa [39, 195], el teletransporte [33, 63, 55] el intercambio de entrelazamiento [33, 207, 151] y también la purificación del entrelazamiento [238], junto con pruebas de realismo local con GHZ de dos fotones [93], criptografía cuántica [94], etc.

En la figura 3.6 se muestra una medida de la base de Bell para fotones entrelazados en polarización [195]. Los haces inciden sobre un divisor de haz (BS) con modos de entrada a y b , los haces componentes a la salida c y d del BS inciden sobre sendos separadores de polarización, PBS1 y PBS2, que reflejan (transmiten) la polarización horizontal (vertical) [195, 196]. Una coincidencia entre los detectores de DH1 y DV2 (DV1 y DH2) corresponde a una proyección en el estado $|\psi^-\rangle$, único estado en el que cada fotón sale por cada uno de los canales de salida

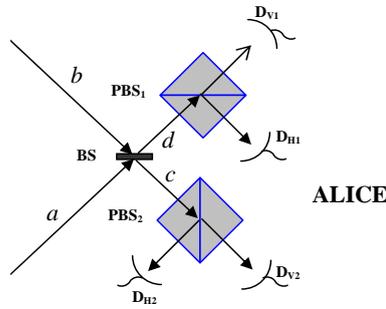


Figura 3.6: Analizador BSM en la estación de Alicia: se muestra la puesta en marcha, mediante óptica lineal, de los mecanismos para la proyección de dos qubits entrelazados en polarización sobre los estados de Bell.

del BS. Por otro lado, una coincidencia entre DH1 y DV1 (DH2 y DV2) corresponde a $|\psi^+\rangle$, de tal manera que en este caso los dos fotones salen por uno de los canales c ó d , pero luego se separan en el correspondiente PBS. En el caso de los estados $|\phi^+\rangle$ y $|\phi^-\rangle$, los dos fotones salen por uno de los canales c ó d , pero no se separan en el PBS las componentes, de tal modo que alcanza uno de los 4 detectores, por tanto, sólo se pueden distinguir dos de los cuatro estados de Bell.

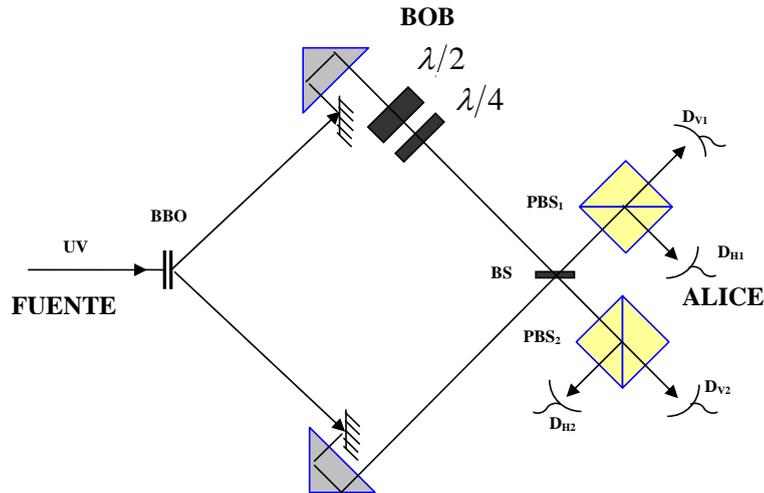


Figura 3.7: Dispositivo experimental para el Código Denso Cuántico. Los polarizadores rotadores y los retardadores de onda que usa Bob permiten transmitir a Alicia alguno de los estados de Bell. La estación de Alicia consiste en un BS balanceado (espejo semitransparente), dos PBS, y los detectores DH1, DV1, DH2 y DV2.

Una completa BSM (distinguiendo entre los cuatro estados con el 100% de eficiencia) es imposible utilizando sólo operaciones lineales y comunicación clásica [253, 167, 75, 127]. De hecho, Ghosh et. al. [127] han confirmado que lo más que se puede hacer es discriminar dos estados de Bell. Calsamiglia y Lutkenhaus [195, 75] han demostraron que la eficiencia máxima en la medida de estados de Bell es de 50%. Sin embargo, como demostraron teóricamente Kwiat y Weinfurter en 1998, es posible un análisis completo de los estados de Bell, incluso con la óptica

lineal, si las dos partículas se entrelazan en otros grados de libertad [164] (sin embargo, esto no puede cumplirse si los fotones provienen de fuentes independientes como, por ejemplo, sucede con el entrelazamiento por intercambio). Kwiat y Weinfurter [164] mostraron un esquema mediante fotones entrelazados en polarización e impulso (modo espacial). Su método, se basa en óptica lineal y requiere del efecto de interferencia de dos fotones, y detectores que distingan entre uno y dos fotones detectados.

Por otro lado, Walborn et al. [256], presentaron un método para un análisis completo de los estados de Bell con estados hiperentrelazados. Este esquema difiere de otros, en que no se basa en la interferencia de dos fotones, no requieren detectores sensibles al número de fotones y pueden ser implementados de manera no local, teniendo una capacidad adicional de comunicar 2 bits clásicos. Estos estados pueden ser generados por medio de PDC de varias maneras, por ejemplo el tipo I, mediante dos cristales que emiten fotones entrelazados en polarización de la misma longitud de onda alrededor del borde de un cono (figura 8.2). En esta fuente, el cristal 1 emite pares de fotones polarizados horizontalmente y el cristal 2 emite pares de fotones polarizados verticalmente emitiendo conos superpuestos. Jugando con la fase, se garantiza que pares de fotones se emitan en los lados opuestos del cono. Si la región de la interacción de los dos cristales se encuentra íntegramente dentro de un volumen de coherencia del pulso del láser, se puede seleccionar un entrelazamiento en polarización y momento en dos grupos de regiones (a_1, b_2) y (a_2, b_1) . Se puede ajustar la fase del estado de momentos para que el estado sea $|\psi^-\rangle$. Usando unos PBS y láminas de media onda se pueden obtener los cuatro estados de polarización de Bell.

El grado de libertad asociado al momento es sensible a la diferencia de longitud del camino del orden de varios nanómetros, por lo tanto, el hiperentrelazamiento en momento no es adecuado para la transmisión a larga distancia. Una alternativa [113] es usar el grado de libertad tiempo (ya sea de tipo tiempo-energía mediante interferómetros Mach-Zhender con PDC tipo I o tipo tiempo bin⁵, en lugar del grado de libertad asociado al camino). El hiperentrelazamiento en tres grados de libertad se demostró en [17]. Los tres grados de libertad eran la polarización, la energía-tiempo y el momento angular orbital [176].

⁵Brendel et al. han desarrollado un nuevo tipo de entrelazamiento en el tiempo llamado entrelazamiento tiempo bin [66], en el que se utilizó como fuente un láser. En comparación con el entrelazamiento energía-tiempo, la coherencia del láser no tiene ninguna importancia. La coherencia necesaria se produce mediante la transmisión del láser a través de un interferómetro desequilibrado similar al MZ. El pulso se caracteriza también por ofrecer la posibilidad de utilizar detectores de fotones cerca de la banda infrarroja. Este tipo de entrelazamiento tiempo bin ha sido ampliamente utilizado por grupos de Gisin en experimentos de criptografía cuántica [181] y experimentos con múltiples fotones [182].

3.4. Experimentos

3.4.1. Criptografía con fotones entrelazados

Todos los experimentos de Bell contienen intrínsecamente la posibilidad de hacer criptografía cuántica basada en entrelazamiento. En el siguiente listado⁶, en orden cronológico, los experimentos se han ideado sólo con el fin de permitir un rápido cambio de base de medida.

–**1982** El primer experimento que cumple con la definición anterior es la prueba de las desigualdades de Bell con analizadores variables en el tiempo, realizado por Aspect et al. [11], con qubits entrelazados en polarización, con el fin de cerrar el *loophole* sobre localidad, en un momento en el que la criptografía cuántica aún no se conocía, ni siquiera con fotones individuales.

–**1998** Weihs et al. [259] demostraron una violación de las desigualdades de Bell con qubits entrelazados en polarización, con longitud de onda de 700 nm, conectando aleatoriamente los analizadores, separados por 360 km de fibra óptica. Este experimento fue ideado para cerrar el *loophole* sobre localidad.

–**1999** Tittel et al. [247] realizaron un experimento de Bell para intentar solventar los problemas de localidad, incorporando una elección pasiva de bases. Dos interferómetros de fibra óptica están conectados a cada lado de una fuente de creación de fotones entrelazados en energía y tiempo, de longitud de onda $1,3\ \mu\text{m}$. Lo mismo que en los dos experimentos mencionados anteriormente, las bases utilizadas para las medidas se eligen con el fin de permitir una prueba de las desigualdades de Bell y no para establecer una clave secreta.

–**2000** Tres publicaciones en criptografía basadas en entrelazamiento aparecen en el mismo número de *Physical Review Letters*:

1.) Con una configuración similar a la que se ha mencionado en segundo lugar de esta lista, Jennewein et al. [150] realizaron un sistema de criptografía cuántica, sobre una distancia de 360 m que incluía corrección de errores. Se implementaron dos protocolos diferentes: uno basado en la desigualdad de Wigner (una forma especial de desigualdad de Bell) y otro siguiendo el protocolo BB84. Se observó una tasa de clave filtrada de alrededor de 400 y 800 *bits/s*, respectivamente, y un QBER en torno al 3%. Lo que equivale a una tasa de clave secreta de 300 y 600 *bits/s*, respectivamente.

2.) Naik et al. [203] demostraron el protocolo Ekert en un experimento en el espacio libre en una distancia corta (de laboratorio). El experimento se aprovecha del entrelazamiento en polarización de qubits en una longitud de onda de alrededor de 800 nm. Se informó de unas tasas de claves filtradas de alrededor de 10 *bits/s* con un QBER del 3%, con una tasa de clave secreta de 6 *bits/s* después de la aplicación de la corrección de errores y la amplificación de privacidad. Además del intercambio de claves, los autores simulaban diferentes estrategias de espionaje y encontraron un aumento de la QBER con el aumento de la información del espía,

⁶Los datos han sido tomados, fundamentalmente, de las referencias [267, 272].

de acuerdo con la teoría. El experimento ha sido recientemente ampliado [114] para realizar el llamado protocolo de los seis estados [67, 18].

3.) Tittel et al. [248] dieron cuenta sobre la realización de criptografía cuántica mediante fibra óptica en un experimento de laboratorio utilizando el protocolo BB84. Este experimento se basa en qubits entrelazados en el tiempo-bin con longitud de onda de $1,3 \mu m$, y teniendo las ventajas de la codificación en fase-tiempo y una elección pasiva de la base. Se obtuvo una tasa de clave filtrada de $33 Hz$ y una QBER del 4%, con una tasa de clave secreta de $21 bits/s$.

–2001 Ribordy et al. [215] realizaron un sistema de QC basado en el entrelazamiento energía-tiempo. A diferencia de los experimentos mencionados anteriormente, esta realización tiene la ventaja de utilizar una configuración asimétrica, optimizada para QC, en lugar de una configuración diseñada para las pruebas de las desigualdades de Bell, donde la fuente está, generalmente, situada aproximadamente a medio camino entre Alicia y Bob. En este caso, un fotón (longitud de onda de $810 nm$) se envía a un interferómetro óptico, que se encuentra junto a la fuente, el otro (longitud de onda de $1550 nm$) se transmite a través de $8,5 km$ de fibra en un carrete de un interferómetro de fibra óptica. Con aplicación del protocolo BB84 y una elección pasiva de las bases, se observó una tasa de clave filtrada de $134 bits/s$ y un QBER medio de 8,6%. A partir de estos valores, se puede calcular un índice de clave secreta de $45 bits/s$.

Para más información sobre la tabla 4.1, se puede consultar la bibliografía siguiente, en orden cronológico [201, 251, 180, 202, 60, 150, 203, 248, 146, 242, 160, 136, 199, 143, 217, 210, 271, 243, 168].

1993	UG, Switzerland	BB84	1 km
1993	BTL, UK	Vis. Test	10 km
1995	BTL, UK	BB84	30 km
1995	UG, Switzerland	BB84	23 km
1999	KTH, Sweden	BB84 + PnP	40 km
2000	UW, Austria	Ekert91	360 m
2000	LANL, USA	Ekert91	Optical table
2000	UG, Switzerland	Ekert91	Optical table
2000	LANL, USA	BB84, B92	48 km
2002	UG, Switzerland	BB84 + PnP	67 km
2003	NEC, Japan	Vis. Test + PnP	100 km
2004	CRL, UK	BB84	122 km
2005	USTC, China	BB84	125 km
2006	LANL, USA	BB84	184.6 km
2007	LANL, USA	Decoy-state	107 km
2007	USTC, China	Decoy-state	102.8 km
2008	SU, USA	Ent. Dis.	100 km
2009	UG, Switzerland	COW	250 km
2010	USTC, China	Decoy-state	200 km

Tabla 4.1: Experimentos realizados, de QC, tomados de [267, 272].

3.4.2. Experimentos en el aire libre con fotones entrelazados

Todavía existen problemas en la carrera de la comunicación cuántica a larga distancia. Los obstáculos más notables son las pérdidas de fotones en el canal de transmisión, la decoherencia causada por el ruido ambiente y la aplicación imperfecta de las operaciones lógicas cuánticas causando que, la fidelidad del estado transmitido disminuya de forma exponencial a lo largo de la longitud del canal.

Analizando el espectro de absorción de la atmósfera, se observa que hay una ventana de transmisión de alrededor de 700 nm , donde la tasa de transmisión es superior al 80% para la luz que viaja a través del aire atmosférico. Por tanto, una forma esperanzadora de realizar comunicación cuántica a larga distancia, es explotar el espacio libre aprovechando los satélites, tanto para fotones simples como para pares de fotones entrelazados. El método sería el siguiente: los estados cuánticos fotónicos se envían primero a través del aire atmosférico, a continuación se reflejan de un satélite a otro, y finalmente se devuelven a la tierra. Dado que el espesor de la atmósfera es de $10,5\text{ km}$, en el espacio exterior la pérdida de fotones por decoherencia es insignificante. Con la ayuda de los satélites se puede lograr una comunicación cuántica global en el espacio libre, siempre y cuando los estados cuánticos aún sobrevivan después de penetrar en la aerósfera. A pesar de todo, algunos experimentos QKD en el espacio libre se han demostrado con la luz coherente débil, vamos a presentarlos como sigue⁷:

-**2003** El grupo de Zeilinger de Austria realizó una distribución de entrelazamiento en una longitud de 600 m en el espacio libre sobre el río Danubio en Viena [12]. En el experimento, la fuente del PDC genera pares de fotones entrelazados en polarización a una frecuencia de $20,000\text{ Hz}$ con una potencia de 18 mW . Los pares de fotones se distribuyeron a Alicia y Bob, desde dos sitios separados en los lados opuestos del río Danubio. Para probar que los fotones recibidos están entrelazados, Alicia y Bob deben medir las correlaciones en polarización, por ejemplo, mientras que el ángulo del polarizador del lado de Alicia se fija en 0 grados, Bob cambia el ángulo de su polarizador de 0 a 180 grados y miden las cuentas correspondientes a coincidencias. Los resultados de las mediciones mostraron que la fidelidad promedio de las correlaciones en polarización fueron alrededor de $87 \pm 3\%$, lo que es mayor que el límite de 78% necesario para violar la desigualdad de Bell. Por otra parte, se probó la violación de una desigualdad CHSH y se obtuvo $S = 2,41 \pm 0,10$, que violan la desigualdad CHSH con 4,1 desviaciones estándar. Esto indica claramente que las dos partes separadas por enlaces remotos en el espacio libre podrían compartir entrelazamiento cuántico.

- **2005** En 2005, dos grupos de forma independiente llevan a cabo una distribución de entrelazamiento en el espacio libre y a larga distancia. El primer experimento consiste en una distribución de fotones entrelazados a más de $7,8\text{ km}$ en la ciudad de Viena, y se llevó a cabo por el grupo de Zeilinger [214]. Para probar la existencia de entrelazamiento cuántico, en el experimento, el parámetro CHSH de $S = 2,27 \pm 0,019$ fue obtenido de manera que, la desigualdad CHSH fue violada con alrededor de 14 desviaciones estándares.

⁷Los datos han sido tomados, fundamentalmente, de las referencias [267, 272].

Casi al mismo tiempo, el grupo de Pan, en la Universidad de Ciencia y Tecnología de China, mostró la distribución de pares de fotones entrelazados sobre 13 km , donde la fuente de entrelazado se encuentra en la cima de una montaña en Hefei, Anhui, mientras que dos receptores están situados, respectivamente, a $7,7$ y $5,3\text{ km}$ de la fuente. La distancia directa entre Alicia y Bob es alrededor de $10,5\text{ km}$. La distancia del canal, sobre 13 km , tiene un gran significado en varios aspectos. Primero, en este experimento, ya que la distancia entre los dos observadores es bastante grande, se observó una violación de la desigualdad de Bell con $S = 2,45 \pm 0,09$; en segundo lugar, a fin de realizar una comunicación cuántica global a gran escala, una solución prometedora es la de hacer la distribución de entrelazamiento en espacio libre con satélites vinculados. Como se mencionó anteriormente, el espesor efectivo de la atmósfera es de $10,5\text{ km}$, y en el espacio exterior la pérdida de fotones y decoherencia son insignificantes. Los resultados en este experimento demostraron, por primera vez, que el entrelazamiento cuántico puede ser bien conservado en una distancia más allá del espesor efectivo de la atmósfera, y por lo tanto, presenta un importante paso hacia la comunicación cuántica por satélite. Además, se demostró una distribución de clave basada en el protocolo Ekert 91 y la tasa final que asegura la generación de claves es de 10 bits/s .

- **2006** Un grupo de colaboración dirigido por Zeilinger y Weinfurter, asociada con la Agencia Espacial Europea, construyó un canal de comunicación en el espacio libre más de 144 km entre las Islas Canarias de La Palma y Tenerife. En el experimento, Alicia y la fuente se entrelazaron en el mismo lugar, La Palma, mientras que Bob estaba en la Estación Óptica Terrestre (OGS) de Tenerife [252]. Con el fin de producir una fuente lumínica de alto entrelazamiento, mediante un pulso de un picosegundo de un láser de Nd, con longitud de onda de 355 nm , la tasa de repetición de 249 MHz y una potencia media de 150 mW utilizándose para bombear un cristal BBO. La tasa de generación de pares de fotones entrelazados fue de 145 kHz , con una visibilidad de 98% en función del alto voltaje y una visibilidad de 96% . Un fotón del par entrelazado fue detectado por Alicia inmediatamente, mientras que el otro se envió a Bob a través de una lente de 15 cm sobre el enlace en el espacio libre y fue recibido por un telescopio de espejo de 1 m de la OGS. Por otra parte, el enlace en el espacio libre se estabilizó activamente para mantener la eficiencia máxima con un sistema de enlace mediante seguimiento automático en circuito cerrado. Al contrario que en el experimento anterior, donde el método de sincronización óptica utilizaba una referencia láser, durante este experimento con el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), las señales síncronas se registraron en el tiempo mediante el etiquetado de cada evento de detección. Bob envía sus datos de tiempo de detección a Alicia a través de *internet*, mientras que Alicia analiza las cuentas coincidentes con el *software*. Con una ventana de coincidencia de un 1 ns , los recuentos coincidentes promedios se acercan a $20 - 40\text{ Hz}$. Para verificar el entrelazamiento cuántico, la violación de la desigualdad CHSH fue probada y se comprobó que $S = 2,508 \pm 0,037$. Por otra parte, demostraron el protocolo QKD basado en entrelazamiento. La clave en bruto de 417 bits se creó en 75 s con un QBER de cerca de 4% y fueron destilados 178 bits de clave segura. Aunque el entrelazamiento no se

distribuyó a lo largo de todo el canal de 144 km , ya que, un fotón del par entrelazado se detectó a nivel local por Alicia, este experimento muestra la posibilidad de comunicación cuántica con un canal en el espacio libre a una distancia muy grande, constituyendo un impulso hacia las redes de comunicación cuántica globales en el futuro.

Muy recientemente, el grupo de Zeilinger con un equipo de colaboración de la Agencia Espacial Italiana, demostró, por primera vez, el intercambio de un fotón individual entre una estación de la Tierra y un satélite de órbita geodésica, a una altura de perigeo de 1485 km [254]. Con éste experimento dio comienzo la comunicación cuántica del espacio.

Como ya sabemos, para que la criptografía cuántica sea segura, la selección de base tiene que ser realmente aleatoria. Las bases aleatorias así generadas serían impredecibles, irreproducibles y no tendrían sesgo estadístico alguno, de modo que se garantizaría la confidencialidad de los datos así encriptados. Pero la creación rápida y sostenida de números aleatorios de buena calidad es un problema intrínsecamente difícil.

Actualmente, en un artículo publicado en la revista británica *Nature Photonics*, a partir de la óptica fluctuante de dos láseres de dinámica caótica, los investigadores consiguieron un generador que crea secuencias aleatorias de bits a una velocidad de $1,7$ gigabites por segundo. El equipo de la Universidad de Saitama (Japón) liderado por Atsushi Uchida, que realiza estas investigaciones, sugiere que la clave de este hallazgo consiste en aprovechar la imprevisibilidad obtenida a partir del ruido generado por los láseres, así como la amplificación no lineal y la mezcla del ruido del láser producido por su dinámica caótica. En un artículo más reciente [123], se presenta una sencilla configuración experimental basada en mediciones homodinas que utiliza la pureza de un estado cuántico de vacío, con variable continua única para generar números aleatorios. Se usa la aleatoriedad intrínseca en la medición de las cuadraturas de un modo en el estado de menor energía de vacío, que no se puede correlacionar con cualquier otro estado. La simplicidad de la fuente, combinada con su aleatoriedad verificable única, son atributos importantes para el logro de alta fiabilidad, alta velocidad y bajo costo en los generadores cuánticos de números aleatorios.

3.4.3. Teletransporte

Con los experimentos sobre teletransporte que enumeramos a continuación, pretendemos reflejar en esta tesis una perspectiva histórica⁸, del desarrollo experimental de este aspecto apasionante de la comunicación cuántica:

–**1997** Un experimento fundamental, realizado en Innsbruck, por Bouwmeester et al. [63] fué el primero en demostrar el teletransporte cuántico basado en una medición de Bell con óptica lineal. Aunque esto permite, en principio, el teletransporte en un 50 % de los casos, sólo se utilizó la proyección sobre el estado $|\psi^-\rangle$.

–**1998** Otro experimento crucial, realizado en Roma por Boschi et al. [55], demostró el teletransporte con la puesta a punto de un dispositivo con el que pueden ser identificados

⁸Los datos han sido tomados, fundamentalmente, de las referencias [267, 272].

los cuatro estados de Bell, incluso utilizando sólo la óptica lineal. El estado es entrelazado en momentos y polarización de los fotones, y se emplea para preparar el estado desconocido. Sin embargo, este esquema no puede aplicarse para los fotones que provienen de fuentes independientes, pues se hace necesario el intercambio de entrelazamiento.

–**2001** Kim et al. [155] demostraron el teletransporte cuántico basado en una medición de Bell mediante la aplicación de la interacción no lineal. Esto permite una proyección en los cuatro estados de Bell pero, con un rendimiento muy pequeño. Con el fin de compensar la eficiencia, el estado de entrada se realizó con un pulso clásico de un láser de femtosegundos. Este experimento demuestra que una medición completa de Bell, en principio, es posible, incluso cuando se utiliza un solo fotón y sin tener que tomar grados de libertad adicionales en la pareja entrelazada.

–**2004** Una mayor participación en la comunicación cuántica multipartita es la teleportación llamada *open-destination* (destino abierto). Donde un estado cuántico desconocido de una sola partícula se teletransportó por primera vez a una superposición de N partículas coherentes. En una etapa posterior el estado teletransportado puede leerse en cualquiera de las N partículas, mediante la realización de una medida de proyección en el resto de $N - 1$ partículas. Dicho sistema de teletransporte se demostró para $N = 3$. Este fue el primer experimento en el que uno era capaz de manipular cinco qubits fotónicos.

–**2006** En un experimento reciente, se logró la teleportación de estados de dos qubits con un interferómetro de seis fotones. Además, Furusawa et al. [122] demostraron en 1998, la teleportación cuántica basada en variables continuas. La teleportación cuántica de estados de variable continua es difícil de extender a larga distancia, debido a la dispersión inevitable de los estados en la distribución de entrelazamiento. Esto conduce a una degradación rápida de la calidad de entrelazamiento. La teleportación cuántica utilizando la resonancia magnética nuclear o átomos tiene una ventaja, ya que, puede ser teletransportado con una eficiencia del 100 %. Sin embargo, es difícil (si no imposible) aplicarlo a largas distancias. Un criterio esencial de la teleportación es ser capaz de teletransportar cualquier estado cuántico. Esto no es posible en el experimento de Roma. La técnica de teletransporte de Innsbruck permite aspirar a una teleportación a larga distancia y esquemas más complicados.

–**2010** Se realiza por Jin et al. una teleportación como la de Roma, a larga distancia, que permitió una medición completa de los estados de Bell, además, se consiguió la aplicación en el espacio libre de la teleportación cuántica a más de 16 km [152]. Los resultados confirman la viabilidad de los experimentos en el espacio libre, y constituyen un paso importante hacia aplicaciones de comunicación cuántica a escala global.

LA FUNCIÓN DE WIGNER

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a hacer una revisión de los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica en el formalismo de la función de Wigner, y su aplicación en el campo de la óptica cuántica.

Comenzaremos el primer bloque con la sección 4.2 donde resumiremos las propiedades de la representación de Wigner dentro del contexto general de la mecánica cuántica, con objeto de resaltar su relevancia, previa a la de cualquier otra distribución, como nexo entre la mecánica cuántica y la mecánica estadística clásica. En la sección 4.3, hablaremos en primer lugar de la conexión entre la descripción estocástica de la radiación electromagnética clásica y las funciones de correlación en óptica cuántica, las cuales se expresan mediante el promedio de funciones de operadores de creación y destrucción en orden normal¹. A continuación hablaremos de la función de distribución P y de su papel como nexo formal entre la óptica cuántica y la óptica clásica, y la distribución Q , la cual se utiliza para calcular promedios de operadores en orden antinormal. Por último introduciremos las funciones características para el cálculo de funciones de distribución. En la sección 4.4 definiremos la función de Wigner en óptica cuántica a partir de la función característica asociada al orden simétrico de operadores de creación y destrucción. Después se expondrán sus propiedades y se darán ejemplos de esta función para el caso de algunos estados de la radiación.

En la sección 4.5 veremos los aspectos fundamentales de la óptica cuántica en la función de Wigner dentro del marco de Heisenberg (WRHP), donde toda la dinámica se halla en las amplitudes que representan al campo eléctrico, siendo la función de Wigner independiente del tiempo. Tras la representación de Wigner del estado de vacío electromagnético, finalizaremos en la sección 4.6 con los resultados de la teoría cuántica de la detección en este formalismo, en el caso de la detección simple y conjunta, y las expresiones de la probabilidad de detección

¹Las funciones de distribución en el espacio de fases están asociadas a distintos tipos de ordenamiento de los operadores de creación y destrucción. Así, el *orden normal*, consiste en productos de operadores en los que los operadores de creación están a la izquierda y los de destrucción a la derecha. En el *orden antinormal*, los de creación se sitúan a la derecha y los de destrucción a la izquierda. Finalmente, el *orden simétrico* consiste en que la expresión es simétrica bajo el intercambio entre operadores de destrucción y de creación.

triple y cuádruple desarrolladas en los anexos, siendo estas últimas aportaciones originales en esta tesis.

4.2. La función de Wigner en mecánica cuántica

El uso de funciones de distribución en mecánica cuántica, cuyo objeto es obtener información estadística del operador densidad mediante funciones definidas en el espacio de las fases, fue iniciado por Wigner en 1932. Wigner asoció al estado de un sistema cuántico una función, conocida actualmente como la distribución de Wigner, y mostró que cualquier promedio de operadores en el espacio de Hilbert podía expresarse como promedio con la función de Wigner completamente análogo a los que se calculan en mecánica estadística clásica [262].

Vamos a mostrar a continuación las propiedades básicas de la función de Wigner en el espacio de fases, para lo cual trataremos el caso unidimensional, aunque la generalización a n dimensiones es sencilla. Supondremos también que el sistema está en un estado puro con una función de onda ψ . La función de Wigner se define de la forma siguiente [156]:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int e^{2ipy} \psi^*(x + y) \psi(x - y) dy, \quad (4.1)$$

donde p y x representan, respectivamente, al momento y la posición, y se ha tomado $\hbar = 1$. En el caso de que la función de onda dependa del tiempo sólo tenemos que añadir un argumento temporal en ψ y W .

Las propiedades siguientes hacen que la función de Wigner tenga una gran similitud a una distribución de probabilidad:

1. $W(x, p)$ es real y está normalizada a la unidad.
2. Las distribuciones de probabilidad marginales para x y p se obtienen siguiendo métodos de la mecánica estadística clásica como si W fuese una distribución de probabilidad conjunta,

$$P_1(p, t) = \int W(x, p, t) dx ; P_2(x, t) = \int W(x, p, t) dp. \quad (4.2)$$

3. El promedio de cualquier función simétrica en los operadores \hat{x} y \hat{p} se obtiene sustituyendo estos operadores por variables aleatorias x y p y pesando con la función de Wigner:

$$\langle F^{(s)}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \int F^{(s)}(x, p) W(x, p) dx dp. \quad (4.3)$$

No obstante, en general, W no es definida positiva, lo cual puede deducirse a partir de la propiedad siguiente:

4. La probabilidad de transición entre dos estados $\psi(x)$ y $\phi(x)$ viene dada por la expresión

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = 2\pi \int W_\psi(x, p, t) W_\phi(x, p, t) dy. \quad (4.4)$$

A partir de (4.4) vemos que la función de Wigner no puede ser positiva en todos los puntos

del espacio de las fases, dado que la probabilidad de transición debe anularse para dos estados ortogonales. Por tanto, W no es en general una función de distribución de probabilidad; por ello se le denomina, al igual que a otras funciones de distribución, *densidad de cuasiprobabilidad*.

4.2.1. Ecuación de Wigner-Moyal

Analicemos la dependencia temporal de la función de Wigner, para lo cual partiremos de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m sometida a una energía potencial $V(x)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \left(\frac{1}{2m} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x). \quad (4.5)$$

A partir de la definición de W , dada por (4.1), se llega al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(x, p, t) = & - \left(\frac{p}{m} \right) \frac{\partial}{\partial x} W(x, p, t) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{2} \right)^{2n} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{2n+1} V(x) \right] \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{2n+1} W(x, p, t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

expresión que recibe el nombre de ecuación Wigner-Moyal [200]. El orden de esta ecuación es infinito cuando $V(x)$ no es un polinomio finito. Por otro lado, en el caso de que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 V(x) = 0, \quad (4.7)$$

(4.6) se reduce a la ecuación de Liouville clásica,

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, p, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial p} W(x, p, t) - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial x} W(x, p, t), \quad (4.8)$$

donde H es el hamiltoniano clásico de la partícula,

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (4.9)$$

Es decir, si el potencial es constante, lineal o cuadrático, la función de Wigner satisface la ecuación de Liouville. Por ello, en el caso de evoluciones marcadas por hamiltonianos cuadráticos, la mecánica cuántica con la función de Wigner es formalmente equivalente a la mecánica estadística clásica en el espacio de las fases [194].

4.3. Óptica cuántica en el espacio de las fases

Esta sección se inicia con una breve descripción de las funciones de correlación en el electromagnetismo clásico, y más adelante introduciremos las correlaciones en óptica cuántica. El ordenamiento normal de operadores en dichas correlaciones está ligado a la teoría cuántica de la detección de la luz. Introduciremos la función P como punto de encuentro formal entre

la teoría clásica y cuántica, y posteriormente hablaremos algo de la función Q . Dejaremos la función de Wigner para un estudio más detallado en la sección 4.4.

4.3.1. Descripción estocástica del campo electromagnético clásico

En electromagnetismo clásico el campo eléctrico de la radiación se describe normalmente mediante la suma de dos funciones complejas mutuamente conjugadas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} \epsilon_{\lambda, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ son las funciones de los modos normales. $\epsilon_{\lambda, \mathbf{k}}$ es el vector de polarización correspondiente al vector de onda \mathbf{k} y polarización λ , y se supone que el campo está confinado en un cubo de lado L con condiciones de contorno periódicas.

Cuando el campo se describe mediante un proceso estocástico, los coeficientes complejos $C_{\mathbf{k}}$ son variables aleatorias con distribución de probabilidad $P(\{C_{\mathbf{k}}\})$, tal que

$$\int P(\{C_{\mathbf{k}}\}) \prod_{\mathbf{k}} d^2 C_{\mathbf{k}} = 1. \quad (4.12)$$

Dada una $F(\mathbf{E}^{(+)})$ su promedio se calcula siguiendo los métodos de la estadística clásica:

$$\langle F[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)] \rangle = \int P(\{C_{\mathbf{k}}\}) F[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t, \{C_{\mathbf{k}}\})] \prod_{\mathbf{k}} d^2 C_{\mathbf{k}}. \quad (4.13)$$

Por ejemplo, la función de correlación de primer orden, cuyo uso es básico en estudios sobre coherencia clásica [54, 177], se obtiene a partir de (4.10) sin más que hacer $F \equiv \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}', t')$. Para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ y $t = t'$, esta función representa, salvo factores dimensionales la intensidad media del campo en la posición \mathbf{r} y t :

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle \propto \langle \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (4.14)$$

4.3.2. Función de correlación en óptica cuántica

El uso de las funciones de correlación en óptica cuántica está íntimamente relacionado con la teoría de la detección del campo electromagnético. El campo se expresa como una suma de los operadores mutuamente conjugados. En la aproximación escalar, en la que no se tiene en cuenta la polarización, tenemos

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.15)$$

siendo

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.16)$$

donde los coeficientes $C_{\mathbf{k}}$ de (4.11) se han sustituido por $i(\hbar \omega_{\mathbf{k}}/2)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}}$, siendo $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ el operador de destrucción correspondiente al modo \mathbf{k} de la radiación. Uno de los resultados fundamentales de la teoría de la detección es la expresión para la probabilidad de detección por unidad de tiempo², en un instante t , para un detector por absorción ideal [170, 134]:

$$P(t) \propto \langle \phi | \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) | \phi \rangle, \quad (4.17)$$

donde $|\phi\rangle$ es el estado de la radiación. Una de las características más importantes de (4.17) es el ordenamiento de los operadores en el orden normal. Ello es consecuencia de la naturaleza de la detección, la cual no registra fluctuaciones de punto cero.

4.3.3. La representación P

En la teoría cuántica del campo electromagnético ocupan un lugar relevante los *estados coherentes* por su similitud con la radiación clásica, y fueron estudiados fundamentalmente por Glauber [134, 131, 132, 133]. En estos estados, el producto de las incertidumbres en amplitud y fase es el mínimo permitido por la relación de incertidumbre, y en este sentido, son los estados del campo electromagnético cuya descripción es más próxima a la clásica. Si bien no son ortogonales, lo cual permite una representación no diagonal del operador densidad en estos estados conocida como *representación R* [257], sí verifican la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1, \quad (4.18)$$

lo que hace posible también una representación diagonal del operador densidad en términos del estado

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (4.19)$$

$P(\alpha, \alpha^*)$ se denomina *representación P* del operador densidad, y fue introducida simultáneamente por Sudarshan [244] y Glauber [131]. P toma valores reales y en general no es definida positiva, aunque tiene varias de las propiedades de una distribución de probabilidad: i) está normalizada a la unidad, y ii) los promedios de funciones de operadores de creación y destrucción en orden normal se expresan como promedios clásicos, sustituyendo los operadores destrucción por los autovalores α de los estados coherentes y los de creación por sus complejos conjugados, y donde la función P hace formalmente el papel de una distribución de

²Dado que la detección requiere de la incidencia de la luz durante un cierto tiempo, lo que tiene realmente sentido físico es la probabilidad de detección entre los instantes t y $t+w$, donde w recibe el nombre de *ventana de detección*.

probabilidad. Es decir:

$$\langle \hat{a}^{+n} \hat{a}^m \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) (\alpha^*)^n \alpha^m d^2\alpha. \quad (4.20)$$

La gran similitud entre P y la distribución de probabilidad $P(\{C_{\mathbf{k}}\})$ (ver (3.13)) le dio a P un papel relevante en el análisis del carácter clásico de los estados del campo electromagnético, dada la equivalencia formal entre las descripciones clásicas y cuántica de la coherencia óptica mediante el uso de esta distribución. Esto ha dado lugar al convenio de definir un estado clásico como aquel que tiene una función P positiva [179].

No obstante, esta distribución tiene el problema de, añadido al de su no positividad, de que posee singularidades mucho más fuertes que una función delta de Dirac para ciertos estados. Esto último es consecuencia de que las cantidades $\text{Re}\alpha$ y $\text{Im}\alpha$, las cuales son proporcionales a los promedios de los operadores $(\hat{a} + \hat{a}^+)/2$ y $(\hat{a} - \hat{a}^+)/2i$ en un estado coherente $|\alpha\rangle$, no tienen una distribución de probabilidad conjunta dado que dichos operadores no conmutan, y por tanto no se puede medir directamente $P(\alpha, \alpha^*)$ [149]. Por otro lado, como los estados coherentes no son ortogonales, $P(\alpha, \alpha^*)$ no representa una probabilidad para estados mutuamente excluyentes aunque sea positiva [179].

4.3.4. La representación Q

Se obtiene a partir de los elementos de matriz del operador densidad en los estados coherentes [257]:

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (4.21)$$

Esta distribución está normalizada a la unidad, es positiva, y está acotada por $1/\pi$. Por tanto, tiene más propiedades en común con una distribución de probabilidad que la distribución P . La función Q se usa para calcular promedios de operadores en orden antinormal, pues verifica la propiedad siguiente:

$$\langle \hat{a}^n \hat{a}^{+m} \rangle = \int Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^n (\alpha^*)^m d^2\alpha. \quad (4.22)$$

4.3.5. Funciones características

Las funciones de distribución se pueden introducir por medio de las denominadas *funciones características*, las cuales están asociadas a un determinado ordenamiento de los operadores de creación y destrucción [179, 257, 229]. En este apartado trataremos las funciones características asociadas al orden normal (función P), al orden antinormal (función Q), y en el apartado siguiente introduciremos la distribución de Wigner en óptica cuántica a partir de la función característica asociada al orden simétrico. Por otro lado, existe una representación generalizada del operador densidad, resultado de un tratamiento unificado del problema de obtener funciones de distribución en el espacio de las fases a partir de otros tipos de ordenamiento de operadores [6, 7, 5, 73, 72].

Por ejemplo, la función característica asociada a la distribución P es

$$X^{(N)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(e^{\lambda \hat{a}^+} e^{\lambda^* \hat{a}} \hat{\rho}), \quad (4.23)$$

de forma que

$$P(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(N)}(\lambda, \lambda^*) d^2 \lambda. \quad (4.24)$$

En el caso de la distribución Q , tenemos

$$X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(e^{\lambda^* \hat{a}} e^{\lambda \hat{a}^+} \hat{\rho}), \quad (4.25)$$

siendo

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) d^2 \lambda. \quad (4.26)$$

4.4. La función de Wigner en óptica cuántica

El uso de la función de Wigner en la óptica cuántica fue superada en un principio por la representación P de Glauber-Sudarshan. La relación generalmente aceptada entre el comportamiento y positividad de P y el carácter clásico del estado de la radiación hizo que P tuviese un papel relevante como nexo entre la óptica clásica y la óptica cuántica. No obstante, en los últimos años ha aumentado la importancia de la función de Wigner considerablemente, lo cual ha estado motivado en parte por el comportamiento altamente singular de P para ciertos estados relevantes del campo electromagnético.

A continuación vamos a presentar un resumen sobre la función de Wigner en óptica cuántica. Trabajaremos, por simplicidad, para un modo del campo electromagnético, aunque los resultados se pueden generalizar fácilmente al caso multimodo. La función de Wigner en óptica cuántica puede definirse a partir de la función característica asociada al orden simétrico. Dado el operador densidad $\hat{\rho}$, tenemos [229, 257]:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) d^2 \lambda, \quad (4.27)$$

donde $X^{(S)}(\lambda, \lambda^*)$ se denomina función *característica en orden simétrico*:

$$X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(e^{\lambda \hat{a}^+ + \lambda^* \hat{a}} \hat{\rho}). \quad (4.28)$$

W es real y verifica la condición de normalización

$$\int W(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha = 1, \quad (4.29)$$

aunque ya vimos que puede tomar valores negativos, y por tanto no es en general una distri-

bución de probabilidad. Por otro lado, su valor para cualquiera que sea el operador densidad está acotado de acuerdo con la desigualdad [72]:

$$-2 < \int W(\alpha, \alpha^*) < 2. \quad (4.30)$$

Además, W tiene la propiedad de que las distribuciones de probabilidad marginales para α y α^* se obtienen como si $W(\alpha, \alpha^*)$ fuese una distribución de probabilidad conjunta (ver (4.2)).

A partir de (4.27) y (4.28) se puede obtener la siguiente expresión explícita para W , usando los estados coherentes [229]:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi^2} e^{2|\alpha|^2} \int \langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{-2(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} d^2\beta. \quad (4.31)$$

Por otro lado, $X^{(S)}$ verifica las propiedades [73, 72]:

$$\int \frac{1}{\pi} \left| X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) \right|^2 d^2\lambda = \text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1, \quad (4.32)$$

$$\left| X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) \right|^2 \leq 1 \quad ; \quad X^{(S)}(0) = 1, \quad (4.33)$$

las cuales son consecuencia de que el operador $\exp(\lambda \hat{a}^+ - \lambda^* \hat{a})$ es unitario para cualquier valor de λ , y es igual a la unidad para $\lambda = 0$. Utilizando el teorema de Campbell-Baker-Hausdorff³ [179] se pueden relacionar las funciones características asociadas a los tres ordenamientos de operadores:

$$e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) = X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} X^{(N)}(\lambda, \lambda^*). \quad (4.34)$$

A partir de (4.33) y (4.34) vemos que

$$\left| X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) \right| \leq e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad ; \quad \left| X^{(N)}(\lambda, \lambda^*) \right| \leq e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}. \quad (4.35)$$

Nótese que el límite superior al valor de $|X^{(N)}|$ puede hacerse muy grande, lo que hace que la integral (4.24) no exista como función ordinaria en algunos casos. Por otro lado, las relaciones entre Q , P y W son [257]:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int P(\beta, \beta^*) e^{-2|\beta - \alpha|^2} d^2\beta, \quad (4.36)$$

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int P(\beta, \beta^*) e^{-|\beta - \alpha|^2} d^2\beta, \quad (4.37)$$

de donde vemos que tanto W como Q son convoluciones gaussianas de P , aunque Q está convolucionada con una gaussiana cuya anchura es $\sqrt{2}$ veces mayor que la correspondiente a

³Según dicho teorema, dados dos operadores \hat{A} y \hat{B} , tal que $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$, se verifica la relación siguiente: $e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$.

la función de Wigner, lo que explica su mayor positividad.

Una de las propiedades más importantes de la distribución de Wigner es que el promedio de cualquier expresión simétrica en los operadores de creación y destrucción es igual al promedio con la función de Wigner, siguiendo los procedimientos de la mecánica estadística clásica, de la expresión que resulta al sustituir los operadores de creación por un número complejo α , y los de destrucción por el complejo conjugado α^* , es decir [72, 179]:

$$\langle F^{(s)}(\hat{a}, \hat{a}^+) \rangle = \int W(\alpha, \alpha^*) F^{(s)}(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (4.38)$$

Esta propiedad se usó para pasar del orden normal al orden simétrico, con el objeto de expresar las probabilidades de detección simple y conjunta a partir de promedios tomados con la función de Wigner. El método a seguir se basó en que el conmutador entre operadores de creación y destrucción es un número complejo, lo que llevó a expresiones en las que aparecían las contribuciones de la radiación de punto cero en las probabilidades [76].

Por otro lado, dado un operador en orden normal

$$O(\hat{a}, \hat{a}^+) = \sum_{n, m} c_{n, m} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m, \quad (4.39)$$

existe otro procedimiento alternativo para obtener una función $O_S(\alpha, \alpha^*)$, tal que

$$\langle O(\hat{a}, \hat{a}^+) \rangle = \int W(\alpha, \alpha^*) O_S(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha, \quad (4.40)$$

y del que mostraremos sólo el resultado final [229]:

$$O_S(\alpha, \alpha^*) = \sum_{n, m} c_{n, m} \left[\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right]^n \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right]^m e^{-\lambda^* \alpha + \lambda \alpha^*} \right]_{\lambda=\lambda^*=0}. \quad (4.41)$$

4.4.1. Ejemplos de función de Wigner

Vamos a presentar a continuación varios ejemplos de función de Wigner para algunos estados de la radiación:

1. Estados coherentes

Dado el estado coherente⁴ $|\beta\rangle = \left| \frac{1}{2} (\beta_r + i\beta_i) \right\rangle$, la función de Wigner viene dada por [257]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(2Re\alpha - \beta_r)^2 + (2Im\alpha - \beta_i)^2 \right] \right\}. \quad (4.42)$$

Nótese que el estado de vacío, correspondiente al estado coherente $|\beta = 0\rangle$, tiene como

⁴Los estados coherentes se obtienen aplicando el operador desplazamiento $D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ al estado de vacío, y son autoestados del operador de destrucción, es decir, $\hat{a}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$, siendo β un número complejo.

función de Wigner la gaussiana,

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}, \quad (4.43)$$

lo que le da el aspecto de un campo estocástico con una distribución de probabilidad dada por (4.43). Esto contrasta con la distribución P correspondiente a este estado, la cual es

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha). \quad (4.44)$$

2. Estado número de fotones

La función de Wigner para el estado $|n\rangle$ viene dada por [257]:

$$W_n(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}, \quad (4.45)$$

donde $L_n(x)$ son los polinomios de Laguerre. Para $n > 0$ esta distribución toma valores negativos. Por ejemplo, para $n=1$ (estado de un fotón), se tiene [155]:

$$W_1(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} (|\alpha|^2 - \frac{1}{2}) e^{-|\alpha|^2}. \quad (4.46)$$

Para el estado de vacío ($n=0$) la función de Wigner coincide con (4.43).

El buen comportamiento de la función de Wigner para los estados número contrasta con la función P asociada a dichos estados, la cual es [229]:

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha). \quad (4.47)$$

3. Estado de luz caótica

Si $\langle n \rangle$ es el número medio de fotones en un estado de luz térmica, la función de Wigner para este estado es [190]:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \left[\pi (\langle n \rangle + \frac{1}{2}) \right]^{-1} e^{-|\alpha|^2 (\langle n \rangle + \frac{1}{2})^{-1}}. \quad (4.48)$$

Nótese que, para $\langle n \rangle = 0$, (4.48) coincide con la función de Wigner del vacío.

4. Estados comprimidos⁵.

Para un estado comprimido⁶ de la radiación, de amplitud a y compresión s , la función

⁵En inglés se utiliza el término *squeezed*.

⁶Los estados comprimidos son estados de mínima incertidumbre, en los que la incertidumbre en una cuadratura es inferior a la correspondiente a los estados coherentes, siendo superior la incertidumbre asociada a la segunda cuadratura. Así, los estados coherentes constituyen un subconjunto de los estados comprimidos, con la particularidad de que tienen una misma incertidumbre en las dos cuadraturas [257].

de Wigner es [189]:

$$W_{s,a}(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} e^{-2e^{2s}\left(\frac{\alpha+\alpha^*}{2}-a\right)^2} e^{-2e^{-2s}\left(\frac{\alpha-\alpha^*}{2i}\right)^2}. \quad (4.49)$$

En [194] se muestra cómo se generan estos estados en óptica no lineal utilizando para ello una descripción clásica.

4.5. La función de Wigner en el marco de Heisenberg (WRHP)

Una vez que hemos revisado los aspectos básicos de la función de Wigner en mecánica cuántica, y en el terreno de la óptica cuántica, nos centraremos en el formalismo dentro del marco de Heisenberg, donde toda la dinámica se halla en las amplitudes del campo electromagnético, siendo la función de Wigner independiente del tiempo (WRHP). Comenzaremos por la descripción de un haz de luz, y seguiremos con el análisis de las propiedades de la radiación de punto cero.

4.5.1. Descripción de un haz de luz

De ahora en adelante, nos referiremos en nuestros desarrollos el campo electromagnético que corresponde a haces luminosos estrechos, de modo que el haz de luz contiene frecuencias en un rango entre ω_{\min} y ω_{\max} , y vectores de onda cuyas componentes transversales están limitadas por una cota superior [79]:

$$\omega_{\min} < \omega_{\mathbf{k}} < \omega_{\max}, \quad |\mathbf{k}^{\text{tr}}| \ll \frac{\omega_{\min}}{c}. \quad (4.50)$$

De este modo, y tal y como hemos visto en la sección 4.3, el operador campo eléctrico correspondiente a un haz de luz se expresa mediante la suma de dos operadores mutuamente conjugados⁷

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.52)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}], \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.53)$$

donde L^3 es el volumen de normalización y $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ es el operador de destrucción correspondiente a un fotón cuyo vector de onda es \mathbf{k} y cuyo vector de polarización es $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$, siendo $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$.

⁷En experimentos donde no interviene la polarización se usa la aproximación escalar, bien conocida en óptica clásica. Se multiplica la amplitud (4.53) por $\sqrt{2}$, de modo que la parte relevante del vector campo eléctrico es:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.51)$$

La suma está restringida al conjunto de modos $[\mathbf{k}]$ que verifican (4.50).

Las ecuaciones (4.52) y (4.53) corresponden a la imagen de Heisenberg, donde toda la dependencia temporal está en los operadores de creación y destrucción $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(t)$ y $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$. Las ecuaciones de evolución de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ está descrita por las ecuaciones:

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{H}], \quad (4.54)$$

donde \hat{H} es el hamiltoniano del sistema.

Para el campo electromagnético libre, esta dependencia tiene la forma

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (4.55)$$

pero para situaciones donde se produce interacción entre campos electromagnéticos esta dependencia es más compleja y contiene toda la dinámica del proceso. En la imagen de Heisenberg el estado del campo está representado por un operador densidad ρ .

Cuando se pasa a la función de Wigner los operadores $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ se sustituyen por amplitudes complejas, de tal modo que los operadores de destrucción $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ se reemplazan por variables aleatorias $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$, y los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ por los complejos conjugados $\alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$.

La amplitud correspondiente al campo eléctrico se representa por:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}], \lambda} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.56)$$

Las ecuaciones de evolución de las amplitudes $\alpha_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ coinciden con las correspondientes a los operadores de destrucción, dadas por (4.54), en el caso de que el hamiltoniano sea cuadrático, que es el caso correspondiente a la conversión paramétrica a la baja y las transformaciones de las amplitudes en el caso de aparatos ópticos lineales.

De cara a la sección 6.3.1 expondremos aquí la transformación de las amplitudes en un divisor de haz BS . Si a, b representan los canales de entrada, y c, d los de salida, y T (R) es el coeficiente de transmisión (reflexión), tenemos:

$$\begin{aligned} E_c^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= TE_a^{(+)}(\mathbf{r}, t) + iRE_b^{(+)}(\mathbf{r}, t), \\ E_d^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= TE_b^{(+)}(\mathbf{r}, t) + iRE_a^{(+)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Hemos asumido que R y T son números reales y \mathbf{r} es el punto donde se encuentra el centro del BS . Estas relaciones son las mismas que las correspondientes a la transformación del operador campo eléctrico en el espacio de Hilbert, y también en óptica clásica. Esta coincidencia es una consecuencia de la linealidad de las ecuaciones (4.57).

4.5.2. La radiación de punto cero

Una vez que hemos descrito el haz de luz en la representación de Wigner, vamos a resumir en este apartado los aspectos fundamentales de la descripción del vacío electromagnético. El estado de cero fotones se representa mediante un campo estocástico [76]:

$$\mathbf{E}_{ZPF} = \mathbf{E}_{ZPF}^{(+)} + \mathbf{E}_{ZPF}^{(-)}, \quad (4.58)$$

donde, teniendo en cuenta la evolución libre (4.55), y pasando a la función de Wigner, se tiene:

$$\mathbf{E}_{ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad (4.59)$$

Las amplitudes $\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ y $\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}$ se distribuyen de acuerdo con la función de Wigner para el estado de vacío, la cual corresponde a la gaussiana (ver ecuación (4.43)):

$$W(\alpha) = \prod_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}|^2}, \quad (4.60)$$

donde $\alpha \equiv \{ \alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^*, \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \}$ representa el conjunto de modos del punto cero.

A partir de (4.12) se pueden deducir las siguientes relaciones de correlación entre las amplitudes de los modos del vacío:

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'} \rangle \equiv \int d\alpha W(\alpha) \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'} = 0, \quad (4.61)$$

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'}^* \rangle \equiv \int d\alpha W(\alpha) \alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'}^* = 0, \quad (4.62)$$

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'}^* \rangle \equiv \int d\alpha W(\alpha) \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \alpha_{\mathbf{k}', \lambda'}^* = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (4.63)$$

La consideración de las expresiones (4.60) a (4.63) en el estudio de las propiedades estocásticas de la radiación de punto cero, trae consigo que el ZPF es un campo de media nula, con una energía media por modo igual $(1/2)\hbar\omega$, e idénticas fluctuaciones [76]. Estos resultados forman parte, tanto de la descripción del vacío electromagnético en electrodinámica cuántica (QED), como de la descripción de la radiación de punto cero en el ámbito de la Electrodinámica Estocástica⁸. Aunque nosotros trataremos en esta tesis el ZPF desde un punto de vista puramente cuántico a través del formalismo WRHP, hemos de resaltar que existen diferencias entre las descripciones clásicas (SED) y cuántica (QED) del ZPF, que tienden a converger en la referencia [148].

⁸Véase la sección 5.4 sobre el problema de la detección y las referencias sobre SED.

4.6. La teoría de la detección

La teoría de la fotodetección en el espacio de Hilbert se basa en el ordenamiento normal de operadores, lo que da lugar a una sustracción directa de los efectos del vacío en los cálculos de las correlaciones. Desde un punto de vista operacional este formalismo es, digamos, más eficiente, pero desde nuestro punto de vista da lugar a una pérdida importante de información, en lo que se refiere a la intervención de la radiación de punto cero en los fenómenos. Cuando se analiza la detección de fotones en el formalismo de Wigner, el vacío se explicita y actúa como un “umbral” de detección, enfatizando los aspectos ondulatorios de la luz, frente a la descripción del espacio de Hilbert, donde se enfatizan los aspectos corpusculares.

La teoría de la detección en la función de Wigner se desarrolló en las referencias [87] y [79], para experimentos de detección simple y conjunta, que son los experimentos analizados a lo largo de [76]⁹.

Vamos a dividir esta sección en dos partes. En primer lugar revisaremos los resultados concernientes a la detección simple y conjunta; a continuación extenderemos el análisis a experimentos de detección triple y cuádruple, mostrando los resultados de los desarrollos hechos en los Anexos *A* y *B*.

4.6.1. Probabilidad simple y conjunta

Las probabilidades de detección simple y conjunta vienen dadas por [79, 86]:

$$P_s = \int W(\alpha)Q(\alpha, \phi)d\alpha \equiv \langle Q(\phi) \rangle , \quad (4.64)$$

$$P_{AB} = \int W(\alpha)Q_A(\alpha, \phi_A)Q_B(\alpha, \phi_B)d\alpha \equiv \langle Q_A(\phi_A)Q_B(\phi_B) \rangle , \quad (4.65)$$

donde

$$Q = \frac{\eta}{h\nu} [\tilde{I}(\alpha, \phi) - \tilde{I}_0] = \frac{\eta}{h\nu} \int dt \int d^2r [I(\alpha, \phi; \mathbf{r}, t) - I_0] , \quad (4.66)$$

siendo

$$I = c\epsilon_0 \mathbf{E}^{(+)} \mathbf{E}^{(-)} , \quad (4.67)$$

la intensidad correspondiente al campo eléctrico e I_0 la intensidad correspondiente a la radiación de punto cero en la posición del detector, es decir, la intensidad en el caso de que todas las fuentes de radiación estuviesen apagadas. La integración se realiza sobre la ventana de detección y la apertura superficial del detector, y se divide por la energía típica de un fotón, de modo que, Q es adimensional, siendo η la eficiencia cuántica del detector. ϕ , ϕ_A y ϕ_B representan parámetros que caracterizan la disposición experimental en las zonas donde se

⁹Aunque nos centraremos a lo largo de esta tesis en los experimentos de conversión paramétrica a la baja analizados en la WRHP, los resultados de la teoría cuántica de la detección desarrollados en [76] son de aplicación general, e independientes del marco (Heisenberg, Schrödinger o interacción) en que se trabaje.

sitúan los detectores, y pueden modificarse en los experimentos. Para simplificar la notación, hemos realizado el cambio $\{\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^*\} \equiv \alpha$ y $d^N \alpha_{\mathbf{k}} d^N \alpha_{\mathbf{k}}^* \equiv d\alpha$.

En experimentos donde interviene la polarización, se usa una expresión cuya aplicación resulta mucho más sencilla que la de la ecuación (4.65), y que surge de la consideración de que el proceso de conversión a la baja es gaussiano y de desechar los términos de cuarto orden en la constante de acoplamiento¹⁰ [78]:

$$P_{AB} = c\epsilon_0 \frac{\eta_A}{h\nu_A} \frac{\eta_B}{h\nu_B} \int dt \int d^2r \int dt' \int d^2r' C_{AB}(\mathbf{r}, t, \phi_A; \mathbf{r}', t', \phi_B),$$

$$C_{AB}(\mathbf{r}, t, \phi_A; \mathbf{r}', t', \phi_B) = \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |\langle F_{\lambda}^{(+)}(\phi_A; \mathbf{r}, t) F_{\lambda'}^{(+)}(\phi_B; \mathbf{r}', t') \rangle|^2, \quad (4.68)$$

donde λ y λ' son los índices de polarización¹¹.

En gran parte de los desarrollos que haremos a lo largo de esta tesis usaremos una expresión simplificada para la probabilidad de detección conjunta en la que no aparecen las integrales en la ventana ni en la superficie del detector. Estas expresiones surgen de la consideración de que la luz mantiene sus propiedades de coherencia en la zona de detección, y de considerar la situación ideal $t = t'$ en los cálculos de las correlaciones, lo que no afecta a los resultados fundamentales:

$$P_{AB}(\phi_A, \phi_B) = K_A K_B \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |\langle F_{A,\lambda}^{(+)} F_{B,\lambda'}^{(+)} \rangle|^2, \quad (4.69)$$

donde K_A y K_B son constantes relacionadas con las eficiencias de los detectores, y con las dimensiones adecuadas para que el resultado de (4.69) sea adimensional. En el caso de experimentos con PDC tipo I, se tiene una expresión similar eliminando la polarización de (4.69).

4.6.2. Detección triple y cuádruple

En los Anexos A y B está desarrollado el cálculo de las probabilidades de detección triple y cuádruple. Este análisis es fundamental para el estudio de los experimentos de teletransporte en el capítulo 8. Mostraremos aquí los resultados fundamentales:

- Probabilidad de detección triple

$$P_{ABC} = \int W(\alpha) Q_A(\alpha, \phi_A) Q_B(\alpha, \phi_B) Q_C(\alpha, \phi_C) d\alpha$$

$$= P_A P_{BC} + P_B P_{AC} + P_C P_{AB}. \quad (4.70)$$

¹⁰Ver Capítulo 5.

¹¹En experimentos donde todos los haces llevan la misma polarización, se llega a una expresión similar, eliminando los índices de polarización. Así, en este caso $C_{AB} = (\mathbf{r}, t, \phi_A; \mathbf{r}', t', \phi_B) = |\langle F^{(+)}(\phi_A; \mathbf{r}, t) F^{(+)}(\phi_B; \mathbf{r}', t') \rangle|^2$.

- Probabilidad de detección cuádruple

$$\begin{aligned}
 P_{ABCD} &= \int W(\alpha) Q_A(\alpha, \phi_A) Q_B(\alpha, \phi_B) Q_C(\alpha, \phi_C) Q_D(\alpha, \phi_D) d\alpha \\
 &= K_A K_B K_C K_D \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} |\langle F_{A,\lambda}^{(+)} F_{B,\lambda'}^{(+)} F_{C,\lambda''}^{(+)} F_{D,\lambda'''}^{(+)} \rangle|^2. \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

LA CONVERSIÓN PARAMÉTRICA A LA BAJA EN LA WRHP

5.1. Introducción

La teoría de la conversión paramétrica a la baja en la WRHP, se desarrolló hace unos 15 años [87,79,78,88]. Partiendo del hamiltoniano total del sistema, que es la suma del correspondiente al campo electromagnético libre y el de interacción de la radiación con el cristal, se pasa a la función de Wigner aprovechando el carácter cuadrático del hamiltoniano, sustituyendo los operadores de creación y destrucción del espacio de Fock por amplitudes complejas, las cuales verifican unas ecuaciones de evolución lineales, idénticas a las de estos operadores en la imagen de Heisenberg. El estado inicial del sistema es el correspondiente a un láser (estado coherente), que en la representación de Wigner corresponde a la superposición de una onda clásica y la radiación de punto cero¹.

En otros trabajos, dentro de la misma línea, se usaron las ecuaciones de Maxwell cuantizadas para obtener la evolución del operador campo eléctrico en el cristal. El carácter lineal de la ecuación de evolución del campo eléctrico permite sustituir el operador por la correspondiente amplitud compleja al pasar a la representación de Wigner, obteniéndose con teoría de perturbaciones el campo eléctrico radiado por el cristal hasta segundo orden en la constante de acoplamiento, para lo que se aplicó el método de la función de Green. La ventaja de este procedimiento, frente al uso del hamiltoniano, es que los parámetros característicos del cristal aparecen de forma explícita en la expresión del campo, lo cual permitió hacer un cálculo del tiempo de correlación entre los haces señal y gemelo, así como el espectro de la luz emitida por el cristal, todo ello en función de los parámetros característicos del medio no lineal [77,86].

En estos trabajos se consiguió obtener, dentro de la ortodoxia de la mecánica cuántica, una interpretación del fenómeno de la conversión paramétrica a la baja, similar a la de la óptica clásica no lineal, mediante la introducción, como elemento fundamental de la teoría, de la radiación de punto cero que entra en el medio no lineal e interacciona con el láser, para dar lugar a la luz emitida por el cristal. Todos los resultados se aplicaron a experimentos donde se

¹Véase la ecuación (4.42).

contrastaban desigualdades de Bell o se mostraban aspectos no clásicos de la luz convertida a la baja, dando lugar a una imagen distinta a la más común que usa el espacio de Hilbert, pero consistente con la ortodoxia cuántica. La positividad de la función de Wigner para los experimentos PDC proporciona una interpretación alternativa a los resultados, basada en la consideración de la radiación de punto cero en la propagación de la luz en el cristal y en los distintos elementos ópticos entre la fuente y los detectores. Esta interpretación se compara, en algunos de los experimentos, con la que se realiza mediante las reglas de Feynman [116]. Ejemplos de estos experimentos son, utilizando conversión tipo I, y con el objeto de mostrar aspectos no clásicos de la luz: interferencia de haces señal y gemelo sobre una pantalla, el experimento de creación frustrada de fotones por interferencia, el experimento de coherencia inducida, la cancelación de la dispersión y el borrador cuántico. Un segundo grupo lo constituyeron experimentos en los que se contrastaban desigualdades de Bell, y en los que se utilizó conversión tipo II no colineal: el experimento de Franson [119], el de Rarity y Tapster [213] y el de Kwiat et al. [162]. Todos estos experimentos se analizaron en las referencias [87, 79, 78, 88].

Por otro lado, en otros trabajos [102, 183, 185, 184], basados en la función de Wigner, en los que se aplican las ecuaciones clásicas utilizando la radiación de punto cero, se afirma haber conseguido la predicción de un fenómeno nuevo, conocido como SPUC (conversión paramétrica a la alta espontánea²). A principios de la década pasada se llevaron a cabo experimentos con el objeto de comprobar la veracidad de esta predicción [124], y el resultado fue negativo. Sin embargo, recientemente el fenómeno SPUC se ha demostrado experimentalmente [245, 9], lo que seguramente abrirá un debate fundamental sobre el carácter real de la radiación de punto cero defendido por la SED desde sus inicios, en contraposición con el concepto de fotón como partícula.

El uso de la conversión paramétrica a la baja para experimentos de comunicación cuántica ha motivado el desarrollo de una línea de investigación cuyo objetivo es la interpretación de los aspectos fundamentales de la comunicación cuántica con fotones, a través de la intervención de la radiación de punto cero. La idea es mostrar un punto de vista alternativo, pero consistente con la ortodoxia cuántica, sobre los aspectos esenciales de la comunicación cuántica.

Este capítulo está dividido en las secciones siguientes. En la sección 5.2 hacemos un resumen de los aspectos más relevantes del PDC tipo II en la función Wigner, y en la sección 5.3 profundizamos en el concepto de entrelazamiento, introducido por primera vez en la referencia [88] para el estado $|\psi^+\rangle$, extendiendo el estudio al resto de los estados de Bell en el apartado 5.3.1³. Es en este apartado donde comienzan las aportaciones originales de la tesis, y tiene una importancia capital en su desarrollo posterior.

Finalmente, en la sección 5.4 revisaremos someramente lo que se conoce como *problema de la detección* en el marco de la óptica estocástica⁴.

²Del inglés *spontaneous up conversion of the vacuum*.

³Véase la referencia [85].

⁴En la misma sección se dará una bibliografía básica para aspectos relacionados con la SED.

5.2. Conversión a la baja en la WRHP

En esta sección vamos a resumir los aspectos esenciales de la conversión paramétrica a la baja en el formalismo de la función de Wigner, dentro del marco de Heisenberg⁵. Este trabajo se desarrolló ampliamente en las referencias [87, 79, 78] para la conversión tipo I, y en la referencia [88] para la conversión tipo II, utilizando un formalismo hamiltoniano⁶. En esta sección vamos a destacar los aspectos esenciales de la conversión tipo II, dada su importancia en la generación de estados entrelazados para su aplicación en experimentos de comunicación cuántica.

El proceso de la conversión paramétrica a la baja tipo II, se puede caracterizar formalmente mediante el hamiltoniano [88]:

$$H = \sum_{j=o,e} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{j\mathbf{k}} \alpha_{j\mathbf{k}}^* \alpha_{j\mathbf{k}} + \left(i\hbar g' V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{-i\omega_p t} \alpha_{o\mathbf{k}}^* \alpha_{e\mathbf{k}'}^* + c.c. \right), \quad (5.1)$$

donde los subíndices o y e se refieren a los haces ordinario y extraordinario, y $\alpha_{o\mathbf{k}}$ y $\alpha_{e\mathbf{k}'}$ son amplitudes complejas. La constante de acoplamiento g' caracteriza el proceso no lineal y $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ es una función adimensional simétrica en los vectores de onda del cristal. Por otra parte, el estado (independiente del tiempo) que caracteriza a la luz láser, es un estado coherente del campo electromagnético, que en el formalismo de la función de Wigner consiste en la superposición de una onda clásica y la radiación de punto cero (ZPF), correspondiendo esta última a la representación de Wigner del estado del vacío. De este modo, en el cristal incide una onda monocromática clásica cuya expresión es:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \left(V(t) e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} + c.c. \right) \mathbf{u} ; \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{k}_p. \quad (5.2)$$

Como el tiempo de coherencia del láser es más grande que el tiempo en que se desarrolla el proceso, se considera $V(t)$ constante de cara a la integración de las ecuaciones de evolución.

En el cristal también incide la radiación de punto cero (ZPF) dada por la expresión:

$$\mathbf{E}_{ZPF} = \mathbf{E}_{ZPF}^{(+)} + \mathbf{E}_{ZPF}^{(-)}, \quad (5.3)$$

donde

$$\mathbf{E}_{ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda=o,e} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}, \lambda} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad (5.4)$$

siendo L^3 el volumen de normalización y $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$ el vector de polarización. Las amplitudes $\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ y

⁵En el marco de Heisenberg, el estado es independiente del tiempo y toda la dinámica está en los operadores. Al pasar a la función de Wigner, esto se traduce en que la dinámica del proceso está en las amplitudes complejas que definen el campo eléctrico, las cuales están gobernadas por una distribución de probabilidad correspondiente a la función de Wigner del vacío.

⁶Estas cuatro publicaciones constituyeron el cuerpo de la tesis doctoral [76].

$\alpha_{\mathbf{k},\lambda}$ se distribuyen de acuerdo con la función de Wigner para el estado de vacío, correspondiente a la gaussiana (4.60), y verifican las propiedades de correlación representadas por las ecuaciones (4.61), (4.62) y (4.63).

Como resultado del acoplamiento de (5.2) y (5.4) dentro del cristal se generan conos de radiación compuestos por pares de haces conjugados (ordinario y extraordinario). Una vez que se integran las ecuaciones de evolución, las cuales vienen dadas a partir de la aplicación de (4.54), y la sustitución posterior de los operadores de creación y destrucción por amplitudes complejas, la sustitución en la expresión del campo eléctrico (4.56) da lugar al siguiente desarrollo correspondiente a los haces ordinario y extraordinario, hasta segundo orden en la constante de acoplamiento [88]:

$$\mathbf{E}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_e^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}_e \quad (5.5)$$

$$E_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{e,ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + gVe^{-i\omega_p t}GE_{o,ZPF}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2|V|^2JE_{e,ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{E}_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_o^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}_o \quad (5.7)$$

$$E_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{o,ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + gVe^{-i\omega_p t}GE_{e,ZPF}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2|V|^2JE_{o,ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (5.8)$$

donde $g = g'\Delta t$, siendo Δt el tiempo de interacción; G y J son operadores lineales definidos en todo el espacio. \mathbf{u}_e y \mathbf{u}_o son vectores de polarización perpendiculares entre sí, verificándose por tanto, que

$$\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{u}_o = 0. \quad (5.9)$$

Los haces extraordinario y ordinario están compuestos por sendos conjuntos de modos centrados en los vectores de onda \mathbf{k}_e y \mathbf{k}_o respectivamente, verificándose las condiciones de emparejamiento:

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_e, \quad (5.10)$$

$$\omega_p = \omega_o + \omega_e. \quad (5.11)$$

Vemos que el haz extraordinario, a segundo orden en la constante de acoplamiento (g), se expresa mediante la suma de tres términos: i) El término de orden cero es la radiación de punto cero que pasa a través del cristal sin ninguna modificación⁷. ii) una radiación producida por la interacción no lineal (mediada por el cristal) entre el rayo láser, con amplitud V , y la radiación del punto cero, con la amplitud $\mathbf{E}_{o,ZPF}^{(-)}$, entrando en el cristal en la dirección del rayo ordinario; iii) finalmente, el término de segundo orden g^2 que modifica un poco la amplitud

⁷En realidad, para obtener el campo total a orden cero tendríamos que sumar el correspondiente al láser. No obstante, éste no se considera, pues sólo nos interesa su efecto en los términos de primer y segundo orden.

$\mathbf{E}_{e,ZPF}^{(+)}$. Para el rayo ordinario tenemos una descripción similar.

En el caso de la conversión tipo I la descripción es similar a las ecuaciones (5.5) a (5.8). La única diferencia está en que los haces tienen la misma polarización, en lugar de polarizaciones ortogonales. Es decir, los haces correlacionados en la conversión tipo I, denominados comúnmente señal (del inglés *signal*) y gemelo (del inglés *idler*), vendrían dados por las expresiones [79]:

$$E_s^{(+)} = E_{s,ZPF}^{(+)} + gV e^{-i\omega_p t} G E_{i,ZPF}^{(-)} + g^2 |V|^2 J E_{s,ZPF}^{(+)}, \quad (5.12)$$

$$E_i^{(+)} = E_{i,ZPF}^{(+)} + gV e^{-i\omega_p t} G E_{s,ZPF}^{(-)} + g^2 |V|^2 J E_{i,ZPF}^{(+)}. \quad (5.13)$$

El carácter cuadrático del hamiltoniano trae consigo dos consecuencias fundamentales en esta descripción:

- Por un lado, las ecuaciones de evolución de las amplitudes $\alpha_{\mathbf{k},\lambda}$ son lineales, y coinciden con las de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ en la imagen de Heisenberg⁸. En consecuencia, los haces ordinario y extraordinario son transformaciones lineales de las amplitudes del punto cero incidente en el cristal. Como las amplitudes del vacío verifican una distribución de Wigner gaussiana, y esta propiedad se mantiene en las transformaciones lineales, podemos afirmar que los haces ordinario y extraordinario están caracterizados por procesos gaussianos estocásticos de media nula.
- En el marco de Heisenberg la función de Wigner es independiente del tiempo, y está dada por la ecuación (4.12), la cual es positiva. Si pasamos al marco de Schrödinger, la linealidad en las ecuaciones de evolución implica que la función de Wigner mantiene su positividad a lo largo del tiempo.

Los puntos anteriores enfatizan la imagen del proceso PDC como una amplificación del vacío fluctuante, manifestándose así una imagen que resalta el carácter ondulatorio de la luz. Como la luz atraviesa aparatos ópticos lineales antes de llegar a los detectores, la positividad de la función de Wigner se mantiene. Esto proporciona una imagen ondulatoria de la generación y propagación de la luz para todos los experimentos, pues el campo electromagnético se propaga de una manera totalmente clásica al pasar a través de todos los dispositivos ópticos colocados entre la fuente y los detectores.

Desde un punto de vista operacional, se define a partir de $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$), que oscila rápidamente, una amplitud lentamente variable $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$) dada por la expresión

$$\mathbf{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \exp(i\omega_j t) \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (5.14)$$

Los valores de $\mathbf{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_B, t)$, en distintos puntos del haz, guardan una relación sencilla, la cual nos permite obtener el valor del campo en cualquier punto a partir del que tiene en el

⁸Esta propiedad es la que hace que se puedan sustituir operadores por amplitudes complejas en la expresión (5.1).

centro del cristal, encontrándose

$$\mathbf{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = \mathbf{F}_j^{(+)}\left(\mathbf{r}_A, t - \frac{r_{AB}}{c}\right) \exp\left(i\omega_j \frac{r_{AB}}{c}\right), \quad (5.15)$$

donde $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ y $r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}|$.

De ahora en adelante utilizaremos estas amplitudes en la descripción de los experimentos. Por otro lado, todas las expresiones de la teoría de la detección mostradas en la sección 4.6 siguen siendo válidas sustituyendo $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$) por $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$).

En los distintos experimentos, las probabilidades de detección aparecen expresadas a partir de las propiedades de correlación de los campos. En los procesos estocásticos gaussianos las correlaciones de orden impar son nulas, mientras que las de orden par se obtienen a partir de las de segundo orden [179]. Por tanto, el cálculo de las correlaciones de segundo orden es suficiente para caracterizar el proceso estocástico que estudiamos, y se dividen en autocorrelaciones y correlaciones cruzadas.

Si $A(\mathbf{r}, t; \alpha)$ y $B(\mathbf{r}', t'; \alpha)$ son amplitudes complejas, la correlación entre A y B se define como:

$$\langle AB \rangle = \int W_{ZPF}(\alpha) A(\mathbf{r}, t; \alpha) B(\mathbf{r}', t'; \alpha) d\alpha. \quad (5.16)$$

Presentamos a continuación un breve resumen de los resultados más importantes:

1. Autocorrelación

Consideremos el haz extraordinario en una posición \mathbf{r} , en instantes distintos t y t' . Tenemos:

$$\left\langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(-)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle - \left\langle F_{e,ZPF}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{e,ZPF}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle = g^2 |V|^2 \mu_e(t' - t), \quad (5.17)$$

$$\left\langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t') \right\rangle = 0. \quad (5.18)$$

$\mu_e(t - t')$ es una función de correlación que tiende a cero cuando $|t - t'|$ es mayor que el tiempo de correlación del rayo extraordinario, τ_e . Se obtienen expresiones similares para el haz ordinario, haciendo el cambio $e \rightarrow o$.

2. Correlaciones cruzadas

Consideremos a continuación los haces ordinario y extraordinario, en el centro del cristal ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$), en instantes t y t' :

$$\left\langle F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t') \right\rangle = g|V|\nu(t' - t), \quad (5.19)$$

$$\left\langle F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(-)}(\mathbf{0}, t') \right\rangle = \left\langle F_e^{(-)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t') \right\rangle = 0, \quad (5.20)$$

siendo $\nu(t - t')$ una función que tiende a cero cuando $|t - t'|$ es mayor que el tiempo de correlación de ambos haces, el cual es del mismo orden de magnitud que el tiempo característico de

autocorrelación. Las correlaciones cruzadas en diferentes puntos pueden calcularse fácilmente a partir de las expresiones anteriores, usando la ecuación (5.15).

5.3. Entrelazamiento de fotones en la WRHP

El entrelazamiento es una de las propiedades fundamentales que caracteriza el comportamiento de los sistemas cuánticos, y elemento esencial del carácter no local de la mecánica cuántica. En los experimentos de comunicación cuántica con fotones, el entrelazamiento es fundamental a la hora de entender la codificación densa, la teleportación, y una buena parte de los experimentos de criptografía. En la referencia [88] se hizo una descripción del entrelazamiento en polarización correspondiente al estado $|\psi^+\rangle$, y recientemente hemos extendido el estudio al resto de los estados de la base de Bell [85]. A diferencia del entrelazamiento que veremos en la sección 6.3.2, en el que se tienen dos grados de libertad asociados a un mismo fotón, tratamos aquí el entrelazamiento de fotones en un sólo grado de libertad, correspondiente a la polarización.

En el formalismo de Wigner, el entrelazamiento está ligado a las propiedades de correlación que caracterizan a las amplitudes de punto cero, las cuales se distribuyen de una forma particular en las diferentes componentes de los haces que salen del cristal. Por ejemplo, el estado $|\Psi^+\rangle$ se describe⁹ a partir de los siguientes haces correlacionados [88]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_e^{(+)}\left(\mathbf{r}, t; \left\{\alpha_{\mathbf{k}_1, H}; \alpha_{\mathbf{k}_2, V}^*\right\}\right) \mathbf{i} + F_{o'}^{(+)}\left(\mathbf{r}, t; \left\{\alpha_{\mathbf{k}_1, V}; \alpha_{\mathbf{k}_2, H}^*\right\}\right) \mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_{e'}^{(+)}\left(\mathbf{r}, t; \left\{\alpha_{\mathbf{k}_2, H}; \alpha_{\mathbf{k}_1, V}^*\right\}\right) \mathbf{i}' + F_o^{(+)}\left(\mathbf{r}, t; \left\{\alpha_{\mathbf{k}_2, V}; \alpha_{\mathbf{k}_1, H}^*\right\}\right) \mathbf{j}',\end{aligned}\quad (5.21)$$

donde \mathbf{i} y \mathbf{j} (\mathbf{i}' y \mathbf{j}') son vectores unitarios que representan la polarización horizontal (vertical) de los haces 1 y 2, $\{\alpha_{\mathbf{k}_i, H}; \alpha_{\mathbf{k}_i, V}\}$ ($i = 1, 2$) representan las amplitudes de cuatro conjuntos independientes de modos de punto cero que entran en el cristal ($\{\mathbf{k}_{i, \lambda}\}$, $i = 1, 2; \lambda \equiv H, V$), que se activan a través de su acoplamiento con el láser en el interior del medio no lineal.

Las amplitudes $\{\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}\}$ se distribuyen de acuerdo con la función de Wigner del vacío (4.12). El elemento esencial del entrelazamiento en la función de Wigner es que $F_e^{(+)}$ y $F_o^{(+)}$ están correlacionados, y lo mismo sucede con $F_{e'}^{(+)}$ y $F_{o'}^{(+)}$. Sin embargo, $F_{e'}^{(+)}$ y $F_e^{(+)}$ están descorrelacionados, al igual que $F_o^{(+)}$ y $F_{o'}^{(+)}$. Finalmente, no hay correlación entre $F_{e'}^{(+)}$ y $F_o^{(+)}$, ($F_e^{(+)}$ y $F_{o'}^{(+)}$), es decir,

$$\left\langle F_{e'}^{(+)} F_e^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{o'}^{(+)} F_o^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_e^{(+)} F_{o'}^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{e'}^{(+)} F_o^{(+)} \right\rangle = 0, \quad (5.22)$$

⁹Cuando hablamos de la descripción del estado entrelazado (vector de un espacio de Hilbert) en la representación de Wigner, nos referimos a que las predicciones que da la mecánica cuántica para este estado son las mismas que cuando se consideran dos haces (en el formalismo de Wigner) cuyas amplitudes representativas verifican ciertas propiedades de correlación, dando lugar a las mismas predicciones. Así, las ecuaciones (5.21), junto con la teoría de la detección, y la función de Wigner en el vacío, dan lugar a los mismos resultados que se obtienen usando el formalismo del espacio de Hilbert.

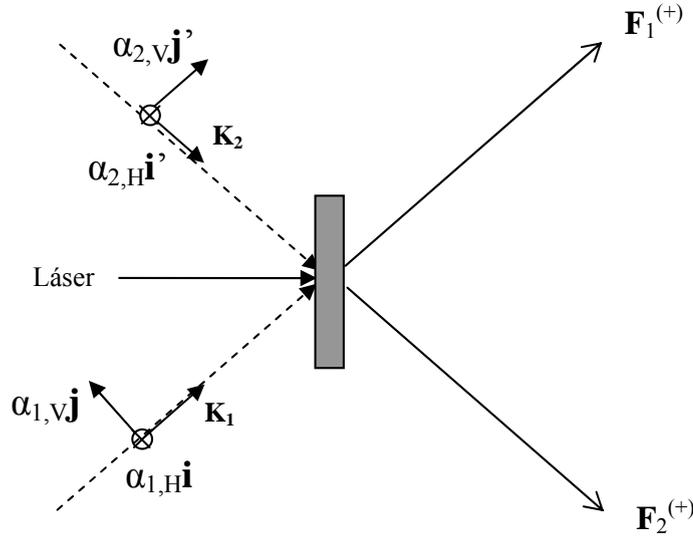


Figura 5.1: El entrelazamiento en polarización surge como consecuencia del acoplamiento del láser y los cuatro conjuntos de modos de punto cero, dos por cada dirección de entrada, representados en la figura.

mientras que,

$$\langle F_{e'}^{(+)} F_{o'}^{(+)} \rangle = \langle F_e^{(+)} F_o^{(+)} \rangle \neq 0, \quad (5.23)$$

siendo todo ello consecuencia directa de la forma en que se distribuyen las amplitudes del punto cero en las ecuaciones (5.21), junto con las propiedades (4.61), (4.62) y (4.63).

5.3.1. Descripción de la base de Bell

En el espacio de Hilbert, las transformaciones necesarias para pasar de un estado de Bell a otro corresponden a operaciones unitarias que se representan a partir de las matrices de Pauli. En el formalismo de la función de Wigner, la transformación de las propiedades de correlación que caracterizan a los dos haces se efectúa mediante matrices que representan elementos ópticos lineales como, por ejemplo, retardadores o rotadores de polarización, y que actúan de un modo completamente clásico sobre las amplitudes. Es decir, en el lenguaje de la función de Wigner las propiedades que caracterizan los estados entrelazados surgen como consecuencia de las modificaciones que sufren los haces al pasar por elementos ópticos que actúan del mismo modo que en óptica clásica. Como las amplitudes de los haces a la salida del cristal son resultado de la transformación del punto cero incidente, está claro que cualquier aparato óptico que modifique las propiedades del haz, actúa directamente sobre las amplitudes del ZPF que definen este haz, modificando las correlaciones.

En lo sucesivo haremos un cambio de notación, que se mantendrá a lo largo de la tesis: las correlaciones no nulas serán entre los pares de índices s y r por un lado, y p y q por otro, de modo que s y r sustituyen a los índices no primados, y p y q a los primados.

En primer lugar revisaremos la descripción realizada en la referencia [85], en la que las

modificaciones afectaban a los dos haces. Por ejemplo, aplicando una diferencia de fase de π entre las dos componentes de polarización en el haz 2 de las expresiones dadas en (5.21), se genera el estado $|\Psi^-\rangle$. Así, los dos estados $|\Psi^\pm\rangle$ pueden representarse por las expresiones

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + e^{i\kappa}F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}',\end{aligned}\quad (5.24)$$

donde $\kappa=0$ ($\kappa = \pi$) corresponde a $|\Psi^+\rangle$ ($|\Psi^-\rangle$). Ahora, para obtener los estados $|\Phi^\pm\rangle$ se efectúa una rotación en polarización de 90° en el haz 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= -F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + e^{i\kappa}F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}',\end{aligned}\quad (5.25)$$

donde $\kappa = 0$ ($\kappa = \pi$) corresponde a $|\Phi^-\rangle$ ($|\Phi^+\rangle$).

Consideremos a continuación la descripción realizada en la referencia [84]. Podemos generar una expresión compacta para los cuatro estados de Bell mediante la consideración de dos parámetros angulares, uno de fase y otro de polarización, asociados a las modificaciones en uno de los dos haces, lo cual es consistente con el hecho de que se puede pasar de un estado de Bell a otro mediante operaciones unitarias aplicadas a uno de los qubits entrelazados, mediante la aplicación de las matrices de Pauli. Por ejemplo, si consideramos un rotador de polarización en el haz 1 el plano de polarización de $\mathbf{F}_1^{(+)}$ se gira un ángulo β , y las componentes del haz modificado son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \sin \beta \\ F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \sin \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

A continuación, un retardador de onda introduce un cambio de fase κ entre las componentes horizontal y vertical. La expresión compacta de los haces, a partir de los parámetros β y κ es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}''_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - \sin \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{i} + e^{i\kappa} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \sin \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}'.\end{aligned}\quad (5.27)$$

- Para $\beta = 0$ y $\kappa = 0$ obtenemos $|\Psi^+\rangle$, mientras que, con $\beta = 0$ y $\kappa = \pi$ resulta $|\Psi^-\rangle$:

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \quad (5.28)$$

- Por otro lado, la transformación $\beta = -\pi/2$ y $\kappa = \pi$ se corresponde con la descripción

del estado $|\Phi^+\rangle$:

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} ; \quad \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \quad (5.29)$$

- Finalmente, para $\beta = -\pi/2$ y $\kappa = 0$ obtenemos $|\Phi^-\rangle$:

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} - F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} ; \quad \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \quad (5.30)$$

Nótese que lo que diferencia un estado de otro en nuestra descripción es, por un lado, cuáles son las componentes de polarización de un haz que están correlacionadas con las del otro haz:

- En los haces que describen los estados $|\Psi^\pm\rangle$ las componentes correlacionadas son las correspondientes a polarizaciones ortogonales entre sí, y en los haces correspondientes a los estados $|\Phi^\pm\rangle$ las amplitudes correlacionadas son las que tienen la misma polarización.

Por otro lado, el rasgo diferenciador en cada pareja de haces correspondiente a los estados ($|\Psi^\pm\rangle$ ó $|\Phi^\pm\rangle$), es que:

- Las correlaciones no nulas tienen el mismo signo, en el caso (+), y signos opuestos en el caso (-).

5.4. El problema de la detección

El formalismo de la función de Wigner establece un nexo formal entre la óptica estocástica y la óptica cuántica, y otro entre las teorías de variables ocultas locales y la óptica cuántica, a través del papel que ejerce la radiación de punto cero¹⁰. Por un lado, la óptica estocástica fue desarrollada por los Drs. Santos y Marshall en las referencias [191, 192], y se aplicó a los primeros experimentos de desigualdades de Bell con cascadas atómicas para reproducir los resultados experimentales con modelos basados en la influencia del punto cero¹¹. La óptica estocástica surgió como una rama de la electrodinámica estocástica (SED)¹² para experimentos con luz, y resaltaba la presencia del vacío en los canales vacíos de los analizadores, así como su papel de umbral de detección.

La función de Wigner de la óptica cuántica es análoga a la óptica estocástica, en el sentido de que el papel de la radiación de punto cero, “ideado” por Marshall y Santos en la óptica estocástica, tenía su contrapartida en la óptica cuántica en el espacio de fases [148]. Una redefinición reciente de la óptica estocástica, se basa en la consideración del ZPF en los experimentos, y el estudio de sus efectos, dentro del formalismo cuántico [223]. Por otro lado, la

¹⁰Para una revisión de los efectos del vacío en electrodinámica cuántica véase la referencia [198].

¹¹Para una revisión de otros modelos de variables ocultas para el estudio de experimentos de Bell realizados usando cascadas atómicas o PDC, véanse las referencias [220, 224, 187].

¹²Para una revisión de los aspectos fundamentales de la electrodinámica estocástica, véase [101, 186, 64, 100, 140].

conjetura de que aquellos estados que son realmente realizables en el laboratorio son aquellos en los que la función de Wigner es positiva, enfatizando el papel de la positividad de esta función de distribución en su relación con el carácter clásico de la luz, fue desarrollada a lo largo de los trabajos [190, 189, 193, 188, 221].

Por otro lado, la teoría de la detección en la formulación de Wigner para experimentos PDC es formalmente análoga a las expresiones que predice una teoría de variables ocultas locales, según el trabajo de Clauser y Horne [95]:

$$p_a = \int d\lambda \rho(\lambda) p(a, \lambda) ; p_b = \int d\lambda \rho(\lambda) p(b, \lambda),$$

$$p_{ab} = \int d\lambda \rho(\lambda) p(a, \lambda) p(b, \lambda), \quad (5.31)$$

donde las variables ocultas λ serían las amplitudes del ZPF que entra en el cristal α , y estarían gobernadas por una distribución de probabilidad $\rho(\lambda)$ correspondiente a la distribución de Wigner de la radiación de punto cero (4.12). La discrepancia que origina la separación entre realismo local y mecánica cuántica, se encuentra justamente en que $Q(\alpha, \phi)$ no se corresponde con la probabilidad $p(\lambda, \phi)$ puesto que no es definido positivo. Este es el punto donde se produce la discordancia entre las predicciones de la física clásica y la física cuántica en experimentos PDC. De este modo, la representación de Wigner permite establecer, para todos los experimentos con PDC, aquello que se puede interpretar clásicamente en estos experimentos, y también dónde se halla la discrepancia fundamental, es decir, dónde se halla el carácter no local del formalismo (teoría de la detección).

En este apartado no vamos a hacer un análisis detallado del problema de la detección, pues no es el objeto de esta tesis, pero sí mostraremos la bibliografía relacionada con los avances producidos en este campo. Destacamos en principio las discusiones de los artículos [88] y [86], acerca de la importancia de la integración en la ventana de detección y en la superficie del detector con el objeto de reducir el elevado valor de las fluctuaciones del vacío en la detección. Estas fluctuaciones son el núcleo de la negatividad, para ciertas realizaciones del vacío, de la diferencia entre la intensidad total y la intensidad del punto cero, la cual se trató de evitar proponiendo modificaciones a la teoría de la detección, del tipo $Q(\alpha, \phi) \rightarrow \{Q(\alpha, \phi)\}_+$, donde $\{Q(\alpha, \phi)\}_+$ corresponde sólo a la parte $Q(\alpha, \phi) > 0$, tal y como se hizo en [88]. Esta aproximación se basaba en que la ventana de detección es varios órdenes de magnitud el valor del tiempo de coherencia de la luz, con lo cual se conjeturó que la diferencia entre la teoría cuántica de la detección y la teoría modificada sería del orden de las cuentas oscuras del detector. Sin embargo, esta aproximación no es correcta [92, 222].

En [80, 89, 147, 91] se estudió con detalle una clase de modelos de variables ocultas en los que se modificaba la teoría cuántica de la detección y se establecieron los parámetros necesarios para que estos modelos se ajustasen al comportamiento experimental del detector. Sin embargo, este tipo de modelos falla a la hora de reproducir las tasas de coincidencia, pues las

fluctuaciones del punto cero, necesarias para reproducir los experimentos de coincidencia, son demasiado elevadas. Trabajos posteriores donde se analizan distintos tipos de modelos en los que el detector sustrae convenientemente las fluctuaciones del punto cero pueden encontrarse en [222, 219].

INFORMACIÓN CUÁNTICA EN ÓPTICA CON LA WRHP

6.1. Introducción

Con el desarrollo de la teoría de la información y computación cuánticas desde hace casi tres décadas, se hizo necesario un proceso de adaptación del lenguaje que se había usado hasta entonces en el ámbito de los fundamentos de la mecánica cuántica, al incipiente campo de la información cuántica. El ejemplo más representativo de esto es el concepto de bit cuántico, o qubit, que representa la superposición de dos estados (base computacional) de un espacio de Hilbert bidimensional.

La manipulación de qubits, con o sin entrelazamiento, mediante la acción de las llamadas puertas lógicas cuánticas, permite la realización experimental de aspectos básicos de la información cuántica para desarrollar, por ejemplo, codificación densa, criptografía cuántica, o computación cuántica. Las puertas básicas usadas en computación cuántica para la manipulación de qubits individuales (*single-qubits*) son la puerta de Hadamard y la puerta de cambio de fase (*phase-shift gate*). Cualquier operación unitaria sobre un qubit puede construirse utilizando únicamente estas dos puertas cuánticas. Por otro lado, en el caso de un sistema de dos qubits, la puerta básica, capaz de generar entrelazamiento, es la CNOT (*controlled-NOT gate*).

La implementación experimental de las puertas cuánticas mediante fotones se hace mediante el uso de divisores de haz (*beam-splitters*), para el caso de la operación de Hadamard, los separadores de polarización (*polarizing beam-splitters*) para el caso de la puerta CNOT, y retardadores de fase para la puerta *control-phase*. Aparte se usan otros elementos ópticos como láminas de media y cuarto de onda, espejos, rotadores de polarización, etc...

Estos aparatos se utilizaron durante muchos años para la experimentación en los aspectos contraintuitivos del mundo cuántico, pero con el desarrollo de la teoría de la información cuántica, se convirtieron en los elementos básicos de las puertas lógicas cuánticas, dentro del formalismo de Hilbert. Siguiendo nuestra línea de trabajo, surge la necesidad de analizar estos sistemas con el formalismo de Wigner en la imagen de Heisenberg, donde los efectos de

los aparatos ópticos se expresan mediante matrices, pero adaptando los estudios previos ya realizados a un lenguaje más adecuado al ámbito en que nos movemos.

Una cuestión básica antes de comenzar el desarrollo del capítulo es qué relación existe entre la aparición de los operadores de vacío en el espacio de Hilbert, y la correspondiente consideración del ZPF en la WRHP, cuando los elementos ópticos tienen canales por los que no hay ninguna señal de entrada, o modos “vacíos”. En la referencia [178] se muestran los efectos del vacío en un BS a través de la consideración del operador del vacío asociado a un canal por el que no entra ninguna señal, con objeto de que se conserven las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción a la entrada y salida del aparato. Esta conservación está relacionada con el carácter unitario de la transformación, y se refleja en la WRHP a través de la consideración de un campo estocástico en las entradas vacías de los elementos, correspondiente al ZPF. Aunque el ZPF es finalmente sustraído en el proceso de detección, sus efectos en las propiedades de la luz se hacen explícitos en este formalismo.

Este capítulo está dedicado a la descripción con la función de Wigner de los aspectos básicos de la información cuántica en el ámbito de la óptica, y es la antesala del resto de capítulos en los que se desarrollarán los puntos cardinales de la comunicación cuántica con fotones en la WRHP, tomando como elemento esencial de su descripción a la radiación de punto cero, y sus efectos en: (a) la generación del bit cuántico y (b) el entrelazamiento generado en una puerta CNOT. Estos dos puntos son los que permiten un amplio estudio de los efectos del ZPF en la implementación de puertas lógicas en el campo de la óptica cuántica. Se comienza en la sección 6.2 con la descripción del qubit fotónico espacial en la WRHP, para continuar en la sección 6.3 con los elementos ópticos utilizados en óptica lineal tales como el divisor de haz (apartado 6.3.1), el separador de polarización (apartado 6.3.2), retardadores (apartado 6.3.3), rotadores (apartado 6.3.4) y el polarizador (apartado 6.3.6). Después de ver los generadores aleatorios cuánticos (sección 6.4), dedicaremos la última parte del capítulo (sección 6.5) a una revisión de bibliografía en la que se aplica la función de Wigner en la información cuántica.

6.2. El qubit espacial en la WRHP

En la sección 2.2 introdujimos el qubit como elemento fundamental de la teoría de la información cuántica (ver ecuación (2.1)) y consideramos varios tipos de qubits fotónicos atendiendo al grado de libertad representativo en el que se codifica la información. El objetivo de este apartado es el análisis del concepto de qubit en el formalismo de Wigner (WRHP), para mostrar la relevancia de la radiación de punto cero en su descripción y propiedades. En concreto, vamos a centrarnos en el qubit espacial dado por la ecuación (2.3).

Si los estados de la base computacional representan el momento del fotón, el bit cuántico está representado por dos haces, cuyas amplitudes $F_0^{(+)}$ (modo “a”) y $F_1^{(+)}$ (modo “b”) verifican

las siguientes propiedades de correlación¹:

$$P_0 = \left\langle \left| F_0^{(+)} \right|^2 - I_{0,ZPF} \right\rangle = |\alpha|^2, \quad (6.1)$$

$$P_1 = \left\langle \left| F_1^{(+)} \right|^2 - I_{1,ZPF} \right\rangle = |\beta|^2, \quad (6.2)$$

$$P_{01} = \left\langle \left(\left| F_0^{(+)} \right|^2 - I_{0,ZPF} \right) \left(\left| F_1^{(+)} \right|^2 - I_{1,ZPF} \right) \right\rangle = 0, \quad (6.3)$$

$$\left\langle F_0^{(+)} F_1^{(-)} \right\rangle - \left\langle F_0^{(+)} F_1^{(-)} \right\rangle_{ZPF} = -i\alpha\beta^*. \quad (6.4)$$

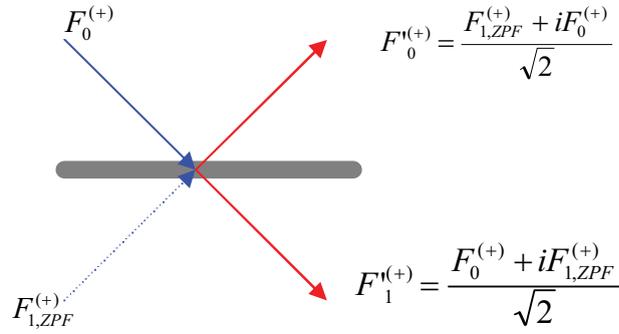


Figura 6.1: En la representación de Wigner, el qubit fotónico correspondiente a la superposición de estados del momento del fotón, está representado por dos haces correlacionados por encima del umbral del punto cero, tal y como indican las ecuaciones (6.1) a (6.4). La acción de un divisor de haz sobre el qubit se trata igual que en óptica clásica, teniendo en cuenta la transformación de los haces en el BS (en la figura el BS tiene idénticos coeficientes de transmisión y reflexión).

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) indican que la probabilidad de obtener uno u otro valor del qubit al medirlo, es igual (salvo factores dimensionales) a la diferencia entre la intensidad asociada al haz que incide en cada canal y la correspondiente a la radiación de punto cero asociada a dicho canal. La ecuación (6.3) está relacionada con el hecho de que es imposible detectar simultáneamente el bit 0 y el bit 1 en ambos canales de salida (detección conjunta nula). La última ecuación indica que existe un acoplamiento entre las dos amplitudes que representan al qubit, a través de la correlación por encima del umbral de punto cero entre $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(-)}$.

La justificación de las ecuaciones (6.1) a (6.4) introduce la radiación de punto cero como elemento esencial en la descripción del bit cuántico en el formalismo de Wigner. Consideraremos la situación siguiente, en el ámbito de la óptica clásica: un haz de luz monocromática incide

¹En esta sección omitiremos por simplicidad la dependencia con \mathbf{r} y con t , la cual no es relevante para mostrar los resultados fundamentales. Por otro lado, supondremos que las amplitudes $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(+)}$ están “adimensionalizadas” convenientemente, de modo que su módulo al cuadrado sea un número positivo sin dimensiones (probabilidad).

sobre uno de los canales de un divisor de haz², de coeficientes de transmisión y reflexión T y R respectivamente, estando el otro canal “vacío”. Al tratarse de luz clásica, el número de fotones por modo es grande, de modo que la intensidad y sus fluctuaciones en el canal vacío (correspondientes a “medio” fotón por modo), son despreciables. Si la intensidad de la luz va descendiendo hasta la situación en que el número de fotones por modo es pequeño, llegamos al dominio cuántico, en el que la radiación de punto cero que entra por el canal vacío es relevante en la descripción de la luz a la salida del BS , y en sus propiedades. Si llamamos $F^{(+)}$ y $F_{ZPF}^{(+)}$ a las amplitudes a la entrada del BS , descorrelacionadas entre sí, verificándose (en la situación ideal):

$$\langle F^{(+)}F^{(-)} \rangle - \langle F^{(+)}F^{(-)} \rangle_{ZPF} = 1, \quad (6.5)$$

donde $\langle F^{(+)}F^{(-)} \rangle_{ZPF}$ es la intensidad en el caso de que el canal por el que entra $F^{(+)}$ estuviese vacío. Por otro lado, la descorrelación entre la señal y el vacío que entra por el otro canal se representa por las relaciones siguientes:

$$\langle F^{(+)}F_{ZPF}^{(-)} \rangle = 0 ; \quad \langle F^{(+)}F_{ZPF}^{(+)} \rangle = 0. \quad (6.6)$$

Los haces de salida del BS (ver figura 6.2) son:

$$F_0^{(+)} = TF^{(+)} + iRF_{ZPF}^{(+)}, \quad (6.7)$$

$$F_1^{(+)} = TF_{ZPF}^{(+)} + iRF^{(+)}. \quad (6.8)$$

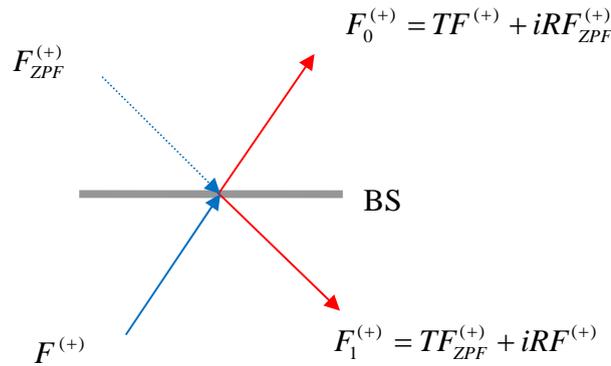


Figura 6.2: En la representación de Wigner, el qubit fotónico correspondiente a la superposición de estados del momento del fotón, está caracterizado por dos haces, $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(+)}$, generados a partir de la superposición en un BS de una señal que entra por un canal, y punto cero que entra por el canal vacío.

Usando el formalismo de Wigner, demostraremos a continuación que los valores de P_0 , P_1 ,

²La consideración del divisor de haz en esta sección se hace con objeto de analizar la influencia del ZPF en la descripción del qubit. En la sección siguiente, trataremos el efecto que el BS ejerce sobre un qubit espacial.

P_{01} , así como la correlación entre $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(-)}$, coinciden con las expresiones (6.1) a (6.4), sin más que hacer $\alpha \equiv T$ y $\beta \equiv R$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left\langle F_0^{(+)} F_0^{(-)} - I_{0,ZPF} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(T F^{(+)} + i R F_{ZPF}^{(+)} \right) \left(T^* F^{(-)} - i R^* F_{ZPF}^{(-)} \right) - I_{0,ZPF} \right\rangle \\
&= |T|^2 \left\langle F^{(+)} F^{(-)} \right\rangle - i T R^* \left\langle F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle + i R T^* \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} \right\rangle \\
&\quad + |R|^2 \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle - I_{0,ZPF},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

donde $I_{0,ZPF}$ es la intensidad en la posición del detector en el caso de que todas las fuentes de radiación estuviesen apagadas, es decir, que sólo entrase vacío por los dos canales. Ahora, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.5) y (6.6), queda:

$$P_0 = |T|^2 \left\langle F^{(+)} F^{(-)} \right\rangle + |R|^2 \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle - I_{0,ZPF} = |T|^2, \tag{6.10}$$

siendo

$$I_{0,ZPF} = |T|^2 \left\langle F^{(+)} F^{(-)} \right\rangle_{ZPF} + |R|^2 \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle. \tag{6.11}$$

Análogamente, y realizando las mismas consideraciones:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left\langle F_1^{(+)} F_1^{(-)} - I_{1,ZPF} \right\rangle = \left\langle \left(T F_{ZPF}^{(+)} + i R F^{(+)} \right) \left(T^* F_{ZPF}^{(-)} - i R^* F^{(-)} \right) - I_{1,ZPF} \right\rangle \\
&= |T|^2 \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle - i T R^* \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} \right\rangle + i R T^* \left\langle F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle + |R|^2 \left\langle F^{(+)} F^{(-)} \right\rangle - I_{1,ZPF} \\
&= |R|^2,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

siendo

$$I_{1,ZPF} = |R|^2 \left\langle F^{(+)} F^{(-)} \right\rangle_{ZPF} + |T|^2 \left\langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \right\rangle. \tag{6.13}$$

Consideraremos a continuación la probabilidad de detección conjunta en dos detectores situados a la salida del BS. Usaremos las expresiones de la sección 4.6 para la probabilidad de detección conjunta, en concreto la ecuación (4.65). Seguiremos sin considerar la dependencia con \mathbf{r} y con t , suponiendo que los detectores se encuentran la misma distancia del BS (se puede hacer nula por simplicidad) y un mismo instante de tiempo. Tenemos:

$$\begin{aligned}
P_{01} &= \left\langle \left(\left| F_0^{(+)} \right|^2 - I_{0,ZPF} \right) \left(\left| F_1^{(+)} \right|^2 - I_{1,ZPF} \right) \right\rangle = \\
&= \left\langle \left(|T|^2 F^{(+)} F^{(-)} - i T R^* F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} + i T^* R F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} + |R|^2 F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} - I_{0,ZPF} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(|T|^2 F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(+)} - i T R^* F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} + i R T^* F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} + |R|^2 F^{(+)} F^{(-)} - I_{1,ZPF} \right) \right\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{6.14}$$

lo que puede comprobarse desarrollando la expresión anterior, y realizando cálculos sencillos. Otra forma de llegar a este resultado de una forma más directa es considerando que el campo está representado por un proceso estocástico gaussiano, como es el caso de la luz convertida a

la baja y la radiación de punto cero, y aplicando la ecuación (4.69) para la probabilidad de detección conjunta.

Finalmente, calculamos la correlación entre $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(-)}$:

$$\begin{aligned}
& \langle F_0^{(+)} F_1^{(-)} \rangle - \langle F_0^{(+)} F_1^{(-)} \rangle_{ZPF} \\
&= \left\langle \left(TF^{(+)} + iRF_{ZPF}^{(+)} \right) \left(T^* F_{ZPF}^{(-)} - iR^* F^{(-)} \right) \right\rangle - \left\langle \left(TF^{(+)} + iRF_{ZPF}^{(+)} \right) \left(T^* F_{ZPF}^{(-)} - iR^* F^{(-)} \right) \right\rangle_{ZPF} \\
&= \left\langle TT^* F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} - iTR^* F^{(+)} F^{(-)} + iRT^* F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} + |R|^2 F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle TT^* F^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} - iTR^* F^{(+)} F^{(-)} + iRT^* F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} + |R|^2 F_{ZPF}^{(+)} F^{(-)} \right\rangle_{ZPF} \\
&= +iRT^* \langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \rangle - iTR^* \langle F^{(+)} F^{(-)} \rangle - iRT^* \langle F_{ZPF}^{(+)} F_{ZPF}^{(-)} \rangle_{ZPF} = -iTR^*.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Las ecuaciones (6.10), (6.12), (6.14) y (6.15) son idénticas al conjunto de ecuaciones (6.1) a (6.4), sin más que hacer $\alpha = T$ y $\beta = R$, lo que muestra que la descripción del qubit fotónico necesita de la consideración de los grados de libertad del vacío, representado por la radiación de punto cero en la representación de Wigner. Las propiedades del bit cuántico están por tanto estrechamente relacionadas con la intervención de vacío, siendo este un elemento esencial en su descripción y propiedades. Cada uno de los dos haces $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(+)}$ “esconde”, gracias a la presencia del vacío, un elemento de información clásica que surge en el proceso de detección (medida del qubit).

6.3. Elementos ópticos lineales en comunicación cuántica, en la WRHP

En el campo de la óptica cuántica los estados de los fotones se manipulan fácilmente mediante dispositivos ópticos pasivos de óptica lineal, los cuales incluyen divisores de haz (BS), divisores de haz polarizado o separadores de polarización (PBS), láminas de media, cuarto de onda y desfases. Clásicamente, estos dispositivos conservan la energía: la energía total de entrada es igual a la energía total de salida, y no hay transferencia de energía entre diferentes frecuencias. Un dispositivo óptico pasivo lineal se describe por medio de una transformación unitaria de los operadores de aniquilación de la misma frecuencia [208, 241]:

$$\hat{a}_m^{out} = \sum_n U_{mn} \hat{a}_n^{in}, \tag{6.16}$$

donde U_{ij} son los elementos de la matriz unitaria que representa al dispositivo en el espacio de Hilbert.

Si trabajamos en el formalismo de la función de Wigner, el carácter lineal de la expresión (6.16) da lugar a una expresión idéntica que relaciona las amplitudes asociadas a los distintos modos del campo electromagnético a la entrada y a la salida del sistema óptico, sin más que

sustituir los operadores de destrucción \hat{a}_i por amplitudes complejas α_i . Es decir:

$$\alpha_m^{out} = \sum_n U_{mn} \alpha_n^{in}, \quad (6.17)$$

por lo que la matriz que representa la transformación de amplitudes en la WRHP es la misma.

Por otro lado, como el campo electromagnético correspondiente a un haz de luz es una superposición de ondas planas correspondientes a los distintos modos, tal y como se muestra en la ecuación (4.56), la matriz que representa la transformación de la amplitud $F^{(+)}$, en el caso de aparatos en óptica lineal, es la misma que la que se utiliza en la óptica clásica.

6.3.1. La acción del BS sobre el qubit en la WRHP

Consideremos la acción de un divisor de haz sobre el qubit, en el caso de que el BS se encuentra equilibrado, con idénticos coeficientes de transmisión y reflexión, que consideraremos números reales: $T = R = 1/\sqrt{2}$. La transformación unitaria que caracteriza la acción del divisor, es la transformación de Hadamard, que ya se vio en el apartado 2.2.1:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U_H |\psi\rangle = \alpha U_H |0\rangle + \beta U_H |1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} [|0\rangle + |1\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} [|0\rangle - |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha + \beta] |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha - \beta] |1\rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Las probabilidades asociadas a los canales de salida son:

$$P'_0 = |\langle 0 | \psi' \rangle|^2 = \frac{|\alpha + \beta|^2}{2} ; \quad P'_1 = |\langle 1 | \psi' \rangle|^2 = \frac{|\alpha - \beta|^2}{2}. \quad (6.19)$$

Si α ó β son nulos, uno de los canales de entrada está vacío y el valor del qubit a la entrada está completamente determinado. Decimos en este caso que el valor del qubit se conoce perfectamente a la entrada, pero está totalmente indeterminado a la salida, es decir, existe la misma probabilidad (1/2), de que al medir el qubit obtengamos 1 ó 0, mientras que si los dos canales de entrada están llenos, lo que implica que hay una misma probabilidad de encontrar al fotón en cada una de las dos entradas, entonces el camino de salida del fotón se conoce perfectamente. Es decir, el valor del qubit se desconoce a la entrada, pero se conoce a la salida. En la figura 6.3 mostramos el efecto del BS balanceado en las dos situaciones descritas.

Cuando se pasa a la representación de Wigner los efectos cuánticos en el BS se representan a través de ondas correlacionadas por encima del umbral de punto cero. Los haces de entrada, $F_0^{(+)}$ y $F_1^{(-)}$, tienen unas propiedades de correlación dadas por las ecuaciones (6.1) a (6.4), que ya se justificaron en la sección anterior teniendo en cuenta la acción del ZPF. Los haces a la salida del BS son:

$$F_0^{'+)} = \frac{F_1^{(+)} + iF_0^{(+)}}{\sqrt{2}} ; \quad F_1^{'+)} = \frac{F_0^{(+)} + iF_1^{(+)}}{\sqrt{2}}, \quad (6.20)$$

los cuales vienen dados por las expresiones (4.57) para el caso $T = R = 1/\sqrt{2}$. Veamos cómo

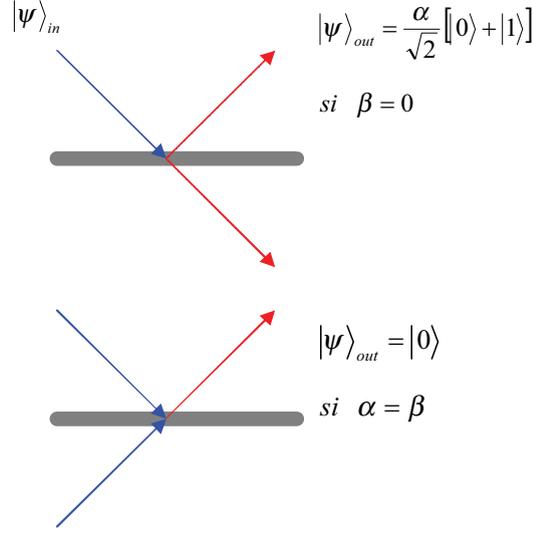


Figura 6.3: Efecto del BS en los casos donde una entrada está vacía (se conoce el valor del qubit a la entrada del BS), y el correspondiente a las dos entradas con la misma probabilidad.

se reproducen los resultados dados en (6.19) para las probabilidades en los canales de salida, P'_0 y P'_1 . Haciendo uso de las ecuaciones (6.1) a (6.4), tenemos:

$$\begin{aligned}
 P'_0 &= \frac{1}{2} \left\langle \left(F_1^{(+)} + iF_0^{(+)} \right) \left(F_1^{(-)} - iF_0^{(-)} \right) - \left\langle \left(F_1^{(+)} + iF_0^{(+)} \right) \left(F_1^{(-)} - iF_0^{(-)} \right) \right\rangle_{ZPF} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} |\beta|^2 + \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta^* + \frac{1}{2} \alpha^* \beta = \frac{|\alpha + \beta|^2}{2},
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 P'_1 &= \frac{1}{2} \left\langle \left(F_0^{(+)} + iF_1^{(+)} \right) \left(F_0^{(-)} - iF_1^{(-)} \right) - \left\langle \left(F_0^{(+)} + iF_1^{(+)} \right) \left(F_0^{(-)} - iF_1^{(-)} \right) \right\rangle_{ZPF} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2 - \frac{1}{2} \alpha \beta^* - \frac{1}{2} \beta^* \alpha = \frac{|\alpha - \beta|^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

En el caso de que uno de los canales de entrada esté vacío, por ejemplo $F_1^{(+)} = F_{1,ZPF}^{(+)}$, lo que corresponde a $\beta = 0$, el haz correspondiente a este canal contiene radiación de punto cero que se encuentra descorrelacionada con la señal que entra por el otro canal (véase la figura 6.4). En este caso, las propiedades de correlación (6.1) a (6.4) quedarían:

$$\left\langle F_0^{(+)} F_0^{(-)} - I_{0,ZPF} \right\rangle = |\alpha|^2, \tag{6.23}$$

$$\left\langle F_{1,ZPF}^{(+)} F_{1,ZPF}^{(-)} - I_{1,ZPF} \right\rangle = 0, \tag{6.24}$$

$$\langle (F_0^{(+)} F_0^{(-)} - I_{0,ZPF})(F_{1,ZPF}^{(+)} F_{1,ZPF}^{(-)} - I_{1,ZPF}) \rangle = 0, \quad (6.25)$$

$$\langle F_0^{(+)} F_{1,ZPF}^{(-)} \rangle - \langle F_0^{(+)} F_{1,ZPF}^{(-)} \rangle_{ZPF} = 0. \quad (6.26)$$

En este caso, las fluctuaciones del ZPF correspondientes al canal libre del BS actúan sobre los dos canales de salida aportando un ruido que produce la indistinguibilidad en el valor del qubit a la salida del divisor (idéntica probabilidad de obtener 0 ó 1).

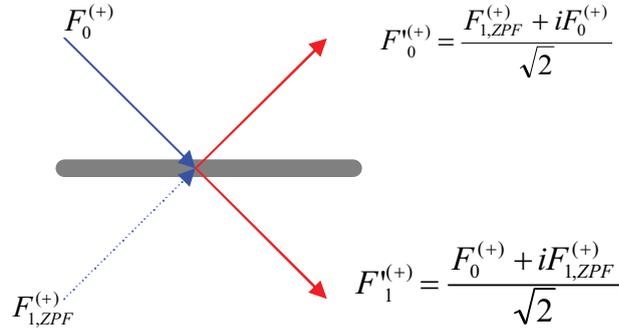


Figura 6.4: Efectos de un divisor de haz sobre el qubit, en el caso en que uno de los canales de entrada está vacío.

6.3.2. El PBS y los efectos del ZPF en la puerta CNOT

En el apartado 2.2.2 estudiamos la puerta CNOT. La relevancia de esta puerta en información cuántica se basa en la capacidad para generar entrelazamiento. El separador de polarización (PBS) permite la implementación de la puerta lógica CNOT en óptica cuántica, y por tanto la generación de estados entrelazados a partir de estados separables. Se trabaja con dos grados de libertad: la polarización del fotón, que constituye el bit de control, y el momento (grado de libertad espacial) que representa al bit objetivo. Por ejemplo, si la polarización es horizontal (H), el fotón es transmitido y no cambia el modo espacial, mientras que si la polarización es vertical (V), el fotón es reflejado y el modo cambia. La función del PBS se puede representar en el espacio de Hilbert por las expresiones³:

$$|H\rangle |a\rangle \rightarrow |H\rangle |a\rangle, \quad (6.27)$$

$$|H\rangle |b\rangle \rightarrow |H\rangle |b\rangle, \quad (6.28)$$

³Como el PBS transmite la componente horizontal, sin modificar el camino, y refleja la vertical, modificando el camino, habría que considerar la unidad imaginaria en la reflexión. Este factor no siempre se tiene en cuenta, pues existen PBS que no producen este desfase, tal y como se muestra en la referencia [269]. En este apartado, no usaremos la unidad imaginaria para la descripción en el espacio de Hilbert, pero sí lo haremos en el estudio de la acción del PBS en la WRHP, pues será el denominador común en toda la tesis. Esto no afecta al fondo de la cuestión de cómo interviene el punto cero en la generación de entrelazamiento.

$$|V\rangle |a\rangle \rightarrow |V\rangle |b\rangle, \quad (6.29)$$

$$|V\rangle |b\rangle \rightarrow |V\rangle |a\rangle. \quad (6.30)$$

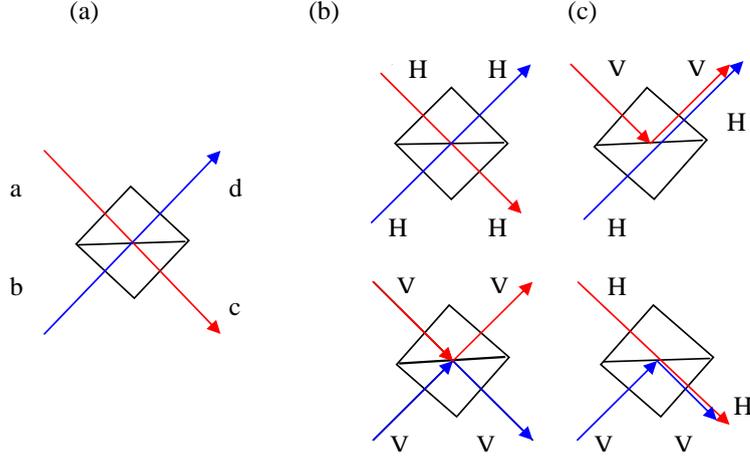


Figura 6.5: El PBS transmite componente horizontal de la polarización y refleja la componente vertical. En el caso en el que cada canal de entrada está ocupado por un fotón, si los dos fotones incidentes en el PBS tiene la misma polarización salen por diferentes direcciones, tal que habrá un fotón en cada uno de los modos de salida. Por otra parte, si los dos fotones incidentes tienen polarización opuesta siempre saldrán en la misma dirección, tal que habrá dos fotones en una de las dos salidas y ninguno en la otra en la otra.

Para ver cómo se genera entrelazamiento a partir de un PBS consideraremos que un fotón de momento definido \vec{k}_a , incide por el canal a de un PBS, encontrándose en una superposición de estados de polarización. El estado del fotón se describe mediante el ket:

$$|\psi\rangle = |a\rangle \otimes (\alpha |H\rangle + \beta |V\rangle), \quad (6.31)$$

donde el segundo término del producto tensorial corresponde a un qubit de polarización, definido en la ecuación (2.2). La acción del PBS sobre el estado (6.31) da lugar al entrelazamiento entre los grados de libertad polarización y momento, de un fotón. Es decir, se genera el entrelazamiento de qubits:

$$|\psi\rangle = \alpha |a\rangle \otimes |H\rangle + \beta |b\rangle \otimes |V\rangle, \quad (6.32)$$

donde hemos hecho uso de las ecuaciones (6.27) a (6.30).

Desde el punto de vista del formalismo de Wigner, el tratamiento del PBS se hace igual que en óptica clásica, si más que considerar la acción del punto cero en el caso de que exista algún canal vacío. Consideraremos primeramente la situación general en la que dos señales inciden sobre el PBS, y más adelante la descripción en la WRHP de la situación descrita por la ecuación (6.32), en la que uno de los canales está vacío:

- Las expresiones de los haces a la entrada del PBS son (véase la figura 6.6):

$$\mathbf{F}_a^{(+)} = F_H^{(+)} \mathbf{i}_a + F_V^{(+)} \mathbf{j}_a, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{F}_b^{(+)} = F_H'^{(+)} \mathbf{i}_b + F_V'^{(+)} \mathbf{j}_b, \quad (6.34)$$

donde las amplitudes $F_H^{(+)}$, $F_V^{(+)}$, $F_H'^{(+)}$, y $F_V'^{(+)}$ tendrán unas propiedades de correlación que dependerán de la dinámica correspondiente al proceso por el cual se hayan generado⁴. Las amplitudes correspondientes a las salidas por los canales a_1 y b_1 son (ver figura 6.6):

$$\mathbf{F}_{a_1}^{(+)} = F_H^{(+)} \mathbf{i}_{a_1} + iF_V'^{(+)} \mathbf{j}_{a_1}, \quad (6.35)$$

$$\mathbf{F}_{b_1}^{(+)} = F_H'^{(+)} \mathbf{i}_{b_1} + iF_V^{(+)} \mathbf{j}_{b_1}. \quad (6.36)$$

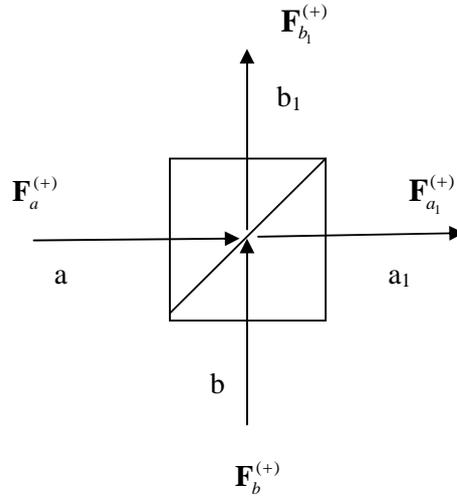


Figura 6.6: Efectos del PBS sobre los haces de Wigner que entran por los dos canales.

- A continuación veremos qué sucede si uno de los canales está vacío, como muestra la figura 6.7. En este caso hay que considerar la entrada de una amplitud de punto cero, $\mathbf{F}_{ZPF,b}^{(+)}$, con sus correspondientes componentes horizontal y vertical. En el formalismo de la función de Wigner, las amplitudes (6.33) deben verificar las siguientes propiedades de correlación:

$$\left\langle \left| F_H^{(+)} \right|^2 - I_{H,ZPF} \right\rangle = |\alpha|^2, \quad (6.37)$$

⁴No mantenemos en esta sección la notación definida en el capítulo 5 (apartado 5.3.1), pues es específica de la luz convertida a la baja.

$$\left\langle \left| F_V^{(+)} \right|^2 - I_{V,ZPF} \right\rangle = |\beta|^2, \quad (6.38)$$

$$\left\langle \left(\left| F_H^{(+)} \right|^2 - I_{H,ZPF} \right) \left(\left| F_V^{(+)} \right|^2 - I_{V,ZPF} \right) \right\rangle = 0, \quad (6.39)$$

lo que indica que la probabilidad de detección horizontal (vertical), suponiendo que tras pasar por el PBS de la figura 6.7) se situasen unos detectores, es $|\alpha|^2$ ($|\beta|^2$). Por otro lado, la probabilidad de detección conjunta es nula, dado que se supone que el haz (6.33) contiene un sólo fotón. Es importante también tener en consideración que para que el haz descrito en (6.33) pueda representar a un bit cuántico de polarización, las amplitudes que lo definen deben estar descorrelacionadas con cualquier otra amplitud (en este caso con $\mathbf{F}_{ZPF,b}^{(+)}$), pues de lo contrario la descripción en el espacio de Hilbert no sería la dada por la ecuación (6.31).

Las amplitudes correspondientes a las salidas a_1 y b_1 son:

$$\mathbf{F}_{a_1}^{(+)} = F_H^{(+)} \mathbf{i}_{a_1} + i \left[\mathbf{F}_{ZPF,b}^{(+)} \cdot \mathbf{j} \right] \mathbf{j}_{a_1}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{F}_{b_1}^{(+)} = \left[\mathbf{F}_{ZPF,b}^{(+)} \cdot \mathbf{i} \right] \mathbf{i}_{b_1} + i F_V^{(+)} \mathbf{j}_{b_1}. \quad (6.41)$$

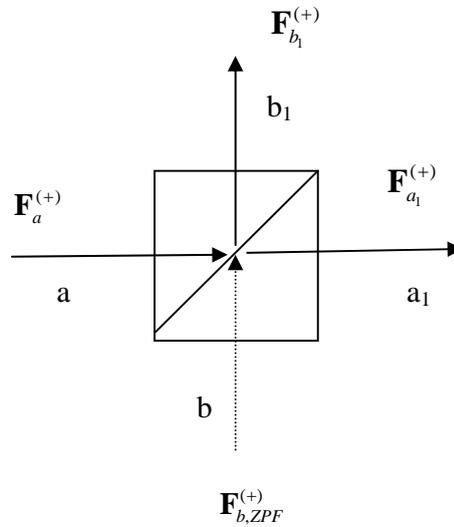


Figura 6.7: Efectos del PBS considerando la entrada de punto cero por uno de los canales.

Como vemos, el punto cero se reparte entre ambas señales de salida, pues la parte horizontal del vacío se transmite y la vertical se refleja. Las ecuaciones (6.40) y (6.41) constituyen la base para el análisis de la conversión de un estado separable en otro entrelazado en la WRHP y muestran, una vez más, la relevancia del ZPF en la generación de entrelazamiento. El efecto del PBS sobre el punto cero que entra por el canal vacío, es

activar los modos (b, H) y (b, V) del ZPF, dando lugar a sendos haces con las propiedades del entrelazamiento de dos qubits pertenecientes a un mismo fotón.

6.3.3. Retardadores

Los retardadores, comúnmente denominados láminas retardadoras, son una de las aplicaciones más corrientes de los medios anisótropos. Se utilizan para cambiar la fase relativa entre las componentes de los haces polarizados. Los más comunes son las láminas de media onda⁵ ($\lambda/2$, $\kappa = \pi$), que producen una reflexión del estado de polarización con respecto a los ejes de la lámina, y las láminas cuarto de onda ($\lambda/4$, $\kappa = \pi/2$), que transforman un haz de luz circularmente polarizado en otro polarizado linealmente que forma 45° con los ejes de la lámina, y viceversa [142].

-Lámina de cuarto de onda: Consideremos el caso de una lámina de cuarto de onda con eje rápido a un ángulo θ , medido desde el eje X . La acción de la lámina de cuarto de onda está representada por la matriz:

$$\hat{M}_{QWP} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \sin \theta \cos \theta \\ (1 - i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Supongamos que el haz $\mathbf{F}_{in}^{(+)} = F_H^{(+)} \mathbf{i} + F_V^{(+)} \mathbf{j}$ incide sobre una QWP. Las amplitudes que representan el haz saliente son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{out}^{(+)} &= \hat{M}_{QWP} \mathbf{F}_{in}^{(+)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \sin \theta \cos \theta \\ (1 - i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_H^{(+)} \\ F_V^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= \left[(\cos^2 \theta + i \sin^2 \theta) F_H^{(+)} + [(1 - i) \sin \theta \cos \theta] F_V^{(+)} \right] \mathbf{i} \\ &+ \left[[(1 - i) \sin \theta \cos \theta] F_H^{(+)} + (\sin^2 \theta + i \cos^2 \theta) F_V^{(+)} \right] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

Para el eje rápido en $\theta = 0$, la matriz es

$$\hat{M}_{QWP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad (6.44)$$

y la amplitud del campo

$$\mathbf{F}_{out}^{(+)} = F_H^{(+)} \mathbf{i} + i F_V^{(+)} \mathbf{j}. \quad (6.45)$$

⁵Los retardadores más usuales están formados por una lámina de material birrefringente uniaxial en el cual el eje óptico es paralelo a su superficie. Al incidir una onda plana sobre una lámina de este tipo, ésta se descompone en dos ondas, la extraordinaria (e) que vibra paralelamente al eje óptico de la lámina, siendo el índice de refracción n_e , y la ordinaria (o), que vibra perpendicularmente a la anterior con un índice n_o . Las direcciones de vibración coinciden con los ejes de la lámina (X - Y), y se denominan eje rápido y eje lento. Si el medio es uniaxial negativo ($n_e - n_o > 0$) el eje rápido coincide con el eje óptico. El desfase que introduce un retardador de espesor d viene dado por la expresión: $\kappa = 2\pi d(n_e - n_o)/\lambda$.

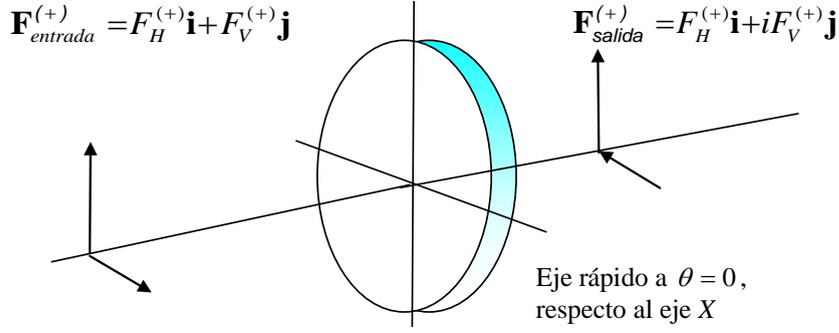


Figura 6.8: Acción de una QWP, en el caso de que eje rápido esté a 0° , se produce un desfase de $\pi/2$ entre las componentes horizontal y vertical del campo.

- **Lámina de media onda:** transforma luz polarizada linealmente en otra con polarización también lineal, pero girada un ángulo 2θ respecto al plano de polarización de la luz incidente; y luz polarizada circularmente dextrógira en levógira. Su efecto viene dado por la matriz [141]:

$$\hat{M}_{HWP} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

de tal modo que las amplitudes a la salida de la HWP son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{out}^{(+)} &= \hat{M}_{HWP} \mathbf{F}_{in}^{(+)} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_H^{(+)} \\ F_V^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= [\cos(2\theta)F_H^{(+)} + \text{sen}(2\theta)F_V^{(+)}] \mathbf{i} + [\text{sen}(2\theta)F_H^{(+)} - \cos(2\theta)F_V^{(+)}] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Para $\theta = 0$ la matriz es

$$\hat{M}_{HWP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

y la amplitud queda

$$\mathbf{F}_{out}^{(+)} = F_H^{(+)}\mathbf{i} - F_V^{(+)}\mathbf{j}. \quad (6.49)$$

6.3.4. El rotador de polarización

El efecto de este elemento óptico es rotar el vector campo un ángulo β . Está representado por la matriz:

$$\hat{M}_{PR} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

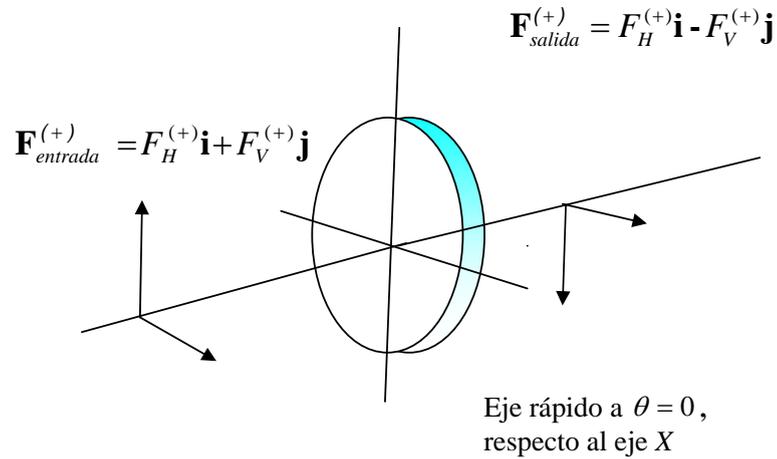


Figura 6.9: Acción de una HWP, para $\theta = 0$, lo que produce un cambio de fase π entre las componentes vertical y horizontal del campo eléctrico.

y el efecto sobre las amplitudes del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{out}^{(+)} &= \hat{M}_{PR}\mathbf{F}_{in}^{(+)} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_H^{(+)} \\ F_V^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= [\cos \beta F_H^{(+)} - \text{sen } \beta F_V^{(+)}]\mathbf{i} + [\text{sen } \beta F_H^{(+)} + \cos \beta F_V^{(+)}]\mathbf{j}.\end{aligned}\quad (6.51)$$

6.3.5. Mach-Zhender

El efecto de este dispositivo es el siguiente: un haz es separado mediante un BS en dos haces, los cuales recorren diferente camino, antes de incidir sobre un segundo BS a la salida del interferómetro, figura 7.6. Este sistema permite generar el time-bin qubit descrito en la ecuación (2.4). Debido a la relevancia de este sistema óptico en el procesamiento de información con entrelazamiento en energía y tiempo, lo estudiaremos con más detenimiento en la sección 7.6.1, de criptografía con PDC tipo I.

6.3.6. El polarizador

El polarizador elíptico está descrito por dos parámetros θ y δ , donde θ es el ángulo entre el eje principal de la elipse y la dirección horizontal, y δ es la excentricidad. El efecto del polarizador se expresa mediante la matriz:

$$\hat{M}_{EP} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta e^{-i\delta} \\ \text{sen } \theta \cos \theta e^{i\delta} & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}.\quad (6.52)$$

Para $\delta = 0$ obtenemos la matriz del polarizador circular⁶:

$$\hat{M}_{CP} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

El efecto del polarizador circular sobre las amplitudes del campo eléctrico consiste en la proyección del campo eléctrico sobre la dirección del polarizador, representada por el vector unitario $\mathbf{u}_1 = \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}$. En este caso, es necesario considerar una entrada de punto cero, $\mathbf{F}_{ZPF}^{(+)}$, perpendicular a $\mathbf{F}_{in}^{(+)}$. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{out}^{(+)} &= [\mathbf{F}_{in}^{(+)} \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{u}_1 = \hat{M}_{CP} \mathbf{F}_{in}^{(+)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_H^{(+)} + F_{ZPF,H}^{(+)} \\ F_V^{(+)} + F_{ZPF,V}^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= [(F_H^{(+)} + F_{ZPF,H}^{(+)}) \cos \theta + (F_V^{(+)} + F_{ZPF,V}^{(+)}) \text{sen } \theta] (\cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Definiendo la amplitud

$$F_{POL}^{(+)} = (F_H^{(+)} + F_{ZPF,H}^{(+)}) \cos \theta + (F_V^{(+)} + F_{ZPF,V}^{(+)}) \text{sen } \theta, \quad (6.55)$$

la expresión de un haz linealmente polarizado a un ángulo θ está dado por:

$$\mathbf{F}^{(+)} = F_{POL}^{(+)} \cos \theta \mathbf{i} + F_{POL}^{(+)} \text{sen } \theta \mathbf{j}. \quad (6.56)$$

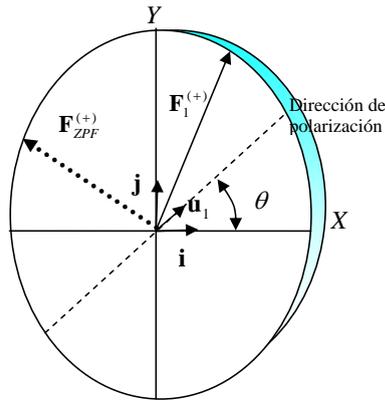


Figura 6.10: Vista frontal del polarizador, con el ZPF perpendicular a \mathbf{F}_1 , siendo \mathbf{u}_1 el vector polarización.

⁶En lo sucesivo consideraremos el polarizador circular, dejando el caso más general, $\delta \neq 0$, para la sección 7.4, donde estudiaremos la acción de un espía a través de una medida proyectiva en el proceso de distribución cuántica de clave.

6.4. Los generadores aleatorios cuánticos

Son la base de la criptografía cuántica, pues generan estados de una manera auténticamente arbitraria, por ejemplo la salida del BS o del PBS se produce de una forma totalmente al azar, debido a los canales vacíos, lo que nos permite una elección aleatoria de la base de medición. Un ejemplo típico de estos sistemas lo podemos ver en la figura 6.11. El divisor de haz transmite o refleja cada fotón incidente. En el camino reflejado hay un PBS que analiza en la base H, V . En el camino transmitido, la combinación de una lámina retardadora de media onda a $22,5^\circ$ y un PBS idéntico al anterior, constituyen un analizador en la base $45^\circ, -45^\circ$. Desde un punto de vista físico, los únicos procesos conocidos que generan eventos realmente aleatorios son aquellos basados en la mecánica cuántica (como en este caso). En la figura podemos ver cómo el punto cero contribuye a tal fin por su carácter estocástico, además de ser una exigencia en nuestro formalismo.

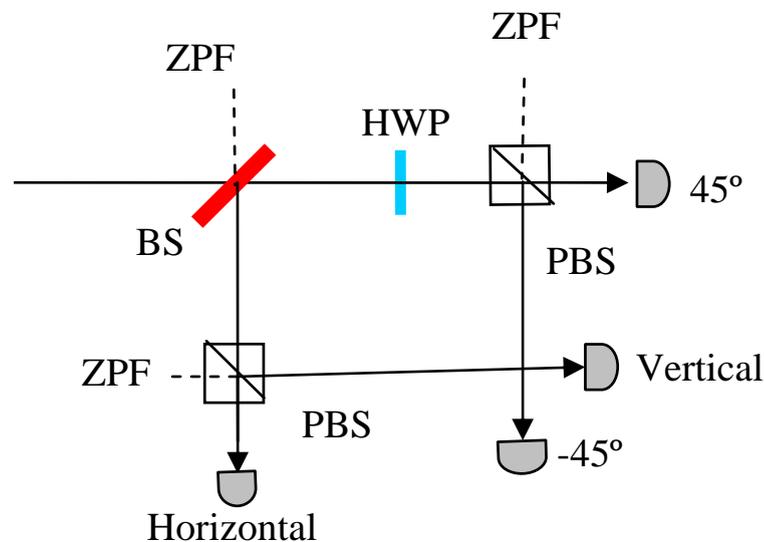


Figura 6.11: El PBS formando parte del generador aleatorio.

Para finalizar debemos indicar que para ciertas aplicaciones (por ejemplo, la realización de puertas cuánticas de dos fotones) se hace necesaria la no linealidad. Este tipo de no linealidad se puede lograr, ya sea por medio de la inducción de interacciones fotón-fotón (como la no linealidad en un medio Kerr⁷, conocida como la no linealidad Kerr) o mediante medida inducida por la no linealidad óptica efectiva.

La disponibilidad en la actualidad de la no linealidad Kerr es demasiado pequeña para ser útil para los fines especificados. La no linealidad efectiva inducida por las mediciones proyectivas

⁷Efecto Kerr o efecto electroóptico cuadrático (efecto de QEO) es un cambio en el índice de refracción de un material en respuesta a un campo eléctrico. Es distinto del efecto de Pockels en el que el cambio inducido del índice es directamente proporcional al cuadrado del campo eléctrico en vez de a la magnitud del campo. Todos los materiales muestran un efecto Kerr, pero ciertos líquidos muestran el efecto más fuertemente que lo hacen otros materiales. El efecto Kerr fue encontrado en 1875 por John Kerr, un físico escocés.

estándares (detección de eventos) se reconoce actualmente como una forma factible de aplicar, por ejemplo, puertas probabilísticas de dos qubits con fotones.

6.5. La función de Wigner en la Teoría de la Información Cuántica

La función de Wigner es una herramienta con una gran cantidad de aplicaciones en el campo de la Información Cuántica. El formalismo WRHP aplicado a los experimentos de comunicación cuántica con fotones, que desarrollamos en esta tesis, es sólo una de las aplicaciones que tiene este formalismo. El objeto de esta sección es mostrar otros trabajos en los que se utiliza la función de Wigner en este campo:

1. La aplicación de la función de distribución discreta de Wigner a la caracterización de las propiedades de entrelazamiento de dos qubits [118], donde se demuestra que un estado es entrelazado si, al menos, uno de los valores asumidos por las correspondientes funciones de Wigner discretas es más pequeño que un cierto valor crítico (negativo). Sobre la base del criterio de la transposición parcial, se establece la relación entre la separabilidad de una matriz densidad y la no negatividad de la función de Wigner discreta, relevante tanto para la matriz densidad como para la transposición parcial de la misma. Estos criterios son de gran interés para la construcción de entrelazados en información cuántica. Otro artículo de interés es el [110], en donde se aplica la forma discreta de la función de Wigner y donde se muestran las conexiones que existen entre la tomografía SIC POVM (*symmetric, informationally complete, positive operator valued measure*) y representaciones discretas de la función de Wigner.

También cabe destacar la aplicación de la función de Wigner a variables continuas [65], donde se presenta un protocolo para compartir entrelazamiento y codificar la amplitud de cuadratura del campo electromagnético, o también el trabajo de Oliver Glöckl et al. [135], donde se presenta un protocolo para realizar intercambio de entrelazamiento mediante un haz con un pulso de alta intensidad y, finalmente, en un artículo de Koniorczyk et al. [159], en el que se presenta un enfoque unificado de la teletransportación cuántica en dimensiones arbitrarias basado en el formalismo de la función de Wigner. Este enfoque nos ofrece una imagen clara de todas las manipulaciones realizadas en el protocolo de teletransporte. Además, dentro del formalismo de la función de Wigner se da cuenta de todas las imperfecciones de las manipulaciones.

2. Siguiendo la línea anterior, para variables discretas, en la referencia [45], se nos muestra, la forma de representar el estado y la evolución de un ordenador cuántico en el espacio de fases. Para ello, utilizan también una versión discreta de la función de Wigner, que, para un N arbitrario, se define en un espacio de fase red de $2N \times 2N$ puntos, y calculan dicha función de Wigner para los estados que sean pertinentes para computación cuántica.

Finalmente, discuten las propiedades de los algoritmos cuánticos en el espacio de fase y la representación en el espacio de fase del algoritmo cuántico de búsqueda de Grover. También podemos destacar la aplicación de la versión discreta de la función de Wigner al teletransporte, en el trabajo de Juan Pablo Paz [209].

3. La caracterización de la dinámica de sistemas cuánticos es uno de los problemas clave que debe sortear la computación cuántica, para ser viable. Este problema consiste en identificar y cuantificar los factores que actúan en una dinámica cuántica, de una manera sistemática y se denomina tomografía de procesos cuánticos. En varios trabajos [173, 174, 172] se ha demostrado que la idea de medida puede generalizarse, aún más, para incluir la determinación experimental de procesos, y por procesos entendemos transformaciones entrada-salida y montajes de medida. Es posible caracterizar completamente cualquier proceso cuántico mediante una función, $U(\mathbf{k}, \alpha)$ que es un análogo cuántico de la función de respuesta de impulsos de la óptica clásica

$$\tilde{W}(\mathbf{k}) = \int d^2\alpha U(\mathbf{k}, \alpha) W(\alpha). \quad (6.57)$$

Si el proceso es una transformación entrada-salida, esta función $U(\mathbf{k}, \alpha)$ relaciona las distribuciones sobre el espacio de fase asociadas al estado inicial y al estado final $W(\alpha)$, $\tilde{W}(\mathbf{k})$. Si el proceso es una medida, la función relaciona la distribución sobre el espacio de fase del estado incidente $W(\alpha)$ con la estadística de la medida $\tilde{W}(\mathbf{k})$. Estas funciones son fácilmente medibles experimentalmente, lo que nos permite hablar de la medida de un proceso. En particular se han generalizado las técnicas tomográficas para que puedan ser aplicadas a la determinación de transformaciones entrada-salida, para las puertas lógicas cuánticas, por ejemplo [172].

4. Un análisis con la función de Wigner, de gran interés para la computación cuántica es la de los estados estabilizadores, en la referencia [98] se hace un análisis en profundidad de este tema. Los estados estabilizadores juegan roles clave en la computación cuántica; constituyen un recurso esencial en el modelo de computación cuántica basado en la medición y en la construcción de códigos de corrección de errores.

El formalismo de estabilizadores fue desarrollado por Daniel Gottesman, en el marco del estudio de códigos cuánticos de corrección de errores. La idea básica de estos códigos es proteger la información contenida en un qubit a través de su codificación en el estado de un grupo de qubits. De esta forma, los estados lógicos aceptables son un subespacio de dimensión 2, dentro del espacio de Hilbert del grupo de qubits, y los errores en el cómputo son detectados cuando el estado del sistema se escapa de este subespacio. El formalismo de estabilizadores permite caracterizar el subespacio de estados lógicos como el formado por aquellos estados que son autoestados con autovalor 1 de un cierto conjunto de operadores de Pauli, que se llama el estabilizador del código. La representación de los

estados estabilizadores en el espacio de fases, se realiza mediante la función de Wigner discreta. En cualquiera de estas construcciones de la función de Wigner, las líneas del espacio de fases resultan asociadas a un conjunto de estados estabilizadores, pero la asociación entre cada línea y un estado dado puede variar, dando lugar a una clase de posibles funciones de Wigner.

Se puede demostrar que los únicos estados cuya función de Wigner es no negativa, para cualquier definición en esta clase, son las combinaciones estadísticas de los estados estabilizadores asociados a las líneas. También se han aplicado en la representación en el espacio de fases de la interferencia en una superposición coherente de estados estabilizadores, concluyendo que, en general, esta interferencia tiende a desparramarse en todo el espacio de fases, incluso en las regiones correspondientes a los estados superpuestos.

También se ha estudiado un sistema de qubits en un estado estabilizador que sufre efectos de decoherencia, hallando tiempos críticos de pérdida de entrelazamiento y mostrando el modo en que la decoherencia se manifiesta en la función de Wigner del estado correspondiente. Existe aplicación de la función de Wigner para sistemas con variables continuas de estados entrelazados [265], con aplicación en criptografía, además de una desigualdad en Wigner, que aparece en la referencia [125], dada por la expresión siguiente

$$W = p(\chi, \psi) + p(\psi, \omega) - p(\chi, \omega) \geq 0, \quad (6.58)$$

en la que se puede ver la función de Wigner donde $p(\chi, \psi)$ es la función de probabilidad de coincidencia de Alicia y Bob, respectivamente. Esta desigualdad es siempre satisfecha por cualquier teoría realista local, y nos permite determinar la acción de un espía entre Alicia y Bob.

6.6. Conclusiones

El estudio realizado en esta capítulo sobre los aspectos básicos de la información cuántica en óptica, dentro del formalismo WRHP, revela la importancia de la radiación de punto cero en la descripción del qubit, en el entrelazamiento, así como en la implementación de las puertas lógicas cuánticas cuando se usa luz para transmitir la información. En concreto, hemos analizado cómo el qubit fotónico espacial se genera a partir de la activación de los modos del ZPF, que aparece como un campo estocástico que permite interpretar, bajo una perspectiva ondulatoria, las propiedades del bit cuántico. Ello contrasta con la descripción usual en el espacio de Hilbert a través del concepto de fotón. De este modo, la estocasticidad inherente al punto cero justifica la posibilidad de crear generadores aleatorios cuánticos.

Hemos visto también cómo el ZPF es parte esencial de la descripción del entrelazamiento, lo que ya se vió en el capítulo 5, pero en este caso como parte fundamental en la implementación de la puerta CNOT en óptica cuántica: los modos del vacío correspondientes a las dos

polarizaciones asociadas a una de las puertas de entrada al PBS, se activan y se acoplan con la señal que entra por la otra entrada, aportando los grados de libertad necesarios para pasar de un estado separable en términos del espacio de Hilbert, a otro entrelazado.

Sabemos que las puertas lógicas en mecánica cuántica se generan a partir de la puerta de Hadamard, la CNOT, y la puerta de cambio de fase [25]. Sabiendo la relevancia del ZPF en la implementación del Hadamard (BS) y de la CNOT (PBS), podemos analizar sus efectos en cualquier otra operación lógica que utilice estas puertas en óptica cuántica. Por otro lado, la puerta de cambio de fase actúa sobre las amplitudes del campo eléctrico modificando la fase, por lo que el efecto de esta puerta sobre el ZPF está claro: modifica las fases de las amplitudes del punto cero. Esto ya se vió cuando analizamos los estados de Bell en la WRHP, en el apartado 5.3.1.

Hay no obstante un punto que no hemos tocado en el desarrollo del capítulo, pero que mencionaremos por su importancia capital en los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Los estudios del BS, PBS, y el polarizador, nos muestran que la consideración del ZPF en la propagación de la luz a través de estos aparatos puede producir *enhancement* [95], es decir, que la intensidad de la luz a la salida de estos aparatos sea mayor que la correspondiente a la entrada, para ciertos valores de las amplitudes del vacío. Esto contrasta fuertemente con la hipótesis “plausible” del *no enhancement* en la gestación de desigualdades de Bell no genuinas, que son las que se han llegado a violar en el laboratorio. El fenómeno del *enhancement* generado por el ZPF ya ha sido demostrado con anterioridad [188], y debe tenerse en cuenta entre los efectos del ZPF en comunicación cuántica con fotones [82].

CRIPTOGRAFÍA CUÁNTICA CON PDC EN LA WRHP

7.1. Introducción

Una vez que hemos introducido los aspectos esenciales de la comunicación cuántica con fotones, y la teoría del PDC en la representación de Wigner, comenzaremos nuestro programa con este capítulo, en el que aplicaremos la función de Wigner al análisis de experimentos de criptografía cuántica con fotones generados en PDC¹.

Comenzamos en la sección 7.2 con la influencia de la radiación de punto cero en la relación entre entrelazamiento y distribución de clave no segura a través de la representación de Wigner, para pasar, en la sección 7.3, a analizar experimentos de distribución de clave en los que se usa el protocolo de Ekert a la distribución cuántica de clave mediante la codificación segura en polarización (apartado 7.3.1) y en fase (apartado 7.3.2). Veremos la relación existente, en este formalismo, con el teorema de compatibilidad, básico en la criptografía segura. En la sección 7.4 estudiaremos el espionaje en el caso de medidas proyectivas, y veremos cómo el ataque introduce un ruido esencial que no pasa desapercibido, y que se refleja en el formalismo de Wigner en una entrada de punto cero, en el aparato que usa el espía. Continuaremos en la sección 7.5 con la descripción de los estados GHZ, base de la criptografía para más de dos partes, el secreto cuántico compartido (QSS), y veremos la influencia del ZPF en el entrelazamiento múltiple, para el caso de tres fotones.

La segunda parte del capítulo está dedicada a los experimentos de criptografía que utilizan la conversión tipo I (sección 7.6), en los que se utiliza el entrelazamiento energía-tiempo. Se comienza esta sección con la codificación en fase (apartado 7.6.1), en sus vertientes segura y no segura, enfatizando el papel del ZPF como generador aleatorio natural.

Por último, en la sección 7.7 presentamos las conclusiones del capítulo.

¹Las secciones 7.2 hasta la 7.4 se encuentran desarrolladas en [85, 83].

7.2. Entrelazamiento y distribución de clave (no segura) en la WRHP

En esta sección nos centraremos en la criptografía que se implementa con la conversión paramétrica tipo II y más concretamente en el protocolo de Ekert [112]. Comenzaremos mostrando la relación entre entrelazamiento, en el formalismo de Wigner, y la distribución -no segura- de clave cuántica. Consideremos la situación de la figura 7.1. La conversión paramétrica a la baja de tipo II en un cristal no lineal conduce² a la producción de dos haces correlacionados (correspondientes al estado $|\phi^+\rangle$):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= -F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'.\end{aligned}\quad (7.1)$$

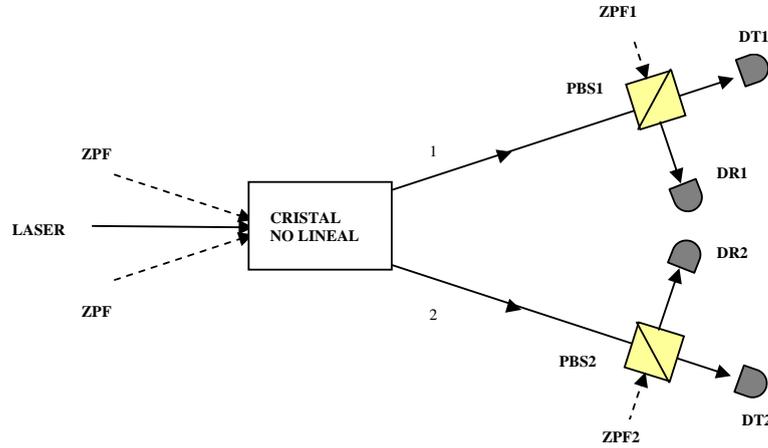


Figura 7.1: Dispositivo (no seguro) de distribución de clave cuántica. La radiación de punto cero se amplificada en el cristal, dando lugar a la correlación de los haces de salida. Los PBS separan las componentes horizontal y vertical de los haces, para que lleguen a los detectores correspondientes. Además, es fundamental considerar el punto cero que entra en el segundo canal del PBS.

Los rayos 1 y 2 se dirigen hacia Alicia y Bob, respectivamente. Frente a estos rayos se encuentran sendos *polarizing beam-splitter* (PBS) (los cuales transmiten la polarización vertical y reflejan la horizontal) y los detectores correspondientes. Por otro lado, hay que tener en cuenta el punto cero (ZPF) que entra en el segundo canal de cada PBS [225]. La consideración del ZPF en la entrada al PBS está relacionada con la conservación de las relaciones de conmutación de los operadores campo eléctrico en el marco de Heisenberg, cuando se trabaja en el espacio de Hilbert [179]. En esta situación debe considerarse el operador correspondiente al modo vacío

²De ahora en adelante, supondremos que la luz emitida por el cristal, en la zona de intersección de los conos ordinario y extraordinario, puede estar representada por cualquiera de los cuatro estados de Bell de polarización. La acción local sobre uno de los haces modifica las propiedades de correlación, de manera que se puede pasar de un estado a otro. La consideración en esta sección del estado $|\phi^+\rangle$ no tiene una relevancia especial en comparación con los otros estados, y el argumento es igualmente válido para todos ellos.

con objeto de mantener las relaciones de conmutación del operador campo eléctrico, cuando se modifica por la presencia del PBS. Cuando pasamos a la función de Wigner, esto corresponde a la consideración de una entrada de ZPF descorrelacionada con la señal de entrada de cualquier otro canal. Aunque esta componente se resta finalmente en el proceso de detección, este es un ingrediente fundamental de la teoría y no puede descartarse en los cálculos.

Si $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ es el punto cero que entra en el segundo canal del PBS1, los campos en los detectores DT1 y DR1 son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{DT1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) &= F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1), \\ \mathbf{F}_{DR1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) &= -iF_p^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)\mathbf{i} + \mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1),\end{aligned}\quad (7.2)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}$ ($\mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}$) es la parte de $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ que es reflejada (transmitida) en el PBS1. Siguiendo el mismo razonamiento, la expresión de los campos que salen del PBS2 son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{DT2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) &= -F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2), \\ \mathbf{F}_{DR2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) &= iF_q^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2)\mathbf{i}' + \mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2),\end{aligned}\quad (7.3)$$

siendo $\mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}$ ($\mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}$) la parte de $\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}$ que se refleja (transmitida) en el PBS2.

La característica crucial del entrelazamiento (referida al estado $|\phi^+\rangle$) es que los resultados referentes a la detección común de los dos qubits están totalmente correlacionados, a pesar de que si se mide uno de los dos qubits, el resultado de esta medida es completamente aleatorio. La influencia del punto cero en estos resultados es fundamental, puesto que:

- La correlación perfecta en la detección conjunta surge como consecuencia de la amplificación del punto cero en el cristal, y de la forma en que sus amplitudes se distribuyen en los haces de salida (entrelazamiento).
- La radiación de punto cero que entra por los canales vacíos de los PBS introduce un ruido que genera la indeterminación en la medida de cada qubit, lo que trae como consecuencia la misma probabilidad de detección simple en los detectores correspondientes a cada haz.

En la representación de Wigner, estas características se explican fácilmente mediante el uso de las ecuaciones (4.64), para el cálculo de la probabilidad de detección simple, y (4.69) para la probabilidad de detección conjunta en el caso de experimentos donde interviene la polarización. Tenemos, para $P_{DT1,DT2}$ y $P_{DT1,DR2}$:

$$\begin{aligned}P_{DT1,DT2} &\propto |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 + |\langle F_s^{(+)} F_{ZPF2,R}^{(+)} \rangle|^2 + |\langle F_{ZPF1,R}^{(+)} F_{ZPF2,R}^{(+)} \rangle|^2 \\ &+ |\langle F_{ZPF1,R}^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 = |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 \Rightarrow P_{DT1,DT2} = K_{DT1,DT2} |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2,\end{aligned}\quad (7.4)$$

donde hemos tenido en cuenta que las entradas $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}$ están descorrelacionadas con

todas las señales y entre ellas. Además la constante³ $K_{DT1,DT2}$ da cuenta de la eficiencia del proceso de detección. Por otra parte,

$$P_{DT1,DR2} \propto |\langle F_s^{(+)} F_q^{(+)} \rangle|^2 + |\langle F_s^{(+)} F_{ZPF2,T}^{(+)} \rangle|^2 + |\langle F_{ZPF1,R}^{(+)} F_{ZPF2,T}^{(+)} \rangle|^2 + |\langle F_{ZPF1,R}^{(+)} F_q^{(+)} \rangle|^2 = 0. \quad (7.5)$$

Si siguiendo el mismo proceso, obtenemos para el resto de probabilidades:

$$P_{DR1,DR2} = K_{DR1,DR2} |\langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle|^2, \quad (7.6)$$

y

$$P_{DR1,DT2} = P_{DT1,DR2} = 0. \quad (7.7)$$

De las ecuaciones (7.4) a (7.7), tenemos:

$$P_{DR1,DR2} + P_{DT1,DT2} + P_{DR1,DT2} + P_{DT1,DR2} = K_{DR1,DR2} |\langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle|^2 + K_{DT1,DT2} |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2. \quad (7.8)$$

En el caso ideal⁴,

$$K_{DR1,DR2} |\langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle|^2 = K_{DT1,DT2} |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad (7.9)$$

así que

$$P_{DR1,DR2} + P_{DT1,DT2} + P_{DR1,DT2} + P_{DT1,DR2} = 1. \quad (7.10)$$

7.3. Experimentos con PDC tipo II para distribución de clave segura

La configuración mostrada en la figura 7.1 no es segura porque un espía, conocido generalmente como Eva, podría en principio medir la polarización de la luz usando un dispositivo similar al de Bob, y volver a enviar pulsos polarizados similares a él. Por esta razón, para establecer una clave segura y detectar al espía, Alicia y Bob, al azar, seleccionarán diferentes

³Esta constante puede expresarse a su vez de la forma $K_{DT1,DT2} = K_{DT1} K_{DT2}$, donde K_{DTi} está relacionada con la eficiencia del detector i (véase la ecuación (4.69)).

⁴La probabilidad de detección conjunta es proporcional al cuadrado de la constante de acoplamiento y a la intensidad del láser, a través del factor $g^2 |V|^2$, tal y como se muestra en la ecuación (5.19), y a la eficiencia efectiva en el proceso de detección, ésta última proporcional a la eficiencia (η) del detector. El resultado mostrado en (7.9), en el que la probabilidad de detección es 0,5, es ideal en cuanto a la emisión de la pareja de fotones, y a su detección, y se ajusta a la descripción que se realiza en el espacio de Hilbert, a través de las expresiones de los estados de la base de Bell, realizada en la sección 5.3.1.

analizadores de polarización aplicando rotaciones o cambios de fase [150, 203, 115]. Siguiendo el protocolo de Ekert [112], se comunican mediante un canal público las orientaciones que se utilizaron para cada uno de las mediciones, pero no los resultados obtenidos. En el caso de medidas compatibles, se mantendrían los resultados a fin de establecer la clave criptográfica. Los resultados correspondientes a orientaciones no compatibles se comunican entre ellos y se usan para detectar si ha habido o no un ataque, a partir de la medición del parámetro de Bell [96]:

$$S = -E(\alpha, \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta'), \quad (7.11)$$

donde

$$E(\alpha, \beta) = \frac{P_{T1,T2}(\alpha, \beta) + P_{R1,R2}(\alpha, \beta) - P_{T1,R2}(\alpha, \beta) - P_{R1,T2}(\alpha, \beta)}{P_{T1,T2}(\alpha, \beta) + P_{R1,R2}(\alpha, \beta) + P_{T1,R2}(\alpha, \beta) + P_{R1,T2}(\alpha, \beta)}. \quad (7.12)$$

El valor de $|S|$ que predice la mecánica cuántica es $2\sqrt{2}$, pero la presencia de Eva reduce el valor observado de dicho parámetro, tal que $|S_{Eva}| \leq \sqrt{2}$. Si se detecta la presencia de Eva, se aborta el protocolo de distribución de clave (se descartan los resultados anteriormente guardados).

Vamos a estudiar dos experimentos de criptografía cuántica que usan pares de fotones entrelazados en polarización: en el primero veremos la codificación en polarización y en el segundo la codificación en fase. A pesar de que estos experimentos son similares a anteriores pruebas de las desigualdades de Bell, mostraremos en detalle los cálculos correspondientes a la codificación en polarización, con objeto de aclarar la relación entre la distribución cuántica de claves (segura) y el formalismo de Wigner para el PDC. El campo eléctrico en los detectores se obtendrá a partir de la propagación, a través de diferentes elementos ópticos, de las amplitudes correspondientes a la salida del cristal. Para simplificar nuestros cálculos consideraremos que la distancia que separa la fuente de los elementos ópticos, y éstos de los detectores, es idéntica para Alicia y Bob, de tal manera que la contribución al cambio de fase en la ecuación (5.14) no se tendrá en cuenta en los cálculos de las probabilidades⁵.

7.3.1. Codificación en polarización

En nuestro primer dispositivo experimental situaremos rotadores de polarización frente a los PBS [150]. Los haces que salen del cristal se corresponden con el estado singlete $|\psi^-\rangle$, que en nuestro formalismo se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \end{aligned} \quad (7.13)$$

El dispositivo para la distribución segura de clave cuántica se muestra en la figura 7.2. Dos rotadores de polarización, PR1 y PR2, se disponen frente a los PBS con objeto de rotar el

⁵Estas diferencias de camino óptico son relevantes en experimentos que utilizan, por ejemplo, entrelazamiento tiempo-energía [248].

plano del polarización de la amplitud del campo eléctrico. El rotador de polarización $PR1$ rota

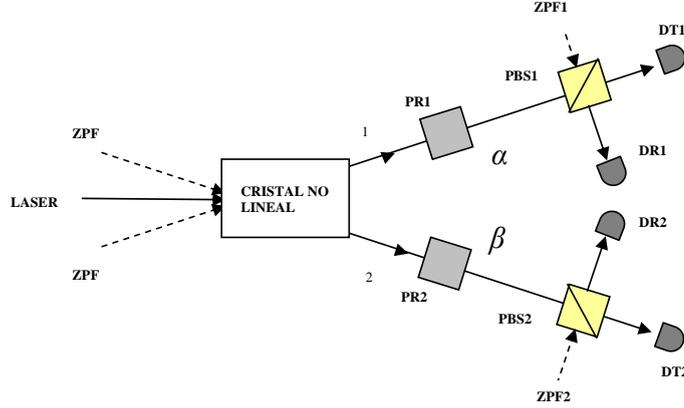


Figura 7.2: Dispositivo para la distribución segura cuántica de clave, utilizando la polarización del campo eléctrico. Dos rotadores de polarización, $PR1$ y $PR2$, se usan para girar el plano de polarización de la amplitud del campo eléctrico.

el plano de polarización de $\mathbf{F}_1^{(+)}$ un ángulo α . Las componentes del campo detrás de $PR1$, se calculan a través de la expresión mostrada en el apartado 6.3.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \\ F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\cos\alpha - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\text{sen}\alpha \\ F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\text{sen}\alpha + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

De manera similar, el cálculo para $\mathbf{F}'_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)$ da

$$\mathbf{F}'_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) = \begin{pmatrix} F_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\cos\beta + F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\text{sen}\beta \\ F_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\text{sen}\beta - F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\cos\beta \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

La propiedad fundamental de la mecánica cuántica, que puede ser usado para frustrar escuchas durante el intercambio de una clave criptográfica, se basa en el principio de incertidumbre de Heisenberg: si las orientaciones utilizadas por Alicia y Bob son compatibles (los correspondientes operadores conmutan en el espacio de Hilbert), entonces la mecánica cuántica predice una anticorrelación perfecta entre los resultados. Sin embargo, este no será el caso cuando las orientaciones no son compatibles (los correspondientes operadores no conmutan). En la representación de Wigner, estos resultados están relacionados directamente con la transformación en las propiedades de correlación de los haces de luz cuando atraviesan los rotadores de polarización. Para explicar este punto vamos a calcular las diferentes correlaciones entre las componentes de $\mathbf{F}'_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)$ y $\mathbf{F}'_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)$. Por simplicidad, vamos a descartar la dependencia con la posición y el tiempo, lo que conseguimos haciendo $t_1 = t_2$ y posiciones caracterizadas

por un camino óptico idéntico desde el cristal. Tenemos:

$$\langle (\mathbf{F}'_1^{(+)} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{F}'_2^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \rangle = \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{sen}(\beta - \alpha), \quad (7.16)$$

$$\langle (\mathbf{F}'_1^{(+)} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{F}'_2^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \rangle = -\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{cos}(\beta - \alpha), \quad (7.17)$$

$$\langle (\mathbf{F}'_1^{(+)} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{F}'_2^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \rangle = \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{cos}(\beta - \alpha), \quad (7.18)$$

$$\langle (\mathbf{F}'_1^{(+)} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{F}'_2^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \rangle = \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{sen}(\beta - \alpha). \quad (7.19)$$

Nótese que, para $\alpha = \beta$, las propiedades de correlación son idénticas a las correspondientes a la salida del cristal. Este resultado concuerda con que el estado singlete $|\psi^-\rangle$ tiene *invariancia rotacional* [126], propiedad que es fundamental en el argumento EPR. Sin embargo, en el caso $\beta - \alpha = 45^\circ$, todas las correlaciones tienen el mismo módulo. Como veremos más adelante, esto implica que las cuatro probabilidades de detección conjunta tienen el mismo valor.

Considerando la radiación de punto cero que entra en el segundo canal del *PBS1*, las amplitudes en los detectores DT1 y DR1 son:

$$\mathbf{F}_{DT1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) = [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\text{sen}\alpha + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)\text{cos}\alpha]\mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1), \quad (7.20)$$

$$\mathbf{F}_{DR1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) = i[F_s^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)\text{cos}\alpha - F_p^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)\text{sen}\alpha]\mathbf{i} + \mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1), \quad (7.21)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}$ ($\mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}$) es la parte de $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ que es reflejada (transmitida) en el *PBS1*. De la misma manera, las amplitudes del campo eléctrico en los detectores de Bob son:

$$\mathbf{F}_{DT2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) = [F_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\text{sen}\beta - F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\text{cos}\beta]\mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (7.22)$$

$$\mathbf{F}_{DR2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) = i[F_q^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2)\text{cos}\beta + F_r^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2)\text{sen}\beta]\mathbf{i}' + \mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2). \quad (7.23)$$

Con objeto de calcular las probabilidades de detección $P_{T1,T2}$, $P_{T1,R2}$, $P_{R1,R2}$ y $P_{R1,T2}$, usaremos la ecuación (4.69) y las expresiones (7.20), (7.21), (7.22) y (7.23). Tenemos:

$$\begin{aligned} P_{DT1,DT2} &= K_{DT1,DT2} \sum_{\lambda,\lambda'} \left| \langle F_{DT1,\lambda}^{(+)} F_{DT2,\lambda'}^{(+)} \rangle \right|^2 \\ &= K_{DT1,DT2} \left| \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \text{sen}\beta \text{cos}\alpha - \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{cos}\beta \text{sen}\alpha \right|^2 = \frac{1}{2} \text{sen}^2(\beta - \alpha), \end{aligned} \quad (7.24)$$

donde hemos tenido en cuenta que el punto cero que entra por los canales vacíos de los *PBS*

está descorrelacionado con cualquier otra amplitud, y que en la situación ideal se verifican las relaciones siguientes:

$$K_{DT1,DT2} \left| \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \right|^2 = K_{DT1,DT2} \left| \langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}. \quad (7.25)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el cálculo del resto de probabilidades, obtenemos las relaciones siguientes:

$$P_{T1,T2} = P_{R1,R2} = \text{sen}^2(\beta - \alpha) ; \quad P_{T1,R2} = P_{R1,T2} = \text{cos}^2(\beta - \alpha). \quad (7.26)$$

Nótese que, para $\beta - \alpha = 45^\circ$ las probabilidades conjuntas son $P_{T1,T2} = P_{R1,R2} = P_{T1,R2} = P_{R1,T2} = 1/4$, según (7.26). Por tanto, si realizamos la suma de las cuatro probabilidades, recuperamos el resultado dado por (7.10), para cualquier valor que tomen α y β .

7.3.2. Codificación en fase

El dispositivo experimental se muestra en la figura 7.3. Las correlaciones de los haces que salen del cristal en el formalismo de Wigner vienen dadas por (7.1) (que se corresponde con el estado $|\phi^+\rangle$). Cada analizador está formado por un retardador de onda y una lámina de media onda frente a los PBS [203].

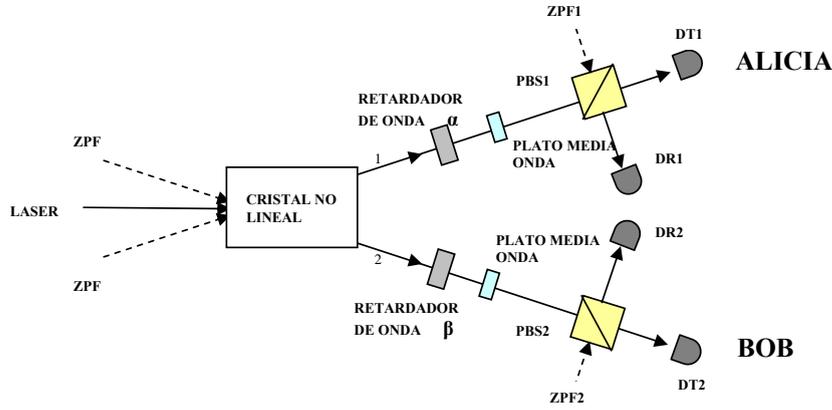


Figura 7.3: Dispositivo para codificar en fase mediante fotones entrelazados, donde figuran los retardadores de onda y los platos de media onda en los haces antes de los PBS respectivos.

El campo $\mathbf{F}'_{1'}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ detrás del retardador de onda (el cual introduce un cambio de fase α entre las componentes vertical y horizontal de campo), es:

$$\mathbf{F}'_{1'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + e^{i\alpha} F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}. \quad (7.27)$$

Con objeto de ajustarnos a los cálculos desarrollados en [85], sustituiremos la acción de la lámina de media onda (con eje óptico $22,5^\circ$) por una rotación del plano de polarización de $\mathbf{F}'_{1'}^{(+)}$ un ángulo de 45° alrededor de su dirección de propagación, lo que no altera los resultados

fundamentales del trabajo. La correspondiente amplitud, $\mathbf{F}'_{1''}^{(+)}$ es:

$$\mathbf{F}'_{1''}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}[F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{i\alpha}F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)]\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}[-F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{i\alpha}F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)]\mathbf{j}. \quad (7.28)$$

Finalmente, el PBS separa las componentes vertical y horizontal del campo. Teniendo en cuenta la radiación de punto cero que entra por el otro canal del PBS1, y que está descorrelacionado con $\mathbf{F}'_{1''}^{(+)}$, las amplitudes en los detectores DT1 y DR1 son:

$$\mathbf{F}_{DT1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}[-F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + e^{i\alpha}F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)]\mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1), \quad (7.29)$$

$$\mathbf{F}_{DR1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) = \frac{-i\sqrt{2}}{2}[F_p^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) + e^{i\alpha}F_s^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)]\mathbf{i} + \mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1), \quad (7.30)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}$ ($\mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}$) es la parte de $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ que es reflejada (transmitida) en el PBS1. De forma similar, para las amplitudes de los campos en los detectores DT2 y DR2 situados en el lado de Bob, tenemos:

$$\mathbf{F}_{DT2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}[F_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) - e^{i\beta}F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)]\mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (7.31)$$

$$\mathbf{F}_{DR2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) = \frac{i\sqrt{2}}{2}[F_q^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) + e^{i\beta}F_r^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2)]\mathbf{i}' + \mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2). \quad (7.32)$$

Para calcular las probabilidades conjuntas $P_{T1,T2}$, $P_{T1,R2}$, $P_{R1,R2}$ y $P_{R1,T2}$ utilizaremos las expresiones (7.29) a (7.32), y la ecuación (4.69). Después de unos cálculos análogos a los del apartado anterior, obtenemos:

$$P_{T1,R2} = P_{R1,T2} \propto 1 - \cos(\alpha + \beta), \quad (7.33)$$

$$P_{T1,T2} = P_{R1,R2} \propto 1 + \cos(\alpha + \beta), \quad (7.34)$$

donde la constante de proporcionalidad, en el caso ideal, es igual a 1/4.

7.4. El espionaje en el formalismo de Wigner

En este apartado vamos a analizar, en la representación de Wigner, la perturbación que provoca un espía en la distribución de clave cuántica. Como consecuencia de uno de los principios de la Mecánica Cuántica, la medición implica el colapso del vector de estado del sistema, lo que permite que la criptografía cuántica sea segura. En este apartado vamos a analizar el espionaje basado en una medida fuertemente filtrante de la polarización. El formalismo de Wigner da un enfoque interesante, ya que nos permite ver que la acción del espía conduce a

la pérdida de correlación.

Vamos a examinar la situación correspondiente al experimento descrito en la sección anterior. Simularemos el efecto del espía (Eva) colocando un polarizador elíptico en la ubicación de Bob, donde θ es el ángulo entre el eje principal de la elipse y la dirección horizontal, y δ es la excentricidad. La radiación de punto cero correspondiente al polarizador se muestra en la figura 7.4. Las amplitudes del campo eléctrico en la zona de Alicia vienen dadas por (7.29) y

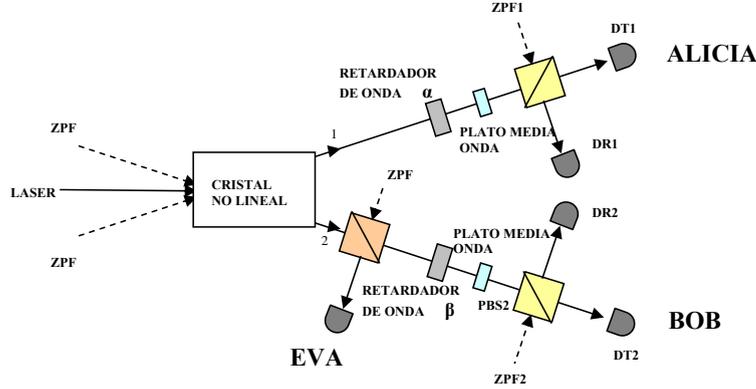


Figura 7.4: El espía se simula mediante un polarizador elíptico que modifica el campo en la zona de Bob. El campo de punto cero en el polarizador es necesario en la representación de Wigner, para la descripción del ataque de Eva.

(7.30), mientras que la amplitud en la zona de Bob se modifica por la acción del polarizador elíptico, mostrada en el apartado 6.3.6:

$$\mathbf{F}_{2'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \operatorname{sen}\theta e^{-i\delta} \\ \cos\theta \operatorname{sen}\theta e^{+i\delta} & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ -F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$$

$$= [\cos\theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \operatorname{sen}\theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)](\cos\theta e^{-i\delta} \mathbf{i}' + \operatorname{sen}\theta \mathbf{j}') + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (7.35)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ es la parte reflejada del punto cero, que entra por el segundo canal del polarizador, y que está relacionada con la conservación de los conmutadores de los operadores de las amplitudes del campo eléctrico en el formalismo del espacio de Hilbert.

La acción de Eva causa una modificación de las propiedades de correlación de los campos que puede ser detectada mediante la medida del parámetro de Bell, S . Para ilustrar este punto en el formalismo de Wigner, calcularemos el cuadrado del módulo de las correlaciones entre diferentes componentes de los campos correspondientes a (7.1) (sin modificar el haz 1 de la figura 7.4), y (7.35) (modificando el haz 2). Estas cantidades son proporcionales a las probabilidades de detección teniendo en cuenta una modificación del dispositivo de la figura 7.2, que se ha hecho teniendo en cuenta la acción de Eva en el lado de Bob. Considerando

ahora que el campo $\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}$ está descorrelacionado con $\mathbf{F}_1^{(+)}$, obtenemos

$$|\langle (\mathbf{F}_1^{(+)} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{F}_{2'}^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \rangle|^2 = |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 \cos^4 \theta, \quad (7.36)$$

$$|\langle (\mathbf{F}_1^{(+)} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{F}_{2'}^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \rangle|^2 = |\langle (\mathbf{F}_1^{(+)} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{F}_{2'}^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \rangle|^2 = |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \quad (7.37)$$

$$|\langle (\mathbf{F}_1^{(+)} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{F}_{2'}^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \rangle|^2 = |\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle|^2 \sin^4 \theta. \quad (7.38)$$

Independientemente de la elección de θ y δ , la suma de las cuatro probabilidades, en el caso ideal, debe ser igual a 0,5. Este resultado es justo la mitad del correspondiente a (7.10), y refleja el hecho de que la acción de Eva da lugar a la pérdida de correlación. En el formalismo de la función de Wigner, la correlación se pierde a través de la proyección de la amplitud del campo eléctrico en el lado de Bob, sobre la dirección característica del polarizador. Esta descripción contrasta con la que utiliza la del formalismo del espacio de Hilbert, donde la medida proyectiva cambia el vector de estado del campo electromagnético.

Hemos de resaltar que la acción de Eva, a través de la consideración de la entrada de punto cero que entra por el segundo canal del polarizador, introduce un ruido fundamental en lo que respecta a la detección del espía.

El campo $\mathbf{F}_{2''}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ detrás del retardador de onda (el cual introduce un cambio de fase β entre las componentes vertical y horizontal), es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2''}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = & \{[\cos \theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \sin \theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)] \cos \theta e^{-i\delta} + [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}']\} \mathbf{i}' \\ & + e^{i\beta} \{[\cos \theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \sin \theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)] \sin \theta + [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}']\} \mathbf{j}'. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Ahora, examinamos la acción de la lámina de media onda, que da los siguientes resultados para la amplitud del campo $\mathbf{F}_{2'''}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2'''}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\sqrt{2}}{2} \left[[\cos \theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \sin \theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)] (\cos \theta e^{-i\delta} - \sin \theta e^{i\beta}) \right. \\ & \left. + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}' - e^{i\beta} [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}'] \right] \mathbf{i}' \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[[\cos \theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \sin \theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)] (\cos \theta e^{-i\delta} + \sin \theta e^{i\beta}) \right. \\ & \left. + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}' + e^{i\beta} [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}'] \right] \mathbf{j}'. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Finalmente, las componentes son separadas en el divisor de polarización, de tal manera

que las amplitudes de los campos en los detectores DT2 y DR2 son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{DT2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[[\cos\theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) - \text{sen}\theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)] (\cos\theta e^{-i\delta} + \text{sen}\theta e^{i\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \mathbf{i}' + e^{i\beta} [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \mathbf{j}'] \right] \mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2), \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{DR2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) &= \frac{i\sqrt{2}}{2} \left[[\cos\theta e^{i\delta} F_q^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) - \text{sen}\theta F_r^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2)] (\cos\theta e^{-i\delta} - \text{sen}\theta e^{i\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \cdot \mathbf{i}' - e^{i\beta} [\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \cdot \mathbf{j}'] \right] \mathbf{i}' + \mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2), \end{aligned} \quad (7.42)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}$ ($\mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}$) es la parte del campo punto cero $\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}$ que es transmitida (reflejada) en el PBS2. Ahora, para calcular las probabilidades conjuntas, $P_{T1,T2}$, $P_{T1,R2}$, $P_{R1,R2}$ y $P_{R1,T2}$ sustituimos las expresiones (7.29), (7.30), (7.41) y (7.42) en la ecuación (4.69). Teniendo en cuenta que las entradas de punto cero, $\mathbf{F}_{ZPF(Eva)}^{(+)}$, $\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}$ están descorrelacionadas entre ellas y con cualquiera de las señales que intervienen en el experimento, después de algunos cálculos sencillos se obtiene:

$$P_{XY}(\theta, \delta) = C[1 \pm \cos(\alpha - \delta)\text{sen}2\theta][1 \pm \cos(\beta + \delta)\text{sen}2\theta], \quad (7.43)$$

siendo C una constante. Por otra parte $X \equiv T1$ o $R1$ y $Y \equiv T2$ o $R2$, y el signo “+” (“-”) aparece en la transmisión, “T” (reflexión, “R”). Para una detección perfecta, el valor de C es $1/8$. Podemos calcular el parámetro de Bell (7.11) para $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0$, $\alpha' = 135^\circ$ y $\beta' = 90^\circ$. Usando (7.43) obtenemos,

$$E(\alpha, \beta) = \text{sen}^2(2\theta)\cos(\alpha - \delta)\cos(\beta + \delta), \quad (7.44)$$

y

$$|S(\theta, \delta)| = \sqrt{2}\text{sen}^2(2\theta). \quad (7.45)$$

Por último, vamos a considerar los siguientes dos casos especiales, que han sido estudiados [203]:

Caso I ($\delta = 0$), correspondiente al uso de un polarizador lineal. De las expresiones (7.12) y (7.45) obtenemos

$$P_{XY}(\theta) = C(1 \pm \cos\alpha\text{sen}2\theta)(1 \pm \cos\beta\text{sen}2\theta); \quad |S| = \sqrt{2}\text{sen}^2(2\theta). \quad (7.46)$$

Caso II ($\theta = 45^\circ$), tenemos

$$P_{XY}(\delta) = C[1 \pm \cos(\alpha - \delta)][1 \pm \cos(\beta + \delta)] ; \quad |S| = \sqrt{2}. \quad (7.47)$$

7.5. Estados GHZ en la Representación de Wigner

En el año 1989, Greenberger, Horne y Zeilinger [139] encontraron que los estados entrelazados, de al menos tres sistemas cuánticos, pueden presentar contradicciones con modelos realistas locales mucho más acusadas que las encontradas para dos partículas en violaciones de las desigualdades de Bell. Naturalmente, se trató de construir tales estados e investigar sus propiedades, pero como no hay fuentes naturales eficientes y controlables, para estados de tres o más fotones, los investigadores tuvieron que recurrir a técnicas que permitieran construir estados entrelazados, en espacios de Hilbert de dimensión mayor, mediante la manipulación del entrelazamiento entre dos partículas (estados de Bell).

En 1999, Bouwmeester et al. [62] informó de la primera observación del entrelazamiento de tres partículas. El equipo empleó dos parejas de fotones producidos en la conversión paramétrica a la baja generados mediante un láser UV no colineal, posteriormente se recombinan los pares entrelazados combinándolos a través de divisores de haz a un estado condicional de tres partículas entrelazadas. En este sentido, los estados GHZ consisten en un entrelazamiento de tres fotones. El esquema de la figura 7.5 muestra la configuración utilizada por Bouwmeester et al. [62]. Para producir tres fotones GHZ correlacionados, se generan al mismo tiempo dos pares de fotones independientes y, de cada par, se envía un fotón a la derecha y otro a la izquierda. Posteriormente, por la acción del PBS de la izquierda, sólo fotones polarizados horizontalmente pueden alcanzar el detector de disparo, DT . Para registrar coincidencias simultáneas entre tres detecciones de $D1$, $D2$ y $D3$, el otro fotón debe ser reflejado por el PBS, es decir, debe ser de polarización vertical. Este fotón es posteriormente rotado 45° , mediante una lámina de media onda, pudiendo ser detectado verticalmente en el detector $D1$, u horizontalmente en el detector $D2$. Las dos únicas formas posibles en que un evento de triple coincidencia surge en los detectores $D1$, $D2$ y $D3$, ocurre cuando los dos fotones de la derecha son separados en el divisor de haz y cuando los dos fotones que se han detectado en la parte superior del PBS tienen la misma polarización - ambos horizontal o ambos vertical. En el espacio de Hilbert, el estado de los cuatro fotones se puede expresar de la forma:

$$|\Psi\rangle_{123T} = |H_T\rangle \otimes |\Psi\rangle_{GHZ} ; |\Psi\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2|V\rangle_3 + |V\rangle_1|V\rangle_2|H\rangle_3). \quad (7.48)$$

Con los trabajos pioneros de Greenberger et al. [206], se hizo evidente que los estados entrelazados de tres o más partículas son muy importantes para pruebas fundamentales de la teoría cuántica. Por otra parte, aplicaciones en la comunicación cuántica como el *secreto cuántico compartido* (QSS)⁶ requeriría de múltiples partículas entrelazadas, aunque se ha demostrado

⁶La compartición de secreto cuántico es una generalización de la distribución cuántica de claves a más de dos partículas. En esta nueva aplicación de la comunicación cuántica un emisor normalmente llamada Alicia, distribuye una clave secreta entre dos partes Bob y Carlos, de manera que ninguno de ellos, por separado tiene información sobre la clave, pero juntos tienen la información completa. Si un espía intenta acceder a la información se produciría un error en la transmisión de datos y se revelaría su presencia. La motivación del

que es posible hacerlo con *qubits* simples [227].

Aunque el interés en los estados GHZ es bastante alto, hasta la fecha no se han descubierto fuentes eficientes prácticamente utilizables. Estos entrelazamientos más altos podrían, en principio, prepararse para cualquier grado de libertad, aún así, siempre y cuando no haya manera eficiente para producir estos estados, su interés se mantendrá probablemente en el ámbito académico. Recordemos que ya se han podido entrelazar hasta ocho fotones. Tales estados, de más de dos partículas entrelazadas, son de gran interés para experimentos sobre realismo local e información cuántica. En este sentido, parece justificada la idea de buscar una forma de entrelazar fotones hasta llegar a un nivel en el que podamos desarrollar sistemas de computación útiles, de manera que se puedan aplicar algoritmos de corrección de errores.

Existen diversos tipos de estados entrelazados de varios fotones, además de los GHZ, como pueden ser los estados W , que presentan poca robustez a la pérdida de entrelazamiento. Sin embargo, otros tipos de estados denominados *cluster*, son más robustos ante la decoherencia. Para más información sobre multifotones entrelazados consultar [154, 226].

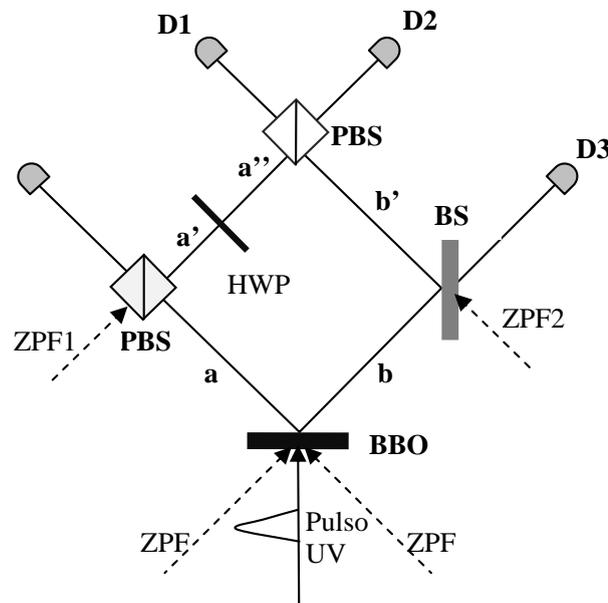


Figura 7.5: Dispositivo experimental para la detección del estado GHZ. Se generan al mismo tiempo dos pares de fotones independientes y, de cada par, se envía un fotón a la derecha y otro a la izquierda. Posteriormente, por la acción del PBS de la izquierda, sólo fotones polarizados horizontalmente pueden alcanzar el detector de disparo, DT . Para registrar coincidencias simultáneas entre tres detecciones de $D1$, $D2$ y $D3$, el otro fotón debe ser reflejado por el PBS, es decir, debe ser de polarización vertical. Nótese que las cuatro entradas de punto cero, necesarias para generar el estado dado por la ecuación (7.48), aportan un total de 8 conjuntos de modos de punto cero independientes (las dos polarizaciones por cada entrada).

Para comenzar con nuestro análisis en la representación de Wigner consideraremos que los

secreto cuántico compartido es hacer que Bob y Carlos cooperen (alguno de ellos podría ser poco honesto) con el fin de realizar algunas tareas, se podría pensar, por ejemplo, en acceder a una información clasificada.

haces que salen del cristal están corresponde al estado $|\psi^-\rangle$:

$$\mathbf{F}_a^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}, \quad (7.49)$$

$$\mathbf{F}_b^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \quad (7.50)$$

Analizaremos los cambios que va sufriendo el haz a medida que va pasando por los diferentes dispositivos del sistema. Comenzaremos por el haz $\mathbf{F}_a^{(+)}$, que incide sobre el PBS que transmite la polarización horizontal y refleja la vertical. La amplitud en DT es:

$$\mathbf{F}_{DT}^{(+)}(\mathbf{r}_T, t_T) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}_T, t_T)\mathbf{i} + F_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}_T, t_T)\mathbf{j}, \quad (7.51)$$

donde $F_{ZPF1,R}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)} \cdot \mathbf{j})i$ es la amplitud del punto cero que es reflejada en el PBS. Por otro lado, la amplitud correspondiente al modo a' es:

$$\mathbf{F}_{a'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = iF_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} + F_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}, \quad (7.52)$$

donde ahora aparece la parte del punto cero transmitida $F_{ZPF1,T}^{(+)} = \mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)} \cdot \mathbf{i}$. A continuación, la acción de la lámina de media onda (con eje óptico en $22,5^\circ$) se sustituye por la rotación del plano de la polarización vertical de $\mathbf{F}_{a'}^{(+)}$ un ángulo de 45° alrededor de la dirección de la propagación. La correspondiente amplitud es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{a''}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{ZPF1,T}^{(+)} \\ iF_p^{(+)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) - F_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + F_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Por otro lado, el haz $\mathbf{F}_2^{(+)}$, una vez atravesado el divisor BS , da lugar a las amplitudes:

$$\mathbf{F}_{D3}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_q^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3)\mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3)\mathbf{j}' + i\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \right), \quad (7.54)$$

siendo la amplitud correspondiente al camino b' :

$$\mathbf{F}_{b'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i \left(F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}' \right) + \mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (7.55)$$

Veamos ahora las amplitudes en los detectores $D1$ y $D2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{D1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[F_q^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + [\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathbf{i}'] \right] \mathbf{i}' \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-F_p^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + iF_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \right] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\mathbf{F}_{D2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[iF_p^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) - F_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \right] \mathbf{i} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) + i[\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \mathbf{j}'] \right] \mathbf{j}'. \quad (7.57)$$

En la tabla siguiente se muestran la parte horizontal y vertical de las amplitudes en cada detector, que guardan alguna correlación con otras amplitudes. Por simplicidad no hemos incluido el punto cero en esta tabla, puesto que las diferentes entradas están descorrelacionadas con el resto, ni factores numéricos que acompañan a las amplitudes, dado que nos queremos centrar tan sólo en el origen de las correlaciones entre las componentes horizontal y vertical entre los detectores.

$j = s, r, q, p$	DT	D1	D2	D3
$F_j^{(+)}$	$F_s^{(+)}$	$F_p^{(+)}, F_q^{(+)}$	$F_p^{(+)}, F_r^{(+)}$	$F_q^{(+)}, F_r^{(+)}$
Polarización	H	V, H	H, V	H, V

Supongamos que en el detector de referencia DT hay una detección (fotón polarizado horizontalmente), H ($F_s^{(+)}$) (en el lenguaje de la teoría de la información esto corresponde al bit 1). Si observamos la tabla, vemos que la pareja (vertical) puede detectarse en $D2$ ó $D3$, dado que es en estos detectores donde se encuentra la amplitud $F_r^{(+)}$. Cada uno de estos casos da lugar a un bit 0. Ahora bien, si se detecta el 0 en $D2$, entonces la otra pareja de se detectará en $D1$ y $D3$ (vertical en $D1$ y horizontal en $D3$, o lo que es lo mismo, bits 0 en $D1$ y 1 en $D3$), es decir, se detecta 001; por el contrario, si se detecta el 0 en $D3$, entonces la otra pareja de se detectará en $D1$ y $D2$ (horizontal en $D1$ y horizontal en $D2$, o lo que es lo mismo, bits 1 en $D1$ y 1 en $D2$), es decir, se detecta 110.

Usando esta información, podría establecerse un protocolo de codificación, donde la información está en las amplitudes correlacionadas gracias al vacío cuántico, de tal manera que, antes de medir, todas las posibilidades están en el vacío, hasta que al medir, sólo las que están correlacionadas se manifiestan a través de la medida.

El estado GHZ correspondiente a (7.48) genera unas predicciones que, en el formalismo de la función de Wigner para el PDC, se tendrían en el caso ideal, de emisión de dos parejas de fotones, a partir de los haces en los detectores: DT , $D1$, $D2$ y $D3$, representados por las ecuaciones: (7.51), (7.56), (7.57) y (7.54), respectivamente, junto con la teoría de la detección triple y cuádruple desarrolladas en los Anexos. Sin embargo, la probabilidad de que se produzcan dos parejas de fotones simultáneamente en el cristal es muy baja, del orden de $g^2|V|^4$, lo que hace que estos estados no puedan generarse de forma eficiente utilizando la conversión paramétrica a la baja.

Para entender mejor lo anteriormente expuesto acudiremos a las correlaciones cuádruples presentes en el experimento. Es sencillo comprobar que, de las 16 posibles correlaciones cuádruples que se pueden calcular, atendiendo a las distintas polarizaciones en los detectores DT , $D1$,

$D2$ y $D3$, sólo son distintas de cero las siguientes⁷. Representando por x (y) a la componente horizontal (vertical) de la polarización, y aplicando la ecuación (2) del Anexo A, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,x}^{(+)} F_{D2,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,x}^{(+)} \rangle \langle F_{D2,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle + \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{D1,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle + \\ &\langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle \langle F_{D1,x}^{(+)} F_{D2,x}^{(+)} \rangle = \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (7.58)$$

pues,

$$\langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{D2,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D2,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{D1,x}^{(+)} F_{D3,y}^{(+)} \rangle = 0. \quad (7.59)$$

Y la correlación:

$$\begin{aligned} \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,y}^{(+)} F_{D2,y}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,y}^{(+)} \rangle \langle F_{D2,y}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle + \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D2,y}^{(+)} \rangle \langle F_{D1,y}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle + \\ &\langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle \langle F_{D1,y}^{(+)} F_{D2,y}^{(+)} \rangle = \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (7.60)$$

dado que:

$$\langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D1,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{D2,y}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{DT,x}^{(+)} F_{D2,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{D1,y}^{(+)} F_{D3,x}^{(+)} \rangle = 0. \quad (7.61)$$

Teniendo en cuenta que la probabilidad de detección cuádruple es proporcional al módulo del cuadrado de las correlaciones, y la expresión (5.19) para la correlación cruzada, es inmediato llegar al resultado siguiente:

$$P_{DT,x D1,x D2,x D3,y} = P_{DT,x D1,y D2,y D3,x} \propto \frac{g^4 |V|^4}{4}, \quad (7.62)$$

lo que revela una probabilidad muy baja de detección de 4 fotones en coincidencia, porque la probabilidad de emisión de dos parejas es proporcional a $g^4 |V|^4$.

Un aspecto a tener en cuenta en nuestro formalismo, es que el multientrelazamiento, representado en espacios de Hilbert de mayores dimensiones, mantiene una representación basada en haces que se comportan clásicamente en su propagación hacia los detectores, con el elemento adicional del ZPF, esencial en los canales vacíos de los elementos ópticos. Así, la generación del GHZ corresponde a la aplicación de elementos ópticos a los haces (7.49) y (7.50) correspondientes al estado⁸ $|\psi^-\rangle_{12} \otimes |\psi^-\rangle_{34}$, siguiendo las reglas de la óptica clásica. ¿De dónde surge entonces el entrelazamiento múltiple? Si echamos un vistazo a la figura 7.5 entendemos que, del mismo modo que las entradas punto cero en el cristal (4 conjuntos de modos de puntos cero

⁷Por ejemplo, las 8 correlaciones en las que la polarización detectada en DT es vertical son nulas, puesto que la amplitud de punto cero en (7.51) está descorrelacionada con cualquier otra amplitud.

⁸Si consideremos la emisión de dos parejas descorrelacionadas, el correspondiente estado factoriza.

independientes) corresponden a la generación del singlete, las entradas $ZPF1$ y $ZPF2$ en el PBS y el BS , respectivamente, son los elementos esenciales para generar el entrelazado multidimensional. La inexistencia de entradas de punto cero en el posterior proceso de medición nos indica que los 8 conjuntos de modos de punto cero independientes (2 polarizaciones por cada canal de entrada) pueden ser aprovechadas al máximo y obtener la medida de 4 bits por cada una de las 2 alternativas a la detección cuádruple que ya hemos explicado anteriormente.

7.6. Experimentos con PDC tipo I: entrelazamiento tiempo-energía en la WRHP

Hasta ahora, el PDC tipo II nos ha permitido mostrar los aspectos más destacables de la codificación cuántica, sin embargo, también es posible implementar sistemas experimentales con el PDC tipo I con aplicaciones en comunicación cuántica. Mostraremos algunos ejemplos.

7.6.1. Codificación en fase

El experimento original fue propuesto por Franson, en 1989, con objeto de contrastar las desigualdades de Bell [119], y se analizó con el formalismo WRHP en [79, 76]. En la figura 7.6 cada uno de los haces emitidos en conversión tipo I se envía a un interferómetro Mach-Zehnder [215], cada uno de ellos perteneciente a las estaciones de Alicia o Bob. Estos interferómetros son similares, es decir $a_1 \approx a_2$ y $b_1 \approx b_2$. Por otro lado, para evitar una interferencia en la probabilidad de detección simple (interferencia de un fotón consigo mismo), se impone la condición experimental $\Delta L_i = |b_i - a_i| \gg c\tau$ donde τ es el tiempo de coherencia de la luz.

En cuanto a las detecciones dobles, hay 4 posibilidades según el “camino elegido” por los fotones. En primer lugar, los dos fotones pueden propagarse a través del brazo corto de los interferómetros. En segundo lugar, uno puede ir al brazo largo en el lado de Alicia, mientras que el otro toma el corto en el de Bob, o viceversa. Por último, los dos fotones pueden propagarse a través de los brazos largos. Cuando la diferencia de camino de los interferómetros corresponde a una fracción de la longitud de coherencia de los fotones convertidos, los procesos corto-corto y largo-largo son indistinguibles, siempre que la longitud de coherencia del láser sea mayor que dicha diferencia. Ajustando las fases de los interferómetros de Alicia y Bob de manera que se pueda controlar la salida de los fotones en el último BS, y trabajando con la ventana de detección, de modo que los procesos largo-corto y corto-largo se puedan descartar, es posible el intercambio de bits asociando los valores, 1 ó 0, con cada uno de los dos puertos de salida⁹.

⁹Como veremos, los fenómenos de interferencia de segundo y cuarto orden tienen una explicación clara en términos de la influencia que la radiación de punto cero tiene en el proceso. La explicación en base a la reglas de Feynman es como sigue: en el caso de las cuentas simples, si la diferencia entre los caminos largo y corto del interferómetro es del orden del tiempo de coherencia de los fotones que salen del cristal, no se puede saber por qué camino pasó un fotón detectado. Si es mucho mayor, entonces no hay interferencia porque los caminos se vuelven distinguibles. En la medida de las coincidencias, las situaciones en las que uno de los fotones del par pasa por el camino corto de un interferómetro y el otro por el camino largo, no son registradas, pues sólo llegan simultáneamente a los detectores (dentro de la ventana de coincidencia) los fotones que siguieron,

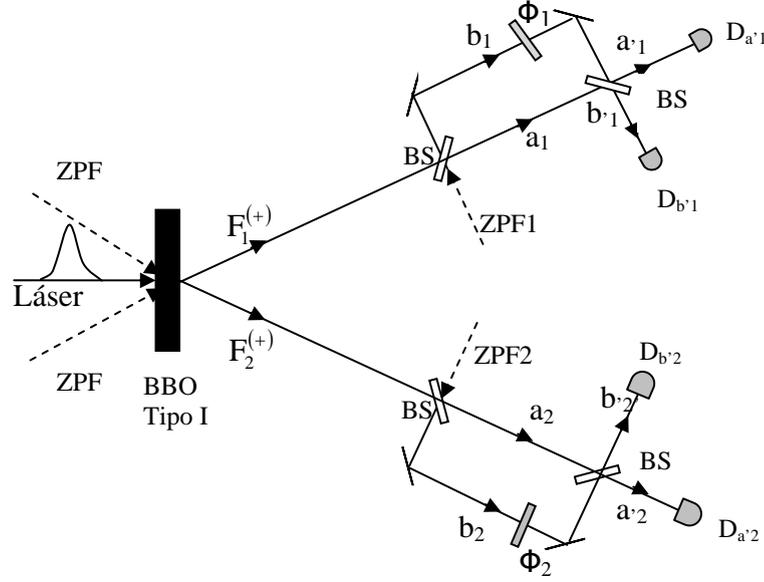


Figura 7.6: Interferómetros Mach-Zehnder para entrelazar en energía-tiempo y codificación en fase no segura. A las dos entradas de ZPF en el cristal hay que añadir las de los BS al comienzo de los interferómetros. En total son 4 entradas (en este caso no se considera la polarización), las que intervienen en la descripción del fenómeno.

Utilizando el formalismo de la función de Wigner¹⁰, a continuación veremos cómo se implementa el protocolo de comunicación. Dado que estos experimentos utilizan conversión tipo I, en la que los fotones salen con la misma polarización, la expresión de los haces a la salida del cristal es (ver ecuaciones (5.12) y (5.13)):

$$\begin{aligned} F_1^{(+)} &= F_r^{(+)}, \\ F_2^{(+)} &= F_s^{(+)}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

donde $F_r^{(+)}$ y $F_s^{(+)}$ están correlacionados. Al pasar por los BS de entrada en cada interferómetro resulta:

$$F_{b_1}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_{ZPF1}^{(+)} + iF_r^{(+)} \right] \quad ; \quad F_{a_1}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_{ZPF1}^{(+)} + F_r^{(+)} \right], \quad (7.64)$$

$$F_{b_2}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_{ZPF2}^{(+)} + iF_s^{(+)} \right] \quad ; \quad F_{a_2}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_{ZPF2}^{(+)} + F_s^{(+)} \right]. \quad (7.65)$$

ambos en sus respectivos interferómetros, el mismo camino largo o corto. Sólo son posibles dos procesos de detección conjunta corto-corto y largo-largo, que son indistinguibles debido a la incertidumbre en la emisión de los fotones correlacionados. La amplitud de probabilidad conjunta es la suma de la amplitud correspondiente a cada proceso, apareciendo así un término responsable de las franjas de interferencia cuando se varía la diferencia entre los caminos de uno de los interferómetros.

¹⁰El experimento de Franson ya se analizó en [79] el formalismo de Wigner. Reproducimos en esta tesis parte del desarrollo, que nos servirá para los cálculos que se desarrollarán en el apartado siguiente. Por otro lado, ciertos aspectos relacionados con la información cuántica, que no se vieron en [79], se van a tratar en este experimento.

Las expresiones (7.64) y (7.65) constituyen la representación, en el formalismo WRHP, del estado producto

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} [|a_1\rangle + |b_1\rangle] \otimes [|a_2\rangle + |b_2\rangle] = \frac{1}{2} [|a_1\rangle|a_2\rangle + |a_1\rangle|b_2\rangle + |b_1\rangle|a_2\rangle + |b_1\rangle|b_2\rangle]. \quad (7.66)$$

Como se puede observar, las entradas de punto cero en los BS son cruciales en la generación de este estado, pues aportan el elemento de indistinguibilidad en los caminos de los fotones en los interferómetros. Es decir, es este punto cero el responsable de que existan cuatro “amplitudes de probabilidad” que, al superponerse, den los resultados que describe el estado (7.66).

Como las distancias entre el cristal y los BS de entrada al Mach-Zehnder, y las que hay de los BS de la salida a los detectores son idénticas, no contribuyen al cálculo, por lo que, por simplicidad las ignoramos. Con objeto de establecer el protocolo de codificación en fase, se introducen unos desfases en los caminos largos de los interferómetros, que producirán los desfases Φ_1 y Φ_2 . Las amplitudes en los detectores son ¹¹ :

$$F_{a'_1}^{(+)}(\mathbf{r}_{a_1}, t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{iw_1 b_1}{c} + \Phi_1} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) + F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) \right] + ie^{\frac{iw_1 a_1}{c}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + iF_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) \right] \right\}, \quad (7.67)$$

$$F_{b'_1}^{(+)}(\mathbf{r}_{b_1}, t) = \frac{1}{2} \left\{ ie^{\frac{iw_1 b_1}{c} + \Phi_1} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) + F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) \right] + e^{\frac{iw_1 a_1}{c}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + iF_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) \right] \right\}, \quad (7.68)$$

$$F_{a'_2}^{(+)}(\mathbf{r}_{a_2}, t') = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{iw_2 b_2}{c} + \Phi_2} \left[iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_2}{c}) + F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_2}{c}) \right] + ie^{\frac{iw_2 a_2}{c}} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_2}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_2}{c}) \right] \right\}, \quad (7.69)$$

$$F_{b'_2}^{(+)}(\mathbf{r}_{b_2}, t') = \frac{1}{2} \left\{ ie^{\frac{iw_2 b_2}{c} + \Phi_2} \left[iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_2}{c}) + F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_2}{c}) \right] + e^{\frac{iw_2 a_2}{c}} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_2}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_2}{c}) \right] \right\}, \quad (7.70)$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ se ha tomado como el centro del cristal, al despreciar la propagación hacia los interferómetros por el idéntico cambio de fase. Las expresiones anteriores muestran el valor de las amplitudes del campo eléctrico en los detectores. Nótese que intervienen las entradas de punto cero en el cristal en cuatro instantes distintos, $t - b_1/c$, $t - a_1/c$, $t' - a_2/c$ y $t' - b_2/c$, las cuales están contenidas en las amplitudes $F_r^{(+)}$ y $F_s^{(+)}$, pero también hay que tener en cuenta las entradas de punto cero en los BS de los interferómetros, cada una en dos instantes distintos.

La predicción para la probabilidad de detección conjunta en los detectores $D_{a'1}$ y $D_{a'2}$;

¹¹Las ecuaciones (7.67) y (7.68) (o las correspondientes al haz 2, (7.69) y (7.70)), constituyen la descripción en el formalismo WRHP del *qubit bin* definido en la ecuación (2.4). Nótese que en este caso el ZPF interviene a través de la entrada del primer BS, pero en la expresión del campo eléctrico aparece la correspondiente amplitud del ZPF en dos instantes distintos. Esto guarda relación con la superposición representada en la ecuación (2.4).

$D_{b'1}$ y $D_{b'2}$; $D_{b'1}$ y $D_{a'2}$; y $D_{a'1}$ y $D_{b'2}$, se basa en la expresión (4.68). Tenemos:

$$P_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\eta_1 \eta_2}{\hbar \omega_1 \omega_2} \int_t^{t+T_1} dt \int_{t'}^{t'+T_2} dt' |\langle F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t') \rangle|^2. \quad (7.71)$$

Teniendo en cuenta que el punto cero que entra en los BS está descorrelacionado con cualquier otra señal, e imponiendo la condición de que $\Delta L_i = |b_i - a_i| \gg c\tau$, donde τ es el tiempo de coherencia del láser, las contribuciones de los procesos corto-largo y largo-corto son nulas tras realizar la integración en la ventana, tal y como se explica en la referencia [76]. Tras unos cálculos sencillos, el resultado final es¹²:

$$\frac{P_{Da'_1, Da'_2}}{K_{Da'_1} K_{Da'_2}} = \frac{P_{Db'_1, Db'_2}}{K_{Db'_1} K_{Db'_2}} = \frac{g^2 |V|^2}{8} [1 + \cos(\Phi_1 + \Phi_2 + \theta)], \quad (7.72)$$

$$\frac{P_{Da'_1, Db'_2}}{K_{Da'_1} K_{Db'_2}} = \frac{P_{Db'_1, Da'_2}}{K_{Db'_1} K_{Da'_2}} = \frac{g^2 |V|^2}{8} [1 - \cos(\Phi_1 + \Phi_2 + \theta)], \quad (7.73)$$

siendo

$$\theta = \frac{\omega (b_1 - a_1)}{c} + \frac{\omega (b_2 - a_2)}{c}. \quad (7.74)$$

Nótese que la suma de las probabilidades es igual a 1/2, dado que los casos largo-corto y corto-largo corresponden a la mitad de todas las detecciones dobles. Si se hace un ajuste en los interferómetros tal que, $\theta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), se puede implementar un protocolo de distribución de clave. Asociando el bit 0 (1) a los puertos de salida del segundo divisor de cada interferómetro, donde se ha producido una transmisión (reflexión), las probabilidades de que Alicia y Bob obtengan cuentas correlacionadas, es decir que, Alicia y Bob obtengan el mismo bit 0 ó 1, son:

$$P_{corr} = \frac{P_{Da'_1, Da'_2}}{K_{Da'_1} K_{Da'_2}} + \frac{P_{Db'_1, Db'_2}}{K_{Db'_1} K_{Db'_2}} = \frac{1}{4} [1 + \cos(\Phi_1 + \Phi_2)], \quad (7.75)$$

y la probabilidad de que Alicia y Bob obtengan distintos bits:

$$P_{anti} = \frac{P_{Da'_1, Db'_2}}{K_{Da'_1} K_{Db'_2}} + \frac{P_{Db'_1, Da'_2}}{K_{Db'_1} K_{Da'_2}} = \frac{1}{4} [1 - \cos(\Phi_1 + \Phi_2)], \quad (7.76)$$

donde las fases de Alicia y de Bob pueden establecerse independientemente, en cada uno de los interferómetros. Se ve que, si la suma de las fases es igual es 0, $P_{corr} = 1/2$ y $P_{anti} = 0$. De este modo, se pueden elegir las fases de forma que se dé una de las dos situaciones anteriores,

¹²La post-selección realizada en el proceso de detección, con objeto de descartar los procesos largo-corto y corto-largo, no implica que pueda afirmarse que el estado del campo electromagnético tras los BS de entrada de los interferómetros, represente un estado entrelazado. De hecho la ecuación (7.66) representa un estado factorizable. Este aspecto del experimento de Franson, es decir, la controversia entre entrelazamiento y post-selección, ha sido criticado desde hace bastantes años [216]. En las conclusiones del capítulo (sección 7.7), mostramos un argumento en contra de la post-selección basado en el efecto del ZPF de los BS a la entrada de los interferómetros.

de manera que Alicia y Bob pueden generar una clave.

Si se quiere que el sistema de distribución de clave sea seguro contra ataques, se debe de aplicar una segunda base de medición. Esto se puede conseguir, por ejemplo, al añadir un segundo interferómetro, mediante un dispositivo como el que vemos en la figura 7.7 [215].

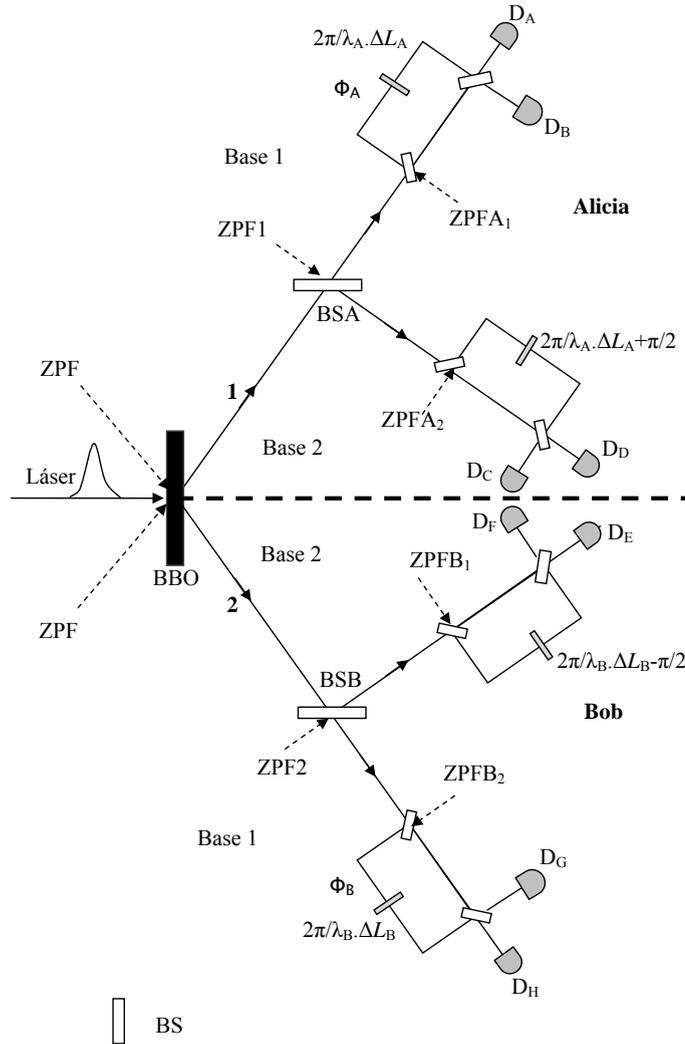


Figura 7.7: Codificación en fase segura, con las nuevas bases y los desfases correspondientes en cada interferómetro. La radiación de punto cero que entra en los divisores BSA y BSB tiene el papel de generador aleatorio natural, básico en la seguridad del sistema de distribución cuántica de clave.

Los dos BS permiten dividir cada haz correlacionado, producido en el convertidor, para ser enviados a su correspondiente pareja de interferómetros. Ello posibilita el uso de una nueva base de medida en la descripción realizada en el espacio de Hilbert, y cumplen la función de generador aleatorio. Desde el punto de vista de nuestro formalismo, el canal libre que figura en estos elementos, permite que el punto cero actúe como un campo estocástico, interfiriendo con las señales de entrada para constituir un generador aleatorio natural que permite dar seguridad al sistema mencionado. Esta es la interpretación con la WRHP en un lenguaje puramente

ondulatorio, de la afirmación: “cada fotón elige aleatoriamente a qué interferómetro va”.

Como puede verse en la figura 7.7, las fases correspondientes al segundo conjunto de interferómetros deben ajustarse de manera que en el caso de que los fotones vayan a interferómetros que no estén asociados es decir, que se produzca reflexión (transmisión) en BSA y transmisión (reflexión) en BSB, los resultados estén completamente descorrelacionados [129]. Así, la fase en el interferómetro correspondiente a la base 2 en la zona de Alicia (Bob) se toma igual a $\pi/2$ ($-\pi/2$), mientras que en los interferómetros correspondientes a la base 1 se toman fases ϕ_A (Alicia) y ϕ_B (Bob).

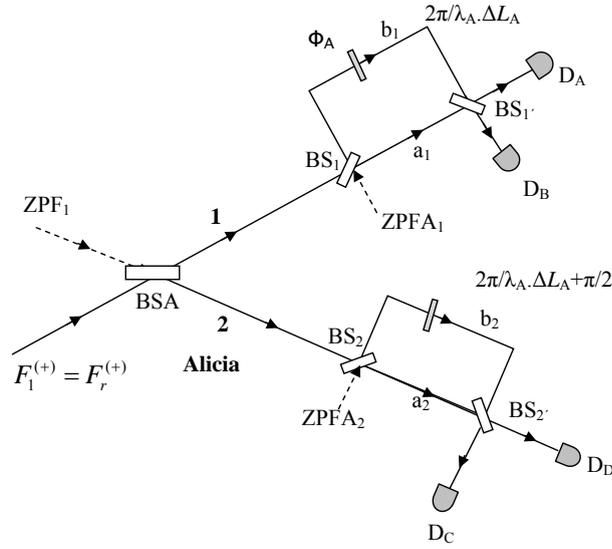


Figura 7.8: Entradas punto cero en los BS de la estación de Alicia.

Las amplitudes en los detectores se obtienen de forma similar a las ecuaciones (7.67) a (7.70). Tenemos:

$$F_A^{(+)}(\mathbf{r}_A, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ i e^{\frac{i\omega_1 b_1}{c} + \Phi_A} \left[i F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) - F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) + F_{ZPFA1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) \right] + e^{\frac{i\omega_1 a_1}{c}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + i F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + i F_{ZPFA1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) \right] \right\}, \quad (7.77)$$

$$F_B^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{i\omega_1 b_1}{c} + \Phi_A} \left[i F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) - F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) + F_{ZPFA1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_1}{c}) \right] + i e^{\frac{i\omega_1 a_1}{c}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + i F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) + i F_{ZPFA1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_1}{c}) \right] \right\}, \quad (7.78)$$

$$F_C^{(+)}(\mathbf{r}_C, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ i e^{\frac{i\omega_2 b_2}{c} + \frac{\pi}{2}} \left[-F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) + i F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) + F_{ZPFA2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) \right] + e^{\frac{i\omega_2 a_2}{c}} \left[i F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) + F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) + i F_{ZPFA2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) \right] \right\}, \quad (7.79)$$

$$F_D^{(+)}(\mathbf{r}_D, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{iw_2b_2}{c} + \frac{\pi}{2}} \left[-F_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) + iF_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) + F_{ZPFA2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{b_2}{c}) \right] \right. \\ \left. + ie^{\frac{iw_2a_2}{c}} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) + F_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) + iF_{ZPFA2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{a_2}{c}) \right] \right\}, \quad (7.80)$$

$$F_E^{(+)}(\mathbf{r}_E, t') = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{iw_3b_3}{c} - \frac{\pi}{2}} \left[-F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) + F_{ZPFB1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) \right] \right. \\ \left. + e^{\frac{iw_3a_3}{c}} \left[iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) + F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) + iF_{ZPFB1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) \right] \right\}, \quad (7.81)$$

$$F_F^{(+)}(\mathbf{r}_F, t') = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{iw_3b_3}{c} - \frac{\pi}{2}} \left[-F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) + F_{ZPFB1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_3}{c}) \right] \right. \\ \left. + ie^{\frac{iw_3a_3}{c}} \left[iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) + F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) + iF_{ZPFB1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_3}{c}) \right] \right\}, \quad (7.82)$$

$$F_G^{(+)}(\mathbf{r}_G, t') = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{iw_4b_4}{c} + \Phi_B} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) - F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) + iF_{ZPFB2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) \right] \right. \\ \left. + ie^{\frac{iw_4a_4}{c}} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) + iF_{ZPFB2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) \right] \right\}, \quad (7.83)$$

$$F_H^{(+)}(\mathbf{r}_H, t') = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{iw_4b_4}{c} + \Phi_B} \left[iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) - F_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) + F_{ZPFB2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{b_4}{c}) \right] \right. \\ \left. + e^{\frac{iw_4a_4}{c}} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) + iF_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) + iF_{ZPFB2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - \frac{a_4}{c}) \right] \right\}. \quad (7.84)$$

Aplicando la expresión (7.71), y realizando las mismas consideraciones que en el apartado anterior para descartar los procesos largo-corto y corto-largo, se obtiene $P_{corr} = P_{anti} = 1/32$ en los 8 casos en que las detecciones se produzcan en interferómetros no asociados (distinta base), lo que da lugar a una probabilidad total igual a $1/4$.

En el resto de los casos, en los que las detecciones se producen en interferómetros asociados, tenemos:

$$P_{corr} = \frac{P_{D_A, D_H}}{K_{D_A} K_{D_H}} + \frac{P_{D_B, D_G}}{K_{D_B} K_{D_G}} + \frac{P_{D_D, D_E}}{K_{D_D} K_{D_E}} + \frac{P_{D_C, D_F}}{K_{D_C} K_{D_F}} = \frac{1}{8} [1 + \cos(\Phi_A + \Phi_B)], \quad (7.85)$$

$$P_{anti} = \frac{P_{D_A, D_G}}{K_{D_A} K_{D_G}} + \frac{P_{D_B, D_H}}{K_{D_B} K_{D_H}} + \frac{P_{D_D, D_F}}{K_{D_D} K_{D_F}} + \frac{P_{D_C, D_E}}{K_{D_C} K_{D_E}} = \frac{1}{8} [1 - \cos(\Phi_A + \Phi_B)]. \quad (7.86)$$

Como hemos podido ver la criptografía segura con tipo I, mediante codificación en fase, es posible gracias a:

1. Las entradas de ZPF en BSA y BSB , que justifican la generación de un sistema de “elección” de bases, necesario en el protocolo BB84, intrínsecamente aleatorio gracias a la radiación de punto cero.
2. Los desfases colocados en los interferómetros actúan directamente sobre las fases de las amplitudes del ZPF que intervienen en el campo eléctrico. Mediante una elección adecuada del cambio de fase en los interferómetros correspondientes a la base 2 de Alicia y Bob, los resultados concernientes a detecciones dobles (en el caso en que los interferómetros no están asociados) están completamente descorrelacionados, lo que garantiza la seguridad del protocolo.

7.7. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado varios experimentos de criptografía cuántica con fotones generados en el proceso PDC bajo el ángulo de la función de Wigner y la radiación de punto cero, la cual surge de forma natural en este formalismo. Es bien sabido que las claves de las aplicaciones de la mecánica cuántica a la teoría y experimentación en información cuántica están en las superposiciones cuánticas, la medida (postulado del colapso), y el entrelazamiento. Todos estos aspectos tienen su contrapartida en este formalismo, de tal modo que cualquier aspecto relevante del comportamiento cuántico de la luz debe reflejarse en las amplitudes de la radiación de punto cero que entran en el cristal y en los diferentes elementos ópticos, así como en su posterior sustracción en el proceso de detección.

El análisis del experimento no seguro de generación cuántica de clave realizado en la sección 7.2 nos muestra la relación entre entrelazamiento y criptografía. La información, que posteriormente será generada en el proceso de medición conjunta en las estaciones de Alicia y Bob, es transportada por las amplitudes de punto cero que intervienen en cada una de las componentes del campo eléctrico correspondiente a cada haz. Nótese que cada uno de los separadores de polarización que vemos en la figura 7.1 introduce un ruido a través de los canales vacíos, el cual es el responsable de que, en cada uno de los medidores, exista una probabilidad idéntica de detección en el correspondiente DT o DR . Además, teniendo en cuenta que el entrelazamiento se genera a partir de cuatro conjuntos de modos de punto cero independientes que entran en el cristal, las dos entradas vacías de los divisores de polarización nos indican cómo Alicia y Bob pueden generar, en sus respectivas estaciones, sendas listas de bits clásicos una vez realizada la medida ($4 - 2 = 2$ bits por cada pareja de fotones detectada). El uso del estado $|\phi^+\rangle$, descrito por los haces correlacionados descritos en la ecuación (7.1), nos indica que las correlaciones entre los modos del punto cero que intervienen en estos haces son las responsables de que los resultados estén perfectamente correlacionados.

La criptografía segura está ligada al teorema de compatibilidad de la mecánica cuántica, que a su vez guarda una estrecha relación con la relación de incertidumbre de Heisenberg. Todo ello, a su vez, forma parte de aspectos fundamentales de la teoría de la información

cuántica, como el teorema de no clonación o la seguridad basada en estados no ortogonales. El uso aleatorio de bases compatibles e incompatibles para medir los qubits es básico en los protocolos de generación cuántica de clave. En el lenguaje de la función de Wigner, el uso de bases de medida (que operan en el espacio de Hilbert) se corresponde con el uso de elementos ópticos cuyo funcionamiento sobre los haces se trata de forma idéntica a la óptica clásica. Las diferentes orientaciones de los rotadores de polarización en el dispositivo de la figura 7.2 para la distribución cuántica de clave usando codificación en polarización, tiene como efecto el cambio en las propiedades de correlación entre las componentes de los haces que finalmente alcanzan los detectores, como puede verse en las ecuaciones (7.16) a (7.19). Los rotadores $PR1(\alpha)$ y $PR2(\beta)$ no introducen ningún ruido de punto cero, de modo que es posible la codificación de la información (segura) en las amplitudes de punto cero que definen cada una de las amplitudes de los haces que caracterizan el paso por los rotadores, como puede verse en las ecuaciones (7.14) y (7.15). Finalmente, los divisores de polarización introducen dos entradas de punto cero que reducen a dos bits clásicos el resultado de cada medida en coincidencia en las estaciones de Alicia y Bob.

El análisis de la codificación en fase descrito en el apartado 7.3.2 da lugar al mismo tipo de conclusiones, con la diferencia de que en esta ocasión, los parámetros α y β corresponden a cambios de fase que afectan directamente a las amplitudes de punto cero que intervienen en los haces. En este caso, la información se codifica modificando las fases asociadas a las amplitudes del punto cero.

La intervención de un espía en el sistema de distribución cuántica de clave se ha hecho considerando el efecto de medidas proyectivas, a través del uso de un polarizador en el experimento de codificación en fase, tal y como aparece en la figura 7.3. La acción del espía da lugar a una pérdida de correlación cruzada entre las componentes del campo eléctrico que caracteriza los haces que van hacia Bob (atacado), y Alicia. Esta pérdida de correlación, que se muestra en las ecuaciones (7.36), (7.37) y (7.38), se produce por la proyección del campo eléctrico sobre la dirección característica del polarizador, en la zona en que se encuentra Bob, y contrasta con el efecto de una medida proyectiva en el formalismo del espacio de Hilbert, que da lugar a una pérdida de entrelazamiento.

Nótese que la acción del polarizador introduce un ruido de punto cero a través del canal vacío, que sumado a las dos entradas de punto cero en los canales vacíos de los divisores de polarización, constituye un conjunto de tres entradas de ruido que genera una pérdida de información adicional respecto al caso en que Eva no actúa. Este efecto puede ser detectado por Alicia y Bob cuando, como parte del protocolo de Ekert, miden las correlaciones correspondientes a medidas no compatibles y cuantifican el valor del parámetro de Bell, que cae por debajo de $\sqrt{2}$. Las variables ocultas que introduce Eva en su acción de espionaje, y que dan lugar a la violación de una desigualdad de Bell, están relacionadas, dentro de nuestro análisis, con las amplitudes del punto cero que introduce Eva en su medida proyectiva.

El ruido introducido por Eva es importante en experimentos donde las intensidades de

la luz son tan bajas, que sólo se detecta un fotón. la razón de ello es que en estos casos las fluctuaciones de punto cero presentes en el canal vacío del polarizador son cruciales para detectar la presencia del espía. Pero estas fluctuaciones dejan de ser relevantes en el terreno de la criptografía clásica, donde las señales son tan intensas que el ruido introducido por Eva no tendría un efecto relevante (luz clásica). En este caso, el espionaje podría realizarse con éxito.

En la sección 7.5 hemos abordado los estados GHZ en este formalismo, los cuales se encuentran en la base conceptual del secreto cuántico compartido (QSS). Hay dos aspectos que se revelan fundamentales en nuestro análisis: por un lado, los estados GHZ, que caracterizan entrelazamiento entre más de dos partículas, y que requieren de espacios de Hilbert multi-dimensionales para su descripción, se ajustan en el formalismo de Wigner a la descripción básica de entrelazamiento realizada en el capítulo 5, a través de dos haces correlacionados, a lo que debe sumarse la acción de elementos ópticos cuyo efecto es generar multientrelazamiento, como el *PBS* y el *BS* que se encuentran en los haces *a* y *b* de la figura 7.5, y que introducen punto cero a través de los canales vacíos. Estas entradas de punto cero contienen un total de cuatro conjuntos de modos del vacío, ya que para cada modo hay que tener en cuenta las dos componentes de la polarización, y actúan como elemento de información adicional a las cuatro entradas de punto cero en el cristal, y son básicas en la generación del entrelazamiento múltiple. En segundo lugar, nótese que, al no existir entradas de punto cero adicionales en el resto de dispositivos de la figura 7.4, los dos procesos de posible detección cuádruple en *D1*, *D2*, *D3* y *DT*, generan cuatro bits por cada una de las dos probabilidades cuádruples no nulas, en base a las propiedades de correlación (7.58) a (7.61).

En lo que se refiere a los experimentos de criptografía que usan conversión a la baja tipo I, hemos analizado dos experimentos basados en el experimento de Franson, donde cada uno de los haces de (7.63) incide sobre un interferómetro Mach-Zehnder. En el caso no seguro (figura 7.6), la existencia de sendos caminos largo y corto en cada interferómetro implica que la amplitud que caracteriza un haz en cualquiera de los detectores contiene información del punto cero que entra en el cristal en dos instantes distintos, para interferómetros de características similares en lo que se refiere a la longitud de sus caminos. De este modo, los dos haces de punto cero que vemos en la figura 7.6, si se consideran en dos instantes diferentes, dan lugar a las cuatro entradas necesarias para generar entrelazamiento. Nótese sin embargo que cada interferómetro introduce un ruido a través de los canales vacíos de los separadores (*BS*) que hay al principio. Este ruido trae como consecuencia que el estado en este caso no es realmente entrelazado, dado que la diferencia entre las entradas de punto cero en el cristal a tiempos distintos, y las correspondientes a los interferómetros, es igual a dos, el mismo número que se ve involucrado en la conversión tipo I, donde no se genera entrelazamiento de forma directa. Esto es así, independientemente de que se realice un proceso de post-selección que se quede sólo con las correlaciones cruzadas correspondientes a los procesos largo-largo y corto-corto.

CODIFICACIÓN DENSA Y BSM EN LA WRHP

8.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de los efectos de la radiación de punto cero en la medida de los estados de Bell, parcial o total (estados hiperentrelazados). Todo ello es fundamental en la consecución de la codificación densa, aspecto clave en comunicación cuántica. Los puntos cardinales de la codificación densa son, por un lado, la capacidad para generar los estados de Bell mediante la manipulación de uno de los qubits de una pareja entrelazada, y por otro lado, la necesidad de distinguir los estados de Bell en la medida.

En la sección 8.2 analizaremos la estadística de dos fotones en un divisor de haz en el formalismo de Wigner y la importancia de la simetría y antisimetría de la parte espacial de la función de onda de los estados de Bell, junto con las entradas punto cero y la manipulación de estos modos de vacío, mediante diferentes elementos ópticos, para generar todos los estados de Bell y su detección posterior. Usaremos todo lo que ya sabemos sobre la teoría de la detección con el fin de describir todo este proceso en la siguiente sección, 8.3, donde comprobaremos cómo la implementación original de la codificación densa, por sí sola, no es suficiente para distinguir todos los estados de Bell, algo esencial para obtener la máxima eficiencia en los diferentes protocolos cuánticos que usan la codificación densa. Continuaremos en la sección 8.4 con la descripción formal, mediante la función de Wigner y el punto cero, del entrelazamiento en más de un grado de libertad, denominado hiperentrelazamiento, centrándonos en esta sección en el hiperentrelazamiento polarización-momento. Así, la sección 8.5 está dedicada al análisis de un experimento de análisis de estados de Bell, utilizando hiperentrelazamiento polarización-momento.

Las secciones 8.2 y 8.3, correspondientes a la estadística de dos fotones en un BS y la medida parcial de los estados de Bell en la representación de Wigner, se hallan desarrolladas en la referencia [84]. Por otro lado, parte de la sección 8.4, donde se explica cómo se generan los estados hiperentrelazados en la WRHP, se halla en la referencia [81].

8.2. Estadística de dos fotones en un BS en la WRHP

Vamos a comenzar esta sección mediante la revisión de las ideas básicas de este tema en el espacio de Hilbert [61], para una mejor comparación con nuestros resultados. Los cuatro estados de Bell (entrelazados en polarización) producidos en el proceso de PDC son:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1|V\rangle_2 \pm |V\rangle_1|H\rangle_2], \quad (8.1)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1|H\rangle_2 \pm |V\rangle_1|V\rangle_2], \quad (8.2)$$

donde H (V) representa la polarización lineal horizontal (vertical). Vamos a considerar que los dos haces se recombinan en un divisor de haz que refleja y transmite al 50% (BS). Si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ representan los modos espaciales de entrada en el BS, los estados posibles son:

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1|b\rangle_2 - |b\rangle_1|a\rangle_2] \quad (8.3)$$

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1|b\rangle_2 + |b\rangle_1|a\rangle_2], \quad (8.4)$$

donde A (S) denotan antisimétrico (simétrico). Teniendo en cuenta el hecho de que las partículas que llevan la información son los fotones, el estado total debe obedecer a la simetría bosónica, de modo que los posibles estados de los dos fotones son $|\Psi^+\rangle|\psi_S\rangle$, $|\Psi^-\rangle|\psi_A\rangle$, $|\Phi^+\rangle|\psi_S\rangle$, $|\Phi^-\rangle|\psi_S\rangle$. Suponiendo que el divisor no afecta a la polarización, sólo afecta a la parte espacial mediante la transformación de Hadamard

$$U_H|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle + |b\rangle], \quad (8.5)$$

$$U_H|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle - |b\rangle]. \quad (8.6)$$

Dado que $U_H|\psi_A\rangle = |\psi_A\rangle$, es decir, el estado antisimétrico de momento es autoestado del operador de Hadamard, sólo en este caso los dos fotones emergen en diferentes salidas del BS. En los otros tres casos, los dos fotones emergen juntos en uno de los dos puertos de salida [169].

Pasaremos a continuación al formalismo de Wigner. Los cuatro estados de Bell pueden generarse a través de la manipulación de uno de los haces, lo que está relacionado con la posibilidad de enviar dos bits clásicos de información a través de la manipulación de un sólo qubit [39]. En la representación de Wigner, la acción de un dispositivo óptico lineal modifica la distribución de las amplitudes de las componentes del campo eléctrico, de modo que, las propiedades de correlación se modifican. En [85] se analizaron los cuatro estados de Bell en el formalismo de Wigner, considerando la modificación de los dos haces a partir de la descripción

inicial de $|\Psi^+\rangle$. En este trabajo, con el fin de ser coherente con la esencia de la codificación densa, vamos a considerar que los dispositivos ópticos modifican sólo uno de los haces, mientras que el otro haz se mantiene sin cambios en la generación de los cuatro estados de Bell en la estación de Bob [84]¹.

Vamos a considerar la situación experimental correspondiente a la figura 8.1. Las transformaciones en la estación de Bob se realizan mediante una rotación de la polarización y un desfasador de onda. Si los haces que salen del cristal corresponden al estado $|\Psi^+\rangle$, la expresión de los haces si consideramos un rotador de polarización de ángulo β en el haz 1, y posteriormente un desfasador que introduce un cambio de fase κ , tenemos (ver ecuación (5.27)):

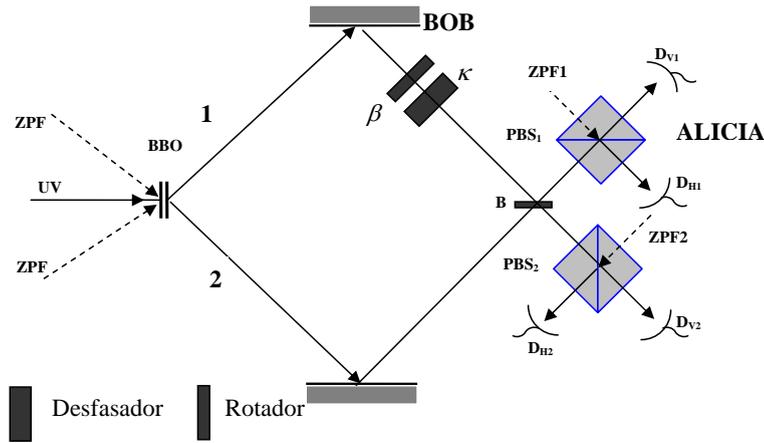


Figura 8.1: Dispositivo experimental para la codificación densa. Se muestran las entradas del ZPF en el cristal, y las correspondientes al medidor de Alice a través de los canales vacíos de los separadores de polarización.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \sin \beta \right] \mathbf{i} + e^{i\kappa} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \sin \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta \right] \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}', \end{aligned} \quad (8.7)$$

Recordemos que la combinación $\beta = 0$ y $\kappa = 0$ corresponde a $|\Psi^+\rangle$, mientras que, con $\beta = 0$ y $\kappa = \pi$ resulta $|\Psi^-\rangle$. Por otro lado $\beta = -\pi/2$ y $\kappa = \pi$ se corresponde con el estado $|\Phi^+\rangle$ y, para $\beta = -\pi/2$ y $\kappa = 0$ obtenemos $|\Phi^-\rangle$. Por otra parte, el efecto neto de los rotadores de polarización y el retardador de onda es similar a la consideración de una lámina de media onda y de una lámina cuarto de onda [195].

La expresión general dada en las ecuaciones (5.27), en la que los valores de β y κ no están determinados, corresponden en el espacio de Hilbert, a una superposición de los estados base $|\Psi^+\rangle$, $|\Psi^-\rangle$, $|\Phi^+\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$.

Ahora vamos a estudiar el efecto de un espejo semitransparente en las propiedades de

¹El análisis de los estados de Bell generados de uno u otro modo, es decir, mediante la manipulación de uno, o de los dos haces, se he hecho en la sección 5.3.

correlación. Vamos a considerar, por simplicidad, que hay una distancia idéntica desde el cristal y el BS a través de los haces, lo que contrasta con el experimento original [195] en el que se introduce una diferencia de camino Δ en el haz 2. Por tanto, la diferencia de fase que aparece en la ecuación (5.15) puede descartarse. Debido a que todos los canales de entrada están ocupados, no se hace necesario introducir el campo del vacío, en el divisor de haz [169]. De esta manera, el BS no introduce ningún ruido adicional al proporcionado por el punto cero al entrar en el cristal. Los haces están representados por las ecuaciones (5.27), poniendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{BS}$, siendo \mathbf{r}_{BS} la posición del divisor de haz donde los dos haces se recombinan. La expresión de los haces de luz en los canales de salida son:

$$\mathbf{F}_{1,salida}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)\mathbf{i} + F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)\mathbf{j}, \quad (8.8)$$

$$\mathbf{F}_{2,salida}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)\mathbf{i}' + F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)\mathbf{j}',$$

donde

$$F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_q^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) + F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \text{sen} \beta \right], \quad (8.9)$$

$$F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) + e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \cos \beta] \right], \quad (8.10)$$

$$F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) + iF_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \cos \beta - iF_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \text{sen} \beta \right], \quad (8.11)$$

$$F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) + ie^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \cos \beta] \right]. \quad (8.12)$$

Ahora veamos los resultados de los cálculos de las correlaciones cruzadas entre las componentes de $\mathbf{F}_{1,salida}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)$ y los de $\mathbf{F}_{2,salida}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t)$.

1. La correlación entre las componentes correspondientes a la misma polarización en los canales de salida es nula, independientemente de los valores de κ y β . Esto se debe al hecho de que la contribución a la correlación de las componentes del campo transmitido se cancela por la contribución de las componentes reflejadas:

$$\left\langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \right\rangle = -\frac{1}{2} \text{sen} \beta \left\langle F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \right\rangle [1 + i^2] = 0, \quad (8.13)$$

$$\left\langle F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \right\rangle = \frac{1}{2} e^{i\kappa} \text{sen} \beta \left\langle F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \right\rangle [1 + i^2] = 0. \quad (8.14)$$

2. Veamos ahora las correlaciones entre las componentes de los campos correspondientes a polarizaciones diferentes y canales de salida también diferentes $\langle F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle$ y $\langle F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle$:

$$\begin{aligned} & \langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle = - \langle F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \cos \beta \left(\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle + i^2 e^{i\kappa} \langle F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Debido a que no hay diferencia de camino antes del divisor de haz para $\mathbf{F}_{1,salida}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{2,salida}^{(+)}$ las correlaciones cruzadas $\langle F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle$ y $\langle F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_q^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle$, calculadas en $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{r}_{BS}$ y en el mismo instante, de modo que:

$$\begin{aligned} & \langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle = - \langle F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \cos \beta \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle (1 + i^2 e^{i\kappa}). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Podemos ver que si $\beta = -\pi/2$ es decir, los estados $|\Phi^\pm\rangle$, las correlaciones anteriores son nulas. Por otra parte, en el caso de $|\Psi^+\rangle$ ($\beta = 0$ y $\kappa = 0$) estas correlaciones son también nulas. Por último, sólo en el caso $\beta = 0$ y $\kappa = \pi$, es decir, el estado $|\Psi^-\rangle$ las correlaciones son diferentes de cero:

$$\begin{aligned} & \langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle = - \langle F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \\ & = \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.17)$$

3. Por último, vamos a calcular la correlación entre las dos amplitudes del campo con diferente polarización, correspondientes al mismo haz de salida:

$$\begin{aligned} & \langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle = \langle F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \\ & = \frac{i}{2} \cos \beta \left(\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle + e^{i\kappa} \langle F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \right) \\ & = \frac{i}{2} \cos \beta \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle (1 + e^{i\kappa}). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Se puede ver, fácilmente, que las correlaciones anteriores son diferentes de cero sólo en el caso del estado $|\Psi^+\rangle$ ($\beta = 0$ y $\kappa = 0$). En esta situación:

$$\begin{aligned} & \langle F_{1H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle = \langle F_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle \\ & = i \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{BS}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.19)$$

8.3. Análisis parcial de los estados de Bell en la WRHP

Vamos a considerar la situación correspondiente a la figura 8.1. El medio no lineal forma parte de un experimento de óptica para codificación densa [195]. Los dos haces (5.21) están

correlacionados a través de la radiación de punto cero que entra en el cristal, la cual es ampliada produciéndose la activación de cuatro conjunto de los modos de vacío que entran en el cristal $\{\mathbf{k}_{i,\lambda}\}$ ($i = 1, 2$ y $\lambda = H, V$). El rayo 1 se puede modificar en la estación de Bob, que puede activar el rotador de polarización y/o el desfaseador de onda. Manipulando el haz 1 se permite la posibilidad de distribuir las amplitudes del vacío de cuatro maneras diferentes, por lo que las propiedades de correlación de los haces 1 y 2 pueden modificarse de cara a su uso en la codificación de la información.

En este marco, la posibilidad de enviar dos bits de información clásica a través de la manipulación de una partícula se explica a través del cambio en las propiedades de correlación de dos haces cuando uno de ellos es modificado en la estación de Bob. Estas correlaciones tienen su origen en el cristal, donde los modos de punto cero se acoplan con el láser, de tal manera que, la información está contenida en las fluctuaciones del vacío amplificadas [171, 137].

Los dos haces se recombinan en el analizador de estados de Bell de Alicia por medio de un divisor de haz (BS), y la polarización horizontal y vertical de las componentes de cada uno de los haces de salida se separan en los divisores de polarización PBS1 y PBS2. Por último, las distintas detecciones en coincidencia se pueden medir con los detectores DH1, DH2, DV1, DV2. Por último vamos a calcular las amplitudes en los detectores. Para ello consideraremos que hay la misma distancia entre el BS y cualquiera de los detectores, de tal manera que, el factor de fase correspondiente es irrelevante. Debido a que cada PBS refleja (transmite) la componente horizontal (vertical) de la polarización, el campo eléctrico en el detector (DH1, DV1, DH2, DV2) es la superposición de $(iF_{1H}^{(+)}, F_{1V}^{(+)}, iF_{2H}^{(+)}, F_{2V}^{(+)})$ y la amplitud del campo del vacío que ha sido (reflejada, transmitido, reflejado, transmitido) en el otro canal del PBS correspondiente. Estas amplitudes de vacío no están correlacionadas con las señales y con las demás amplitudes de punto cero. Sea $\mathbf{F}_{ZPF,Alicia1}^{(+)}$, $(\mathbf{F}_{ZPF,Alicia2}^{(+)})$ la amplitud de punto cero que entra en el PBS1 (PBS2). La amplitud correspondiente a cada uno de los detectores es:

$$\mathbf{F}_{DH1}^{(+)}(\mathbf{r}_{DH1}, t_1) = iF_{DH1}^{(+)}(\mathbf{r}_{H1}, t_1)\mathbf{i} + \left[\mathbf{F}_{ZPF,Alicia1}^{(+)}(\mathbf{r}_{DH1}, t_1) \cdot \mathbf{j} \right] \mathbf{j}, \quad (8.20)$$

$$\mathbf{F}_{DV1}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV1}, t'_1) = F_{1V}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV1}, t'_1)\mathbf{j} + i \left[\mathbf{F}_{ZPF,Alicia1}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV1}, t'_1) \cdot \mathbf{i} \right] \mathbf{i}, \quad (8.21)$$

$$\mathbf{F}_{DH2}^{(+)}(\mathbf{r}_{DH2}, t_2) = iF_{2H}^{(+)}(\mathbf{r}_{DH2}, t_2)\mathbf{i}' + \left[\mathbf{F}_{ZPF,Alicia2}^{(+)}(\mathbf{r}_{DH2}, t_2) \cdot \mathbf{j}' \right] \mathbf{j}', \quad (8.22)$$

$$\mathbf{F}_{DV2}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV2}, t'_2) = F_{2V}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV2}, t'_2)\mathbf{j}' + i \left[\mathbf{F}_{ZPF,Alicia2}^{(+)}(\mathbf{r}_{DV2}, t'_2) \cdot \mathbf{i}' \right] \mathbf{i}', \quad (8.23)$$

donde $F_{1H}^{(+)}, F_{1V}^{(+)}, F_{2H}^{(+)}, F_{2V}^{(+)}$ vienen dadas por las expresiones (8.9) (8.10) (8.11) y (8.12) respectivamente.

Pasaremos a continuación al cálculo de las probabilidades de detección conjunta. En concreto, haremos con detalle el correspondiente a $P_{DH1, DH2}$. Para simplificar, se tendrá en cuenta

la situación ideal en la que $t_1 = t_2$, y no incluiremos la dependencia de la posición y el tiempo, lo que es consecuencia de que todas las correlaciones se reducen a la misma posición (el centro del cristal) y en el mismo instante. Aplicando la ecuación (4.69), tenemos:

$$P_{DH1, DH2} \propto \left| \left\langle F_{1H}^{(+)} F_{2H}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{1H}^{(+)} \left[\mathbf{F}_{ZPF, Alicia2}^{(+)} \cdot \mathbf{j}' \right] \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \left[\mathbf{F}_{ZPF, Alicia1}^{(+)} \cdot \mathbf{j} \right] F_{2H}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \left[\mathbf{F}_{ZPF, Alicia1}^{(+)} \cdot \mathbf{j} \right] \left[\mathbf{F}_{ZPF, Alicia2}^{(+)} \cdot \mathbf{j}' \right] \right\rangle \right|^2 = \left| \left\langle F_{1H}^{(+)} F_{2H}^{(+)} \right\rangle \right|^2, \quad (8.24)$$

donde hemos tenido en cuenta que las entradas de ZPF en los PBS están descorrelacionadas con las señales y con el resto de amplitudes de punto cero. Teniendo en cuenta (8.13), finalmente obtenemos:

$$P_{DH1, DH2} = 0. \quad (8.25)$$

El resto de probabilidades se obtienen siguiendo el mismo procedimiento. Usando las ecuaciones (8.14), (8.15) y (8.16), obtenemos:

$$P_{DV1, DV2} = 0, \quad (8.26)$$

$$\frac{P_{DH1, DV2}}{K_{DH1} K_{DV2}} = \frac{P_{DV1, DH2}}{K_{DV1} K_{DH1}} = \frac{\cos^2 \beta}{2} [1 + \cos(\kappa + \pi)] \left| \left\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \right\rangle \right|^2, \quad (8.27)$$

$$\frac{P_{DH1, DV1}}{K_{DH1} K_{DV1}} = \frac{P_{DH2, DV2}}{K_{DH2} K_{DV2}} = \frac{\cos^2 \beta}{2} [1 + \cos \kappa] \left| \left\langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \right\rangle \right|^2, \quad (8.28)$$

donde $K_{DH1, DV2}$, $K_{DV1, DH2}$, $K_{DH1, DV1}$ y $K_{DH2, DV2}$ son constantes relacionadas con la eficiencia efectiva del proceso de detección.

De las ecuaciones (8.25), (8.26), (8.27) y (8.28) concluimos que:

- No son posibles las coincidencias en DH1 y DH2 (DV1 y DV2), independientemente de los valores de κ y β .
- Detecciones conjuntas en DH1 y DV2 (DV1 y DH2) son posibles, sólo en el caso ($\beta = 0$, $\kappa = \pi$), es decir, el estado $|\Psi^- \rangle$.
- La detección doble en DH1 y DV1 (DH2 y DV2) es posible, sólo en el caso ($\beta = 0$, $\kappa = 0$), es decir, el estado $|\Psi^+ \rangle$.
- Cuando $\beta = -\pi/2$ es decir, los estados $|\Phi^\pm \rangle$, son nulas todas las probabilidades de coincidencia. Por tanto, los estados $|\Phi^+ \rangle$ y $|\Phi^- \rangle$ no se pueden distinguir en este experimento.

8.4. Hiperentrelazamiento polarización-momento en la WRHP

Consideremos la siguiente situación: Una fuente de conversión paramétrica a la baja tipo I, generadora de estados hiperentrelazados, está constituida por dos cristales. El primer (segundo) cristal emite pares de fotones con polarización lineal horizontal (vertical), de tal modo que los conos de radiación emitidos por cada cristal están superpuestos. Seleccionando dos conjuntos de haces correlacionados (a_1, b_2) y (a_2, b_1) [163], representados por los vectores de onda \mathbf{k}_{a_i} , \mathbf{k}_{b_i} ($i=1,2$) y si el volumen de coherencia del láser contiene la zona de interacción (la cual abarca los dos cristales), el estado cuántico correspondiente a esta ecuación puede expresarse de la forma

$$|\Phi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |H\rangle_2 + |V\rangle_1 |V\rangle_2] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1 |b\rangle_2 + |b\rangle_1 |a\rangle_2]. \quad (8.29)$$

El estado dado por (8.29) es uno de los dieciséis estados pertenecientes a la base de estados hiperentrelazados en los grados de libertad de polarización y momento [256], correspondiente a dos fotones:

$$|\Psi^\pm\rangle \otimes |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1 |b\rangle_2 \pm |b\rangle_1 |a\rangle_2] \quad (8.30)$$

$$|\Psi^\pm\rangle \otimes |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1 |a\rangle_2 \pm |b\rangle_1 |b\rangle_2] \quad (8.31)$$

$$|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1 |b\rangle_2 \pm |b\rangle_1 |a\rangle_2] \quad (8.32)$$

$$|\Phi^\pm\rangle \otimes |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle_1 |a\rangle_2 \pm |b\rangle_1 |b\rangle_2] \quad (8.33)$$

En el formalismo de Wigner la descripción del hiperentrelazamiento descansa sobre las mismas ideas a las desarrolladas en las referencias [79] y [88], para el PDC tipo I y tipo II, respectivamente. El punto esencial es que la fuente (dos cristales tipo I) interactúan con el láser, de tal modo que la onda clásica (8.40) y la radiación de punto cero (5.4) se acoplan dentro de la zona de interacción dando lugar a conos de radiación superpuestos, cada uno de ellos caracterizado por una polarización lineal, horizontal o vertical. La selección de dos parejas de haces correlacionados, (a_1, b_2) y (a_2, b_1) , necesita de la consideración de ocho conjuntos de modos de la radiación de punto cero, los cuales se activan por su acoplamiento con el láser, generando de este modo la luz en la salida del cristal. Por ejemplo, para el haz de momento a_i , el conjunto de modos representativos con polarización $\lambda = H, V$, se representa de la forma siguiente:

$$\{\alpha_{a_i, \lambda}\} \equiv \{\alpha_{\mathbf{k}, \lambda}, \mathbf{k} \in [\mathbf{k}]_{a_i}\} \quad ; \quad \lambda = H, V \quad ; \quad i = 1, 2. \quad (8.34)$$

Análogamente para b_i :

$$\{\alpha_{b_i,\lambda}\} \equiv \{\alpha_{\mathbf{k},\lambda}, \mathbf{k} \in [\mathbf{k}]_{b_i}\} ; \lambda = H, V ; i = 1, 2. \quad (8.35)$$

De este modo, la descripción con el formalismo de Wigner del estado hiperentrelazado (8.29) consiste en los cuatro haces siguientes:

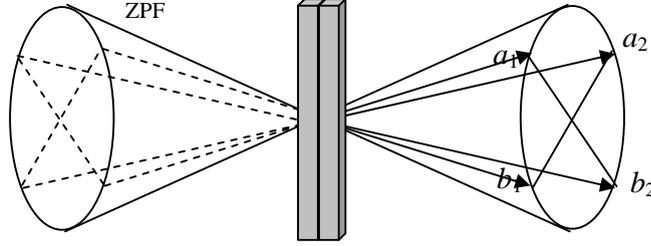


Figura 8.2: Los haces de la izquierda representan las entradas de punto cero necesarias para la generación del hiperentrelazamiento polarización-momento. Por cada entrada hay dos conjuntos de modos independientes, correspondientes a las componentes horizontal y vertical de la polarización.

$$\mathbf{F}_{a_1}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{a_1,H}; \alpha_{b_2,H}^*\})\mathbf{i}_{a_1} + F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{a_1,V}; \alpha_{b_2,V}^*\})\mathbf{j}_{a_1}, \quad (8.36)$$

$$\mathbf{F}_{b_1}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_p'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{b_1,H}; \alpha_{a_2,H}^*\})\mathbf{i}_{b_1} + F_s'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{b_1,V}; \alpha_{a_2,V}^*\})\mathbf{j}_{b_1}, \quad (8.37)$$

$$\mathbf{F}_{a_2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{a_2,H}; \alpha_{b_1,H}^*\})\mathbf{i}_{a_2} + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{a_2,V}; \alpha_{b_1,V}^*\})\mathbf{j}_{a_2}, \quad (8.38)$$

$$\mathbf{F}_{b_2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{b_2,H}; \alpha_{a_1,H}^*\})\mathbf{i}_{b_2} + F_r'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{b_2,V}; \alpha_{a_1,V}^*\})\mathbf{j}_{b_2}, \quad (8.39)$$

donde \mathbf{i}_{a_i} y \mathbf{j}_{a_i} (\mathbf{i}_{b_i} y \mathbf{j}_{b_i}), $i = 1, 2$, son vectores unitarios que representan la polarización lineal horizontal y vertical. Hemos incluido el conjunto de modos relevantes de la amplitud de cada haz. Puede verse fácilmente que $F_p^{(+)}$ sólo está correlacionado con $F_q^{(+)}$ porque $\{\alpha_{a_1,H}\}$ está correlacionado sólo con $\{\alpha_{a_1,H}^*\}$, y $\{\alpha_{b_2,H}^*\}$ con $\{\alpha_{b_2,H}\}$. Este razonamiento se aplica también a $F_r^{(+)}$ y $F_s^{(+)}$, $F_p'^{(+)}$ y $F_q'^{(+)}$, y $F_r'^{(+)}$ y $F_s'^{(+)}$. El resto de correlaciones son nulas.

La consideración de que los cuatro haces transportan dos fotones, en los haces (a_1, b_2) , o en (a_2, b_1) , se explica en nuestro formalismo considerando que la energía de la onda clásica correspondiente al láser, la cual es proporcional a $|V|^2$, se reparte igualmente en la generación de los cuatro haces, de tal modo que el hamiltoniano que representa el acoplamiento de los distintos modos del vacío con el láser puede expresarse de la forma:

$$H = H_{libre} + H_{int} = \sum_{\lambda=H,V} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k},\lambda} \alpha_{\mathbf{k},\lambda}^* \alpha_{\mathbf{k},\lambda}$$

$$+ \left(i\hbar g' \frac{V}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \sum_{\lambda=H,V} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in [\mathbf{k}]_{a_i} \\ \mathbf{k}' \in [\mathbf{k}]_{b_j}}} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(-i\omega_p t) \alpha_{\mathbf{k},\lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}',\lambda}^* + \text{c.c.} \right), \quad (8.40)$$

donde la diferencia crucial con la expresión (1) de la referencia [88] es el cambio $V \rightarrow V/2$. Todo el desarrollo matemático hasta las expresiones de los haces es idéntico al realizado en [79] y [88] y por tanto no vamos a reproducirlo. No obstante, es importante señalar que las correlaciones no nulas entre las amplitudes de (8.36) a (8.39) pueden expresarse como:

$$\langle F_p^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_q^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = g \frac{V}{2} \nu(t' - t), \quad (8.41)$$

con expresiones análogas para las correlaciones $\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \rangle$, $\langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle$ y $\langle F_r'^{(+)} F_s'^{(+)} \rangle$.

Pasemos ahora a dar una expresión compacta de la base de 16 estados de Bell, para lo cual, vamos a utilizar las expresiones [84]. Por ejemplo, los ocho estados $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\psi^\pm\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^\pm\rangle$ se pueden expresar de la forma:

$$\mathbf{F}_{a_1}^{(+)} = [F_s^{(+)} \cos\beta - F_p^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{a_1} + e^{i\kappa} [F_s^{(+)} \text{sen}\beta + F_p^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{a_1}, \quad (8.42)$$

$$\mathbf{F}_{b_1}^{(+)} = \left[[F_s'^{(+)} \cos\beta - F_p'^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{b_1} + e^{i\kappa} [F_s'^{(+)} \text{sen}\beta + F_p'^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{b_1} \right] e^{i\varphi}, \quad (8.43)$$

$$\mathbf{F}_{a_2}^{(+)} = F_q'^{(+)} \mathbf{i}_{a_2} + F_r'^{(+)} \mathbf{j}_{a_2}, \quad (8.44)$$

$$\mathbf{F}_{b_2}^{(+)} = F_q^{(+)} \mathbf{i}_{b_2} + F_r^{(+)} \mathbf{j}_{b_2}, \quad (8.45)$$

donde la fase φ en la ecuación (8.43) se relaciona con la consideración del estado de momento $|\psi^+\rangle$ (en el caso $\varphi = 0$) o el estado de momento $|\psi^-\rangle$ (en el caso $\varphi = \pi$). Por otro lado, la relación entre los distintos estados de polarización y los parámetros β y κ se halla descrita en el apartado 5.3.1. Por último, con el fin de transformar $|\psi^+\rangle$ ($|\psi^-\rangle$) en $|\phi^+\rangle$ ($|\phi^-\rangle$), sólo tenemos que intercambiar, en las ecuaciones (8.44) y (8.45), $F_q'^{(+)}$ por $F_q^{(+)}$ y $F_r'^{(+)}$ por $F_r^{(+)}$, modificando de esta manera las parejas de haces correlacionados. Esto se consigue aplicando los divisores de polarización en los caminos de $\mathbf{F}_{a_2}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{b_2}^{(+)}$, operando de forma inversa. Es decir², el primer divisor PBS1 transmite la polarización vertical y cambia de momento y refleja la polarización horizontal, manteniendo el mismo momento. Por otro lado, el segundo

²A lo largo de la tesis aparecen distintos tipos de PBS, atendiendo a la polarización que transmiten o reflejan, y en cada caso, si se modifica o no el momento del fotón. No hemos elegido un criterio único, pues hemos preferido respetar los usados en la bibliografía correspondiente a la parte de la tesis que se esté desarrollando.

divisor PBS2 transmite la polarización horizontal y cambia el momento, y refleja la vertical sin cambiar el momento. En la figura 8.3 se muestra esta doble operación, pero sólo contribuye con un factor de fase irrelevante. De hecho, el divisor se puede diseñar de forma que no aparezca la unidad imaginaria en la reflexión [269]. Las consideraciones anteriores nos permiten escribir

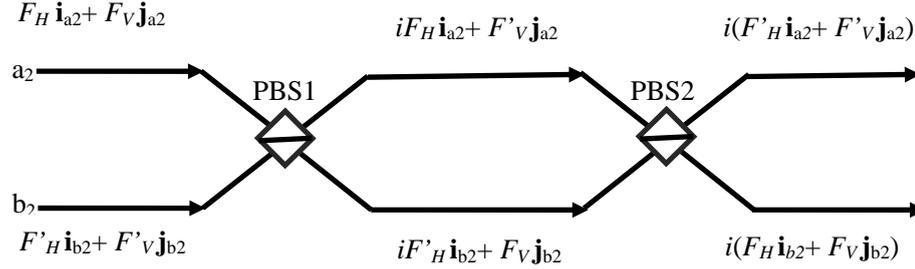


Figura 8.3: Efecto de la doble operación CNOT sobre los haces de Wigner.

los dieciséis estados base, en la representación de Wigner, de la forma compacta:

$$\mathbf{F}_{x_1}^{(+)} = [F_s^{(+)} \cos\beta - F_p^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{x_1} + e^{i\kappa} [F_s^{(+)} \text{sen}\beta + F_p^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{x_1}, \quad (8.46)$$

$$\mathbf{F}_{y_1}^{(+)} = \left[[F_s'^{(+)} \cos\beta - F_p'^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{y_1} + e^{i\kappa} [F_s'^{(+)} \text{sen}\beta + F_p'^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{y_1} \right] e^{i\varphi}, \quad (8.47)$$

$$\mathbf{F}_{a_2}^{(+)} = F_q'^{(+)} \mathbf{i}_{a_2} + F_r'^{(+)} \mathbf{j}_{a_2}, \quad (8.48)$$

$$\mathbf{F}_{b_2}^{(+)} = F_q^{(+)} \mathbf{i}_{b_2} + F_r^{(+)} \mathbf{j}_{b_2}, \quad (8.49)$$

donde para $x \equiv a$, $y \equiv b$ y $\varphi = 0$ obtenemos nuevamente los estados $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^+\rangle$, y para $x \equiv a$, $y \equiv b$ y $\varphi = \pi$ los estados $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\psi^-\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^-\rangle$. Por otra parte, si $x \equiv b$, $y \equiv a$ y $\varphi = 0$ tenemos los cuatro estados $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\phi^+\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\phi^+\rangle$, y en el caso de que $x \equiv b$, $y \equiv a$ y $\varphi = \pi$ obtenemos $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\phi^-\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\phi^-\rangle$.

8.5. BSM con hiperentrelazamiento polarización-momento en la WRHP

En esta sección haremos un análisis completo de los estados de Bell con el formalismo de Wigner. Para ello usaremos la referencia Walborn et al. [256], donde se muestra un esquema simple, figura 8.4, para la medición completa de los estados de Bell, usando fotones hiperentrelazados. El dispositivo experimental permite distinguir los estados de Bell de polarización mediante hiperentrelazamiento en momento y polarización, donde el estado de momento actúa como auxiliar. El analizador consta de sendas puertas CNOT que se implementan mediante dos PBS, los cuales transmiten (reflejan) la polarización vertical (horizontal), modificando (man-

teniendo) el momento. Tras los divisores de polarización se hallan analizadores de polarización en la base diagonal ($\pm 45^\circ$) consistentes en láminas de media onda y divisores de polarización, tras los que se sitúan los detectores.

De las ecuaciones (8.46) a (8.49), haciendo $x = a$, $y = b$ y $\varphi = 0$ obtenemos los estados: $|\Psi^\pm\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^+\rangle$. Con el propósito de representar los campos de los haces en el formalismo de Wigner, debemos tener en cuenta la entrada de la amplitud del campo punto cero en los PBS, como se indica en la figura 8.4. Las amplitudes tras las puertas CNOT son:

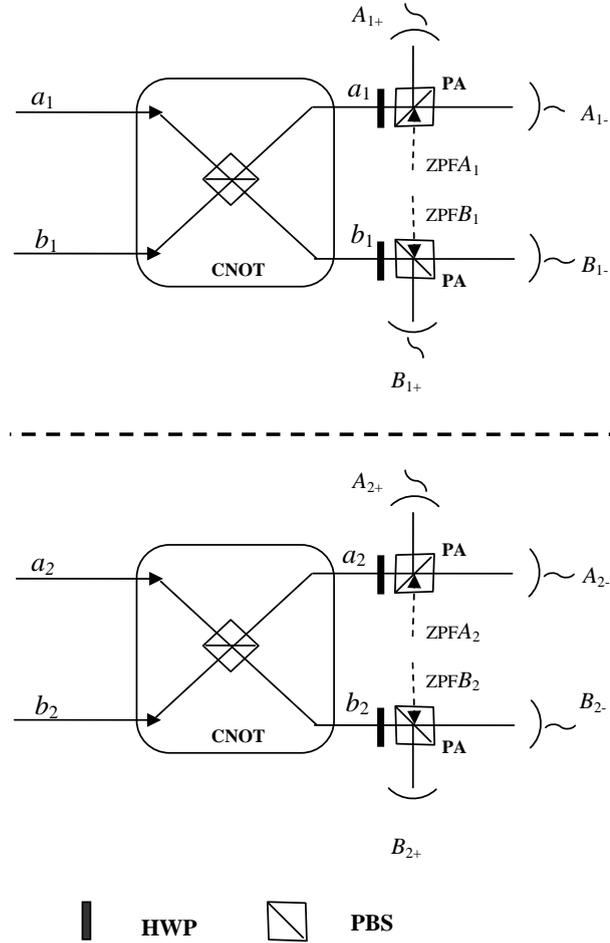


Figura 8.4: Analizador de hiperentrelazamiento polarización-momento. Nótese que hay cuatro canales vacíos por los que entra punto cero, uno por cada PBS previo a cada dos detectores.

$$\mathbf{F}'_{a_1^{(+)}} = i[F_s^{(+)} \cos\beta - F_p^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{a_1} + e^{i\kappa} [F_s'^{(+)} \text{sen}\beta + F_p'^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{a_1}, \quad (8.50)$$

$$\mathbf{F}'_{b_1^{(+)}} = i[F_s'^{(+)} \cos\beta - F_p'^{(+)} \text{sen}\beta] \mathbf{i}_{b_1} + e^{i\kappa} [F_s^{(+)} \text{sen}\beta + F_p^{(+)} \cos\beta] \mathbf{j}_{b_1}, \quad (8.51)$$

$$\mathbf{F}'_{a_2^{(+)}} = iF_q'^{(+)} \mathbf{i}_{a_2} + F_r^{(+)} \mathbf{j}_{a_2}, \quad (8.52)$$

$$\mathbf{F}'_{b_2}{}^{(+)} = iF_q^{(+)}\mathbf{i}_{b_2} + F_r^{(+)}\mathbf{j}_{b_2}. \quad (8.53)$$

Entonces la acción de la lámina de media onda, junto con el PBS orientado 45° , da lugar a las siguientes componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} en la expresión de las amplitudes de los campos para el camino a_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}''_{a_1}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta] \\ e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta] + e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta] \\ i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta] - e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Para el resto de los caminos, usando la misma transformación, obtenemos

$$\mathbf{F}''_{b_1}{}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta] + e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta] \\ i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta] - e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta] \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

$$\mathbf{F}''_{a_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{i} + \left(iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{j} \right], \quad (8.56)$$

$$\mathbf{F}''_{b_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{i} + \left(iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{j} \right]. \quad (8.57)$$

Al atravesar los PBS, la componente horizontal se refleja y la componente vertical se transmite. Añadimos la componente correspondiente de punto cero, que entra por el canal libre de cada PBS. De esta manera, podemos obtener las siguientes amplitudes de los caminos a_1 y b_1 en los detectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{A_{1+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, t_{A_{1+}}) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, t_{A_{1+}}) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, t_{A_{1+}}) \text{sen} \beta] \right. \\ &\quad \left. + e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, t_{A_{1+}}) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, t_{A_{1+}}) \cos \beta] \right\} \mathbf{i} + [\mathbf{F}_{ZPFA_{1+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1+}}, \mathbf{t}_{A_{1+}}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{A_{1-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) \text{sen} \beta] \right. \\ &\quad \left. - e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) \text{sen} \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) \cos \beta] \right\} \mathbf{j} + [\mathbf{F}_{ZPFA_{1-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{1-}}, t_{A_{1-}}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{B_{1+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \{ [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) \sin \beta] \\ &+ e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) \sin \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) \cos \beta] \} \mathbf{i} + [\mathbf{F}_{ZPF B_{1+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1+}}, t_{B_{1+}}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{B_{1-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ i [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) \cos \beta - F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) \sin \beta] \\ &- e^{i\kappa} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) \sin \beta + F_p^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) \cos \beta] \} \mathbf{j} + [\mathbf{F}_{ZPF B_{1-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{1-}}, t_{B_{1-}}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (8.61)$$

y para los caminos a_2 y b_2

$$\mathbf{F}_{A_{2+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{2+}}, t_{A_{2+}}) = \frac{i}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{2+}}, t_{A_{2+}}) + F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{2+}}, t_{A_{2+}})] \mathbf{i}' + [\mathbf{F}_{ZPF A_{2+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{2+}}, t_{A_{2+}}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}', \quad (8.62)$$

$$\mathbf{F}_{A_{2-}}^{(+)}(\mathbf{r}'_{A_{2-}}, t'_{A_{2-}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)}(\mathbf{r}'_{A_{2-}}, t'_{A_{2-}}) - F_r^{(+)}(\mathbf{r}'_{A_{2-}}, t'_{A_{2-}})] \mathbf{j}' + [\mathbf{F}_{ZPF A_{2-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{A_{2-}}, t_{A_{2-}}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}', \quad (8.63)$$

$$\mathbf{F}_{B_{2+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{2+}}, t_{B_{2+}}) = \frac{i}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{2+}}, t_{B_{2+}}) + F_r^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{2+}}, t_{B_{2+}})] \mathbf{i}' + [\mathbf{F}_{ZPF B_{2+}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{2+}}, t_{B_{2+}}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}', \quad (8.64)$$

$$\mathbf{F}_{B_{2-}}^{(+)}(\mathbf{r}'_{B_{2-}}, t'_{B_{2-}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)}(\mathbf{r}'_{B_{2-}}, t'_{B_{2-}}) - F_r^{(+)}(\mathbf{r}'_{B_{2-}}, t'_{B_{2-}})] \mathbf{j}' + [\mathbf{F}_{ZPF B_{2-}}^{(+)}(\mathbf{r}_{B_{2-}}, t_{B_{2-}}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}'. \quad (8.65)$$

Utilizando ahora la expresión de la teoría de la detección (4.69) junto con las propiedades de correlación:

$$|\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle|^2 = |\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \rangle|^2 = |\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle|^2 = |\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \rangle|^2 = \frac{g^2 |V|^2}{4}, \quad (8.66)$$

y teniendo en cuenta que el ZPF que entra en los PBS no está correlacionado con el resto de las amplitudes, se tienen las probabilidades en el caso ideal (ver la nota al pie 4 del capítulo 7).

- Para $\beta = 0$, tenemos:

$$P_{A_{1+}, A_{2+}} = P_{B_{1+}, B_{2+}} = P_{A_{1-}, A_{2-}} = P_{B_{1-}, B_{2-}} = \frac{1}{16} |1 + e^{i\kappa}|^2, \quad (8.67)$$

$$P_{A_{1+},A_{2-}} = P_{B_{1+},B_{2-}} = P_{A_{1-},A_{2+}} = P_{B_{1-},B_{2+}} = \frac{1}{16} |1 - e^{i\kappa}|^2, \quad (8.68)$$

siendo nulas el resto de las probabilidades dobles. Para identificar el estado $|\Psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$, sustituyendo $\kappa = 0$, sólo las siguientes probabilidades son no nulas:

$$P_{A_{1+},A_{2+}} = P_{B_{1+},B_{2+}} = P_{A_{1-},A_{2-}} = P_{B_{1-},B_{2-}} = \frac{1}{4}. \quad (8.69)$$

Por otro lado, en el caso del estado $|\Psi^-\rangle \otimes |\psi^+\rangle$, sustituyendo $\kappa = \pi$, sólo las siguientes probabilidades son no nulas:

$$P_{A_{1+},A_{2-}} = P_{B_{1+},B_{2-}} = P_{A_{1-},A_{2+}} = P_{B_{1-},B_{2+}} = \frac{1}{4}. \quad (8.70)$$

Esto nos permite identificar los estados de acuerdo con las siguientes relaciones de probabilidades no nulas asociadas a cada uno de ellos:

$$|\Psi^+\rangle \Rightarrow P_{A_{1+},A_{2+}}; P_{B_{1+},B_{2+}}; P_{A_{1-},A_{2-}}; P_{B_{1-},B_{2-}}. \quad (8.71)$$

$$|\Psi^-\rangle \Rightarrow P_{A_{1+},A_{2-}}; P_{B_{1+},B_{2-}}; P_{A_{1-},A_{2+}}; P_{B_{1-},B_{2+}}. \quad (8.72)$$

- Por otra parte, para los estados $|\Phi^\pm\rangle \otimes |\psi^+\rangle$, donde $\beta = -\pi/2$, y siguiendo un proceso similar, tenemos:

$$P_{A_{1+},B_{2+}} = P_{B_{1+},A_{2+}} = P_{A_{1-},B_{2-}} = P_{B_{1-},A_{2-}} = \frac{1}{16} |1 + e^{i\kappa}|^2, \quad (8.73)$$

$$P_{A_{1+},B_{2-}} = P_{B_{1+},A_{2-}} = P_{A_{1-},B_{2+}} = P_{B_{1-},A_{2+}} = \frac{1}{16} |1 - e^{i\kappa}|^2, \quad (8.74)$$

siendo nulas el resto de las probabilidades. Sustituyendo $\kappa = 0$ (correspondiente a $|\Phi^-\rangle$),

$$P_{A_{1+},B_{2+}} = P_{B_{1+},A_{2+}} = P_{A_{1-},B_{2-}} = P_{B_{1-},A_{2-}} = \frac{1}{4}, \quad (8.75)$$

siendo nulas el resto, y sustituyendo $\kappa = \pi$ (correspondiente a $|\Phi^+\rangle$), se obtienen las siguientes probabilidades no nulas:

$$P_{A_{1+},B_{2-}} = P_{B_{1+},A_{2-}} = P_{A_{1-},B_{2+}} = P_{B_{1-},A_{2+}} = \frac{1}{4}. \quad (8.76)$$

Por tanto, se establecen las siguientes relaciones para identificar estos estados:

$$|\Phi^-\rangle \Rightarrow P_{A_{1+},B_{2+}}; P_{B_{1+},A_{2+}}; P_{A_{1-},B_{2-}}; P_{B_{1-},A_{2-}}. \quad (8.77)$$

$$|\Phi^+\rangle \Rightarrow P_{A_{1+}, B_{2-}}; P_{B_{1+}, A_{2-}}; P_{A_{1-}, B_{2+}}; P_{B_{1-}, A_{2+}}. \quad (8.78)$$

La discrepancia observada con la tabla de [256], consistente en que en las relaciones (8.77) y (8.78) aparecen intercambiados los estados $|\Phi^+\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$, es sólo debida al tipo de PBS que se usó en los experimentos, en el que no se consideraba la unidad imaginaria en la reflexión [269], que sí hemos considerado en estos cálculos, y de ahí la diferencia en los resultados.

8.6. Conclusiones

En este capítulo hemos aplicado el formalismo de Wigner para el estudio estadístico de dos fotones en un divisor de haz equilibrado. También hemos tratado un montaje experimental para el análisis parcial de los estados de Bell. El formalismo de Wigner permite una interpretación de estos experimentos en términos de ondas, pero, sin embargo, el formalismo en su conjunto pertenece al dominio cuántico, al ser el campo del punto cero una alternativa al papel de fluctuaciones de vacío en el espacio de Hilbert.

Como ya hemos dicho, una vez en el marco de Wigner, los resultados cuánticos aparecen precisamente como consecuencia de la intervención del campo del punto cero. Este campo entra en el cristal y en los demás aparatos ópticos, siendo sustraído en el proceso de detección. Las correlaciones cuánticas sólo pueden explicarse en términos de la propagación de las amplitudes de vacío a través de los dispositivos experimentales, y su posterior sustracción en los detectores.

Al comienzo de la sección 8.2 se han presentado las ideas fundamentales sobre estadísticas de dos fotones en un divisor de haz en el formalismo de espacio de Hilbert, en el que se subraya la naturaleza corpuscular de la luz. En el formalismo de Wigner, se encuentra una clara contrapartida con esa descripción pues, con objeto de preservar el carácter bosónico de los fotones, la parte espacial del estado cuántico es ve obligada a permanecer antisimétrica. Esto ocurre sólo para $|\Psi^-\rangle$, y, en este caso, el par de fotones se comporta como fermiones en el divisor de haces, emergiendo por diferentes puertos de salida. Para los otros tres estados de Bell, en los que tanto la polarización como la parte espacial del estado de dos fotones son simétricas, los dos fotones emergen juntos en el mismo puerto de salida del BS.

Para la representación de Wigner, el aspecto corpuscular de la luz aparece como una interacción de (Maxwell) ondas, incluyendo el campo de punto cero. La acción del BS debe tratarse como en el caso clásico: de modo que una parte de cada haz de entrada se transmite, y la otra parte se refleja, sin ningún cambio en las propiedades de polarización. De (8.16) se puede observar que la correlación entre las componentes del campo correspondientes a diferente polarización y diferentes canales de salida, se anulan para $\beta = \pi/2$ (estados $|\Phi^\pm\rangle$), y también para $\kappa = 0$ (estado $|\Psi^+\rangle$). En este último caso, el factor i^2 indica que la contribución a la correlación de la componente transmitida es cancelada por la contribución de la componente reflejada. Sin embargo, en el caso $\kappa = \pi$ hay una superposición constructiva de los dos términos en la ecuación (8.16). En otras palabras, el efecto neto del cambio de fase $\kappa = \pi$ y del divisor

de haz en las amplitudes del campo es dejar las propiedades de correlación sin cambios. Esta propiedad es equivalente, en el espacio de Hilbert, al hecho de que $|\psi_A\rangle$ es un estado propio del operador Hadamard.

En este punto vale la pena hacer de nuevo la pregunta: ¿cómo podemos explicar un comportamiento típico de partícula (la naturaleza bosónica de los fotones en la descripción del espacio de Hilbert), a partir de una descripción ondulatoria, con la inclusión de las fluctuaciones del campo electromagnético de vacío? Por inspección de (5.27) puede verse que, sólo en el caso de $|\Psi^-\rangle$, el intercambio $1 \rightarrow 2$ implica un cambio de signo en las propiedades de correlación de los haces (en los otros tres casos permanecen igual). La naturaleza bosónica de los fotones está completamente representada por las propiedades de correlación que caracterizan a cada una de los cuatro estados de Bell. Si, ahora, Bob activa el retardador de onda, da lugar a un cambio, no solo en el estado interno (polarización), sino también en la parte espacial del estado cuántico con el fin de conservar la simetría bosónica. Este doble efecto se explica, en el formalismo de Wigner, teniendo en cuenta la forma en la que el campo punto cero se acopla en el interior del cristal.

La medida del estado de Bell que realiza Alicia sólo identifica los estados $|\Psi^-\rangle$ y $|\Psi^+\rangle$. Nótese, por otro lado, que el analizador introduce algo de ruido fundamental en los canales libres de los PBS. Estas fluctuaciones del punto cero, aunque sean finalmente sustraídas en los detectores y no están correlacionadas con las señales, vuelven a ser el ingrediente fundamental de la WRHP para la interpretación de los experimentos. La figura 8.1 muestra que hay cuatro conjuntos relevantes de modos de vacío que entran en el cristal, que “transportan” la información, y dos entradas de punto cero asociadas a los canales vacíos de los PBS.

A partir de la sección 8.4 comenzamos con el estudio, con el formalismo de Wigner, del hiperentrelazamiento con objeto de poder distinguir los cuatro estados de Bell. Hemos estudiado la medición completa de los estados de Bell con fotones hiperentrelazados en polarización-momento. El punto crucial en la representación de Wigner es que la selección de dos conjuntos de haces, (a_1, b_2) y (a_2, b_1) , implica la consideración de 8 conjuntos de modos de vacío, que se activan y se acoplan con el láser en el interior del cristal. Las consideraciones anteriores nos permiten expresar de una forma compacta los 4 haces correlacionados que dan lugar, según el valor de ciertos parámetros, a los 16 estados base del espacio de Hilbert del sistema.

Para la representación de Wigner, el aspecto corpuscular de la luz aparece sólo como un conjunto de (Maxwell) ondas con la inclusión de un campo de punto cero. Si analizamos el experimento Walborn, vemos que hay 8 conjuntos de modos de ZPF entran en el cristal, y el analizador tiene 4 canales libres (4 puntos de entrada de ruido). Por último, se puede determinar los cuatro estados de Bell restando el número de canales con ruido del número de modos de entrada de ZPF (haciendo al sistema más local y los resultados más deterministas). El uso de los espacios de Hilbert de dimensiones superiores está relacionado (en el formalismo de Wigner) con la inclusión de más conjuntos de modos de vacío que entran en el cristal. Con un aumento del número de entradas de vacío, la posibilidad de extraer más información

del campo punto cero también aumenta. Sin embargo, los canales vacíos de los analizadores introducen un ruido esencial que disminuye la capacidad de obtener información.

Una característica atractiva del hiperentrelazamiento, que también es de interés en comunicaciones cuánticas, es que los dos grados de libertad (la polarización y el momento) asociados a los modos ZPF se pueden manipular de forma individual. Por ejemplo, se pueden cambiar los estados de polarización de Bell con el uso de operaciones locales (láminas de media onda y cuarto de onda de los modos de onda plana, a_j y b_j) en los modos de ZPF asociados al estado de polarización, dejando los modos de ZPF asociados el impulso intactos. De este modo se puede implementar un esquema de código denso en el que la información está codificada en los modos de vacío asociados a la estado de polarización, mientras que los modos de vacío asociados al estado de momento permanecen como un auxiliar para ayudar a la medición completa de los estados de Bell.

TELETRANSPORTE EN LA WRHP

9.1. Introducción

Una de las aplicaciones fundamentales del protocolo de codificación densa está en la teleportación de estados cuánticos, de tal modo que este último capítulo de la tesis puede considerarse como una continuación natural del capítulo 8. A diferencia de los capítulos anteriores, en los que las detecciones son simples y dobles, el teletransporte implica como mínimo tres fotones, de modo que se hace necesaria una teoría de la detección ampliada a detecciones triples y cuádruples, la cual se halla desarrollada en los anexos. Sin embargo, y como veremos a lo largo del capítulo, el concepto que se revela fundamental en la comprensión del fenómeno a partir de la influencia de la radiación de punto cero, es el de correlación cuádruple. Su uso, junto con el resultado de que cualquier correlación par de orden superior a dos puede expresarse a partir de correlaciones dobles en los procesos gaussianos, constituirá la vía para entender el teletransporte por medio del análisis de las correlaciones, lo que contrasta, aparentemente, con la necesidad de introducir el colapso del vector de estado para comprender cualquier protocolo de teleportación. El vínculo entre sendos formalismos se halla en las amplitudes de la radiación de punto cero.

En la sección 9.2 hacemos una descripción con el formalismo de Wigner del intercambio de entrelazamiento a partir de dos parejas entrelazadas, lo que constituirá la base para el estudio posterior, en la sección 9.3, del experimento de teletransporte de Innsbruck, en el que se utilizan cuatro fotones. A continuación, en la sección 9.4, estudiaremos el teletransporte de un qubit fotónico desde un punto de vista más fundamental, tratando de ajustarnos al desarrollo básico de la teoría de la teleportación en el que se parte de una partícula con un qubit que se quiere teletransportar, y una pareja auxiliar en un estado entrelazado, que supondremos generada en un PDC tipo II. La idea es reproducir el cálculo usual de las probabilidades triples en el experimento de Innsbruck¹.

Todo este análisis nos muestra que la eficiencia, en concordancia con los resultados cuánticos habituales, está limitada por la indistinguibilidad de dos de los estados de Bell, de modo que

¹El formalismo de Wigner se aplicó en 1998 al teletransporte para analizar un experimento en el que colaboró el Dr. Ramón Risco, de la Universidad de Sevilla, en una estancia de investigación en Innsbruck, con el grupo de Zeilinger [197,90].

se hace necesario el uso del hiperentrelazado para la descripción completa del teletransporte. Así, en la sección 9.5 estudiaremos el experimento de Roma, donde nos servirán los conceptos desarrollados sobre estados hiperentrelazados en el formalismo de Wigner y, a diferencia del resto del capítulo, sólo serán necesarias las correlaciones cruzadas. Por último, expondremos en la sección 9.6 las conclusiones del capítulo.

9.2. Intercambio de entrelazamiento en la WRHP

9.2.1. Introducción

El intercambio de entrelazamiento [268, 270, 274, 273, 57, 58] proporciona un método de entrelazamiento de dos partículas que no interactúan.

Dos cristales no lineales generan, de forma independiente, sendos pares de fotones entrelazados, el par 1 – 2 y el par 3 – 4, estando cada par descrito por el estado singlete. A la pareja constituida por los fotones 2 y 3, cada uno de ellos perteneciente a uno de los pares independientes, se le somete a una medida de Bell (BSM) tal y como se muestra en la figura 9.1 . El colapso del vector de estado sobre el autoestado correspondiente a los fotones 2 y 3, da lugar a un entrelazamiento entre los fotones 1 y 4, lo que recibe el nombre de *intercambio de entrelazamiento*. Veremos esto con cierto detalle en el espacio de Hilbert, antes de pasar al formalismo de Wigner. Asumiendo que hay entrelazamiento en polarización.

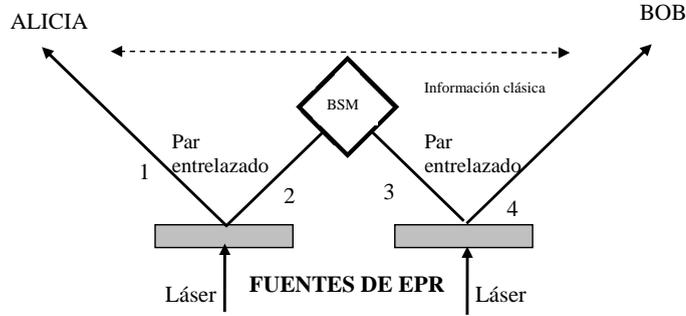


Figura 9.1: Principio del entrelazamiento por intercambio, mediante dos pares de fotones entrelazados.

$$|\Psi\rangle_{1234} = |\psi^-\rangle_{12} \otimes |\psi^-\rangle_{34} = \frac{1}{2} [(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2) \otimes (|H\rangle_3|V\rangle_4 - |V\rangle_3|H\rangle_4)]. \quad (9.1)$$

El estado total describe el hecho de que los fotones 1 y 2 (3 y 4) están entrelazados en un estado de polarización antisimétrico. La factorización es reflejo de que las parejas son independientes. Sin embargo, una medida de Bell sobre los fotones 2 y 3 deja a los fotones 1 y 4 entrelazados en el mismo estado que el correspondiente al resultado obtenido. Para verlo expresaremos $|\Psi\rangle_{1234}$ en la forma siguiente:

$$|\Psi\rangle_{1234} = \frac{1}{2} (|\psi^+\rangle_{14}|\psi^+\rangle_{23} - |\psi^-\rangle_{14}|\psi^-\rangle_{23} - |\phi^+\rangle_{14}|\phi^+\rangle_{23} + |\phi^-\rangle_{14}|\phi^-\rangle_{23}). \quad (9.2)$$

El fotón 1 y el fotón 4 van a terminar en uno de los siguientes cuatro estados de Bell: $|\psi_{14}^+\rangle$, $|\psi_{14}^-\rangle$, $|\phi_{14}^+\rangle$ y $|\phi_{14}^-\rangle$, con la misma probabilidad 1/4, que corresponde a los resultados de la medición de Alicia $|\psi_{23}^+\rangle$, $|\psi_{23}^-\rangle$, $|\phi_{23}^+\rangle$ y $|\phi_{23}^-\rangle$, respectivamente. Por ejemplo, si el resultado de la medida de Bell es $|\psi_{23}^+\rangle$, entonces, el fotón 4 y el fotón 1 deben estar en el estado $|\psi_{14}^+\rangle$, sin embargo, si se obtuviese cualquiera de los siguientes estados $|\psi_{23}^-\rangle$, $|\phi_{23}^+\rangle$ ó $|\phi_{23}^-\rangle$ resultaría que el fotón 4 y el fotón 1 deberían estar en uno de los estados $|\psi_{14}^-\rangle$, $|\phi_{14}^+\rangle$ y $|\phi_{14}^-\rangle$, respectivamente. Así, la medida de Bell supone el teletransporte de un estado entrelazado sobre los fotones 1 y 4.

9.2.2. Campo eléctrico en los detectores

Normalmente, en los dispositivos experimentales, se usa un único cristal no lineal, tal y como puede verse en la figura 9.2, usando el formalismo de Wigner, la generación de los dos pares EPR independientes mediante el acoplamiento en el cristal del láser y el punto cero. En la figura 9.2, se explica como los vectores de onda del punto cero con sus correspondientes modos horizontales y verticales sufren el acoplamiento en el cristal. Las predicciones cuánticas correspondientes al estado $|\psi^-\rangle_{12} \otimes |\psi^-\rangle_{34}$ se producen en la representación de Wigner a partir de los siguientes 4 haces:

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_s'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_1, H}; \alpha_{k_2, V}^*\}) \mathbf{i} + F_p'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_1, V}; \alpha_{k_2, H}^*\}) \mathbf{j}, \quad (9.3)$$

$$\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_2, H}; \alpha_{k_1, V}^*\}) \mathbf{i}' - F_r'^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_2, V}; \alpha_{k_1, H}^*\}) \mathbf{j}', \quad (9.4)$$

$$\mathbf{F}_3^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_3, H}; \alpha_{k_4, V}^*\}) \mathbf{i} + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_3, V}; \alpha_{k_4, H}^*\}) \mathbf{j}, \quad (9.5)$$

$$\mathbf{F}_4^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_4, H}; \alpha_{k_3, V}^*\}) \mathbf{i}' - F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{\alpha_{k_4, V}; \alpha_{k_3, H}^*\}) \mathbf{j}', \quad (9.6)$$

donde hemos incluido los conjuntos de modos del punto cero que aparecen en cada componente del campo eléctrico correspondiente a cada uno de los haces, Las únicas correlaciones no nulas son las que se dan entre las amplitudes sin prima, correspondientes a las combinaciones: $r \leftrightarrow s$ y $p \leftrightarrow q$; y entre las amplitudes con prima correspondientes a las mismas correlaciones.

Aunque las ecuaciones (9.3) a (9.6) son las que necesitamos para el análisis del intercambio de entrelazamiento cuando las fuentes emiten parejas de fotones en el estado singlete (9.1), consideraremos en un principio que cada fuente puede producir cualquiera de los cuatro estados de Bell, de forma que las expresiones generales de los haces son:

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left[F_s'^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta' - \text{sen} \beta' F_p'^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{i} + e^{i\kappa'} \left[F_s'^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta' + \cos \beta' F_p'^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{j}, \quad (9.7)$$

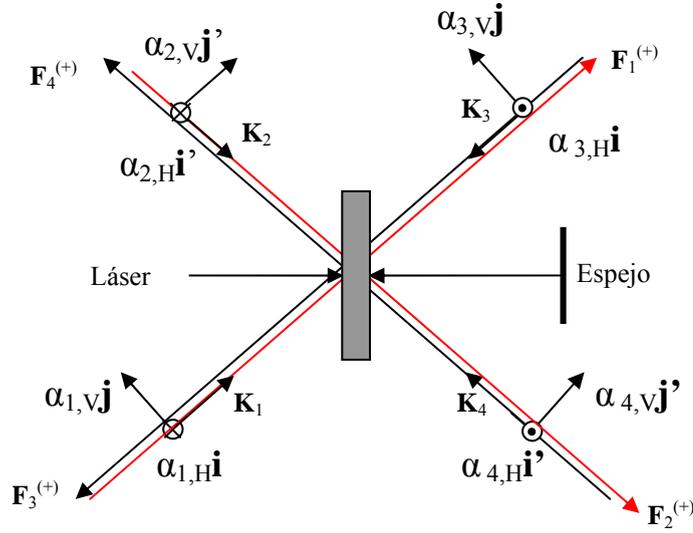


Figura 9.2: Representación de los haces incidentes (punto cero y láser), en la doble conversión se produce un acoplamiento doble al reflejare el láser en un espejo, volviendo al cristal produciéndose un nuevo acoplamiento, como resultado de la interacción dentro del cristal del láser y el vacío.

$$\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q'^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + F_r'^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}', \quad (9.8)$$

$$\mathbf{F}_3^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - \text{sen} \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{i} + e^{i\kappa} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{j}, \quad (9.9)$$

$$\mathbf{F}_4^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}'. \quad (9.10)$$

En los haces 1 y 3 de la figura 9.3, hemos representado sendos dispositivos que permiten generar cualquiera de los cuatro estados de Bell para las parejas 1–2 y 3–4, a través de las fases (β' , κ'), y (β , κ). Esto nos permitirá hacer un análisis de la propagación de los haces para cualquiera de las situaciones $|\varphi_{12}\rangle = |\psi^\pm\rangle_{12}$ ó $|\varphi_{12}\rangle = |\phi^\pm\rangle_{12}$ y $|\varphi_{34}\rangle = |\psi^\pm\rangle_{34}$ ó $|\varphi_{34}\rangle = |\phi^\pm\rangle_{34}$. El caso que estudiaremos con detalle es aquel en que $\beta = \beta' = 0$, y $\kappa = \kappa' = \pi$ correspondiente a la descripción en el formalismo de Wigner a la situación dada en las ecuaciones (9.3) y (9.6). La factorizabilidad que vemos en (9.3) tiene que ver con que los haces 1 y 2 están completamente descorrelacionados con los haces 3 y 4, dado que los modos de vacío que intervienen los haces 1 y 2 no guardan ninguna correlación con los correspondientes a 3 y 4. Esto implica que cualquier probabilidad de detección conjunta asociada a detectores 1 y 4 es nula, como lo es también cualquier probabilidad de detección conjunta asociada a los haces 2 y 3, y a los haces 2' y 3', tras pasar por el divisor de haz. ¿Cómo podemos entender entonces el teletransporte o intercambio de entrelazamiento en el lenguaje de la función de Wigner? La respuesta a esta pregunta se halla en cómo cambian las correlaciones tras atravesar los haces 2 y 3 el divisor

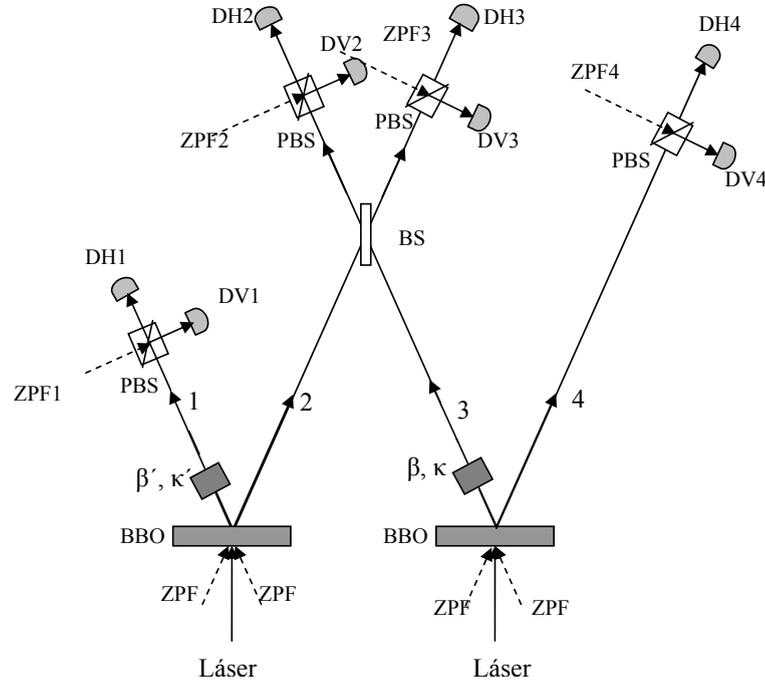


Figura 9.3: Analizador de intercambio de entrelazamiento.

de haz. La acción del BS sobre los haces 2 y 3 da lugar a los haces $\mathbf{F}_{3'}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{F}_{2'}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) + F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - \text{sen} \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{i} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{i\kappa} \left(F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \right] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2'}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i \left(F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta - \text{sen} \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \right] \mathbf{i}' \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i e^{i\kappa} \left(F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \right] \mathbf{j}'. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Teniendo en cuenta que los divisores de polarización (PBS) transmiten la polarización horizontal y reflejan la vertical, y las entradas de punto cero en los canales vacíos de los PBS, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{DH2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_q^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) + F_s^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cos \beta - \text{sen} \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \right] \mathbf{i} \\ &+ i[\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \mathbf{j}]\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{DV2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[iF_r^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) + e^{i\kappa} \left(F_s^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \text{sen} \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \right) \right] \mathbf{j} \\ &+ [\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \cdot \mathbf{i}]\mathbf{i}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\mathbf{F}_{DH3}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_q'^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) + i(F_s^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \cos \beta - \text{sen} \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3)) \right] \mathbf{i}' + i[\mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \cdot \mathbf{j}'] \mathbf{j}', \quad (9.15)$$

$$\mathbf{F}_{DV3}^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[F_r'^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) + ie^{i\kappa} \left(F_s^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) \text{sen} \beta + \cos \beta F_p^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) \right) \right] \mathbf{j}' + [\mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) \cdot \mathbf{i}'] \mathbf{i}'. \quad (9.16)$$

Por otra parte, las salidas hacia los detectores situados en los haces 1 y 4, son:

$$\mathbf{F}_{DH1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) = [F_s'^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \beta' - \text{sen} \beta' F_p'^{(+)}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{i} + i[\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \quad (9.17)$$

$$\mathbf{F}_{DV1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) = ie^{i\kappa'} [F_s'^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) \text{sen} \beta' + \cos \beta' F_p'^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)] \mathbf{j} + [\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}, \quad (9.18)$$

$$\mathbf{F}_{DH4}^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \mathbf{i}' + i[\mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \cdot \mathbf{j}'] \mathbf{j}', \quad (9.19)$$

$$\mathbf{F}_{DV4}^{(+)}(\mathbf{r}'_4, t'_4) = iF_r^{(+)}(\mathbf{r}'_4, t'_4) \mathbf{j}' + [\mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}'_4, t'_4) \cdot \mathbf{i}'] \mathbf{i}'. \quad (9.20)$$

Las ecuaciones (9.13) a (9.20) corresponden al valor del campo eléctrico en todos los detectores de la figura 9.3, para cualquier valor de β , β' , κ y κ' . A continuación, con objeto de centrarnos en la situación dada por la ecuación (9.1), particularizaremos para el caso $\beta = \beta' = 0$ y $\kappa = \kappa' = \pi$. Tenemos

$$\mathbf{F}_{DH2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_q'^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) + F_s^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \right] \mathbf{i} + i[\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \quad (9.21)$$

$$\mathbf{F}_{DV2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[iF_r'^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) - F_p^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \right] \mathbf{j} + [\mathbf{F}_{ZPF2}^{(+)}(\mathbf{r}'_2, t'_2) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i}, \quad (9.22)$$

$$\mathbf{F}_{DH3}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_q'^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) + iF_s^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \right] \mathbf{i}' + i[\mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \cdot \mathbf{j}'] \mathbf{j}', \quad (9.23)$$

$$\mathbf{F}_{DV3}^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[F_r'^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) - iF_p^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) \right] \mathbf{j}' + [\mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}'_3, t'_3) \cdot \mathbf{i}'] \mathbf{i}', \quad (9.24)$$

junto con

$$\mathbf{F}_{DH1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) = F_s'^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{i} + i[\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \quad (9.25)$$

$$\mathbf{F}_{DV1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) = -iF_p'^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1)\mathbf{j} + [\mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{t}'_1) \cdot \mathbf{i}]\mathbf{i}. \quad (9.26)$$

y las ecuaciones (9.19) y (9.20), que no sufren modificación.

9.2.3. Intercambio de entrelazamiento y correlaciones cuádruples

Ahora estamos en disposición de entender el intercambio de entrelazamiento. Observando las ecuaciones (9.19) a (9.26). Podemos establecer cuáles son las amplitudes que están correlacionadas: $\mathbf{F}_{DH2}^{(+)}$ está correlacionado con $\mathbf{F}_{DV1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{DV4}^{(+)}$; $\mathbf{F}_{DV2}^{(+)}$ con $\mathbf{F}_{DH1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{DH4}^{(+)}$; $\mathbf{F}_{DH3}^{(+)}$ con $\mathbf{F}_{DV1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{DV4}^{(+)}$, y finalmente, $\mathbf{F}_{DV3}^{(+)}$ está correlacionado con $\mathbf{F}_{DH1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{DH4}^{(+)}$. A partir de ahora consideraremos la situación ideal donde todos los tiempos son iguales, y también existe un camino idéntico desde las fuentes a los distintos detectores. Ignoraremos por simplicidad el argumento espacio temporal, dado que todas las correlaciones cruzadas se reducen a la correspondiente correlación en la posición que define cada frente, en un mismo instante. Por otro lado, como a cada detector llegan las dos componentes de polarización ($x \equiv horizontal$, y $\equiv vertical$), y la componente correspondiente a la polarización perpendicular a la que define cada detector corresponde a la radiación de punto cero, que no guarda correlación con ninguna otra amplitud, las amplitudes correlacionadas son:

$$\langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV1,y}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_q'^{(+)} F_p'^{(+)} \rangle, \quad (9.27)$$

$$\langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.28)$$

$$\langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH1,x}^{(+)} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \langle F_r'^{(+)} F_s'^{(+)} \rangle, \quad (9.29)$$

$$\langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.30)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV1,y}^{(+)} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_q'^{(+)} F_p'^{(+)} \rangle, \quad (9.31)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.32)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH1,x}^{(+)} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \langle F_r'^{(+)} F_s'^{(+)} \rangle, \quad (9.33)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.34)$$

no existiendo ninguna correlación asociada a la combinaciones (1, 2) y (2, 3). Este conjunto de correlaciones da cuenta de la situación que describe la ecuación (9.1), donde el colapso producido tras la medida de Bell en los fotones 2 y 3 produce una transferencia de entrelazamiento a los fotones 1 y 4. Por un lado, aplicando la expresión (4.69) para la probabilidad conjunta, es sencillo obtener el resultado:

$$\frac{P_{DH_i, DV_j}}{K_{DH_i} K_{DV_j}} = \frac{g^2 |V|^2}{4}, \quad (9.35)$$

donde $i \neq j$, y $(i, j) \neq (1, 4), (i, j) \neq (2, 3)$. El intercambio de entrelazamiento, surge a partir del colapso del vector de estado $|\Psi\rangle_{1234}$ a uno de los cuatro términos que aparecen en la ecuación (9.2) tras la medida de Bell de las partículas 2 y 3.

El formalismo de Wigner aporta una interpretación complementaria a la anterior. Para verlo, tendremos en cuenta la probabilidad cuádruple se expresa a partir de correlaciones cuádruples del tipo² $\langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle$. Al tratarse de procesos gaussianos, éstas se expresan siempre a partir de correlaciones cruzadas, de modo que:

$$\begin{aligned} \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle &= \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{b,\lambda'}^{(+)} \rangle \langle F_{c,\lambda''}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle + \\ &+ \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} \rangle \langle F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle + \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle \langle F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Examinemos la situación de la figura 9.3, teniendo en cuenta que a es una etiqueta para los detectores en la zona del haz 1, b se refiere a $3'$ (detectores DH2 y DV2), y c y d hacen referencia a los detectores en la zona de los haces 2 (DH3 y DV3) y 4 (DH4 y DV4), respectivamente. Sabiendo que 1 y 4 están descorrelacionados, así como 2 y 3, vemos que el último sumando de (9.36) es nulo, de modo que

$$\langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle = \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{b,\lambda'}^{(-)} \rangle \langle F_{c,\lambda''}^{(-)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle + \langle F_{a,\lambda}^{(+)} F_{c,\lambda''}^{(+)} \rangle \langle F_{b,\lambda'}^{(+)} F_{d,\lambda'''}^{(+)} \rangle, \quad (9.37)$$

lo que muestra que la correlación cuádruple es, en general, no nula, aún cuando haya 1 ó 2 parejas de detectores, cuyas amplitudes no guardan ninguna relación de correlación.

Analizaremos a continuación las correlaciones cuádruples que dan lugar a cada uno de los sumandos de (9.1):

1. Analicemos en primer lugar el sumando $(1/\sqrt{2})|\psi^+\rangle_{14} \otimes |\psi^+\rangle_{23}$. Hemos de calcular las correlaciones cuádruples siguientes:

$$\begin{aligned} &\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \\ &\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Teniendo en cuenta (9.37), y que las correlaciones correspondientes a la misma polariza-

²Véase la ecuación (16) del Anexo B.

ción son nulas, llegamos fácilmente a:

$$\begin{aligned} \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle &= \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle \\ &= -\frac{i}{2} \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (9.39)$$

$$\begin{aligned} \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,x}^{(+)} \right\rangle &= \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \\ &= -\frac{i}{2} \left\langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \right\rangle \left\langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Las probabilidades $P_{DH1,DH2,DV2,DV4}$, $P_{DH1,DH3,DV3,DV4}$, $P_{DV1,DH2,DV2,DH4}$ y $P_{DV1,DH3,DV3,DH4}$ son todas iguales a $1/16$ en el caso ideal (ver la ecuación (7.9)). Aunque la expresión (16), del Anexo B, indica que la probabilidad cuádruple es una suma de 16 términos cuando se tienen en cuenta todos los valores de los índices de polarización λ , λ' , λ'' y λ''' , en este caso 15 sumandos son nulos, justamente aquellos que contienen una amplitud que proviene del punto cero que entra en el canal vacío del PBS. El único término no nulo es el correspondiente a una de las correlaciones cuádruples en (9.39) y (9.40). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{P_{DV1,DH3,DV3,DH4}}{K_{DV1} K_{DH3} K_{DV3} K_{DH4}} &= \sum_{\lambda=x,y} \sum_{\lambda'=x,y} \sum_{\lambda''=x,y} \sum_{\lambda'''=x,y} \left| \left\langle F_{DV1,\lambda}^{(+)} F_{DH3,\lambda'}^{(+)} F_{DV3,\lambda''}^{(+)} F_{DH4,\lambda'''}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2 \\ &+ \left| \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Como podemos ver, sólo un término es distinto de cero.

2. La situación correspondiente al sumando $(-1/\sqrt{2})|\psi^-\rangle_{14} \otimes |\psi^-\rangle_{23}$ da lugar a las mismas detecciones en los detectores 1 y 4, en donde las polarizaciones son diferentes. Sin embargo, hay una diferencia en las correlaciones cuádruples respecto a las ecuaciones (9.39) y (9.40), como veremos a continuación. En este caso, hemos de considerar las correlaciones cuádruples siguientes:

$$\begin{aligned} & \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle, \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle, \\ & \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle, \left\langle F_{DV1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (9.42)$$

siendo:

$$\begin{aligned} & \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \{F_{DV4,y}^{(+)}\} \right\rangle = - \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle \\ & = -\frac{1}{2} \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = - \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \\ & = \frac{1}{2} \left\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \right\rangle \left\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Nótese que ahora hay una diferencia de signos en las dos correlaciones que dan lugar a una detección conjunta concreta en 1 y 4, como puede observarse a través de (9.43) y (9.44). Sin embargo, es sencillo ver que, cada una de las probabilidades cuádruples siguen siendo, en el caso ideal, iguales a 1/16.

3. Como paso previo al análisis de los dos últimos sumandos de (9.2) en la representación de Wigner, demostraremos que las correlaciones cuádruples correspondientes a la misma polarización en los detectores 2 y 3 son nulas, es decir:

$$\left\langle \{F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)}\} \right\rangle = \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle = 0. \quad (9.45)$$

Haciendo uso de (9.37) y las ecuaciones (9.27) a (9.34), tenemos:

$$\begin{aligned} & \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \\ & = \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} \right\rangle \left\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle + \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \right\rangle \left\langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle \\ & = \frac{-1}{2} \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle \left\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \right\rangle - \frac{i^2}{2} \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle \left\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Análogamente:

$$\left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle = \frac{-1}{2} (1 + i^2) \left\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \right\rangle \left\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \right\rangle = 0. \quad (9.47)$$

Llegados a este punto, es necesario comparar los resultados (9.46) y (9.47) con las ecuaciones (2.16) y (2.17) de la referencia [84] o las ecuaciones (8.13) y (8.14) del capítulo 8. En aquella situación, la cancelación entre la contribución de las componentes transmi-

tidas en el BS y las componentes reflejadas, hacía imposible una detección conjunta en detectores correspondientes a la misma polarización, aún cuando los dos haces incidentes en el BS están correlacionados. En este caso, los haces 2 y 3 están descorrelacionados, y lo que garantizan las ecuaciones (9.46) y (9.47) es que no es posible una detección cuádruple caracterizada por la misma polarización en los detectores 2 y 3. De nuevo, hay una cancelación debido a la acción del BS, a través del factor $(+i^2/2)$ (dos reflexiones) y del factor $1/2$ (dos transmisiones), pero esta vez se trata del producto de correlaciones de segundo orden en las que intervienen directamente las amplitudes de los haces 1 y 4, y no sólo de los haces que llegan al BS, tal y como sucede en la referencia [84].

Para completar nuestro análisis, estudiaremos las situaciones que dan lugar a una doble detección en uno de los detectores, correspondientes a la zona 2 ó 3. Esto corresponde al cálculo de las 4 correlaciones cuádruples del tipo $\langle F_a^{(+)} F_b^{(+)} F_b^{(+)} F_c^{(+)} \rangle$, donde una de las amplitudes tiene la misma etiqueta. En este caso

$$b \equiv DH2, x; DV2, y; DH3, x; DV3, y, \quad (9.48)$$

y las letras a y c se refieren a los detectores de las zonas 1 y 4, respectivamente, con el mismo valor de polarización, diferente al que aparezca en la “etiqueta” b . Tenemos:

$$\begin{aligned} \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= 2 \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= i \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} \hat{F}_r^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= 2 \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= i \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (9.50)$$

y, análogamente:

$$\begin{aligned} \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle \\ &= i \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Observando (9.49) y (9.50) deducimos que las correlaciones que dan lugar a detecciones en la zona 1 y la zona 4 correspondientes al mismo valor de la polarización (vertical), donde se produce una doble detección en el detector DH2 o en el DH3 son idénticas; lo mismo sucede en el caso donde las detecciones correspondientes a las zonas 1 y 4 se producen en los detectores de polarización vertical, como puede verse a partir de (9.51).

Es fácil ver, a partir de (16) del anexo B, que cada una de las probabilidades cuádruples del tipo P_{abbc} es igual a $P_{abbc} = \frac{1}{8} k_a k_b^2 k_c$ que son idénticas a las probabilidades anteriores en cada amplitud, por lo que estos estados son indistinguibles, con lo que se obtiene para cada caso $P_{abbc} = \frac{k_a k_b^2 k_c}{8}$, lo que justifica, en el caso ideal $k_a = k_b = k_c = 1$, que los

sumandos $1/\sqrt{2}(|\phi^+\rangle_{14} \otimes |\phi^+\rangle_{23})$ y $1/\sqrt{2}(|\phi^-\rangle_{14} \otimes |\phi^-\rangle_{23})$ den lugar, cada uno de ellos, a una probabilidad³ igual a 1/4. Sin embargo a diferencia de las otras dos contribuciones (ver (9.39), (9.40) y (9.43), (9.44)) que son distinguibles, las ecuaciones (9.49), (9.50) y (9.51) nos muestran que estas últimas no lo son.

En el caso del intercambio de entrelazamiento hay 8 conjuntos de modos de punto cero, cuatro por cada cristal, que dan lugar a los haces 1, 2, 3 y 4. Sin embargo, hay cuatro canales vacíos, cada uno de ellos correspondiendo a un separador de polarización que dan lugar cuatro entradas de ruido correspondientes a la radiación de punto cero. La presencia de ruido en el medidor de la base de Bell correspondiente a los canales 2' y 3' está relacionada con el hecho de que sólo hay intercambio de entrelazamiento detectable en el 50% de los casos, para el montaje analizado.

9.2.4. Protocolo de teleportación de entrelazamiento

El estudio anterior nos permite entender con facilidad el concepto de intercambio de entrelazamiento. Para ello, nótese que las ecuaciones (9.43) y (9.44) muestran las relaciones de correlación que caracterizan un intercambio de las propiedades del estado singlete de los haces (1, 2) y (3, 4), a los haces (2, 3) y (1, 4), tal y como se refleja de la ecuación (9.2). Se trata de un *intercambio de entrelazamiento*, que se produce en un 25% de los casos.

Por otro lado, las ecuaciones (9.39) y (9.40) establecen las propiedades de correlación características del cambio, en la medida de Bell de los haces 2 y 3, al estado $|\Psi_{23}^+\rangle \otimes |\Psi_{14}^+\rangle$. Nótese sin embargo, que un simple cambio de fase $\alpha = \pi$ entre las componentes verticales y horizontales en el haz 4, lo que produciría el cambio $F_r^{(+)} \rightarrow -F_r^{(+)}$, produciría un cambio de signo en la ecuación (9.39), lo que reflejaría el cambio $|\Psi_{23}^+\rangle \otimes |\Psi_{14}^+\rangle \rightarrow |\Psi_{23}^+\rangle \otimes |\Psi_{14}^-\rangle$. Alicia sólo tiene que informar a Bob del resultado, y Bob modificaría el haz 4 con el objeto de que los haces 1 y 4 se comportasen exactamente igual que en el caso anterior.

Es importante señalar que esta modificación de la fase actúa directamente sobre las amplitudes del campo de vacío que entra en el cristal, de tal forma que la operación unitaria que debe hacer Bob para conseguir un cierto estado entrelazado, cuando se trabaja en el espacio de Hilbert, está íntimamente ligado a la modificación de las propiedades del vacío electromagnético a través de la acción de aparatos ópticos que funcionan en estos experimentos, del mismo modo que en óptica clásica.

³El uso de la ecuación (16) para el caso en que dos de las etiquetas, por ejemplo $b=c$ coinciden se justifica porque los 105 términos que aparecen al aplicar (2) sólo contribuyen 15 sumandos (ver 14). En este caso, a diferencia de la situación que se describe en el cálculo de la probabilidad cuádruple, donde todos los detectores son distintos, y 90 contribuciones son nulas debido a la ecuación (3), el hecho de que (ver 3) $\langle F_{\alpha,\lambda}^{(+)} F_{\beta,\lambda'}^{(-)} \rangle = 0$, $\forall \lambda, \lambda'$ si $\alpha \neq \beta$, y $\langle F_{\alpha,\lambda}^{(+)} F_{\beta,\lambda'}^{(-)} \rangle$ es del orden de g^2 si $\alpha = \beta$ y $\lambda = \lambda'$, implica que, parte de los 90 sumandos que se eliminan son nulos, y parte de ellos despreciables (de orden mayor que g^4) por lo que se recupera el resultado dado en (16).

9.3. Experimento de Teletransporte de Innsbruck en la WRHP

9.3.1. Introducción

El estudio realizado hasta ahora, sobre el intercambio de entrelazamiento, nos va a permitir abordar el teletransporte, y entenderlo utilizando para ello los cálculos de la sección anterior. Nos vamos a centrar en principio en el experimento de Innsbruck, y en la última sección estudiaremos el experimento de Roma.

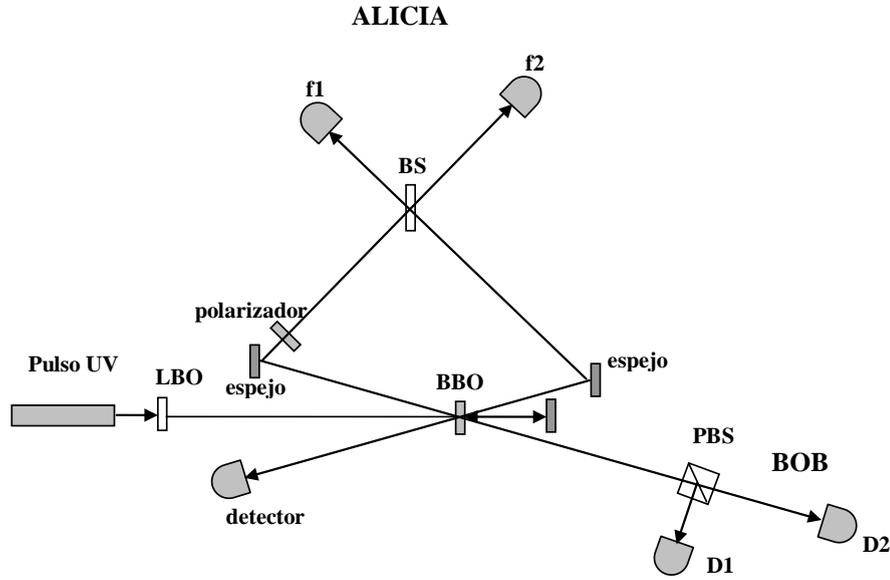


Figura 9.4: Experimento de teletransportación de Innsbruck.

Veamos con el formalismo de Wigner el experimento de Innsbruck, para entenderlo con más claridad supongamos que colocamos un polarizador horizontal en el haz 2 de la figura 9.5. Esto equivale a eliminar $F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ de la ecuación (9.8), y añadir una amplitud de punto cero, correspondiente a la parte reflejada del punto cero, que entra por el segundo canal del polarizador, y que está relacionado con la conservación de las relaciones de conmutación del operador campo eléctrico en el formalismo del espacio de Hilbert:

$$\mathbf{F}'_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}' + \mathbf{F}'_{ZPF, pol}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.52)$$

donde el punto cero está descorrelacionado con el resto de amplitudes que intervienen en el experimento.

Todas las expresiones que van desde la ecuación (9.7) hasta la ecuación (9.26) siguen siendo válidas, salvo que en lugar de $F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ sólo hay que poner una amplitud de punto cero. Las correlaciones que aparecen en (9.29) y la (9.33) son nulas y el resto permanece igual.

De las 4 correlaciones que corresponden al termino $\frac{1}{2}|\psi^+\rangle_{14}|\psi^+\rangle_{23}$, dos de ellas se anulan,

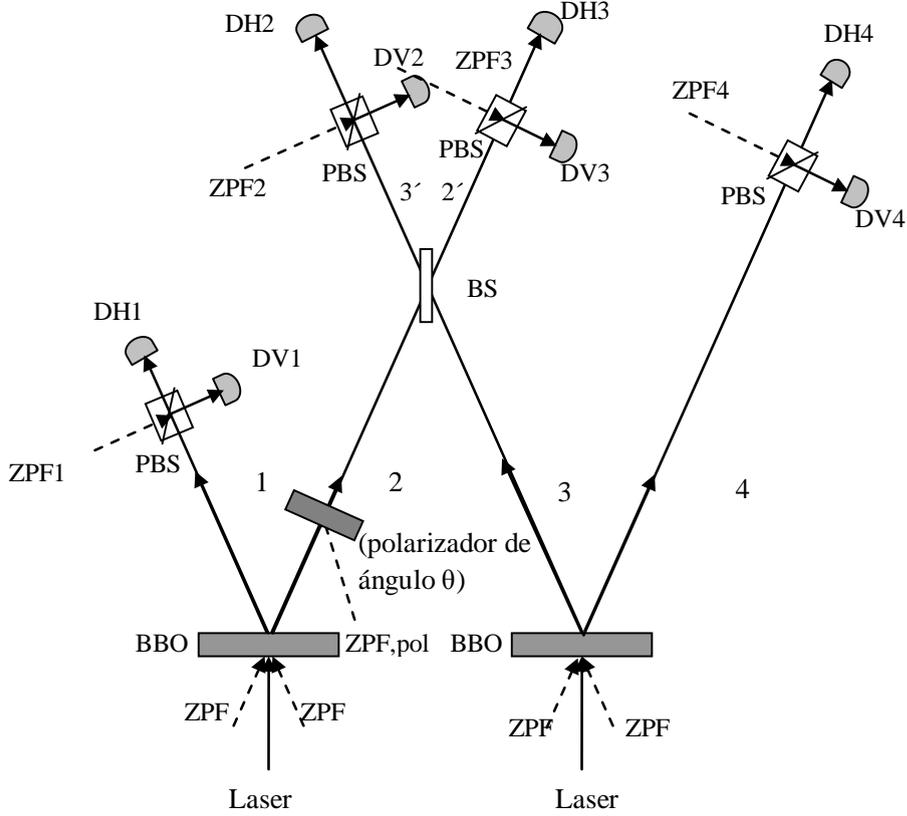


Figura 9.5: Teletransporte mediante polarizador lineal en el haz 2.

justo aquellas donde la polarización en el haz 1 es horizontal y la correspondiente al haz 4 es vertical:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = 0, \quad (9.53)$$

mientras que las correlaciones (9.40) siguen valiendo lo mismo.

Por otra parte, de las 4 correlaciones que corresponden al término $\frac{1}{2}|\psi^-\rangle_{14}|\psi^-\rangle_{23}$, las correspondientes a la ecuación (9.43) se anulan:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = 0, \quad (9.54)$$

lo que implica de nuevo que no se pueden producir situaciones en las que en el haz 1 se detecte polarización horizontal y en el haz 4 polarización vertical. Las correlaciones dadas por (9.44) permanecen inalteradas.

En lo que se refieren a la contribución de los dos últimos sumandos de la ecuación (9.2) la ecuación (9.45) sigue siendo válida, así como las ecuaciones (9.49) y (9.50) (en los que las amplitudes correspondientes a los haces 1 y 4 son verticales); sin embargo las correlaciones

dadas por (9.51) (1 y 4 horizontales) se anulan:

$$\left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = 0. \quad (9.55)$$

A partir de (9.53), (9.40), (9.54) y (9.43) deducimos que el haz 4 sólo puede tener polarización horizontal en el caso de los términos $\pm \frac{1}{2} |\psi^\pm\rangle_{14} |\psi^\pm\rangle_{23}$, mientras que en el caso de los términos $\pm \frac{1}{2} |\phi^\pm\rangle_{14} |\phi^\pm\rangle_{23}$, el haz 4 sólo puede tener polarización vertical, como se puede apreciar a partir de (9.55) y (9.49) y (9.50). Nótese que estos resultados son consistentes con la situación que se describe en la ecuación (2.38). Podemos afirmar que el origen del teletransporte se halla en las correlaciones cuádruples correspondientes a los haces 1, 2', 3' y 4, las cuales se modifican al introducir un polarizador en el haz 2, lo que corresponde a una medida proyectiva que colapsa el vector de estado, dado por la ecuación (2.38), a la situación descrita en la ecuación (2.38) (habría que redefinir los subíndices en (2.38) para que no hubiese confusión en los números). Un razonamiento similar, colocando esta vez un polarizador vertical en el haz 2, nos lleva a que desaparece $F_q^{'+}(\mathbf{r}, t)$ de la ecuación (9.8), y se sustituye por una amplitud de punto cero que se refleja en el otro canal del polarizador. Las correlaciones dadas en la ecuación (9.40) se anularán:

$$\left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = 0, \quad (9.56)$$

mientras que las de la ecuación (9.39) quedarían igual, y las dadas por la ecuación (9.44) se anulan

$$\left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \right\rangle = 0 \quad (9.57)$$

mientras que los de la ecuación (9.43) quedarían igual.

En estos casos, los términos $\pm \frac{1}{2} |\psi^\pm\rangle_{14} |\psi^\pm\rangle_{23}$ corresponden a una polarización vertical del haz 4. Por otro lado las correlaciones (9.49) y (9.50) se anularían

$$\left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle = \left\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \right\rangle = 0 \quad (9.58)$$

mientras que las dadas en (9.51) quedarían igual, lo que corresponde al hecho de que en el caso de los sumandos $\pm \frac{1}{2} |\phi^\pm\rangle_{14} |\phi^\pm\rangle_{23}$, la polarización correspondiente al haz sería horizontal.

De nuevo, esto se ajusta a lo establecido en la ecuación (2.38).

Hasta ahora hemos visto que si se inserta en el haz 2 un polarizador horizontal o vertical, las 4 correlaciones cuádruples (el resto son nulas) correspondientes a los estados de Bell $|\Psi_{23}^- \rangle$ y $|\Psi_{23}^+ \rangle$, contienen una información definida sobre la polarización correspondiente al haz 4, siendo ésta la misma que corresponde al haz 2, una vez pasado el polarizador. Por otro lado, las correlaciones correspondientes a los estados $|\Phi_{23}^- \rangle$ y $|\Phi_{23}^+ \rangle$, definen una polarización ortogonal para el haz 4, de la correspondiente al haz 2 una vez pasado el polarizador. En estos casos, un rotador de polarización de 90° transformaría la polarización del haz 4 a la misma del haz

2. Todo esto es consistente con la situación descrita por la ecuación (2.38), y generalizable al caso en que el ángulo del polarizador sea arbitrario. Esto es así, porque las expresiones de los haces (ecuaciones (9.7) a (9.10)) son las mismas, independientemente de la base que se utilice para describirlos. Si usamos una base correspondiente a la dirección de proyección del polarizador, y la ortogonal, el desarrollo anterior nos lleva a que en los casos $|\Psi_{23}^{\pm}\rangle$ se produce un teletransporte de la polarización del haz 2 al haz 4, y en los casos $|\Phi_{23}^{\pm}\rangle$ de la polarización ortogonal. Nótese, sin embargo, que esta explicación no ha considerado la fase, y por tanto no hemos explicado aún el protocolo de teletransporte en su máxima generalidad, tal y como se deriva de la ecuación (2.38).

9.3.2. Campo eléctrico en los detectores y correlaciones cruzadas

Consideremos la situación de la figura 9.5. Un polarizador de ángulo θ modifica las propiedades de polarización del haz 2, lo que equivale en el espacio de Hilbert a una medida proyectiva [85]. Por otro lado, en el haz 4 colocaremos un rotador de polarización caracterizado por un ángulo θ' , y un cambio de fase α entre las componentes vertical y horizontal. Estos elementos ópticos representan las transformaciones unitarias necesarias para que en el protocolo de teletransporte, una vez que Alicia ha informado a Bob de cuál es el resultado que ha obtenido en la medida de Bell de los fotones 2 y 3, Bob reproduzca el estado que se quiere teletransportar⁴.

Consideraremos la situación $\beta = \beta' = 0$, $\kappa = \kappa' = \pi$ en los haces (9.7) a (9.10), lo que corresponde en formalismo de Wigner al estado $|\psi_{12}^-\rangle \otimes |\psi_{34}^-\rangle$. Por simplicidad, no consideraremos la dependencia con \mathbf{r} y con t , lo que corresponde a una situación en la que todos los caminos recorridos por los distintos haces, hasta llegar a los detectores, son idénticos, y todas las correlaciones se consideran en el mismo instante⁵.

La expresión de los haces a la salida de las fuentes es:

$$\mathbf{F}_1^{(+)} = F_s'^{(+)}\mathbf{i} - F_p'^{(+)}\mathbf{j}, \quad (9.59)$$

$$\mathbf{F}_2^{(+)} = F_q'^{(+)}\mathbf{i}' + F_r'^{(+)}\mathbf{j}', \quad (9.60)$$

$$\mathbf{F}_3^{(+)} = F_s^{(+)}\mathbf{i} - F_p^{(+)}\mathbf{j}, \quad (9.61)$$

$$\mathbf{F}_4^{(+)} = F_q^{(+)}\mathbf{i}' + F_r^{(+)}\mathbf{j}'. \quad (9.62)$$

Consideremos a continuación la acción de un polarizador de ángulo θ respecto a la dirección

⁴Este estado está representado en la función de Wigner por el haz 2 una vez que se ha aplicado el polarizador.

⁵Un análisis más detallado debe considerar las ventanas de detección en los detectores, aunque el estudio de esta situación ideal será suficiente para nuestros propósitos.

horizontal \mathbf{i}' en el haz 2. Teniendo en cuenta la radiación de punto cero, que entra en el segundo canal del polarizador $\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)}$, y que guarda relación con la conservación de las relaciones de conmutación de los operadores campo en el formalismo de Hilbert, la expresión del haz 2 modificado es:

$$\mathbf{F}'_2^{(+)} = F^{(+)}(\cos\theta\mathbf{i}' + \sin\theta\mathbf{j}') + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} ; \quad F^{(+)} = F_q^{(+)}\cos\theta + F_r^{(+)}\sin\theta, \quad (9.63)$$

donde $\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)}$ es una amplitud de punto cero relacionada con el punto cero incidente en el polarizador. Hemos definido la amplitud $F^{(+)} = F_q^{(+)}\cos\theta + F_r^{(+)}\sin\theta$ con objeto de simplificar las expresiones y los cálculos. Como ya se analizó en la referencia [85], la acción del polarizador da lugar a una modificación de las propiedades de correlación, en el sentido de que los módulos de dichas correlaciones disminuyen. El haz descrito por la ecuación (9.63) corresponde a una polarización definida formando un ángulo θ con la horizontal. Podemos considerar que la situación que se plantea en este desarrollo es similar a la correspondiente a la descripción del teletransporte en el espacio de Hilbert que se genera a partir de las ecuaciones (2.12), (2.12) y (2.38). La diferencia está en que en este desarrollo estamos considerando dos parejas entrelazadas y una medida proyectiva sobre uno de los fotones, lo que hace que disminuyan las propiedades de correlación, es decir, en el desarrollo realizado en el espacio de Hilbert, el estado (2.12) es el estado de un fotón, mientras que en la ecuación (9.63) la dependencia de $F^{(+)}$ con el seno y el coseno de θ hace que la probabilidad de detección tras el polarizador, independientemente del valor de la polarización, sea inferior a la unidad (el fotón puede atravesar o no el polarizador).

Tras el espejo semitransparente, BS, la expresión del campo correspondiente al haz $\mathbf{F}_{3'}^{(+)}$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3'}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\mathbf{F}'_2^{(+)} + \mathbf{F}_3^{(+)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[i(F^{(+)}\cos\theta\mathbf{i} + F^{(+)}\sin\theta\mathbf{j}) + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} + F_s^{(+)}\mathbf{i} - F_p^{(+)}\mathbf{j}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(iF^{(+)}\cos\theta + F_s^{(+)}) + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}]\mathbf{i} + (iF^{(+)}\sin\theta - F_p^{(+)} + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}, \quad (9.64) \end{aligned}$$

y un cálculo similar para el haz $\mathbf{F}_{2'}^{(+)}$ nos da:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2'}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{F}'_2^{(+)} + i\mathbf{F}_3^{(+)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(F^{(+)}\cos\theta + iF_s^{(+)}) + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}]\mathbf{i}' + (F^{(+)}\sin\theta - iF_p^{(+)} + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}', \quad (9.65) \end{aligned}$$

donde, en este caso, no es necesario considerar la acción del punto cero en el divisor de haz, puesto que no hay ningún canal vacío [84].

Vayamos ahora al haz 4. Las transformaciones producidas por el rotador de polarización y el cambio de fase dan lugar a la expresión siguiente, para el haz que incide en el separador de polarización PBS4:

$$\mathbf{F}_{4'}^{(+)} = (F_q^{(+)} \cos\theta' - F_r^{(+)} \text{sen}\theta') \mathbf{i}' + e^{i\alpha} (F_q^{(+)} \text{sen}\theta' + F_r^{(+)} \cos\theta') \mathbf{j}'. \quad (9.66)$$

Consideremos finalmente la acción de los separadores de polarización PBS1, PBS2, PBS3 y PBS4. Sea $\mathbf{F}_{ZPF,PBSi}^{(+)}$, ($i = 1, 2, 3, 4$), la amplitud de punto cero que entra por el canal vacío de cada separador. Consideraremos que cada separador transmite la componente horizontal y refleja la vertical. La expresión del campo eléctrico en cada detector se obtiene, fácilmente, a partir de las ecuaciones (9.59), (9.64), (9.65) y (9.66). Éstas son:

$$\mathbf{F}_{DH1}^{(+)} = F_s'^{(+)} \mathbf{i} + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS1}^{(+)} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}, \quad (9.67)$$

$$\mathbf{F}_{DV1}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS1}^{(+)} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} - iF_p'^{(+)} \mathbf{j}, \quad (9.68)$$

$$\mathbf{F}_{DH2}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [iF^{(+)} \cos\theta + F_s^{(+)} + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i} + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS2}^{(+)} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}, \quad (9.69)$$

$$\mathbf{F}_{DV2}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS2}^{(+)} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + \frac{i}{\sqrt{2}} [iF^{(+)} \text{sen}\theta - F_p^{(+)} + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j}, \quad (9.70)$$

$$\mathbf{F}_{DH3}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [F^{(+)} \cos\theta + iF_s^{(+)} + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}'] \mathbf{i}' + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS3}^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}', \quad (9.71)$$

$$\mathbf{F}_{DV3}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS3}^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + \frac{i}{\sqrt{2}} [F^{(+)} \text{sen}\theta - iF_p^{(+)} + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j}'] \mathbf{j}', \quad (9.72)$$

$$\mathbf{F}_{DH4}^{(+)} = (F_q^{(+)} \cos\theta' - F_r^{(+)} \text{sen}\theta') \mathbf{i}' + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS4}^{(+)} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}', \quad (9.73)$$

$$\mathbf{F}_{DV4}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS4}^{(+)} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + ie^{i\alpha} (F_q^{(+)} \text{sen}\theta' + F_r^{(+)} \cos\theta') \mathbf{j}'. \quad (9.74)$$

Teniendo en cuenta que las amplitudes de punto cero, que entran en cada separador de polarización, no están correlacionadas con ninguna otra amplitud, su contribución al cálculo de probabilidades de detección cuádruple será nula. Lo mismo ocurre con el punto cero que entra en el polarizador. Sin embargo, estas amplitudes son esenciales en la teoría, y en la interpretación de los resultados de los experimentos de comunicación cuántica con la función de Wigner, tal y como hemos visto en trabajos anteriores [85, 84].

De cara al análisis que vamos a hacer a continuación, necesitamos la componente del campo

en cada detector, correspondiente a su misma polarización. Añadiremos entonces el subíndice x (y) para referirnos a la componente horizontal (vertical) del campo en cada detector. Tenemos⁶:

$$F_{DH1,x}^{(+)} = F_s'^{(+)}, \quad (9.75)$$

$$F_{DV1,y}^{(+)} = -iF_p'^{(+)}, \quad (9.76)$$

$$F_{DH2,x}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}\cos\theta + F_s^{(+)} + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}], \quad (9.77)$$

$$F_{DV2,y}^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}\sen\theta - F_p^{(+)} + i\mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j}], \quad (9.78)$$

$$F_{DH3,x}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[F^{(+)}\cos\theta + iF_s^{(+)} + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{i}'], \quad (9.79)$$

$$F_{DV3,y}^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}}[F^{(+)}\sen\theta - iF_p^{(+)} + \mathbf{F}_{ZPFR,pol}^{(+)} \cdot \mathbf{j}'], \quad (9.80)$$

$$F_{DH4,x}^{(+)} = F_q^{(+)}\cos\theta' - F_r^{(+)}\sen\theta', \quad (9.81)$$

$$F_{DV4,y}^{(+)} = ie^{i\alpha}(F_q^{(+)}\sen\theta' + F_r^{(+)}\cos\theta'), \quad (9.82)$$

donde $F^{(+)}$ está dado en la ecuación (9.63).

Dado que hay 8 detectores, hay en principio 8 sobre 2 correlaciones dobles, es decir, $8!/(2!(8-2)!) = 28$. Teniendo en cuenta que las 8 correspondientes a correlaciones $1 \leftrightarrow 4$ y $2 \leftrightarrow 3$ son nulas, que corresponden a haces provenientes de distintas fuentes, y que cada correlación entre las amplitudes horizontal y vertical de la misma zona, 1, 2, 3 y 4 es nula, quedan las siguientes 16 correlaciones dobles no nulas, a partir de las cuales se calcularán todas las correlaciones cuádruples⁷:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle = \frac{i\cos\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s'^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{i\cos\theta\sen\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.83)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} \rangle = \frac{-\sen\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s'^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{-\sen^2\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.84)$$

⁶Aunque pueda parecer redundante la notación H, x o V, y , nótese que la amplitud en cada detector tiene una componente de la misma polarización que define el detector, y otra ortogonal, correspondiente al vacío que entra por el otro canal. Este vacío es un elemento fundamental, como ya hemos mencionado anteriormente, aún cuando la detección lo sustrae eficientemente.

⁷Al tratarse de un proceso gaussiano, cualquier correlación de orden par se establece en base a las correlaciones dobles. Por ello, es fundamental cuantificar las correspondientes a esta situación.

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.85)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} \rangle = \frac{i\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{i\cos\theta\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.86)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} \rangle = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{\cos\theta\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.87)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle = \frac{i\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{i\text{sen}^2\theta}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.88)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} \rangle = \frac{-i\cos\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{-i\cos^2\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.89)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F^{(+)} \rangle = \frac{\cos\theta\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.90)$$

$$\langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{-\text{sen}\theta'}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.91)$$

$$\langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{i\cos\theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.92)$$

$$\langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{-i\cos\theta'}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.93)$$

$$\langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{\text{sen}\theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.94)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{-i\text{sen}\theta'}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.95)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{-\cos\theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.96)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{\cos\theta'}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.97)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{i\text{sen}\theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle. \quad (9.98)$$

De las expresiones anteriores es sencillo obtener las relaciones siguientes entre las correlaciones:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.99)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.100)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.101)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.102)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.103)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.104)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.105)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle. \quad (9.106)$$

9.3.3. Medida de Bell y correlaciones cuádruples

A continuación vamos a considerar las correlaciones cuádruples correspondientes a los distintos resultados que pueden darse en la medida de Bell de los fotones 2 y 3. El análisis a partir del espacio de Hilbert, nos proporciona una interpretación del teletransporte a través del postulado del colapso: si al estado descrito por la ecuación (2.38) se le hace una medida de Bell de las partículas 1 y 2 (haces 2 y 3 en este desarrollo), la partícula 3 (haz 4 en este desarrollo) queda en un estado que, una vez comunicado a Bob por parte de Alicia el resultado de la medida, Bob podrá modificar aplicando ciertas operaciones unitarias (rotación θ' y cambio de fase α) con objeto de reproducir exactamente el estado inicial de la partícula 1 (haz 2 en nuestro desarrollo).

El fenómeno del teletransporte, en el formalismo de Wigner, atiende a consideraciones hechas sobre las propiedades de correlación de las amplitudes que se propagan hacia los detectores, pasando por distintos elementos ópticos.

- Consideremos para comenzar la situación correspondiente al estado $|\psi_{2'3'}^-\rangle$, representada por las 8 correlaciones cuádruples siguientes:

$$\begin{aligned} & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \\ & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,x}^{(+)} \rangle, \\ & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle. \\ & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle. \end{aligned}$$

A partir de (2) y de las ecuaciones (9.99) a (9.106) es sencillo obtener las siguientes relaciones entre ellas:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.107)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.108)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.109)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle. \quad (9.110)$$

Las relaciones (9.107) y (9.109) son las mismas⁸ que aparecen en la primera igualdad de las ecuaciones (9.43) y (9.44). Las correlaciones correspondientes a una misma polarización en los detectores 1 y 4 son nulas en el desarrollo que hicimos en el intercambio de entrelazamiento, pero no en este caso. A continuación vamos a obtener estas correlaciones a partir de los parámetros θ , θ' y α :

$$\begin{aligned} & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \\ & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle + \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \\ & = \frac{-\text{sen}\theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle [\text{sen}\theta' \cos\theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle + \cos\theta' \text{sen}\theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \end{aligned} \quad (9.111)$$

$$\begin{aligned} & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \\ & \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle + \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \\ & = \frac{i\text{sen}\theta}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle [\cos\theta' \cos\theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle - \text{sen}\theta' \text{sen}\theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \end{aligned} \quad (9.112)$$

$$\begin{aligned} & \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \\ & \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle + \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \\ & = \frac{\cos\theta}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle [\cos\theta' \cos\theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle - \text{sen}\theta' \text{sen}\theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \end{aligned} \quad (9.113)$$

⁸Estas son las relaciones que caracterizan un intercambio de las propiedades de entrelazamiento, características del estado $|\psi_{ij}^- \rangle$, de los haces 3' y 2' a los haces 1 y 4.

$$\begin{aligned}
& \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \\
& \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} \rangle \langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle + \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} \rangle \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \\
& = \frac{i \cos \theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle [\text{sen} \theta' \cos \theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle + \text{sen} \theta \cos \theta' \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \quad (9.114)
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de las ecuaciones (9.83) a (9.98).

Si en las ecuaciones (9.111) a (9.113) hacemos $\theta' = 0$, $\alpha = 0$, obtenemos los resultados siguientes:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{-\text{sen}^2 \theta}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.115)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{i \text{sen} \theta \cos \theta}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.116)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{\cos^2 \theta}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.117)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{i \cos \theta \text{sen} \theta}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.118)$$

Las ecuaciones (9.115) y (9.117), junto con (9.107) y (9.109) constituyen relaciones similares a las ecuaciones (9.43) y (9.44), salvo los factores $\text{sen}^2 \theta$ y $\cos^2 \theta$, respectivamente. Si observamos la ecuación (9.117) vemos que del factor $\cos^2 \theta$, hay un $\cos \theta$ relacionado con la pérdida del módulo de las correlaciones en las que interviene $F_q'^{(+)}$, debido al paso por el polarizador; del mismo modo, del factor $\text{sen}^2 \theta$ de la ecuación (9.115), hay un término $\text{sen} \theta$ relacionado con la pérdida del módulo de las correlaciones en las que interviene $F_r'^{(+)}$. Nótese que el otro factor $\cos \theta$ aparece en la correlación correspondiente a la parte horizontal del haz 4, mientras que el factor $\text{sen} \theta$ corresponde a la correlación cuádruple donde la amplitud característica de la zona 4 es vertical.

Por otro lado, las ecuaciones (9.118) y (9.118) muestran que dada una detección en cada zona, lo cual es característico del singlete, hay una probabilidad no nula de que las detecciones en las zonas 1 y 4 correspondan a la misma polarización. Estas correlaciones se hacen máximas para el caso $\theta = 45^\circ$. Nótese que estos casos corresponden a situaciones en las que los fotones 1 y 4 quedan en un estado del tipo $|\phi_{14}^\pm\rangle$, situaciones que no se pueden distinguir a través del estudio de las correlaciones, lo que refleja que ambos estados son indistinguibles.

Hemos de señalar, para finalizar este primer análisis, que si, en el desarrollo del intercambio de entrelazamiento en el formalismo de Wigner, considerásemos la acción de un

polarizador de ángulo θ sobre el haz 4, de tal modo que con las ecuaciones (9.21) a (9.26) donde incluimos el haz 4 sin modificar podemos obtener las componentes ya modificadas, haciendo los cambios

$$F_q^{(+)} \longrightarrow F_q^{(+)} \cos^2 \theta + F_r^{(+)} \cos \theta \operatorname{sen} \theta,$$

$$F_r^{(+)} \longrightarrow F_r^{(+)} \operatorname{sen}^2 \theta + F_q^{(+)} \cos \theta \operatorname{sen} \theta, \quad (9.119)$$

las ecuaciones correspondientes a (9.43) y (9.44) serían exactamente iguales a (9.115) y (9.117).

Con esto llegamos a la conclusión de que las correlaciones cuádruples (9.115) y (9.117) que caracterizan al estado $|\psi_{2'3'}^-\rangle$ en la medida de Bell de los haces 2' y 3', contienen en sí mismas la esencia del teletransporte: considerando el haz 4, sin haber sido alterado por ningún elemento óptico, se comportaría a todos los efectos como un haz polarizado a un ángulo θ , en caso de que la medida de Bell sobre los haces 2' y 3' diese lugar a detecciones en DH2 y DV3, o en DH3 y DV2. En este caso Bob, tras ser informado por Alicia del resultado de la medida de Bell, no modificaría para nada el haz 4, lo que corresponde a $\theta' = 0$ y $\alpha = 0$. Para ello, es fundamental la detección previa en la zona 1, independientemente de la polarización, lo que da lugar a unas probabilidades de detección triple que estudiaremos en la sección siguiente.

- Analicemos a continuación las correlaciones que caracterizan al estado $|\psi_{2'3'}^+\rangle$:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle,$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle,$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle.$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle.$$

A partir de (2) y de las ecuaciones (9.99) a (9.106), es sencillo obtener las siguientes relaciones entre ellas:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle, \quad (9.120)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.121)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.122)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle. \quad (9.123)$$

Las relaciones (9.120) y (9.122) son las mismas que aparecen en la primera igualdad de las ecuaciones (9.39) y (9.40). Estas son las relaciones que caracterizan un intercambio de las propiedades de entrelazamiento, características del estado $|\psi_{ij}^+\rangle$, de los haces 3' y 2' a los haces 1 y 4. A continuación vamos a expresar las correlaciones a partir de los parámetros θ , θ' y α . Tenemos:

$$\begin{aligned} \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{i \text{sen} \theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle [\cos \theta \text{sen} \theta' \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle - \cos \theta' \text{sen} \theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \end{aligned} \quad (9.124)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{\text{sen} \theta}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle [\cos \theta \cos \theta' \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle + \text{sen} \theta' \text{sen} \theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle], \end{aligned} \quad (9.125)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{-i \cos \theta}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle [\cos \theta \cos \theta' \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle + \text{sen} \theta' \text{sen} \theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle]. \end{aligned} \quad (9.126)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{\cos \theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle [\cos \theta \text{sen} \theta' \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle - \cos \theta' \text{sen} \theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle]. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Haciendo $\theta' = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{-i \text{sen}^2 \theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (9.128)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{2} \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (9.129)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle$$

$$= \frac{-i\cos^2\theta}{2} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_p^{(+)} F_p^{(+)} \rangle. \quad (9.130)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle &= \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle \\ &= \frac{-\text{sen}\theta\cos\theta e^{i\alpha}}{2} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (9.131)$$

Es muy sencillo comprobar que, salvo un factor $-i$ que aparece en las 4 correlaciones anteriores, éstas son idénticas a las correlaciones (9.115), (9.116), (9.117) y (9.118). Es decir, la transformación $\theta' = 0$, $\alpha = \pi$ genera, salvo un factor constante, las mismas relaciones de correlación que en el caso anterior, en el que las propiedades del haz 2 tras pasar por el polarizador pasaban al haz 4, en caso de que la medida de Bell diese como resultado detecciones en DH2 y DV3, o en DV2 y en DH3. Por tanto, podemos afirmar que, en el caso de que la medida de Bell dé como resultado detecciones en DH2 y DV2, o en DH3 y DV3, la transformación $\theta' = 0$, $\alpha = \pi$ trae consigo el mismo comportamiento del haz 4 que en el caso anterior.

- Por último, estudiaremos la situación correspondiente a los estados $|\phi_{2'3'}^{\pm}\rangle$, los cuales son indistinguibles, tal y como se ha explicado con el uso de la función de Wigner en la referencia [84]. En esta situación, hay 16 correlaciones características, 4 por cada uno de los detectores de las zonas 2 y 3. Estas 16 correlaciones pueden representarse de forma compacta como $\langle F_{DZ1,z}^{(+)} F_{DUi,u}^{(+)} F_{DUi,u}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle$, donde $i = 2, 3$; $Z = H, V$; $U = H, V$; $W = H, V$; $z = x$ si $Z = H$; $z = y$ si $Z = V$; $u = x$ si $U = H$; $u = y$ si $U = V$; $w = x$ si $W = H$; $w = y$ si $W = V$. A partir de 2 tenemos:

$$\langle F_{DZ1,z}^{(+)} F_{DUi,u}^{(+)} F_{DUi,u}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle = 2 \langle F_{DZ1,z}^{(+)} F_{DUi,u}^{(+)} \rangle \langle F_{DUi,u}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle. \quad (9.132)$$

Usando las relaciones (9.99) a (9.106) puede demostrarse fácilmente que:

$$\langle F_{DZ1,z}^{(+)} F_{DU2,u}^{(+)} F_{DU2,u}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle = \langle F_{DZ1,z}^{(+)} F_{DU3,u}^{(+)} F_{DU3,u}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle, \quad (9.133)$$

de modo que de las 16 correlaciones hemos de calcular 8 de ellas, pues las 8 restantes son iguales.

Utilizando las relaciones (9.83) a (9.86), (9.91) a (9.94), y (9.133) tenemos:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -i\cos\theta\text{sen}\theta\text{sen}\theta' \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.134)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -ie^{i\alpha} \cot\theta' \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.135)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -\cos^2\theta \text{sen}\theta' \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle, \quad (9.136)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -ie^{i\alpha} \cot\theta' \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.137)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -i \text{sen}^2\theta \cos\theta' \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.138)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -ie^{i\alpha} \tan\theta' \langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.139)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \text{sen}\theta \cos\theta \cos\theta' \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle, \quad (9.140)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = ie^{i\alpha} \tan\theta' \langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle, \quad (9.141)$$

las mismas expresiones se tienen haciendo el intercambio $2 \leftrightarrow 3$.

Las relaciones anteriores muestran claramente la indistinguibilidad de los estados $|\phi_{2'3'}^{\pm}\rangle$, de forma que el protocolo de teletransporte que se infiere de la ecuación (2.38) no es aplicable en la situación en la que se producen dos detecciones en uno de los detectores de las zonas 2 y 3. Nótese que las cuatro correlaciones correspondientes a cada detector son en general no nulas, lo que nos muestra una situación donde la detección doble en uno de los cuatro detectores puede dar lugar a cualquiera de las cuatro situaciones posibles para los haces 1 y 4.

Consideremos por ejemplo que no se realiza ninguna rotación en el haz 4, de modo que $\theta' = 0$. En este caso, las correlaciones anteriores quedan:

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = 0, \quad (9.142)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = -e^{i\alpha} \cos\theta \text{sen}\theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.143)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = 0, \quad (9.144)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = ie^{i\alpha} \cos^2 \theta \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle \quad (9.145)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = -i \sin^2 \theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_s'^{(+)} F_r'^{(+)} \rangle, \quad (9.146)$$

$$\langle F_{DH1,x}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = 0 \quad (9.147)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \sin \theta \cos \theta \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle \langle F_p'^{(+)} F_q'^{(+)} \rangle, \quad (9.148)$$

$$\langle F_{DV1,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = 0, \quad (9.149)$$

Las cuatro primeras relaciones, ecuaciones (9.142) a (9.145), muestran que para una detección doble en el detector DH2, las correlaciones no nulas son aquellas correspondientes al detector DV4; sin embargo, las siguientes relaciones (9.143) a (9.149) se caracterizan porque, para una detección doble en el detector DV2, las únicas correlaciones no nulas son las que corresponden a DH4. El mismo resultado se obtiene si consideramos los detectores DH3 y DV3. Puede demostrarse, fácilmente, que si $\theta' = \pi/2$, lo que corresponde a una de las transformaciones que Bob debe realizar, cuando la medida de Bell de Alicia da como resultado $|\phi_{2',3'}^{\pm}\rangle$, siguiendo el esquema de las ecuaciones (2.12), (2.12) y (2.38), entonces los resultados son justamente los opuestos, es decir, detección doble en DH2 implica correlaciones no nulas para el caso DH4, y una detección doble en DV2 implica correlaciones no nulas en el caso DV4.

Pero podemos ir aún más allá, si observamos que en (9.143) y (9.145), las amplitudes correspondientes a la zona 1 son la horizontal en la primera ecuación y la vertical en la otra; lo mismo ocurre en las expresiones (9.146) y (9.148).

9.4. Teletransporte de un qubit de polarización en la WRHP

En esta sección vamos a proceder al cálculo de las probabilidades en un experimento básico de teletransporte, en el que un fotón, caracterizado por un cierto estado, y una pareja entrelazada (sistema auxiliar), junto con un medidor de la base de Bell, constituyen los elementos esenciales para lograr la teleportación del estado de la partícula a una de las partículas de la pareja auxiliar, en un 25 % de los casos. En otro 25 % de los casos se consigue, mediante una transformación de fase, reproducir el mismo estado. Nótese que en el 50 % de los casos no

puede hacerse nada, dado que el medidor de la base de Bell introduce un ruido fundamental a través de los canales vacíos del divisor de haz, que influye directamente en la incapacidad para distinguir entre los estados $|\Phi^+\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$.

Vamos a utilizar parte de los cálculos anteriores, de modo que partiremos de un haz 2, cuya expresión es:

$$\mathbf{F}_2^{(+)} = F^{(+)}\cos\theta\mathbf{i}' + e^{i\kappa}F^{(+)}\text{sen}\theta\mathbf{j}', \quad (9.150)$$

que representa al estado de un fotón polarizado a cierto ángulo θ , y hemos incluido una fase relativa κ entre las dos componentes. $F^{(+)}$ es en este caso una amplitud que no debe compararse en adelante con la correspondiente a la ecuación (9.63).

Junto con este haz, hemos de considerar la pareja auxiliar, caracterizada por las expresiones siguientes:

$$\mathbf{F}_3^{(+)} = F_s^{(+)}\mathbf{i} - F_p^{(+)}\mathbf{j}, \quad (9.151)$$

$$\mathbf{F}_4^{(+)} = F_q^{(+)}\mathbf{i}' + F_r^{(+)}\mathbf{j}'. \quad (9.152)$$

La amplitud $F^{(+)}$ de (9.150) está descorrelacionada con cualquier otra amplitud de las que aparecen en (9.151) y (9.152).

Teniendo en cuenta la acción del divisor de haz sobre los haces 2 y 3, y la acción conjunta del cambio de fase α y la rotación θ' en el haz 4, tenemos:

$$\mathbf{F}_{3'}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(iF^{(+)}\cos\theta + F_s^{(+)})\mathbf{i} + (iF^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - F_p^{(+)}\mathbf{j})], \quad (9.153)$$

$$\mathbf{F}_{2'}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(F^{(+)}\cos\theta + iF_s^{(+)}\mathbf{i}') + (F^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - iF_p^{(+)}\mathbf{j}')], \quad (9.154)$$

$$\mathbf{F}_{4'}^{(+)} = (F_q^{(+)}\cos\theta' - F_r^{(+)}\text{sen}\theta')\mathbf{i}' + e^{i\alpha}(F_q^{(+)}\text{sen}\theta' + F_r^{(+)}\cos\theta')\mathbf{j}'. \quad (9.155)$$

La ecuación (9.155) es idéntica a (9.66), mientras que las ecuaciones (9.153) y (9.154) son similares a (9.64) y (9.65), respectivamente.

Consideremos a continuación la acción de los separadores de polarización PBS2, PBS3 y PBS4. Sea $\mathbf{F}_{ZPF,PBSi}^{(+)}$, ($i = 2, 3, 4$), la amplitud de punto cero que entra por el canal vacío de cada separador. Consideraremos que cada separador transmite la componente horizontal y refleja la vertical. La expresión del campo eléctrico en cada detector es:

$$\mathbf{F}_{DH2}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}\cos\theta + F_s^{(+)}]\mathbf{i} + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS2}^{(+)} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}, \quad (9.156)$$

$$\mathbf{F}_{DV2}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS2}^{(+)} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + \frac{i}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - F_p^{(+)}]\mathbf{j}, \quad (9.157)$$

$$\mathbf{F}_{DH3}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[F^{(+)}\cos\theta + iF_s^{(+)}]\mathbf{i}' + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS3}^{(+)} \cdot \mathbf{j}')\mathbf{j}', \quad (9.158)$$

$$\mathbf{F}_{DV3}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS3}^{(+)} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i}' + \frac{i}{\sqrt{2}}[F^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - iF_p^{(+)}]\mathbf{j}', \quad (9.159)$$

$$\mathbf{F}_{DH4}^{(+)} = (F_q^{(+)}\cos\theta' - F_r^{(+)}\text{sen}\theta')\mathbf{i}' + i(\mathbf{F}_{ZPF,PBS4}^{(+)} \cdot \mathbf{j}')\mathbf{j}', \quad (9.160)$$

$$\mathbf{F}_{DV4}^{(+)} = (\mathbf{F}_{ZPF,PBS4}^{(+)} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i}' + ie^{i\alpha}(F_q^{(+)}\text{sen}\theta' + F_r^{(+)}\cos\theta')\mathbf{j}', \quad (9.161)$$

donde las amplitudes de punto cero, que entran en cada separador de polarización, no están correlacionadas con ninguna otra amplitud.

Expresaremos a continuación la componente del campo en cada detector, correspondiente a su misma polarización:

$$F_{DH2,x}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}\cos\theta + F_s^{(+)}], \quad (9.162)$$

$$F_{DV2,y}^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}}[iF^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - F_p^{(+)}], \quad (9.163)$$

$$F_{DH3,x}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[F^{(+)}\cos\theta + iF_s^{(+)}], \quad (9.164)$$

$$F_{DV3,y}^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}}[F^{(+)}e^{i\kappa}\text{sen}\theta - iF_p^{(+)}], \quad (9.165)$$

$$F_{DH4,x}^{(+)} = F_q^{(+)}\cos\theta' - F_r^{(+)}\text{sen}\theta', \quad (9.166)$$

$$F_{DV4,y}^{(+)} = ie^{i\alpha}(F_q^{(+)}\text{sen}\theta' + F_r^{(+)}\cos\theta'). \quad (9.167)$$

Las ecuaciones (9.162) a (9.165) son similares a (9.77) a (9.80), y las ecuaciones (9.166) y (9.167) son idénticas a (9.81) y (9.82). Con el objeto de calcular las probabilidades triples hemos de obtener primeramente las probabilidades dobles distintas de cero, que son aquellas que involucran a los detectores de las zonas (2, 4), y (3, 4). Las correlaciones que dan lugar a estas probabilidades están dadas por las expresiones (9.91) a (9.98). Vamos a escribir de nuevo estas correlaciones junto con las relaciones (9.103) a (9.106):

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{-i\text{sen}\theta'}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.168)$$

$$\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DH2,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{-\cos\theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle, \quad (9.169)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle = \frac{\cos \theta'}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle, \quad (9.170)$$

$$\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = i \langle F_{DV2,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle = \frac{i \operatorname{sen} \theta' e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle. \quad (9.171)$$

La probabilidad correspondiente es proporcional al módulo de la correlación elevado al cuadrado, lo que podemos afirmar, debido a que las amplitudes de punto cero correspondientes a la polarización ortogonal, a la que define cada detector, no están correlacionadas con ninguna otra amplitud. Es decir:

$$\frac{P_{DZi,DWj}}{K_{DZi} K_{DWj}} = \sum_{\lambda=z,w} \sum_{\lambda'=z,w} |\langle F_{DZi,\lambda}^{(+)} F_{DWj,\lambda'}^{(+)} \rangle|^2 = |\langle F_{DZi,z}^{(+)} F_{DWj,w}^{(+)} \rangle|^2, \quad (9.172)$$

donde $Z = H, V$; $W = H, V$; $i = 2, 3$; $j = 4$; $z = x, y$; $w = x, y$, y K_{DZi} y K_{DWj} son constantes relacionadas con la eficiencia de los detectores.

Teniendo en cuenta que⁹

$$|\langle F_p^{(+)} F_q^{(+)} \rangle| = |\langle F_r^{(+)} F_s^{(+)} \rangle| = \frac{1}{2}, \quad (9.173)$$

tenemos:

$$\frac{P_{DH3,DH4}}{K_{DH3} K_{DH4}} = \frac{P_{DH2,DH4}}{K_{DH2} K_{DH4}} = |\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle|^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta'}{4}, \quad (9.174)$$

$$\frac{P_{DH3,DV4}}{K_{DH3} K_{DV4}} = \frac{P_{DH2,DV4}}{K_{DH2} K_{DV4}} = |\langle F_{DH3,x}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle|^2 = \frac{\cos^2 \theta'}{4}, \quad (9.175)$$

$$\frac{P_{DV3,DH4}}{K_{DV3} K_{DH4}} = \frac{P_{DV2,DH4}}{K_{DV2} K_{DH4}} = |\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DH4,x}^{(+)} \rangle|^2 = \frac{\cos^2 \theta'}{4}, \quad (9.176)$$

$$\frac{P_{DV3,DV4}}{K_{DV3} K_{DV4}} = \frac{P_{DV2,DV4}}{K_{DV2} K_{DV4}} = |\langle F_{DV3,y}^{(+)} F_{DV4,y}^{(+)} \rangle|^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta'}{4}. \quad (9.177)$$

Calcularemos a continuación las probabilidades simples, a partir de las expresiones (9.156) a (9.161). Realizaremos el cálculo detallado de una de ellas, dado que todos los cálculos son similares.

$$\begin{aligned} P_{DH2} &= k_{DH2} [\langle \mathbf{F}_{DH2}^{(+)} \mathbf{F}_{DH2}^{(-)} \rangle - \langle \mathbf{F}_{DH2}^{(+)} \mathbf{F}_{DH2}^{(-)} \rangle_{ZPF}] \\ &= \frac{1}{2} \{ [\langle F^{(+)} F^{(-)} \rangle - \langle F^{(+)} F^{(-)} \rangle_{ZPF}] \cos^2 \theta + \langle F_s^{(+)} F_s^{(+)} \rangle - \langle F_s^{(+)} F_s^{(+)} \rangle_{ZPF} \}, \end{aligned} \quad (9.178)$$

donde hemos tenido en cuenta que $F^{(+)}$, $F_s^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{ZPF,PBS2}^{(+)}$ no están correlacionadas entre

⁹Por simplicidad, en lo que resta de sección haremos la simplificación $g^2 |V|^2 \rightarrow 1$.

ellas, y $\langle \rangle_{ZPF}$ hace referencia al valor medio cuando todas las fuentes están apagadas, y sólo hay punto cero. Ahora, teniendo en cuenta que

$$\langle F^{(+)} F^{(-)} \rangle - \langle F^{(+)} F^{(-)} \rangle_{ZPF} = 1, \quad (9.179)$$

y que

$$\langle F_s^{(+)} F_s^{(+)} \rangle - \langle F_s^{(+)} F_s^{(+)} \rangle_{ZPF} = \frac{1}{2}, \quad (9.180)$$

tenemos:

$$\frac{P_{DH2}}{K_{DH2}} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{4}. \quad (9.181)$$

De forma análoga, obtenemos

$$\frac{P_{DV2}}{K_{DV2}} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4}, \quad (9.182)$$

$$\frac{P_{DH3}}{K_{DH3}} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{4}, \quad (9.183)$$

$$\frac{P_{DV3}}{K_{DV3}} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4}, \quad (9.184)$$

$$\frac{P_{DH4}}{K_{DH4}} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{P_{DV4}}{K_{DV4}} = \frac{1}{2}. \quad (9.185)$$

A continuación, vamos a proceder al cálculo de las probabilidades triples. Cualquier probabilidad triple será del tipo $P_{DH_i DV_j DW_4}$, donde los subíndices i y j pueden tomar los valores 2 y 3, y $W = H, V$. Aplicando la expresión de la probabilidad triple [13], tenemos:

$$P_{DH_i DV_j DW_4} = P_{DH_i} P_{DV_j DW_4} + P_{DV_j} P_{DH_i DW_4} + P_{DW_4} P_{DH_i DV_j}. \quad (9.186)$$

Como $P_{H_i V_j} = 0$, dado que no hay ninguna correlación doble diferente de cero entre cualquiera de las amplitudes que llegan a las zonas de detección 2 y 3, tenemos

$$P_{DH_i DV_j DW_4} = P_{DH_i} P_{DV_j DW_4} + P_{DV_j} P_{DH_i DW_4}, \quad (9.187)$$

de modo que las expresiones (9.185) asociadas a la probabilidad de detección simple en los detectores DH4 y DV4 (ambas proporcionales a 0,5), no se van a utilizar. Nótese que estas son las probabilidades de detección si el haz 4 se mide de forma independiente, y no conjuntamente con los haces 2' y 3'. Ahora bien, en base a las ecuaciones (9.174) a (9.177), y (9.181) a (9.184), tenemos:

$$\frac{P_{DH_i DV_j DW_4}}{K_{DH_i} K_{DV_j} K_{DW_4}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \right) |\langle F_{DVj,y}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle|^2 + \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right) |\langle F_{DHi,x}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle|^2, \quad (9.188)$$

donde $w = x, y$. Ahora, tendremos en cuenta que las correlaciones dobles que aparecen en (9.174) a (9.177) pueden expresarse de forma compacta de la forma:

$$|\langle F_{DZi,z}^{(+)} F_{DW4,w}^{(+)} \rangle|^2 = \delta_{ZW} \frac{\sin^2 \theta'}{4} + (1 - \delta_{ZW}) \frac{\cos^2 \theta'}{4}, \quad (9.189)$$

donde $\delta_{ZW} = 1$ (0) si $Z = W$ ($Z \neq W$). De este modo, la expresión compacta de todas las probabilidades triples es:

$$\begin{aligned} \frac{P_{DHiDVjDW4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DW4}} &= \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \right) \left(\delta_{VW} \frac{\sin^2 \theta'}{4} + (1 - \delta_{VW}) \frac{\cos^2 \theta'}{4} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right) \left(\delta_{HW} \frac{\sin^2 \theta'}{4} + (1 - \delta_{HW}) \frac{\cos^2 \theta'}{4} \right). \end{aligned} \quad (9.190)$$

Vamos a considerar el caso $\theta' = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{P_{DHiDVjDW4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DW4}} &= \frac{1}{16} \{ (2 \cos^2 \theta + 1)(1 - \delta_{VW}) \\ &+ (2 \sin^2 \theta + 1)(1 - \delta_{HW}) \}, \end{aligned} \quad (9.191)$$

y distinguiremos los dos casos fundamentales, que son $W = H$ y $W = V$, es decir, polarización horizontal y vertical, respectivamente, del haz 4. Tenemos:

$$\frac{P_{DHiDVjDH4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DH4}} = \frac{1}{16} + \frac{\cos^2 \theta}{8}. \quad (9.192)$$

$$\frac{P_{DHiDVjDV4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DV4}} = \frac{1}{16} + \frac{\sin^2 \theta}{8}. \quad (9.193)$$

Ahora sumaremos las probabilidades asociadas a una polarización concreta en 4, y concierne a los casos 2 y 3 ($i \neq j$, singlete), o al caso $i = j$ ($|\Psi_{23}^+\rangle$):

$$\frac{P_{DHiDVjDH4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DH4}} + \frac{P_{DViDHjDH4}}{K_{DVi}K_{DHj}K_{DH4}} = \frac{1}{8} + \frac{\cos^2 \theta}{4}, \quad (9.194)$$

$$\frac{P_{DHiDVjDV4}}{K_{DHi}K_{DVj}K_{DV4}} + \frac{P_{DViDHjDV4}}{K_{DVi}K_{DHj}K_{DV4}} = \frac{1}{8} + \frac{\sin^2 \theta}{4}. \quad (9.195)$$

9.5. Experimento de teletransporte de Roma en la WRHP

9.5.1. Introducción

El esquema de teleportación, tal como lo hemos descrito anteriormente, presenta dos conceptos nuevos: primero, muestra cómo el entrelazamiento puede ser usado como parte de un canal cuántico de comunicación; segundo, nos permite ver que la información asociada al estado de una partícula cuántica se puede descomponer en dos partes en el momento de su reconstrucción, por una parte una componente clásica y, por otra, genuinamente cuántica. En las secciones anteriores estos conceptos eran demostrados usando varios experimentos con tres o cuatro fotones. Una limitación de estos experimentos se podría dar en la dificultad de Alicia para preparar una auténtica y completa medida de estados de Bell, lo que reduce la eficiencia del estado teleportado.

Una completa medida de estados de Bell implicaría el control de la interacción de dos fotones, lo que es extremadamente difícil de llevar a la práctica. Sin embargo, un esquema propuesto por S.Popescu [211], que podemos ver en la figura 6.9, nos permitirá analizar de forma más sencilla y detallada el experimento de Roma [55], puesto que, este esquema es equivalente, y que al poco tiempo de realizado el experimento de Innsbruck, fue llevado a la práctica por el equipo de Francesco De Martini en Roma, evita los problemas comentados anteriormente, pero coloca restricciones a los estados que pueden ser transferidos. Este es un nuevo esquema que

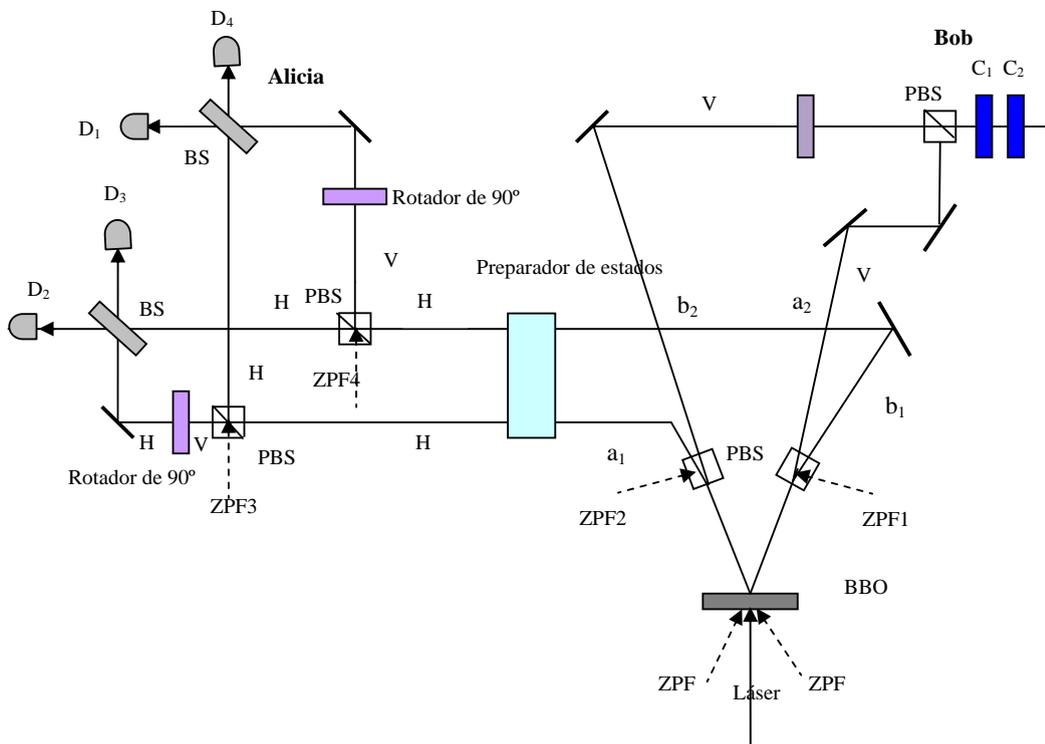


Figura 9.6: Esquema del experimento para teleportación con hiperentrelazamiento, donde los primeros PBS, introducen un nuevo grado de libertad en momento.

nos permite describir un protocolo de dos partículas para el teletransporte cuántico. El primer paso es producir dos fotones entrelazados en dirección de propagación, es decir, un entrelazamiento en momento, pero cada uno con polarización bien definida. Comenzamos generando un estado entrelazado en polarización en una conversión paramétrica a la baja de tipo II, donde 1 y 2 son los índices asociados a

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2], \quad (9.196)$$

son las dos direcciones de salida de los fotones correlacionados. Siguiendo a estos fotones, los hacemos pasar por un PBS que refleja horizontal y transmite vertical. De esta manera, se logra transferir el entrelazamiento en polarización a entrelazamiento de momento, resultando en este caso:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle |a_2\rangle + |b_1\rangle |b_2\rangle) |H\rangle_1 |V\rangle_2, \quad (9.197)$$

Los dos índices 1 y 2 indican el doble canal que conducen a Alicia y a Bob, respectivamente. El fotón con índice 1 estará polarizado necesariamente horizontal y el de índice 2 verticalmente. El entrelazamiento en momento, de los fotones, forma el canal de transmisión no local.

De esta forma, el fotón de Alicia es interceptado por el preparador P que cambia la polarización de H a una superposición cuántica arbitraria:

$$|\psi\rangle_1 = \alpha |H\rangle_1 + \beta |V\rangle_1. \quad (9.198)$$

El preparador efectúa la polarización en ambas trayectorias a_1 y b_2 de la misma forma. El estado $|\psi\rangle_1$ es el estado cuántico que Alicia quiere transmitir a Bob. Observemos que es crucial que estén usando dos grados de libertad: espacial y de polarización de las partículas. El estado total de los dos fotones, después de la preparación, es

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle |a_2\rangle + |b_1\rangle |b_2\rangle) |\psi\rangle_1 |V\rangle_2. \quad (9.199)$$

El siguiente paso en el protocolo es que Alicia realice una medida del tipo estado de Bell sobre su estado inicial y el estado entrelazado en momento. Asumiendo que hay un método para proyectar el fotón 1 sobre los cuatro estados de Bell en polarización y momento, obtendremos el equivalente al estado $|\Psi\rangle_{ABC}$

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = & \frac{1}{2} |c_+\rangle (\beta |a_1\rangle + \alpha |b_2\rangle) |V\rangle_2 + \frac{1}{2} |c_-\rangle (\beta |a_2\rangle - \alpha |b_2\rangle) |V\rangle_2 \\ & + \frac{1}{2} |d_+\rangle (\alpha |a_2\rangle + \beta |b_2\rangle) |V\rangle_2 + \frac{1}{2} |d_-\rangle (\alpha |a_2\rangle - \beta |b_2\rangle) |V\rangle_2, \end{aligned} \quad (9.200)$$

donde

$$|c_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle |V\rangle_1 \pm |b_1\rangle |H\rangle_1) \quad (9.201)$$

$$|d_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|H\rangle_1 \pm |b_1\rangle|V\rangle_1) \quad (9.202)$$

La primera parte de cada término corresponde a un estado de Bell para el fotón 1 y la segunda para el correspondiente al fotón 2. En contraste con el caso del protocolo de tres partículas, la proyección de la partícula 1 sobre los estados de la base de Bell no presenta ningún problema, y puede realizarse con una eficiencia de casi el 100%. El final del protocolo llega cuando Alicia informa a Bob qué detector registra un fotón. Con esta información, Bob puede reproducir el estado preparado inicialmente como sigue: primero, transforma la superposición en momento del fotón 2 en la misma superposición en polarización haciendo una rotación de 90° en la trayectoria de b_2 (o a_2) y luego combina b_2 y a_2 en el PBS. Después de esto, él enciende o apaga dos elementos ópticos, dependiendo de la información de Alicia, para intercambiar H y V proporcionando el desplazamiento de fase relativo de valor π entre H y V . Esto transforma la polarización del estado 2 en la del estado preparado.

9.5.2. Análisis

Aclarado todo el proceso dentro del formalismo de Hilbert, pasaremos a implementarlo en el de Wigner. Como ya hemos comentado, comenzaremos generando un estado entrelazado en polarización con una conversión paramétrica a la baja de tipo II. De tal manera que podamos generar los cuatro estados de Bell y, por lo tanto, efectuar el teletransporte. Partiremos del estado $|\Psi^+\rangle$

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} \quad (9.203)$$

$$\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}' + F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}' \quad (9.204)$$

Estos haces se hacen pasar por los elementos ópticos de la figura 9.6. Primero se les hace pasar por dos PBS, que transmite vertical y refleja horizontal, con el objeto de transferir el entrelazamiento en polarización a entrelazamiento en momento, agregando un nuevo grado de libertad a las amplitudes. En nuestro formalismo, el papel esencial lo juegan las amplitudes punto cero al introducir información sobre un nuevo grado de libertad, generando un hiperentrelazamiento polarización-momento que se representa mediante cuatro haces con diferente camino óptico, con su correspondiente punto cero asociado, tal y como vemos en las expresiones siguientes:

$$\mathbf{F}_{a_1}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + \mathbf{F}_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.205)$$

$$\mathbf{F}_{b_2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF2,R}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.206)$$

$$\mathbf{F}_{b_1}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}' + \mathbf{F}_{ZPF1,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.207)$$

$$\mathbf{F}_{a_2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (9.208)$$

Estos cuatro haces representan el estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|a_2\rangle + |b_1\rangle|b_2\rangle)|H_1\rangle|V_2\rangle. \quad (9.209)$$

Una vez hecha la separación de los haces, y siguiendo el esquema de S. Popescu, los haces verticales se envían hacia la derecha y los horizontales a la izquierda. Unos hacia Bob y otros hacia Alicia. En este último caso, Alicia (o cualquier otra persona) prepara el estado que desea teleportar a Bob. Para ello, introduce un elemento que le permita configurar el estado tal y como ella quiere, en nuestro caso, introducimos un rotador angular:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (9.210)$$

Esta matriz, al actuar sobre los haces que tiene Alicia, es decir $\mathbf{F}_{a_1}^{(+)}$ y $\mathbf{F}_{b_1}^{(+)}$ (\mathbf{r}, t), nos dará

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{a_1}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\cos\alpha - F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\operatorname{sen}\alpha \\ iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\operatorname{sen}\alpha + F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.211)$$

De igual manera para la otra amplitud

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{b_1}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\cos\alpha - F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\operatorname{sen}\alpha \\ iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\operatorname{sen}\alpha + F_{ZPF2,T}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.212)$$

lo que nos permite describir el estado de los dos fotones después de la preparación:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|a_2\rangle + |b_1\rangle|b_2\rangle)|\Psi_1\rangle|V_2\rangle, \quad (9.213)$$

en el formalismo de Wigner, como

$$\mathbf{F}'_{a_1}(\mathbf{r}, t) = iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)(\cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}) + \mathbf{F}'_{ZPF2,T}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.214)$$

$$\mathbf{F}'_{b_1}(\mathbf{r}, t) = iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)(\cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}) + \mathbf{F}'_{ZPF2,T}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.215)$$

$$\mathbf{F}'_{a_2}(\mathbf{r}, t) = F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j}' + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.216)$$

$$\mathbf{F}'_{b_2}(\mathbf{r}, t) = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF1,R}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.217)$$

donde el término correspondiente al punto cero, con las primas, incluye todos los efectos de la transformación sobre este punto. Además, el fotón de Alicia es interceptado por el preparador P que cambia la polarización de H a una superposición cuántica arbitraria $|\psi_1\rangle = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1$. Este es el estado que Alicia quiere teleportar a Bob. Una vez preparado el estado, hacemos pasar los dos haces por un PBS que refleja horizontal y transmite vertical, introduciendo un nuevo punto cero, $\mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, que juega un papel esencial en la distinguibilidad de todos los estados de Bell, como veremos más adelante. Dando las salidas transmitida y reflejada que salen para $\mathbf{F}'_{a_1}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{F}'_{a_1}(\mathbf{r}, t) = -F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.218)$$

$$\mathbf{F}''_{a_1}(\mathbf{r}, t) = iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \alpha \mathbf{j} + \mathbf{F}''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.219)$$

mientras que, para el haz \mathbf{F}'_{b_1} , el PBS transmite horizontal y refleja vertical, añadiendo un nuevo punto cero $\mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, resultando en cada caso:

$$\mathbf{F}'_{b_1}(\mathbf{r}, t) = iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.220)$$

$$\mathbf{F}''_{b_1}(\mathbf{r}, t) = -F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \alpha \mathbf{j} + \mathbf{F}''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (9.221)$$

Una vez que los haces salen de los PBS se les hace rotar 90° , para pasar la parte vertical a horizontal. Esto se consigue mediante la aplicación de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.222)$$

Hecha la rotación, obtenemos

$$\mathbf{F}'_{a_1}(\mathbf{r}, t) = -F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}'''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF3}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.223)$$

$$\mathbf{F}''_{a_1}(\mathbf{r}, t) = -iF_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen} \alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}'''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t), \quad (9.224)$$

$$\mathbf{F}'_{b_1}(\mathbf{r}, t) = iF_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}'''_{ZPF2}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF4}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (9.225)$$

$$\mathbf{F}''_{b_1}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = +F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\text{sen}\alpha \mathbf{i} + \mathbf{F}'''_{ZPF_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF_4}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (9.226)$$

Ahora, para continuar, hacemos que el haz transformado en rotación incida en un BS al 50 %, junto con el horizontal del otro PBS, en cada caso. Esto originará cuatro posibles detecciones que corresponden a una medida de estado de Bell. Respecto a los campos en cada detector tenemos:

$$\mathbf{F}_{D_4}{}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\text{sen}\alpha - F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha] \mathbf{i} \quad (9.227)$$

$$+ \mathbf{F}'''_{ZPF_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_3}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_4}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{F}_{D_1}{}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t)\text{sen}\alpha - i F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha] \mathbf{i} \quad (9.228)$$

$$+ \mathbf{F}'''_{ZPF_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_3}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_4}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{F}_{D_3}{}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-i F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen}\alpha - F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha] \mathbf{i} \quad (9.229)$$

$$+ \mathbf{F}'''_{ZPF_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_3}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_4}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{F}_{D_2}{}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) \text{sen}\alpha + i F_q^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cos \alpha] \mathbf{i} \quad (9.230)$$

$$+ \mathbf{F}'''_{ZPF_2}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_3}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{ZPF'_4}{}^{(+)}(\mathbf{r}, t).$$

Hasta ahora nuestro análisis se ha limitado a seguir el proceso necesario para que Alicia pueda proyectar sobre los estado de Bell. Pasemos a ver lo que sucede con los campos en el lado de Bob, pero antes hemos de aclarar que para que Bob realice correctamente su parte del experimento, previamente, Alicia le debe comunicar qué detector de los suyos ha registrado un fotón. Bob puede aplicar las transformaciones unitarias necesarias para reconstruir el estado enviado. Lo primero que debe hacer Bob es una transformación que le permita pasar de una superposición en momento a una en polarización del fotón 2. Para ello debe rotar 90° uno de los haces que va hacia él, para luego combinarlos en un PBS. Para ello, partimos de los campos:

$$\mathbf{F}_{b_2}{}^{(+)} = F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF_1}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}, \quad (9.231)$$

$$\mathbf{F}_{a_2}{}^{(+)} = F_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF_1}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i}. \quad (9.232)$$

Si rotamos ahora 90° el primero

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{ZPF_1} \\ F_p^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_p^{(+)} \\ F_{ZPF_1} \end{pmatrix}, \quad (9.233)$$

$$\mathbf{F}_{b_2}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + \mathbf{F}_{ZPF1}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}. \quad (9.234)$$

Una vez combinado con el otro haz en el PBS (que transmite horizontal y refleja vertical)

$$\mathbf{F}_{PBSB}^{(+)} = -F_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + iF_r^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} + \mathbf{F}_{ZPF1}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}, \quad (9.235)$$

donde el último término indica todas las transformaciones hechas al punto cero.

Después de todo esto, Bob enciende o apaga dos elementos ópticos dependiendo de la información de Alicia, para intercambiar horizontal y vertical y proporcionar el desplazamiento de fase relativo de π entre H y V . Esto transforma la polarización del estado 2 en la del estado preparado. Como ya comentamos, hasta ahora sólo nos hemos limitado a hacer una mera descripción con nuestro formalismo, del proceso experimental, pero ¿qué es lo que ha teleportado Alicia a Bob y cómo se describe dentro del formalismo que estamos usando? Teniendo en cuenta que, las amplitudes punto cero están descorrelacionadas con el resto de las amplitudes, a pesar de lo cual resultan ser esenciales para la distinguibilidad de los cuatro estados de Bell, al introducir información adicional mediante las cuatro entradas libres de los PBS que nos permiten hacer un teletransporte completo. Veamos como las correlaciones describen el teletransporte en el formalismo de Wigner,

$$\begin{aligned} \langle D_1 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [F_q^{(+)} \text{sen} \alpha - iF_s^{(+)} \cos \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \text{sen} \alpha, \end{aligned} \quad (9.236)$$

$$\begin{aligned} \langle D_1 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [F_q^{(+)} \text{sen} \alpha - iF_s^{(+)} \cos \alpha] [iF_r^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.237)$$

$$\begin{aligned} \langle D_2 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_q^{(+)} \cos \alpha + F_s^{(+)} \text{sen} \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.238)$$

$$\begin{aligned} \langle D_2 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_q^{(+)} \cos \alpha + F_s^{(+)} \text{sen} \alpha] [iF_r^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{sen} \alpha, \end{aligned} \quad (9.239)$$

$$\begin{aligned} \langle D_3 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [-F_q^{(+)} \cos \alpha - iF_s^{(+)} \text{sen} \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.240)$$

$$\begin{aligned} \langle D_3 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [-F_q^{(+)} \cos \alpha - iF_s^{(+)} \text{sen } \alpha] [iF_r^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{sen } \alpha, \end{aligned} \quad (9.241)$$

$$\begin{aligned} \langle D_4 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_q^{(+)} \text{sen } \alpha - F_s^{(+)} \cos \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \text{sen } \alpha, \end{aligned} \quad (9.242)$$

$$\begin{aligned} \langle D_4 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_q^{(+)} \text{sen } \alpha - F_s^{(+)} \cos \alpha] [iF_r^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.243)$$

Un análisis de estas correlaciones, análogo al del apartado anterior, nos permite ver que las correlaciones asociadas al detector D3 son idénticas. Esto nos indica que no es necesario hacer ninguna transformación al haz de Bob para reproducir el estado que se desea teleportar. Sin embargo, el resto de las correlaciones, sí deben sufrir unas transformaciones para que se pueda reproducir el estado. Veamos esto con detenimiento en cada caso.

Detector 1

$$\begin{aligned} \langle D_1 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [F_q^{(+)} \text{sen } \alpha - iF_s^{(+)} \cos \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \text{sen } \alpha, \end{aligned} \quad (9.244)$$

$$\begin{aligned} \langle D_1 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [F_q^{(+)} \text{sen } \alpha - iF_s^{(+)} \cos \alpha] [iF_r^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9.245)$$

Tomando como referencia las correlaciones del D3, para que estas correlaciones reproduzcan el estado tenemos que aplicar un cambio de fase y una rotación y esto se corresponde a la aplicación de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.246)$$

cuyo efecto es una rotación y un cambio de fase.

Detector 2

$$\begin{aligned} \langle D_2 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_q^{(+)} \cos \alpha + F_s^{(+)} \text{sen } \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.247)$$

$$\begin{aligned}
\langle D_2 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)} \cos \alpha + F_s^{(+)} \text{sen} \alpha] [i F_r^{(+)}] \right\rangle \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \text{sen} \alpha,
\end{aligned} \tag{9.248}$$

en este caso la transformación es sólo un cambio de fase matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9.249}$$

Detector 4

$$\begin{aligned}
\langle D_4 H_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)} \text{sen} \alpha - F_s^{(+)} \cos \alpha] [-F_p^{(+)}] \right\rangle \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_q^{(+)} F_p^{(+)} \rangle \text{sen} \alpha,
\end{aligned} \tag{9.250}$$

$$\begin{aligned}
\langle D_4 V_{Bob} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} [i F_q^{(+)} \text{sen} \alpha - F_s^{(+)} \cos \alpha] [i F_r^{(+)}] \right\rangle \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} \langle F_s^{(+)} F_r^{(+)} \rangle \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{9.251}$$

donde sólo hay que hacer una rotación para tener el estado teleportado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.252}$$

Con lo que la matriz de transformación general se puede expresar como

$$U_{\beta, \kappa} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -e^{i\kappa} \text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \tag{9.253}$$

En resumen, los modos de punto cero, actúan en los canales libres introduciendo información en el sistema, generando hiperentrelazados en momento y polarización, lo que permite que todos los estados de Bell sean distinguibles, además el teletransporte se efectúa con una eficiencia del 100 % .

9.6. Conclusiones

El teletransporte es uno de los fenómenos más llamativos de la comunicación cuántica, y en él reside la esencia del entrelazamiento cuántico. En el espacio de Hilbert, este fenómeno tiene una interpretación sencilla a través del colapso del vector de estado, cuando al realizar una medida de Bell sobre dos partículas, se produce, en el 25 % de los casos, el teletransporte de un estado cuántico sobre otra partícula, o el teletransporte de entrelazamiento sobre una pareja inicialmente no entrelazada. La comunicación mediante un canal clásico entre Alicia y

Bob tras la medida, permite que éste pueda reproducir, mediante una transformación unitaria, el estado original a teletransportar.

En la sección 6.1 hemos analizado el intercambio de entrelazamiento con la función de Wigner, calculando primeramente las correlaciones cuádruples correspondientes a la figura 9.3. Del análisis de estas correlaciones se explica cómo, aunque las correlaciones dobles entre los pares de haces $(1, 4)$, $(2, 3)$ y $(2', 3')$ son nulas, una medida de Bell sobre los haces $2'$ y $3'$ produce un intercambio de entrelazamiento, de acuerdo al resultado de la medida de Bell sobre $2'$ y $3'$, hacia los haces 1 y 4. Lo llamativo de nuestro formalismo es que los modos que intervienen en los haces 1 y 4 siguen estando descorrelacionados tras la medida de Bell sobre los fotones $2'$ y $3'$, es decir, los haces no se modifican de forma "no local" tras la medida de Bell. Esta es una característica común a cualquier experimento de teletransporte en la función de Wigner, y contrasta con el análisis en el espacio de Hilbert, donde el colapso del vector de estado, expresado en la base de Bell de los fotones $2'$ y $3'$ (véase la ecuación (9.2)) revela un entrelazamiento en el espacio de Hilbert de los fotones 1 y 4 tras la medida. Por tanto, la esencia del teletransporte de entrelazamiento está en las correlaciones cuádruples que caracterizan a las componentes horizontales y verticales de los haces 1, $2'$, $3'$ y 4 en la posición de los detectores. En este caso, las entradas de punto cero del medidor de la base de Bell tiene su efecto en que sólo es posible teletransportar de forma exitosa dos de los cuatro estados de Bell.

El desarrollo teórico del teletransporte de entrelazamiento ha sido la base para el análisis de los experimentos de teletransporte de Innsbruck y Roma, los primeros experimentos que se hicieron en este campo. En el experimento de Innsbruck, donde se usan dos parejas entrelazadas, la acción de un polarizador sobre uno de los haces que inciden sobre el divisor de haz perteneciente al medidor de la base de Bell, produce una modificación en las propiedades de correlación, que da lugar al teletransporte del estado de un fotón. En este caso hemos obtenido todas las correlaciones cuádruples correspondientes a las componentes del campo eléctrico en los detectores (sección 6.4), y de este análisis se explica el teletransporte del estado de un fotón utilizando inicialmente dos parejas entrelazadas. Posteriormente, en la sección 6.5 hemos obtenido las probabilidades triples del experimento más básico de teletransporte, donde el estado de un fotón, representado en la función de Wigner por la expresión (9.150), es teletransportado a uno de los fotones de una pareja auxiliar.

Por último, hemos analizado el experimento de teleportación de Roma. Hemos mostrado que la posibilidad de teletransportar los cuatro estados de Bell está relacionado con el uso de dos entradas de punto cero adicionales a los cuatro conjuntos independientes que entran en el cristal, y que intervienen directamente en la división de cada uno de los dos haces que emergen del cristal. Finalmente, el proceso de medida que da lugar al teletransporte introduce ruido a través de dos canales vacíos, lo que permite que sea posible el teletransporte en todos los casos.

CONCLUSIONES GENERALES

En esta tesis hemos analizado los experimentos más representativos de la comunicación cuántica con fotones generados en el proceso de conversión paramétrica a la baja, utilizando el formalismo de la función de Wigner. En esta representación de la mecánica cuántica, aspectos destacados de la teoría cuántica de la información, tales como la criptografía, la medida de los estados de la base de Bell, la codificación densa y el teletransporte, tienen una interpretación basada en el papel que las fluctuaciones del punto cero tienen en la generación y propagación de la luz convertida a la baja, así como en el proceso de detección.

En lo que se refiere a la teoría de la conversión paramétrica a la baja en el formalismo de Wigner, en el capítulo 5 hemos hecho un resumen de los aspectos básicos previos a esta tesis, y hemos profundizado en el concepto de entrelazamiento de fotones dando la expresión de los haces correlacionados que corresponden a los cuatro estados de la base de Bell, y caracterizando las correlaciones cruzadas existentes entre las amplitudes que los definen. En el terreno de la teoría cuántica de la detección, hemos avanzado en su estudio aportando las expresiones para las probabilidades de detección triple y cuádruple, cuyo desarrollo se haya en los anexos añadidos después de este capítulo. Otros aspectos básicos de la teoría, como el entrelazamiento múltiple (estados GHZ) o el hiperentrelazamiento se han estudiado con profundidad en los capítulos 7 y 8, respectivamente.

Dejando a un lado el aparato matemático, que proporciona una alternativa al procedimiento usual de cálculo fundamentado en el espacio de Hilbert, la función de Wigner proporciona una interpretación particular de los aspectos fundamentales de la comunicación cuántica, basada en los efectos de la radiación de punto cero en la comunicación cuántica. Así, en el capítulo 6 hemos introducido los conceptos básicos de la información cuántica en óptica utilizando la WRHP, lo que nos ha permitido comprender con detalle la relevancia de la radiación de punto cero en la descripción del bit cuántico, y en la implementación de la puerta CNOT en óptica a través del divisor de polarización, y por tanto en la transformación de estados separables en estados entrelazados.

En el capítulo 7 hemos descrito algunos experimentos de distribución cuántica de clave con fotones, mostrando cómo la información está contenida en las amplitudes del punto cero que definen los haces correlacionados emitidos por la fuente, se propaga según las reglas clásicas

dando lugar a diferentes propiedades de correlación, y posteriormente se extrae en el proceso de medición a través de la sustracción de la intensidad del punto cero en los detectores, dando lugar a los resultados típicos de la criptografía cuántica. Aspectos esenciales de la criptografía segura como el uso de bases incompatibles para la generación de una clave secreta entre dos partes o el efecto del ataque de un espía, se han interpretado a partir del efecto que tienen los distintos aparatos ópticos en las correlaciones cruzadas existentes entre los haces. Por ejemplo, la acción de un espía a través de una medida proyectiva introduce un ruido a través del canal vacío del polarizador, el cual es esencial a la hora de entender la perturbación que éste causa en la generación de la clave secreta, y cómo ésta acción puede ser detectada por Alicia y Bob.

En el terreno de la codificación densa y la medida de los estados de la base de Bell, en el capítulo 8 hemos mostrado que el punto cero tiene un papel fundamental en la imposibilidad de detectar los cuatro estados de Bell cuando se utilizan fotones, debido al ruido que introduce el medidor de la base de Bell a través de los canales vacíos de los separadores de polarización. Teniendo en cuenta que en el cristal entran 4 conjuntos de modos independientes (dos por cada vector de onda medio), lo que aporta la posibilidad inicial de que Bob envíe a Alicia dos bits de información clásica mediante la manipulación del haz que llega a su estación, y que hay dos entradas de ruido en el medidor de Alicia (BSM), la capacidad de transmisión se reduce a dos de los cuatro estados de Bell. En el caso del estado singlete, el comportamiento fermiónico de la parte espacial del estado de los dos fotones en el divisor de haz, tiene una interpretación ondulatoria a través del efecto que tiene el divisor sobre las amplitudes del campo eléctrico. Finalmente, la posibilidad de medir los cuatro estados de Bell usando estados hiperentrelazados tiene una interpretación basada en el uso de un mayor conjunto de modos de punto cero a la entrada del cristal (8 conjuntos de modos independientes), de modo que, al tener en cuenta los 4 canales vacíos del medidor de la base de Bell en los experimentos que usan hiperentrelazamiento polarización-momento, se pueden diferenciar los cuatro estados de Bell en el proceso de medición.

El teletransporte cuántico se ha analizado en el capítulo 9. Hemos comenzado por el estudio del intercambio de entrelazamiento, mostrando cómo éste se explica a través de las correlaciones cuádruples que caracterizan a los haces que se utilizan en el experimento. Hemos obtenido las correlaciones correspondientes a cada una de las posibilidades de intercambio de entrelazamiento, llegando a la conclusión de que la posibilidad de teletransportar estados entrelazados, que en el espacio de Hilbert tiene su base en el colapso del vector de estado, está estrechamente ligado a las correlaciones cuádruples existentes entre las amplitudes de los haces en la posición de los detectores. En este caso, las entradas de punto cero del medidor de la base de Bell tiene su efecto en que sólo es posible teletransportar de forma exitosa dos de los cuatro estados de Bell.

El análisis anterior ha servido para adentrarnos en el experimento de teletransporte de Innsbruck, donde la acción de un polarizador sobre uno de los haces que inciden sobre el divisor del medidor de la base de Bell produce una modificación en las propiedades de correlación, que

da lugar al teletransporte del estado de un fotón. Finalmente, hemos analizado el experimento de teleportación de Roma. Hemos mostrado que la posibilidad de teletransportar los cuatro estados de Bell está relacionado con el uso de dos entradas de punto cero adicionales a los cuatro conjuntos independientes que entran en el cristal, y que intervienen directamente en la división de cada uno de los dos haces que emergen del cristal. Finalmente, el proceso de medida que da lugar al teletransporte introduce ruido a través de dos canales vacíos, lo que permite que sea posible el teletransporte en todos los casos.

Los desarrollos contenidos en esta tesis podrán aplicarse en trabajos posteriores a otros aspectos del campo de la comunicación cuántica y de la computación, con el objeto de comprender cómo afecta la radiación de punto cero, por ejemplo, en el uso de los estados cluster en la computación, la resistencia de ciertos estados a la decoherencia, las medidas de entrelazamiento, el teletransporte de estados hiperentrelazados.... Esperamos dar continuidad en el futuro al trabajo realizado en esta tesis.

ANEXO A

.1. Probabilidad triple en la representación de Wigner para PDC

La expresión, en el espacio de Hilbert, para la probabilidad de detección triple es:

$$P_{abc} = K_a K_b K_c \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle, \quad (1)$$

donde a , b , y c señalan las posiciones de los detectores, y λ , λ' y λ'' son índices de polarización (en el caso de que los haces tuviesen la misma polarización, estando ésta bien definida) no habría ningún sumatorio. K_a , K_b y K_c son constantes asociadas a los detectores, y relacionadas con la eficiencia. En el caso de experimentos de conversión paramétrica a la baja, las correlaciones de orden n (par) se pueden expresar a partir de correlaciones entre pares de operadores¹, de modo que cada uno de los sumandos que aparecen en (1) se expresa a partir de la suma de $(n-1)!! = 5!! = 15$ términos, siendo cada uno de ellos el producto de tres correlaciones de segundo orden. Atendiendo al teorema de Wick [260]

$$\left\langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_{2N} \right\rangle = \sum_{\substack{\text{Todos, los} \\ (2n-1)!! \\ \text{pares}}} \prod_k \left\langle \hat{A}_{i_k} \hat{A}_{j_k} \right\rangle, \quad (2)$$

donde la suma es sobre todas las particiones de $\{1, \dots, 2N\}$ en pares separados $\{i_k, j_k\}$. Aplicando la expresión anterior, y teniendo en cuenta que:

$$\left\langle \hat{E}_{\alpha,\lambda}^{(+)} \hat{E}_{\beta,\lambda'}^{(-)} \right\rangle = 0; \quad \forall \lambda, \lambda'. \quad (3)$$

¹Esto es consecuencia del carácter gaussiano del proceso de conversión paramétrica a la baja.

Para $\alpha \neq \beta$, es decir, en detectores distintos [76], vemos que sólo son distintos de cero cuatro de los quince sumandos de cada una de las correlaciones. Así, la expresión (1) queda

$$\begin{aligned}
P_{abc} = & K_a K_b K_c \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \left[\left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \right. \\
& + \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \\
& + \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle \\
& \left. + \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \right\rangle \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \right].
\end{aligned} \tag{4}$$

A continuación, reorganizando los sumatorios:

$$\begin{aligned}
P_{abc} = & K_c \sum_{\lambda''} \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \left| \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \right|^2 K_a K_b \\
& + K_b \sum_{\lambda'} \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \sum_{\lambda} \sum_{\lambda''} \left| \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \right|^2 K_c K_a \\
& + K_a \sum_{\lambda} \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \left| \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle \right|^2 K_b K_c \\
& + K_a \sum_{\lambda} \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle K_b \sum_{\lambda'} \left\langle \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle K_c \sum_{\lambda''} \left\langle \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5}$$

ahora, teniendo en cuenta que

$$K_i \sum_{\lambda} \left\langle \hat{E}_{i,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{i,\lambda}^{(+)} \right\rangle = P_i ; \quad i = a, b, c, \tag{6}$$

siendo P_i la probabilidad de detección simple que, en la representación de Wigner, se calcula a partir de la expresión [79]:

$$P_i = K_i \langle I_i - I_{ZPF,i} \rangle_W, \tag{7}$$

donde $\langle \rangle_W$ representa el promedio con la función de Wigner del vacío, y que la conmutatividad de los operadores $\hat{E}_{\alpha,\lambda}^{(+)}$, $\hat{E}_{\beta,\lambda'}^{(+)}$, nos permite pasar inmediatamente a la función de Wigner, ver ecuación (4.38):

$$\left\langle \hat{E}_{\alpha,\lambda}^{(+)} \hat{E}_{\beta,\lambda'}^{(+)} \right\rangle = \left\langle S \left(\hat{E}_{\alpha,\lambda}^{(+)} \hat{E}_{\beta,\lambda'}^{(+)} \right) \right\rangle = \left\langle E_{\alpha,\lambda}^{(+)} E_{\beta,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W, \tag{8}$$

llegamos a la expresión siguiente, una vez que se desprecia el último sumando de (4), $P_a P_b P_c$, de orden g^6 , respecto al resto de sumandos, los cuales son de orden g^4 :

$$\begin{aligned}
P_{abc} = & P_a P_{cb} + P_b P_{ac} + P_c P_{ba} \\
= & K_a \langle I_a - I_{ZPF,a} \rangle_W \sum_{\lambda, \lambda'} K_b K_c \left| \left\langle E_{b,\lambda}^{(+)} E_{c,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W \right|^2 \\
& + K_b \langle I_b - I_{ZPF,b} \rangle_W \sum_{\lambda, \lambda'} K_a K_c \left| \left\langle E_{a,\lambda}^{(+)} E_{c,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W \right|^2 \\
& + K_c \langle I_c - I_{ZPF,c} \rangle_W \sum_{\lambda, \lambda'} K_a K_b \left| \left\langle E_{a,\lambda}^{(+)} E_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W \right|^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

En la primera línea de (9) hemos tenido en cuenta que

$$P_{i,j} = K_i K_j \sum_{\lambda, \lambda'} \left| \left\langle E_{i,\lambda}^{(+)} E_{j,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W \right|^2; \quad i \neq j \quad (10)$$

En experimentos de conversión paramétrica a la baja, donde se utilizan las amplitudes $F_{i,\lambda}^{(+)}$ en lugar de $E_{i,\lambda}^{(+)}$, ver ecuación (??), los promedios que aparecen en (9) son igualmente válidos sustituyendo $E_{i,\lambda}^{(+)}$ por $F_{i,\lambda}^{(+)}$.

Antes de pasar al desarrollo de la probabilidad de detección cuádruple (Anexo B), hemos de recalcar que todo el desarrollo a partir de (1) se ha hecho teniendo en cuenta el carácter gaussiano de la conversión paramétrica a la baja, y luego se ha pasado a la función de Wigner, aplicando las expresiones (7) y (8) ya desarrolladas en las referencias [87] y [79]. En [79], el cálculo de la probabilidad conjunta en el formalismo de Wigner se inició simetrizando el orden normal $\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \rangle$, y pasando posteriormente al formalismo de Wigner, con lo que se obtuvo una expresión general para experimentos de óptica cuántica, y luego se particularizó a la situación de la PDC aplicando la propiedad gaussiana [76]. De este modo, el papel del punto cero, como “umbral” de detección, aparece de forma explícita en el formalismo.

En este desarrollo hemos aplicado directamente la ecuación (2) al orden normal de operadores, obteniendo una serie de términos fácilmente identificables a partir de la teoría de la detección simple y conjunta desarrollada en [76].

En este sentido, hemos de señalar que la expresión (1) (espacio de Hilbert), o su equivalente en la representación de Wigner para PDC, ecuación (9), corresponden a evaluar la diferencia entre la intensidad en cada detector y la intensidad del punto cero (la que llegaría si todas las fuentes estuviesen apagadas), y promediar con la función de Wigner el producto de las tres substracciones:

$$P_{abc} = K_a K_b K_c \langle (I_a - I_{ZPF,a}) (I_b - I_{ZPF,b}) (I_c - I_{ZPF,c}) \rangle_W. \quad (11)$$

Siendo $I_i = \sum_{\lambda} E_{i,\lambda}^{(-)} E_{i,\lambda}^{(+)}$.

ANEXO B

.2. Probabilidad cuádruple en la Representación de Wigner para PDC

La expresión para la probabilidad de detección cuádruple en el espacio de Hilbert es, para experimentos con haces polarizados,:

$$P_{abcd} = K_a K_b K_c K_d \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} \left\langle \hat{E}_{a,\lambda}^{(-)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(-)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(-)} \hat{E}_{d,\lambda'''}^{(-)} \hat{E}_{d,\lambda'''}^{(+)} \hat{E}_{c,\lambda''}^{(+)} \hat{E}_{b,\lambda'}^{(+)} \hat{E}_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle, \quad (12)$$

Con objeto de simplificar la notación, haremos el cambio

$$\hat{E}_{\alpha,\nu}^{(-)} \equiv \alpha, \quad \hat{E}_{\alpha,\nu}^{(+)} \equiv \alpha', \quad \forall \alpha = a, b, c, d; \quad \forall \nu = \lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''', \quad (13)$$

con lo que el cálculo de la probabilidad cuádruple se reduce a la obtención de términos del tipo $\langle abcd d' c' b' a' \rangle$.

Aplicando la ecuación (2) (en este caso hay 7!!=105 sumandos) y la relación (3) para experimentos de conversión paramétrica a la baja, de los 105 sumandos sólo son distintos de cero 15 de ellos

$$\begin{aligned} \langle abcd d' c' b' a' \rangle &= \langle ab \rangle [\langle cd \rangle (\langle d' c' \rangle \langle b' a' \rangle + \langle d' b' \rangle \langle c' a' \rangle + \langle d' a' \rangle \langle c' b' \rangle) \\ &+ \langle cc' \rangle \langle dd' \rangle \langle b' a' \rangle] \\ &+ \langle ac \rangle [\langle bd \rangle (\langle d' c' \rangle \langle b' a' \rangle + \langle d' b' \rangle \langle c' a' \rangle + \langle d' a' \rangle \langle c' b' \rangle) + \langle bb' \rangle \langle dd' \rangle \langle c' a' \rangle] \\ &+ \langle ad \rangle [\langle bc \rangle (\langle d' c' \rangle \langle b' a' \rangle + \langle d' b' \rangle \langle c' a' \rangle + \langle d' a' \rangle \langle c' b' \rangle) + \langle bb' \rangle \langle cc' \rangle \langle d' a' \rangle] \\ &+ \langle aa' \rangle [\langle bc \rangle \langle dd' \rangle \langle c' b' \rangle + \langle bd \rangle \langle cc' \rangle \langle d' b' \rangle + \langle bb' \rangle \langle cc' \rangle \langle dd' \rangle]. \end{aligned} \quad (14)$$

Analicemos los distintos términos que aparecen en (14). Los tres productos del tipo $\langle xy \rangle \langle x' y' \rangle \langle zw \rangle \langle z' w' \rangle$ dan lugar al sustituir en (12), a productos de probabilidades conjuntas $P_{ab} P_{cd}$, $P_{ac} P_{bd}$, $P_{ad} P_{bc}$, los cuales son de orden g^4 . Los cinco productos del tipo $\langle xx' \rangle \langle yy' \rangle \langle zw \rangle \langle z' w' \rangle$ dan lugar a productos de probabilidades simples y conjuntas del tipo $P_{ab} P_c P_d$, $P_{ac} P_b P_d$, $P_{ad} P_b P_c$, $P_{bc} P_a P_d$ y $P_{bd} P_a P_c$, los cuales son de orden g^6 , y por tanto, se desprecian. También aparece el término $\langle xx' \rangle \langle yy' \rangle \langle zz' \rangle \langle ww' \rangle$, que da lugar al producto de probabilidades simples $P_a P_b P_c P_d$, y se desprecia, pues es de orden g^8 . Finalmente, hay seis

términos del tipo $\langle xy \rangle \langle zw \rangle \langle y'w' \rangle \langle z'x' \rangle$ (orden de g a la cuarta). Pasando a la función de Wigner usando la ecuación (8), la expresión (12) queda:

$$\begin{aligned}
P_{abcd} = & K_a K_b K_c K_d [P_{ab} P_{cd} + P_{ac} P_{bd} + P_{ad} P_{bc} + \\
& + \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} \left(\left\langle E_{a,\lambda}^{(-)} E_{b,\lambda'}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{c,\lambda''}^{(-)} E_{d,\lambda'''}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{b,\lambda'}^{(+)} E_{d,\lambda'''}^{(+)} \right\rangle_W \left\langle E_{a,\lambda}^{(+)} E_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle_W \right. \\
& + \left\langle E_{a,\lambda}^{(-)} E_{b,\lambda''}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{c,\lambda'''}^{(-)} E_{d,\lambda''}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{d,\lambda'''}^{(+)} E_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle_W \left\langle E_{c,\lambda''}^{(+)} E_{b,\lambda'}^{(+)} \right\rangle_W \\
& + \left\langle E_{a,\lambda}^{(-)} E_{c,\lambda''}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{b,\lambda'}^{(-)} E_{d,\lambda'''}^{(-)} \right\rangle_W \left\langle E_{d,\lambda'''}^{(+)} E_{a,\lambda}^{(+)} \right\rangle_W \left\langle E_{b,\lambda'}^{(+)} E_{c,\lambda''}^{(+)} \right\rangle_W \\
& \left. + \text{Complejo conjugado} \right]. \tag{15}
\end{aligned}$$

Una inspección más profunda de (15) nos lleva a la siguiente expresión:

$$P_{abcd} = K_a K_b K_c K_d \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} \left| \left\langle E_{a,\lambda}^{(-)} E_{b,\lambda'}^{(-)} E_{c,\lambda''}^{(-)} E_{d,\lambda'''}^{(-)} \right\rangle_W \right|^2. \tag{16}$$

La expresión (16) corresponde a la probabilidad de detección cuádruple para experimentos PDC, que en términos de la diferencia, en cada detector, entre la intensidad total y la correspondiente a la radiación de punto cero, se expresa de la forma siguiente:

$$P_{abc} = K_a K_b K_c K_d \langle (I_a - I_{ZPF,a}) (I_b - I_{ZPF,b}) (I_c - I_{ZPF,c}) (I_d - I_{ZPF,d}) \rangle_W. \tag{17}$$

Bibliografía

- [1] Abal G. *Paradoja EPR y desigualdades de Bell: pruebas experimentales, estado actual del conocimiento.*, Facultad de Ingeniería Universidad de la República, Montevideo (2007).
- [2] Acín A., Gisin N. y Scarani V. *Coherent pulse implementations of quantum cryptography protocols resistant to photon number splitting attacks*, Phys. Rev. A **69**, 012309-1/16 (2004).
- [3] Acín A., Gisin N., y Scarani V. *Security bounds in quantum cryptography using d level systems*, Quant. Inf. Comp. **3**, 563 (2003).
- [4] Acín A., Masanes L. y Gisin N., . *Equivalence between two qubit entanglement and secure key distribution*, Phys. Rev. Lett. **91**, 167901-1/4 (2003).
- [5] Agarwall G. y Wolf E. *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase space methods in quantum mechanics. I. A generalized Wick theorem and multi-time mapping*, Phys. Rev. D **2**, 2206 (1970).
- [6] Agarwall G. y Wolf E. *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase space methods in quantum mechanics. I. Mapping theorems and ordering of functions of nonconmmuting operators*, Phys. Rev. D **2**, 2161 (1970).
- [7] Agarwall G. y Wolf E. *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase space methods in quantum mechanics. II. Quantum mechanics in phase space*, Phys. Rev. D **2**, 2187 (1970).
- [8] Aharonov D. y Ben-Or M. *Fault-tolerant quantum computation with constant error rate*, LANL eprint quant-ph/9906129.
- [9] Akbar Ali S., Bisht P. B., Nautiyal A., Shukla V., Bindra K. S. y Oak S. M. *Conical emission in β -barium borate under femtosecond pumping with phase matching angles away from second harmonic generation*, J. Opt. Soc. Am. B **27**, 1751 (2010).
- [10] Aschauer H. y Briegel H.J. *Security proof of quantum cryptography based entirely on entanglement purification*, Phys. Rev. A **66**, 032302 (2002).

- [11] Aspect A., Dalibard J. y Roger G. *Experimental test of Bell's inequalities using time varying analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 25, 1804-1807 (1982).
- [12] Aspelmeyer M., Bohm H. R., Gyatso T., Jennewein T., Kaltenbaek R., Lindenthal M., Molina-Terriza G., Poppe A., Resch K., Taraba M., Ursin R., Walther P. y Zeilinger A. *Long distance free space distribution of quantum entanglement*, Science **301**, 5633, 621-623 (2003).
- [13] Bamum H., Smolin J. y Terhal B. *Quantum capacity is properly defined without encodings*, Phys. Rev. A **58**, 3496 (1998).
- [14] Banaszek K. *Optimal receiver for quantum cryptography with two coherent states*, Phys. Rev. A **253**, 12 (1999).
- [15] Barnett S. M. *Information theoretic limits to quantum cryptography*, Phys. Rev. A **48**, R5 (1993).
- [16] Barnett S. M., Huttner B. y Phoenix S.J.D. *Eavesdropping strategies and rejected data protocols in quantum cryptography*, J. Mod. Opt. **40**, 2501 (1993).
- [17] Barreiro J. T., Langford N. K., Peters N. A. y Kwiat P. G. *Generation of hyperentangled photon pairs*, Phys. Rev. Lett. **95**, 260501 (2005).
- [18] Bechmann-Pasquinucci H. y Gisin N. *Incoherent and coherent eavesdropping in the six state protocol of quantum cryptography*, Phys. Rev. A **59**, 4238 (1999).
- [19] Bechmann-Pasquinucci H. y Gisin N. *Intermediate states in quantum cryptography and Bell inequalities*, Phys. Rev. A **67**, 062310 (2003).
- [20] Bechmann-Pasquinucci H. y Peres A. *Quantum cryptography with 3 state systems*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3313 (2000).
- [21] Bechmann-Pasquinucci H. y Tittel W. *Quantum cryptography using larger alphabets*, Phys. Rev. A **61**, 062308 (2000).
- [22] Beige A., Englert B. G., Kurtsiefer C. y Weinfurter H. *Cryptography with single photon two qubit states*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 28, 103 (2002).
- [23] Bell J. S. *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics **1**, 195-200 (1964).
- [24] Bell J. S. *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **38**, 3, 447-452 (1966).
- [25] Benenti G., Casati G. y Strini G. *Principles of Quantum Computation and Information*, World scientific, (2004).

- [26] Benioff P. *The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines*, J. Stat. Phys. **22**, 563-591 (1980).
- [27] Benjamin S. *Quantum cryptography: Single photons*, Science **290**, 5500, 2273-2274, (2000).
- [28] Bennett C., Brassard G., Popescu S., Schumacher B., Smolin J. y Wootters W. *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996).
- [29] Bennett C., Brassard G. y Ekert A. *Quantum Cryptography*, Scientific American **267**, 50 (1992).
- [30] Bennett C. H. *Quantum cryptography using any two nonorthogonal states*, Phys. Rev. Lett. **68**, 21, 3121-3124 (1992).
- [31] Bennett C. H., Bessette F., Salvail L., Brassard G. y Smolin J.A. *Experimental Quantum Cryptography*, J. Cryptology **5**, 1, 3-28, (1992).
- [32] Bennett C. H., Brassard G., Breidbart S. y Wiesner S. *Quantum cryptography, or unforgeable subway tokens*, in D. Chaum, R. L. Rivest, A. T. Sherman, Advances in Cryptology: Proc. of Crypto **82**, Plenum Press, New York, 267 (1983).
- [33] Bennett C. H. Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A. y Wootters W. K. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and EPR channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 13, 1895-1899 (1993).
- [34] Bennett C. H., Brassard G. y Mermin N. D. *Quantum cryptography without Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **68**, 5, 557-559 (1992).
- [35] Bennett C. H. y Brassard G. *An update on quantum cryptography*, in G. R. Blakley D. Chaum (eds.), Advances in Cryptology: Proc. of Crypto 84, Lecture Notes in Computer Science **196**, Springer Verlag, Berlin, 475 (1985).
- [36] Bennett C. H. y Brassard G. *Quantum cryptography*, chapter 6 in G. Brassard Modern cryptology a tutorial, Lecture Notes in Computer Science **325**, Springer Verlag, New York, 75 (1988).
- [37] Bennett C. H. y Brassard G. *Quantum cryptography reinvented*, SIGACT news **18**, 898-912 Plenum Press, 51 (1987).
- [38] Bennett C. H. y Brassard G. *Quantum key distribution and coin tossing*, Proc. IEEE Int. Conference on Computers, Systems and Signal Processing (Bangalore, India, 1984), IEEE, New York, 175-179 (1984).

- [39] Bennett C. H. y Wiesner S. J. *Communication via one and two particle operators on Einstein Podolsky Rosen states*, Phys. Rev. Lett. **69**, 20, 2881-2884 (1992).
- [40] Bennett C., Vincenzo D., Smolin J. y Wootters W., . *Mixed state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824, (1996).
- [41] Bennett C., Vincenzo D. y John A. *Capacities of quantum erasure channels* Phys. Rev. Lett. **78** 3217, (1997).
- [42] Bethune D. S., Navarro M. y Risk W. P. *Enhanced autocompensating quantum cryptography system*, Applied Optics, **41**, 9, 1640-1648 (2002).
- [43] Bethune D. S. y Risk W. P. *Autocompensating quantum cryptography*, New J. Phys **4**, 42 (2002).
- [44] Beveratos A., Brouri R., Gacoin T., Villing A., Poizat J. Ph. y Grangier P. *Single photon quantum cryptography*, Phys. Rev. Lett. **89**, 187901 (2002).
- [45] Bianuccia P., Miquela C., Paz J. y Saraceno M. *Discrete Wigner functions and the phase space representation of quantum computers*, Phys. Rev. A **297**, 353 (2002).
- [46] Biham E. y Mor T., . *Single photon quantum cryptography*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2256, (1997).
- [47] Biham E. y Mor T. *Bounds on information and the security of quantum cryptography*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4034 (1997).
- [48] Blow K.J. y Phoenix S. J. D. *On a fundamental theorem of quantum cryptography*, J. Mod. Opt. **40**, 1, 33-36 (1993).
- [49] Bohm D. *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [50] Bohm D. *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. II*, Phys. Rev. **85**, 180 (1952).
- [51] Bohm H., Bohm P., Aspelmeyer M., Brukner C. y Zeilinger A. *Exploiting the randomness of the measurement basis in quantum cryptography: secure quantum key growing without privacy amplification*, quant-ph/0408179 (2004).
- [52] Bohr N. *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **48**, 696 (1935).
- [53] Bohr N. *Quantum mechanics and physical reality* , Nature **136**, 65 (1935).
- [54] Born M. y Wolf E. *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford (1993).

- [55] Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L. y Popescu S. *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein Podolsky Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **80**, 6, 1121-1125 (1998).
- [56] Bose S., Plenio M. B. y Vedral V. *Mixed state dense coding and its relation to entanglement measures*, in V. Buzzek, and D. P. Divincenzo (eds.), J. Mod. Opt. 47, 2-3 (Special issue: Physics of quantum information), Journal Modern Optics **47**, 291-310 (2000).
- [57] Bose S., Vedral V. y Knight P. L. *Multiparticle generalization of entanglement swapping*, Phys. Lett. A **57**, 2, 822-829 (1998).
- [58] Bose S., Vedral V. y Knight P. L. *Purification via entanglement swapping and conserved entanglement*, Phys. Lett. A **60**, 11, 194-197 (1999).
- [59] Bostroem K. y Felbinger T. *Deterministic secure direct communication using entanglement*, Phys. Rev. Lett. **89**, 18, 187902 (2002).
- [60] Bourennane M., Gibson F., Karlsson A., Hening A., Jonsson P., Tsegaye T., Ljunggren D. y Sundberg E. *Experiments on long wavelength (1550 nm) plug and play quantum cryptography systems*, Opt. Express **4**, 383-387 (1999).
- [61] Bouwmeester D., Ekert A. K. y Zeilinger A. *The Physics Quantum Information: Quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation*, (eds.) Springer-Verlag. Berlín (2000).
- [62] Bouwmeester D., Pan J.-W., Daniell M., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Observation of three photon Greenberger Horne Zeilinger entanglement*, Phys. Rev. Lett. **82**, 7, 1345-1349 (1999).
- [63] Bouwmeester D., Pan J.-W. Mattle K., Eibl M., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Experimental quantum teleportation* Nature (London) **390**, 6660, 575-579 (1997).
- [64] Boyer T. H. *Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with with classical electromagnetic zero-point radiation*, Phys. Rev. D **11**, 790-808 (1975).
- [65] Braunstein S. y Kimble H. *Dense coding for continuous variables*, Phys. Rev. A **61** 042302 (2000).
- [66] Brendel J., Gisin N., Tittel W. y Zbinden H. *Pulsed energy-time entangled twin photon source for quantum communication*, Phys. Rev. Lett. **82**, 12, 2594-2597 (1999).
- [67] Brus D. *Optimal eavesdropping in quantum cryptography with six states*, Phys. Rev. Lett. **81**, 14, 3018-3021 (1998).
- [68] Burnham D. C. y Weinberg D. L. *Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs*, Phys. Rev. Lett. **25**, 84 (1970).

- [69] Buttler W., Hughes R., Kwiat P., Lamoreaux S., Luther G., Morgan G., Nordholt J., Peterson C. y Simmons C. *Practical free space quantum key distribution over 1 km*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3283 (1998).
- [70] Cabello A. *Quantum key distribution in the Holevo limit*, Phys. Rev. Lett. **85**, 26, 5635-5638, (2000).
- [71] Cabello A. *Quantum key distribution without alternative measurements*, Phys. Rev. A **61**, 5, 052312, (2000).
- [72] Cahill K. y Glauber R. *Density operators and quasiprobability distributions*, Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).
- [73] Cahill K. y Glauber R. *Ordered expansions in boson amplitude operators*, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969).
- [74] Cai Q.-Y. *The “Ping-Pong” protocol can be attacked without eavesdropping*, Phys. Rev. Lett. **91**, 10, 109801 (2003).
- [75] Calsamiglia J. y Lütkenhaus N. *Maximum efficiency of a linear optical Bell state analyzer*, Appl. Phys. B **72**, 67-71 (2001).
- [76] Casado A. *Estudio de los experimentos de conversión paramétrica a la baja con el formalismo de la función de Wigner*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1998).
- [77] Casado A., Fernández Rueda A., Marshall T. W., Martínez J., Risco Delgado R. y Santos E. *Dependence on Crystal Parameters of the Correlation Time Between Signal and Idler Beams in Parametric Down Conversion Calculated in the Wigner Representation*, Eur. Phys. J. D. **11**, 465 (2000).
- [78] Casado A., Fernández Rueda A., Marshall T. W., Risco Delgado R. y Santos E. *Dispersion Cancellation and Quantum Eraser Experiments Analyzed in the Wigner Function Formalism*, Phys. Rev. A **56**, 2477 (1997).
- [79] Casado A., Fernández Rueda A., Marshall T. W., Risco Delgado R. y Santos E. *Fourth-Order Interference in the Wigner Representation for Parametric Down-Conversion Experiments*, Physical Review A **55**, 5, 3879-3890 (1997b).
- [80] Casado A., Fernández Rueda A., Marshall T. W., Risco Delgado R. y Santos E. *Local Realist Theory for PDC Experiments Based on the Wigner Formalism*, Z Naturforsch. **56A**, 178 (2001).
- [81] Casado A., Guerra S. y Plácido J. *Análisis de estados hiperentrelazados con el formalismo de la función de Wigner en el marco de Heisenberg*, en Resúmenes de las comunicaciones de la XXXII Reunion Bienal de la Real Sociedad Española de Física Ciudad Real. Ed: R.S.E.F., ISBN: 978-84-692-4956-7, Simposio de Información Cuántica, 519 (2009).

- [82] Casado A., Guerra S. y Plácido J. *Efectos de la radiación del punto cero en experimentos de comunicación cuántica con fotones producidos en el proceso de conversión paramétrica a la baja*, comunicación aceptada en la XXXIII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física, santander (2011).
- [83] Casado A., Guerra S. y Plácido J. *Interpretación del doble entrelazamiento de qubits en la representación de Wigner y su aplicación a criptografía cuántica*, en Resúmenes de las comunicaciones de la XXX Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física, Orense. Ed: R.s.e.f., ISBN: 84-689-3266-3 (2005).
- [84] Casado A., Guerra S. y Plácido J. *Partial Bell-state analysis with parametric down conversion in the Wigner function formalism*, Advances in Mathematical Physics **2010**, artículo 501521, 11 páginas, doi:10.1155/2010/501521 (2010).
- [85] Casado A., Guerra S. y Plácido J. *Wigner representation for experiments on quantum cryptography using two photon polarization entanglement produced in parametric down conversion*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**, 045501 (2008).
- [86] Casado A., Marshall T. W., Risco Delgado R. y Santos E. *Spectrum of the Parametric Down Converted Radiation Calculated in the Wigner Function Formalism*, Eur. Phys. J. D. **13**, 109 (2001).
- [87] Casado A., Marshall T. W. y Santos E. *Parametric down conversion experiments in the Wigner representation*, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 494 (1997).
- [88] Casado A., Marshall T. W. y Santos E. *Type II Parametric Down Conversion in the Wigner Function Formalism: Entanglement and Bell's Inequalities*, J. Op. Soc. Am. B **15**, 5, 1572-1577 (1998).
- [89] Casado A., Marshall T.W., Risco-Delgado R. y Santos E. *A local hidden variables model for all experiments involving photon pairs produced in parametric down conversion*, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0202097v1> (2002).
- [90] Casado A., Martínez J., Risco-Delgado R. y Santos E. *The meaning of teleportation in terms of the quantum zeropoint field*, No publicado (1998).
- [91] Casado A., Risco-Delgado R., Ibáñez Castillo G. y Santos E. *Local hidden variables model based on the Wigner function formalism for parametric down conversion*, en International Conference on Quantum Information: conceptual foundations, developments, and perspectives, Oviedo, Spain (2002).
- [92] Casado A. y Risco Delgado R. *The problem of detection in stochastic optics*, No publicado (1999).

- [93] Chen Z.-B., Pan J.-W., Zhang Y.-D., Brukner C. y Zeilinger A. *All Versus Nothing violation of local realism for two entangled photons*, Phys. Rev. Lett. **90**, 16, 160408 (2003).
- [94] Chen Z.-B., Zhang Q., Bao X.-H. Schmiedmayer J. y Pan J.-W. *Deterministic and efficient quantum cryptography based on Bells theorem*, Phys. Rev. A **73**, 050302 (2006).
- [95] Clauser J. F. y Horne M. A. *Experimental consequences of objective local theories*, Phys. Rev. D **10**, 526-535 (1974).
- [96] Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A. y Holt R. A. *Proposed experiment to test local hidden variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 15, 880-884 (1969).
- [97] Cleve R., Gottesman D. y Lo H. *How to Share a Quantum Secret*, Phys. Rev. Lett. A **83**, 3, 648-651 (1999).
- [98] Cormick C. *Funciones de Wigner discretas y estados estabilizadores en computación cuántica*, Tesis, Universidad de Buenos Aires (2005).
- [99] Cover T. y Thomas J. *Elements of Information Theory*, ISBN: 0-471-24195-4, hardcover, 776 (1991).
- [100] De La Peña L. y Cetto A.M. *Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics*, arxiv:quant-ph/0501011v2 (2005).
- [101] De La Peña L. y Cetto A.M. *The quantum dice: An introduction to Stochastic Electrodynamics*, Kluwer, dordrecht (1996).
- [102] Dechoum K., Marshall T.W. y Santos E. *Parametric down and up conversion in the Wigner representation of quantum optics*, J. Mod. Optics **47**, 1273-1287 (2000).
- [103] Deng F. G., Li X. H., Zhou H. Y. y Zhang Z. *Erratum: Improving the security of multiparty quantum secret sharing against Trojan horse attack*, Phys. Lett. A **73**, 049901 (2006).
- [104] Deng F. G., Li X. H., Zhou H. Y. y Zhang Z. *Improving the security of multiparty quantum secret sharing against Trojan horse attack*, Phys. Lett. A **72**, 044302 (2005).
- [105] Deng F.-G., Long G. L. y Liu. X.-S. *Two step quantum direct communication protocol using the Einstein Podolsky Rosen pair block*, Phys. Rev. A **68**, 4, 042317 (2003).
- [106] Deng F.-G. y Long G. *Secure direct communication with a quantum one time pad*, Phys. Rev. A **69**, 5, 052319 (2004).
- [107] Deng F., Li X., Li C., Zhou P. y Zhou H. *Multiparty quantum state sharing of an arbitrary two particle state with Einstein Podolsky Rosen pairs*, Phys. Rev. A **72**, 044301 (2005).

- [108] Deutsch D. *Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer*, Proc. R. Soc. Lond. A. **400**, 97 (1985).
- [109] Deutsch D., Ekert A., Jozsa R., Macchiayello C., Popescu S. y Sanpera A. *Quantum Privacy Amplification and the Security of Quantum Cryptography over Noisy Channels*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2818 (1996).
- [110] Durt T., Kurtsiefer C., Lamas A. y Ling A. *Wigner tomography of two qubit states and quantum cryptography*, Phys. Rev. A **78**, 042338 (2008).
- [111] Einstein A., Podolsky B. y Rosen C. *Can quantum mechanical description of reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [112] Ekert A. K. *Quantum Cryptography based on Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 6, 661-663 (1991).
- [113] Ekert A. K., Rarity J. G., Tapster P. R. y Palma G. M., . *Practical quantum cryptography based on two photon interferometry*, Phys. Rev. Lett. **69**, 9, 1293-1295 (1992).
- [114] Enzer D. G., Hadley P. G., Hughes R. J. Peterson C. G. y Kwiat P. G. *Entangled photon six state quantum cryptography*, New J. Phys **4**, 45, 1-45, 8 (2002).
- [115] Enzer D., Hadley P., Hughes R., Peterson C. y Kwiat P. *Bipartite Bell Inequalities for Hyperentangled States*, New J. Phys. **4**, 1367 (2002).
- [116] Feynman R., Leighton R. y Sands M. *The Feynman lectures on Physics*, Addison Wesley (1965).
- [117] Feynman R. P. *Simulating physics with computers*, Int. J. Theor. Phys. **21**, 467 (1982).
- [118] Franco R. y Penna V. *Discrete Wigner distribution for two qubits: a characterization of entanglement propertie*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 5907 (2006).
- [119] Franson J. D. *Bell inequality for position and time*, Phys. Rev. Lett. **62**, 19, 2205-2208 (1989).
- [120] Fuchs C. A., Gisin N., Griffiths R. B., Niu C.-S. y Peres A. *Optimal eavesdropping in quantum cryptography. I. Information bound and optimal strategy*, Phys. Rev. A **56**, 1163 (1997).
- [121] Fuchs C. y Caves C. *Ensemble dependent bounds for accessible information in quantum mechanics*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3047, (1994).
- [122] Furusawa A., Sorensen J., Braunstein S. L., Fuchs C. A., Himble H. J. y Polzik E. S. *Unconditional Quantum Teleportation*, Science **282**, 5389, 706-709 (1998).

- [123] Gabriel C., Wittmann C., Sych D., Dong R., Maurerer W., L. Andersen U., Marquardt C. y Leuchs G. *A generator for unique quantum random numbers based on vacuum states*, Nature Photonics **4**, 711 (2010).
- [124] Genovese M., Brida G., Gramegna M. y Novero C. *Experimental limit on spontaneous parametric up conversion*, J. Mod. Optics **50**, 1757 (2003).
- [125] Genovese M. y Novero C. *Double entanglement and quantum cryptography*, Euro Phys Jour D. **21**, 109 (2002).
- [126] Ghose P. *Testing quantum mechanics on new ground*, (Cambridge: Cambridge University Press) (1999).
- [127] Ghosh S., Kar G., Roy A., Sen D. A. y Sen U. *Distinguishability of Bell states*, Phys. Rev. Lett. **87**, 27 277902, (2001).
- [128] Gisin N. Phys. Lett. A **210** 151, (1996).
- [129] Gisin N., Ribordy G., Tittel W. y Zbinden H. *Quantum cryptography*, Rev. Mod. Phys. **74**, 145-195 (2002).
- [130] Gisin N. y Huttner B. *Quantum cloning, eavesdropping and Bell's inequality*, Phys. Lett. A **228**, 1-2, 13-21 (1997).
- [131] Glauber R. J. *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131**, 2766-2788 (1963).
- [132] Glauber R. J. *Photon correlations*, Phys. Rev. **10**, 84-86 (1963).
- [133] Glauber R. J. *Quantum optics and electronics*, Editado por C. De Witt, A. Blandin, y Cohen-Tannoudji (Gordon y Breach, New York (1965).
- [134] Glauber R. J. *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529-2788 (1963).
- [135] Glöckl O., Lorenz S., Marquardt C., Heersink J., Brownnutt M., Silberhorn C., Pan Q., Loock P., Korolkova N. y Leuchs G. *Experiment towards continuous variable entanglement swapping: Highly correlated four partite quantum state*, Phys. Rev. A **68**, 012319 (2003).
- [136] Gobby C., Yuan Z. L. y Shields A. J. *Quantum key distribution over 122 km of standard telecom fiber*, Appl. Phys. Lett. **84**, 3762 (2004).
- [137] Gordon J., Louisell W. y Walker L. *Quantum fluctuations and noise in parametric processes: II*, Physical Review **129**, 481 (1963).

- [138] Gottesman D. *Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound*, Phys. Rev. A. **54**, 1862 (1996).
- [139] Greenberger D. M., Horne M. A., y Zeilinger A. Going beyond Bell's theorem, in M. Kafatos (ed.), *In Bells Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, Proc. of a workshop (George Mason University, 1988), Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 69-72 (1989).
- [140] Haisch B. *Zero-Point Energy*, en: Encyclopedia of Earth. Ed. C. J. Cleveland http://www.eoearth.org/article/zero-point_energy, (2007).
- [141] Hecht E. y Zajac A. *Retarders and Jones Calculus*, Phys. **531**, 25, (2005).
- [142] Hecht E. y Zajac A. *Optica*, Ed. Fondo Educativo Interamericano S.A. Reading, Massachusetts, (1977).
- [143] Hiskett P. A., Rosenberg D., Peterson C. G., Hughes R. J., Nam S., Lita A. E., Miller A. J. y Nordholt J.E. *Long distance quantum key distribution in optical fibre*, New J. Phys. **8**, 193 (2006).
- [144] Holevo. A. *Probl. Inf. Trasm. (USSR)* **9**, 177, (1973).
- [145] Holevo A. S. *Probl. Peredachi. Inf.* **9**, 3, 3-11 (1973). English version: *Some estimates of the information transmitted by quantum communication channels*, *Probl. Inf. Trasm.* **9**, 177-183 (1973).
- [146] Hughes R. J. Morgan G. L. y Peterson C. G. *Quantum key distribution over a 48 km optical fibre network*, *J. Mod. Opt.* **47**, 2-3, 533-547 (2000).
- [147] Ibáñez Castillo G. *Modelos Semiclásicos para Experimentos de Telecomunicación Cuántica*, Proyecto fin de carrera, Departamento de Física Aplicada III, Universidad de Sevilla (2002).
- [148] Ibison M. y Haisch B. *Quantum and classical statistics of the electromagnetic zero-point-field*, Phys. Rev. A **54**, 2737-2744 (1996).
- [149] Pěřina J. *Quantum statistics of linear and nonlinear optical phenomena*, (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht)(1984).
- [150] Jennewein T., Simon C., Weihs G., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Quantum Cryptography with Entangled Photons*, Phys. Rev. Lett. **84**, 20, 4729-4732 (2000).
- [151] Jennewein T., Weihs G., Pan J.-W. y Zeilinger A. *Experimental nonlocality proof of quantum teleportation and entanglement swapping*, Phys. Rev. Lett. **88**, 1, 017903 (2002).

- [152] Jin X.-M., Ren J.-G., Yang B., Yi Z.-H., Zhou F., Xu X.-F., Wang S.-K., Yang D., Hu Y.-F., Jiang S., Yang T., Yin H., Chen T., Peng C.-Z. y Pan J.-W. *Experimental free space quantum teleportation*, Nature Photonics **4**, 376-381 (2010).
- [153] Karlsson A., Koashi M. y Imoto N. *Quantum entanglement for secret sharing and secret splitting*, Phys. Rev. A **59**, 1, 162-168 (1999).
- [154] Kiesel N. *Experiments on Multiphoton Entanglement*, Disertación en la Facultad de Física de la Universidad Ludwig Maximilians, Munchen (2007).
- [155] Kim Y.-H., Kulik S. P. y Shih Y. H. *Quantum Teleportation of a polarization state with a complete Bell state measurement*, Phys. Rev. Lett A **86**, 7, 1370-1373 (2001).
- [156] Kim Y. S. y Noz M. E. *Phase space picture of quantum mechanics*, World scientific, Singapore (1991).
- [157] Knill E., Laflamme R. y Zurek W.H. *Resilient quantum computation: Error Models and Thresholds*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **454**, 365 (1998); Science **279**, 342, (1998). (LANL eprint quant-ph/9702058).
- [158] Kochen S. y Specker E. P. *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. **17**, 1, 59-87 (1967).
- [159] Koniorczyk M., Bužek V. y Janszky J. *Wigner function description of quantum teleportation in arbitrary dimensions and a continuous limit*, Phys. Rev. A **64**, 034301 (2001).
- [160] Kosaka H., Tomita A., Nambu Y., Kimura T. y Nakamura K. *Single photon interference experiment over 100 km for quantum cryptography system using balanced gated mode photon detector*, Electron. Lett. **39**, 1199-1201 (2003).
- [161] Kurtsiefer C., Oberparleiter M. y Weinfurter H. *Generation of correlated photon pairs in type II parametric down conversion*, J. Mod. Opt. **48**, 1997 (2001).
- [162] Kwiat P., G. Mattle K., Weinfurter H. y Zeilinger A. *New high-intensity source of polarization entangled-photon pairs*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
- [163] Kwiat P. G., Waks E., White A. G., Appelbaum I. y Eberhard P. H. *Ultrabright source of polarization-entangled photons*, Phys. Rev. A **60**, 2, R773-R776 (1999).
- [164] Kwiat P. G., y Weinfurter H. *Embedded Bell state analysis*, Phys. Rev. A **58**, 4, R2623-R2626 (1998).
- [165] Laloë F. *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*, Am. J. Phys. **69**, 655 (2001).

- [166] Lance A. M., Symul T., Bowen W. P., Sanders B. C. y Lam Ping K. *Tripartite Quantum State Sharing*, Phys. Rev. Lett **92**, 17, 177903 (2004).
- [167] Calsamiglia J. y Suominen K.-A. Lütkenhaus N. *Bell measurements for teleportation*, Phys. Rev. A **59**, 5, 3295-3300 (1999).
- [168] Liu Y., Chen T.-Y., Wang J. Cai W.-Q., Wan X., Chen L.-K., Wang J.-H., Liu S.-B., Liang H., Yang L., Peng C.-Z., Chen K., Chen Z.-B. y Pan J.-W. *Decoy state quantum key distribution with polarized photons over 200 km*, Opt. Express **18**, 8, 8587-8594 (2010).
- [169] Loudon R. *Fermion and boson beam splitter statistics*, in Coherence and Quantum Optics VI; 1990, Proceedings of the Sixth Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, edited by J.H. Eberly, L. Mandel and E. Wolf (New York: Plenum); 1998, Phys. Rev. A **58**, 4904 (2000).
- [170] Loudon R. *The quantum theory of light*, Clarendon Press, Oxford (1981).
- [171] Louisell W., Yariv A. y Siegman A. *Quantum fluctuations and noise in parametric processes: I*, Physical Review **124**, 1646 (1961).
- [172] Luis A. *Quantum tomography of input-output processes*, Phys. Rev. A **62**, 054302 (2000).
- [173] Luis A. y Sánchez L. *Complete Characterization of Arbitrary Quantum Measurement Processes*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3573 (1999).
- [174] Luis A. y Sánchez L. *Measuring quantum inputoutput processes: phase space representation of transformations*, Phys. Rev. Lett. **261**, 12 (1999).
- [175] Macchiayello C. Phys. Rev. A **246**, 385 (1998).
- [176] Mair A., Vaziri A., Weihs G. y Zeilinger A. *Entanglement of the orbital angular momentum states of photons*, Nature **412**, 6844, 313-316 (2001).
- [177] Mandel L. y Wolf E. *Coherence properties of optical fields*, Rev. Mod. Phys. **37**, 231 (1965).
- [178] Mandel L. y Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, (1995).
- [179] Mandel L. y Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [180] Marand C. y Townsend P. *Quantum key distribution over distances as long as 30 km*, Opt. Lett. **20**, 1695-1697 (1995).

- [181] Marcikic I., de Riedmatten H., Tittel W., Zbinden H., Legre M. y Gisin N. *Distribution of time-bin entangled qubits over 50 km of optical fiber*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180502 (2004).
- [182] Marcikic I., Riedmatten H., Tittel W., Zbinden H. y Gisin N. *Long distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths*, Nature **421**, 6922, 509-514 (2003).
- [183] Marshall T. W. *A local realist theory of parametric down conversion*, arxiv:quant-ph/9711030v2 (1997).
- [184] Marshall T. W. *Nonlocality-The party may be over!*, arxiv:quant-ph/0203042v1 (2002).
- [185] Marshall T. W. *Parametric up conversion of the vacuum*, arxiv:quant-ph/9803054v1 (1998).
- [186] Marshall T. W. *Random Electrodynamics*, Proc. Roy. Soc. a **276**, 475 (1963).
- [187] Marshall T. W., Santos E. y Selleri Y., . *Local realism has not been refuted by atomic cascade experiments*, Phys. Lett. A **98**, 5 (1983).
- [188] Marshall T. W., Santos E. y Vidiella A., . *On the nonlocal predictions of quantum optics, en Proceedings of the Third International Workshop on Squeezed State and Uncertainty Relations*, (NASA conference Publication), 581 (1994).
- [189] Marshall T. W. y Santos E. *Interpretation of quantum optics based upon positive Wigner functions*, Found. Phys. Lett. **5**, 573 (1992).
- [190] Marshall T. W. y Santos E. *Photoelectron counting theory in terms of the Wigner and Q representations of the light field*, J. Mod. Optics **38**, 1463 (1991).
- [191] Marshall T. W. y Santos E. *Stochastic Optics: A local realist analysis of optical tests of Bell inequalities*, Phys. Rev. A **39**, 6271 (1989).
- [192] Marshall T. W. y Santos E. *Stochastic Optics: A reaffirmation of the wave nature of light*, Found. Phys. **18**, 185 (1988).
- [193] Marshall T. W. y Santos E. *The myth of the photon, en The Present Status of the Quantum Theory of light*, Editado por Jeffers S. et al. (Kluwer, Dordrecht), 67 (1997).
- [194] Marshall T. y Santos E. *Langevin equation for the squeezing of light by means of parametric oscillator*, Phys. Rev. A **41**, 1582 (1990).
- [195] Mattle K., Weinfurter H., Kwiat P. G. y Zeilinger A. *Dense Coding in Experimental Quantum Communication*, Phys. Rev. Lett. **76**, 25, 4656-4659 (1996).
- [196] Michler M., Mattle K., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Interferometric Bell state analysis*, Phys. Rev. A **53**, 3, R1209-R1212 (1996).

- [197] Michler M., Risco-Delgado R. y Weinfurter H. en *International Workshop on Quantum Information*, Almagro, Spain (1998).
- [198] Milonni P. *The Quantum Vacuum*, Academic, new york (1994).
- [199] Mo X.-F., Zhu B., Han Z.-F., Gui Y.-Z. y Guo G.-C. *Faraday-Michelson system for quantum cryptography*, Opt. Lett. **30**, 2637-2634 (2005).
- [200] Moyal J. Proc. Cambridge Phil. Soc., **45**, 99 (1949).
- [201] Muller A., Breguet J. y Gisin N. *Experimental demonstration of quantum cryptography using polarized photons in optical fibre over more than 1 km*, Europhys. Lett. **23**, 6, 383-388 (1993).
- [202] Muller A., Zbinden H. y Gisin N. *Underwater quantum coding*, Nature **378**, 449 (1995).
- [203] Naik D. S., Peterson C. G., White A. G., Berglund A. J. y Kwiat P. G. *Entangled state quantum cryptography: eavesdropping on the Ekert protocol*, Phys. Rev. Lett. **84**, 20, 4733-4736 (2000).
- [204] Nielsen M., Knill E. y Laflamme R. *Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance*, Nature **396**, 52 (1998).
- [205] Ou Z.Y. y Mandel L. *Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*, Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988).
- [206] Pan J.-W., Bouwmeester D., Daniell M., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Experimental test of quantum nonlocality in three photon Greenberger Horne Zeilinger entanglement*, Nature **403**, 6769, 515-519 (2000).
- [207] Pan J.-W., Bouwmeester D., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted*, Phys. Rev. Lett. **80**, 18, 3891-3894 (1998).
- [208] Pan J.-W., Chen Z.-B., Zukowski M., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Multi-photon entanglement and interferometry*, <http://arxiv.org/abs/0805.2853v1> (2008).
- [209] Paz J. *Discrete Wigner functions and the phase space representation of quantum computers*, Phys. Rev. A **65**, 062311 (2002).
- [210] Peng C.-Z., Zhang J., Yang D., Gao W.-B., Ma H.-X., Yin H., Zeng H.-P., Yang T., Wang X.-B., y Pan J.-W. *Experimental long distance decoy state quantum key distribution based on polarization encoding*, Phys. Rev. Lett. **98**, 010505 (2007).
- [211] Popescu S. *An optical method for teleportation*, LANL Archives quant-ph/9501020 (1995).

- [212] Preskill J. *Reliable quantum computers*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **454**, 469 (1998).
- [213] Rarity J. G. y Tapster P. R. *Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990).
- [214] Resch K., Lindenthal M., Blauensteiner B., Bohm H., Fedrizzi A., Kurtsiefer C., Poppe A., Schmitt-Manderbach T., Taraba M., Ursin R., Walther P., Weier H., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Distributing entanglement and single photons through an intra city, free space quantum channel*, Opt. Express **13**, 1, 202-209 (2005).
- [215] Ribordy G., Brendel J., Gautier J. D. Gisin N. y Zbinden H. *Long distance entanglement based quantum key distribution*, Phys. Rev. Lett. A **63**, 1, 012309 (2001).
- [216] Risco Delgado R. *Localidad y no localidad bajo recientes resultados teóricos y experimentales*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1997).
- [217] Rosenberg D., Harrington J. W., Rice P. R., Hiskett P. A., Peterson C. G., Hughes R. J., Lita A. E., Nam S. W. y Nordholt J. E. *Long distance decoy state quantum key distribution in optical fiber*, Phys. Rev. Lett. **98**, 010503 (2007).
- [218] Rubin M. H., Klyshko D. N., Shih Y. H. y Sergienko A. V. *Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down conversion*, Phys. Rev. **50**, 5122-5133 (1994).
- [219] Santos E. *Can quantum vacuum fluctuations be considered real?*, arxiv:quant-ph/0206161v1 (2002).
- [220] Santos E. *Critical analysis of the empirical tests of local hidden-variable theories*, Phys. Lett. A, **46**, 3646 (1983).
- [221] Santos E. *Experimentos con pares de fotones producidos en cristales no lineales*, en *Fundamentos de Física Cuántica*, (Editorial Complutense), 63 (1996).
- [222] Santos E. *How photon detectors remove vacuum fluctuations*, arxiv:quant-ph/0207073v2 (2002).
- [223] Santos E. *Photons are fluctuations of a random (zeropoint) radiation filling the whole space*, Proc. Spie 5866, 36 (2005), doi:10.1117/12.619611.
- [224] Santos E. *Unreliability of performed tests of Bell's inequality using parametric down-converted photons*, Phys. Lett. A, **212**, 10 (1996).
- [225] Santos E. y Marshall T. W. *Semiclassical optics as an alternative to nonlocality* Recent Res. Dev. Opt. **2**, 683 (2002).

- [226] Schmid C. *Multiphotons entanglement and applications in quantum information*, Disertación en la Facultad de Física de la Universidad Ludwig Maximilian, Munchen (2008).
- [227] Schmid C., Trojek P., Bourennane M., Kurtsiefer C., Żyukowski M. y Weinfurter H. *Experimental Single Qubit Quantum Secret Sharing*, Chinese Phys. Lett. **95**, 230505 (2005).
- [228] Schumacher B. *Quantum coding*, Phys. Rev. Lett. A **51**, 2738 (1995).
- [229] Scully M. y Zubairy M. *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [230] Shih Y. H., Sergienko A. V., Rubin M. H., Kiess T. E., y Alley C. D. *Two-photon entanglement in type-II parametric down conversion*, Phys. Rev. **50**, 23-28 (1994).
- [231] Shih Y. H., y Alley C. O. *New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2921-2924 (1988).
- [232] Shih Y. H. y Sergienko A. *A two-photon interference experiment using type II optical parametric down conversion*, Phys. Lett. A **191**, 201 (1994).
- [233] Shih Y. H. y Sergienko A. V. *Observation of quantum beating in a simple beam-splitting experiment: Two particle entanglement in spin and space-time*, Phys. Rev. **50**, 2564-2568 (1994).
- [234] Shih Y. H. y Sergienko A. V. *Two-photon anti-correlation in a Hanbury-Brown-Twiss type experiment*, Phys. Lett. A **186**, 29 (1994).
- [235] Shimizu K. y Imoto N. *Communication channels secured from eavesdropping via transmission of photonic Bell states*, Phys. Rev. Lett. A **60**, 1, 157-166 (1999).
- [236] Shor P. W. *Fault-tolerant quantum computation*, in Proc. 37th Symp. on Foundations of Computer Science, (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press), 15-65 (1997).
- [237] Simon C., Żukowski M., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Feasible "Kochen-Specker" Experiment with Single Particles*, Phys. Rev. Lett. **85**, 9, 1783-1786 (2000).
- [238] Simon C. y Pan J.-W. *Polarization entanglement purification using spatial entanglement*, Phys. Rev. Lett. **89**, 257901 (2002).
- [239] Steane A. *Error correcting codes in quantum theory*, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1995).
- [240] Steane A. *Multiple particle interference and quantum error correction*, Proc. R. Soc. Lond. A. **452**, 2551 (1995).
- [241] Stenholm S.,. *Polarization coding of quantum information*, Optics Comm. **123**, 287-296 (1996).

- [242] Stucki D., Gisin N., Guinnard O., Ribordy G. y Zbinden H. *Quantum key distribution over 67 km with a plug and play system*, New J. Phys. **4**, 41, 1-41, 8 (2002).
- [243] Stucki D., Walenta N., Vannel F., Thew R. T., Gisin N., Zbinden H. Gray S., Towery C. R. y Ten S. *High rate, long distance quantum key distribution over 250 km of ultra low loss fibres*, New J. Phys. **11**, 075003 (2009).
- [244] Sudarshan E. C. G. *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Phys. Rev. Lett. **10**, 277-279 (1963).
- [245] Sun J., Zhang S., Jia T., Wang Z., y Sun Z. *Femtosecond spontaneous parametric upconversion and downconversion in a quadratic nonlinear medium*, J. Opt. Soc. Am. B **26**, 549 (2009).
- [246] Tittel W., Brendel J. Zbinden H. y Gisin N. *ibid.* **81**, 3563 (1998).
- [247] Tittel W., Brendel J., Gisin N. y Zbinden H. *Long distance Bell type tests using energy-time entangled photons* , Phys. Rev. A, **59**, 6, 4150-4163 (1999).
- [248] Tittel W., Brendel J., Zbinden H. y Gisin N. *Quantum Cryptography using entangled photons in energy-time Bell states*, Phys. Rev. Lett. **84**, 20, 4737-4740 (2000).
- [249] Tittel W., Zbinden H. y Gisin N. *Experimental demonstration of quantum secret sharing*, Phys. Rev. A **63**, 042301 (2001).
- [250] Tokunaga Y., Okamoto T. and Imoto N. *Threshold quantum cryptography*, Phys. Rev. A **71**, 012314 (2005).
- [251] Townsend P. D. Rarity J. G. y Tapster P. R. *Single photon interference in a 10 km long optical fiber interferometer*, Electron. Lett. **29**, 634-639 (1993).
- [252] Ursin R., Tiefenbacher F., Schmitt-Manderbach T., Weier H., Scheidl T., Lindenthal M., Blauensteiner B., Jennewein T., Perdigues J., Trojek P., Ömer B., Fürst M., Meyenburg M., Rarity J., Sodnik Z., Barbieri C., Weinfurter H. y Zeilinger A. *Entanglement based quantum communication over 144 km*, Nat. Phys. **3**, 481-486 (2007).
- [253] Vaidman L. y Yoran N. *Methods for reliable teleportation*, Phys. Rev. A **59**, 1, 116-125 (1999).
- [254] Villoresi P., Jennewein T., Tamburini F., Aspelmeyer M., Bonato C., Ursin R., Pernechele C., Luceri V., Bianco G., Zeilinger A. y Barbieri C. *Experimental verification of the feasibility of a quantum channel between space and earth*, New J. Phys. **10**, 033038 (2008).
- [255] Von Neumann J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Springer Verlag (1932).

- [256] Walborn S. P., Pádua S. y Monken C.H. *Hyperentanglement assisted Bell state analysis*, Phys. Rev. A **68**, 4, 042313 (2003).
- [257] Walls D. F. y Milburn G. J. *Quantum Optics*, Springer Verlag, Berlin (1994).
- [258] Wang C., Deng F., Li Y., Liu X. y Long G. *Quantum secure direct communication with high dimension quantum superdense coding*, Phys. Rev. A **71**, 044305 (2005).
- [259] Weihs G., Jennewein T., Simon C., Weinfurter H. y Zeilinger, A. *Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 23, 5039-5043 (1998).
- [260] Wick G. Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
- [261] Wiesner S. *Conjugate coding* (original manuscript written circa 1970) SIGACT News **15**, 1, 78-88 (1983).
- [262] Wigner E. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [263] Wójcik A. *Eavesdropping on the "Ping-Pong" Quantum Communication Protocol*, Phys. Rev. Lett. **90**, 157901 (2003).
- [264] Wootters W. y Zurek W. Nature (London) **299**, 802 (1982).
- [265] Wu C., Chen J., Kwek L., Oh C. y Xue K. *Continuous multipartite entangled state in Wigner representation and violation of the Żukowski-Brukner inequality*, Phys. Rev. A **71**, 022110 (2005).
- [266] Xiao L., Long G. L., Deng F.-G. y Pan J.-W. *Efficient multiparty quantum secret sharing schemes*, Phys. Rev. A **69**, 5, 052307 (2004).
- [267] Wolfgang T. y Gregor W. *Photonic Entanglement for Fundamental Tests and Quantum Communication*, Quantum Information and Computation, Rinton Press **1**, 3 (2001).
- [268] Yurke B. y Stoler D. *Einstein Podolsky Rosen effects from independent particle sources*, Phys. Rev. Lett. **68**, 9, 1251-1254 (1992).
- [269] Zeilinger A. *General properties of lossless beam splitters in interferometry*, Am. J. Phys. **49**, 9, 882-883 (1981).
- [270] Zhang J., Xie C. y Peng K. *Entanglement swapping using nondegenerate optical parametric amplifier*, Phys. Lett. A **299**, 427-432 (2002).
- [271] Zhang Q., Takesue H., Nam S. W., Langrock C., Xie X., Baek B., Fejer M. M. y Yamamoto Y. *Distribution of time-energy entanglement over 100 km fiber using superconducting single photon detectors*, Opt. Express **16**, 8, 5776-5781 (2008).

-
- [272] Zhen S., Xiao H., Chao Y., Jun Z., Cheng Z. y Jian W. *Entangled photons and quantum communication*, Science Direct, **497**, 07.004 (2010).
- [273] Zukowski M. y Kaszlikowski D. *Entanglement swapping with PDC sources*, Acta Phys. Slovaca **49**, 4, 621-628 (2000).
- [274] Zukowski M., Zeilinger A., Horne M. A. y Ekert A. K. *Event ready detectors Bell experiment via entanglement swapping*, Phys. Rev. Lett. **71**, 26, 4287-4290 (1993).
- [275] Zukowski M., Zeilinger A., Horne M. y Weinfurter H. *Quest for GHZ states*, Acta Phys. Pol **A 93**, 1, 187-194 (1998).

