Emilio Gómez Déniz
Christian González Martel

Colección Manuales de Acceso

Curso preparatorio de acceso a la universidad para mayores de 25 años

11

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

EBOOK

ULPGC ediciones

Emilio Gómez Déniz
Christian González Martel

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

ULPGC
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Servicio de Publicaciones y Difusión Científica

2021

GOMEZ DÉNIZ, Emilio
Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales [Recurso electrónico] / Emilio Gómez Déniz, Christian González Martel. – Las Palmas de Gran Canaria : Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Servicio de Publicaciones y Difusión Científica, 2021
1 archivo PDF (223 p.). – (Manuales de acceso ; 11)
ISBN 978-84-9042-407-0

1. Matemáticas aplicadas 2. Matemáticas – Estudio y enseñanza 3. Ciencias sociales - Matemáticas I. González Martel, Christian, coaut. II. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, ed. III. Título IV. Serie

51:3

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Colección Manuales de Acceso, nº 11
Curso preparatorio de acceso a la universidad para mayores de 25 años

Vicerrectorado de Estudiantes, Alumni y Empleabilidad
Servicio de Publicaciones y Difusión Científica
http://spdc.ulpgc.es · serpubli@ulpgc.es

Dirección Técnico-Académica: Nicanor Guerra Quintana

Primera edición [edición eletrónica]. Las Palmas de Gran Canaria, 2021

ISBN: 978-84-9042-407-0
ISBN (ed. impresa): 978-84-9042-406-3
Thema: PBW, KC, J, 4CT

Producido en España. *Produced in Spain*

Índice

Presentación

Los capítulos que incluye este texto desarrollan los contenidos de carácter matemático que se consideran esenciales para la formación básica de un futuro estudiante universitario del área de Humanidades o Ciencias Sociales.

Conociendo que el tiempo del que disponen los estudiantes que afrontan esta iniciativa es limitado, el diseño de este manual está pensado para que el estudiante, si fuese el caso, pueda abordar sus contenidos de manera autónoma. Es por esta razón por lo que el presente manual, sin perder el rigor que la materia merece, tiene un contenido eminentemente práctico. Cada uno de los seis capítulos que lo componen incluye unas pocas herramientas teóricas así como el planteamiento y resolución de muchos ejemplos, incorporando además al final de cada capítulo numerosos ejercicios propuestos tipo test cuyas soluciones se muestran al final del texto.

Se anima al lector a seguir concienzudamente este texto pero también a consultar y estudiar otros manuales dedicados a la materia entre los que se encuentran los que se proponen en la bibliografía.

CAPÍTULO 1

Conjuntos numéricos y operaciones

La necesidad de contar objetos es tan antigua como el hombre, y las distintas culturas que han habitado este planeta han utilizado diferentes sistemas de numeración y símbolos para representar los números. El estudio de los conjuntos numéricos, por el que empezamos este capítulo, constituye el embrión de las Ciencias Matemáticas, siendo al día de hoy una disciplina aparte dentro del edificio matemático, suscitando aún numerosos temas de investigación.

No fue hasta el siglo XVIII cuando empezaron a formalizarse los conceptos relacionados con los conjuntos numéricos, con el trabajo, entre otros, de Cantor, Cauchy y Gauss.

Este capítulo comienza presentando los conjuntos numéricos, los números naturales, enteros, racionales, irracionales y los números reales. Este último conjunto, que incluye a todos los anteriores, constituirá la base sobre la que se desarrollará el resto de este manual. Estudiamos las operaciones que pueden llevarse a cabo con los números reales, suma, producto, potenciación y radicación.

1.1 Conjuntos numéricos

Comenzamos esta sección con una introducción a los diferentes conjuntos numéricos existentes.

El conjunto de los números naturales, que se denota mediante $\mathbb{N}$ surge por la necesidad de contar y ordenar elementos. Lo componen, el 0, 1, 2, etc. Escribiremos, en este caso,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

En ocasiones se denota mediante $\mathbb{N}^*$ al conjunto de los números naturales con excepción del cero. Esto es, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Para indicar que un número dado (o un elemento cualquiera de un conjunto que no tiene por qué ser numérico) pertenece a un conjunto dado se utiliza el símbolo $\in$ que puede leerse como "pertenece a". Así, podemos escribir que $3 \in \mathbb{N}$ o bien $5 \in \mathbb{N}$. Por otro lado, escribiremos $-2 \notin \mathbb{N}$ para indicar que un elemento dado no pertenece a un conjunto determinado.

Si sumamos o multiplicamos dos números naturales el resultado es de nuevo un número natural. Sin embargo, la resta de dos números naturales no garantiza que el resultado sea de nuevo un número natural. Por ejemplo, la operación $7 - 3 = 4$ resulta un número natural. Sin embargo, la operación $3 - 7$ no resulta un número natural. De ahí que surgiese la necesidad de construir un conjunto númerico mayor que permitiese este tipo de operaciones, así como ampliar el campo de los conjuntos numéricos. Surge así el conjunto de los números enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, y constituído por los números naturales, así como estos mismos precedidos del signo menos. De este modo tenemos,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Un problema similar al anterior surge ahora cuando se desea dividir dos números enteros. Por ejemplo, si efectuamos la división entre los dos números enteros 12 y 3, el resultado es 4, que es de nuevo un número entero. Sin embargo, no siempre se garantiza que la división vaya a resultar de nuevo un número entero. Así ocurre, por ejemplo, al dividir 3 entre 12, o bien 7 entre 2. Esta necesidad llevó a definir un nuevo conjunto que permitiese realizar este tipo de operaciones. Se trata del conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, definido como,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

La expresión $\frac{p}{q}$ recibe el nombre de fracción, siendo p el numerador de la fracción y q el denominador.

El conjunto de los números racionales, pues, lo componen aquéllos números que están expresados como cocientes entre dos números enteros, con la salvedad de que el número que aparezca en el denominador no puede ser cero. Así, por ejemplo, son números racionales los siguientes, $\frac{3}{5},\ -\frac{1}{4},\ 4$, etc. Obsérvese que cualquier número entero puede expresarse como un número racional sin más asumir que el denominador de la fracción es 1.

Por otro lado, si dividimos el numerador de una fracción por el denominador obtenemos un número decimal. Así, por ejemplo, el número decimal asociado a la fracción $\frac{15}{5}$ es 3, que es también un número entero. El número decimal asociado a la fración $\frac{2}{5}$ es 0.4. El número decimal asociado a la fracción $\frac{1}{3}$ es $0.33333\ldots$, que puede escribirse como $0.\widehat{3}$, en el que 3 se denomina periodo. El número decimal asociado a la fracción $\frac{4223}{990}$ resulta $4.2656565\ldots$, que puede escribirse como $4.2\widehat{65}$ y en el que el periodo es 65. Téngase en cuenta que cualquier número entero o decimal no periódico puede escribirse con un periodo sin más que añadirle una coma y ceros a la derecha, aunque esto no es usual. Por ejemplo, 3 puede escribirse como $3.\widehat{0}$, o bien 0.4 puede escribirse como $0.4\widehat{0}$.

Obviamente con los conjuntos definidos hasta el momento puede establecerse claramente la siguiente secuencia de inclusiones estrictas[1],

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Existe otro conjunto de números que no admiten ser escritos en forma de fracción como π (aproximadamente igual a 3.1416, es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, el doble del radio de la misma), $\sqrt{2},\ \sqrt{3}, \ldots$, que conforman el conjunto de los números irracionales, que se suele denotar mediante $\mathbb{I}$.

El conjunto que los incluye a todos es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, que puede escribirse como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, en la que el símbolo $\cup$ se lee “unión“. Es decir, los números reales están compuestos por la unión del conjunto de los números racionales e irracionales.

Es usual visualizar $\mathbb{R}$ como el conjunto de puntos ordenados de una recta denominada recta real, cuya gráfica aparece en la Figura 1.1.

[1] El símbolo $\subset$ se lee *contenido en* o *incluído en*.

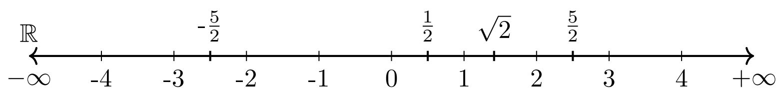


Figura 1.1: Recta real.

Esta recta está ordenada (si un número es menor que otro el primero estará situado a la izquierda del segundo en la recta real), de modo que, por ejemplo,

$$-\infty < -4 < -\frac{3}{2} < -1 < 0 < 1 < \frac{3}{2} < 2 < \pi < 5 < +\infty,$$

en el que $<$ se lee “menor que“. Además, la recta real está llena, en el sentido de que entre dos números reales siempre existe otro número real entre ellos.

El símbolo ∞ (con más precisión, $+\infty$) representa a números extremadamente grandes y se lee “infinito“. Cuando estos números extremadamente grandes estén afectados del signo negativo entonces se representarán mediante $-\infty$.

A veces resulta recomendable trabajar sólo con una parte de la recta real. Por ejemplo, en muchos problemas económicos se trabaja solamente con cantidades positivas, como el precio o la cantidad de un bien. De ahí que resulte apropiado definir los siguientes subconjuntos, que corresponden a segmentos y a semirrectas suyas.

Definición (Intervalos finitos o segmentos)

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se define:

- Intervalo cerrado de extremos a y b, en notación $[a, b]$, como el conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

- Intervalo abierto de extremos a y b, en notación (a, b), como el conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

  Obsérvese que en $[a, b]$ tanto a como b pertenecen al intervalo, esto es $a, b \in [a, b]$; en cambio $a, b \notin (a, b)$.

- Intervalo semiabierto de extremos a y b (cerrado en a y abierto en b), $[a, b)$, como el conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

- Intervalo semiabierto de extremos a y b (abierto en a y cerrado en b), $(a, b]$, al conjunto

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Cuando alguno de estos intervalos no tiene origen o no tiene extremo se habla de *semirrectas*.

Definición (Intervalos no finitos o semirrectas)

Sea $a \in \mathbb{R}$, se definen

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,

como las semirrectas de origen a.

- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,

como las semirrectas de extremo a.

Atendiendo a estas definiciones se puede escribir la recta real como

$$\mathbb{R} = (-\infty, a) \cup [a, +\infty) = (-\infty, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Además se suele notar

$$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty), \quad \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0],$$
$$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0).$$

Ejemplo 1.1

Indicar mediante el símbolo de pertenencia a qué conjuntos de los siguientes

$$\mathbb{Q},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{N},\ \mathbb{I},\ (-2,2),\ [-3,0),\ (1,+\infty)$$

pertenecen los siguientes números: $2, -3, \frac{3}{5}, \sqrt{2}, 0,\ 0.252525\ldots$

Solución: Es inmediato que,

$$\begin{aligned} 2 \in \mathbb{Q},\ 2 \in \mathbb{Z},\ 2 \in \mathbb{N},\ 2 \in (1,+\infty), \\ -3 \in \mathbb{Q},\ -3 \in \mathbb{Z},\ -3 \in [-3,0), \\ \frac{3}{5} \in \mathbb{Q},\ \frac{3}{5} \in (-2,2), \\ \sqrt{2} \in \mathbb{I},\ \sqrt{2} \in (-2,2),\ \sqrt{2} \in (1,+\infty), \\ 0 \in \mathbb{Q},\ 0 \in \mathbb{Z},\ 0 \in \mathbb{N},\ 0 \in (-2,2), \\ 0.\widehat{25} = \frac{25}{99} \in \mathbb{Q},\ 0.\widehat{25} \in (-2,2). \end{aligned}$$

□

1.2 Operaciones con los números reales

Estudiamos en esta sección las operaciones usuales que pueden llevarse a cabo con los números reales. Comenzamos, a título de recordatorio, con las reglas de signos para el producto y cociente.

- Regla de signos del producto:

$$(+)\times(+)=(+) \qquad (+)\times(-)=(-)$$
$$(-)\times(+)=(-) \qquad (-)\times(-)=(+)$$

- Regla de signos del cociente:

$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(+)}{(-)}=(-)$$
$$\frac{(-)}{(+)}=(-) \qquad \frac{(-)}{(-)}=(+)$$

Ejemplo 1.2

Efectuar las siguientes operaciones:

$a)$ $4(-3)(-2)$. $\qquad b)$ $(-5)(-6)(-2)$.

$c)$ $\dfrac{-16}{8}$. $\qquad d)$ $-\dfrac{-4}{2}$.

$e)$ $\dfrac{2(-3)(-10)}{-5}$. $\qquad f)$ $\dfrac{(-4)(-3)}{6(-2)}$.

Solución: Se tiene lo siguiente:

$a)$ $4(-3)(-2) = 24.$

$b)$ $(-5)(-6)(-2) = -60.$

$c)$ $\dfrac{-16}{8} = -2.$

$d)$ $-\dfrac{-4}{2} = 2.$

$e)$ $\dfrac{2(-3)(-10)}{-5} = \dfrac{60}{-5} = -12.$

$f)$ $\dfrac{(-4)(-3)}{6(-2)} = \dfrac{12}{-12} = -1.$

$\square$

Propiedades (de los números reales)

Las siguientes propiedades son ciertas para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{ll}
a + b = b + a & (a + b)c = ac + bc \\
a + 0 = 0 + a = a & ab = ba \\
a + (-a) = (-a) + a = 0 & a(bc) = (ab)c \\
a + (b + c) = (a + b) + c & a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \\
a(b + c) = ab + ac &
\end{array}
$$

Ejemplo 1.3

Efectuar las siguientes operaciones:

a) $-5-(-2)+3(-6)-2(-3)$. *b*) $1+2(-3+5)-7$.

c) $(-18+9)(-4)$. *d*) $-6-7(2-4)$.

Solución: Se tiene lo siguiente:

a) $-5-(-2)+3(-6)-2(-3)=-5+2-18+6=-15$.

b) $1+2(-3+5)-7=1+2(2)-7=1+4-7=-2$. También puede llegarse al mismo resultado aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. En este caso se tiene,

$$1+2(-3+5)-7=1+2(-3)+2\cdot 5-7=1-6+10-7=-2.$$

c) $(-18+9)(-4)=-9(-4)=36$.

d) $-6-7(2-4)=-6-7(-2)=-6+14=8$.

$\square$

Estudiemos ahora las operaciones de números reales cuando aparecen fracciones.

1.2.1 Suma (resta) de fracciones

En el caso de suma o resta de fracciones hay que distinguir los casos en que el denominador es común de cuando no lo es. De este modo tenemos lo siguiente:

- Suma o resta de fracciones con denominador común:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

- Suma o resta de fracciones con denominador no común: Se reducen las fracciones a denominador común calculando el mínimo común múltiplo (el menor múltiplo común a los denominadores).

Ejemplo 1.4

Efectuar las siguientes operaciones con fracciones:

$a)$ $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{7}{6}$. $b)$ $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$.

Solución: Se procede como sigue.

$a)$ Al tener los denominadores comunes resulta directamente,

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{7}{6} = \frac{5-1+7}{6} = \frac{11}{6}.$$

$b)$ Al tener los denominadores diferentes calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores para construir tres fracciones equivalentes a las anteriores con el denominador común. Tenemos, m.c.m.$\{2,3,4\} = 12$. Luego,

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6 \times 3}{12} + \frac{4 \times 2}{12} - \frac{3 \times 1}{12} = \frac{23}{12}.$$

□

1.2.2 Producto de fracciones

Es una operación muy sencilla que da lugar a una fracción en la que el numerador se obtiene multiplicando en línea los numeradores y el denominador se obtiene también multiplicando en línea los denominadores.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Ejemplo 1.5

Efectuar los siguientes productos de fracciones:

$a)$ $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7}$.

$b)$ $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \frac{4}{5}$.

$c)$ $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{-1}{10}$.

Solución: Procedemos como se detalla a continuación.

$a)$ $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 7} = \frac{20}{42} = \frac{20 : 2}{42 : 2} = \frac{10}{21}$.

$b)$ $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot (-4) \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 5} = -\frac{32}{105}$.

$c)$ $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{-1}{10} = \frac{5 \cdot 2 \cdot (-1)}{1 \cdot 7 \cdot 10} = -\frac{10}{70} = -\frac{1}{7}$.

□

1.2.3 Cociente de fracciones

También se trata de una operación sencilla. Se efectúa la operación multiplicando en cruz como se indica a continuación.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Ejemplo 1.6

Calcular las siguientes divisiones de fracciones:

$a)$ $\frac{3}{2} : \frac{7}{8}$. $b)$ $\frac{1}{4} : \frac{-3}{8}$.

Solución: Se obtiene de manera inmediata lo siguiente.

$a)$ $\frac{3}{2} : \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 7} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$.

$b)$ $\frac{1}{4} : \frac{-3}{8} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$.

□

1.2.4 Potencias y radicales

Se llama potencia de base a y exponente n al producto de n factores de a, esto es,

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}^{n \text{ veces}},$$

que se lee a elevado a n.

Cuando se efectúan operaciones con potencias hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Todo número positivo elevado a exponente par o impar da un número positivo.
- Todo número negativo elevado a exponente par da un número positivo.
- Todo número negativo elevado a exponente impar da un número negativo.

Obsérvese que siempre se verifica,

$$(-a)^n = a^n, \text{ si } n \text{ es par,}$$
$$(-a)^n = -a^n, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Ejemplo 1.7

Efectuar las siguientes potencias:

$a)$ 2^4.

$b)$ 2^3.

$c)$ $(-3)^2$.

$d)$ $(-3)^3$.

$e)$ -2^4.

$f)$ -2^5.

$g)$ $(-2)^4$.

$h)$ $(-2)^5$.

Solución: Se obtiene lo siguiente:

$a)$ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

$b)$ $2^3 = 8$.

$c)$ $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.

$d)$ $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$.

$e)$ $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$.

$f)$ $-2^5 = -32$.

$g)$ $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

$h)$ $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.

$\square$

A continuación se muestran las principales propiedades de las potencias.

Propiedades (de las potencias)

Las siguientes propiedades son ciertas para cualesquiera $a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^m\, a^n &= a^{m+n} & (a\, b)^n &= a^n\, b^n \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ (a^m)^n &= a^{m\, n} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^0 &= 1 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8

Efectuar las siguientes operaciones utilizando las propiedades de las potencias.

$a)$ 3^{-2}.

$b)$ $2 \cdot 4^{-1}$.

$c)$ $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^2$.

$d)$ $\dfrac{5 \cdot 5^2 \cdot 5^{-3}}{5^3 \cdot 5^{-1}}$.

$e)$ $(2^3)^2$.

$f)$ $\dfrac{3^2 \cdot (3^3)^{-2}}{3^{-7}}$.

$g)$ $\left(\frac{2}{5}\right)^2$.

$h)$ $\frac{-3^2 \cdot 3^4}{(3 \cdot 2)^2}$.

$i)$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

$j)$ $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-3}$.

Solución: Procedemos como sigue.

$a)$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

$b)$ $2 \cdot 4^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$c)$ $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^2 = (-2)^5 \cdot (-3)^2 = (-32) \cdot 9 = -288$.

$d)$ $\frac{5 \cdot 5^2 \cdot 5^{-3}}{5^3 \cdot 5^{-1}} = \frac{5^0}{5^2} = \frac{1}{25}$.

$e)$ $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

$f)$ $\frac{3^2 \cdot (3^3)^{-2}}{3^{-7}} = \frac{3^2 \cdot 3^{-6}}{3^{-7}} = \frac{3^{-4}}{3^{-7}} = 3^3 = 27$.

$g)$ $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$.

$h)$ $\frac{-3^2 \cdot 3^4}{(3 \cdot 2)^2} = \frac{-3^6}{3^2 \cdot 2^2} = \frac{-3^4}{4} = -\frac{81}{4}$.

$i)$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

$j)$ $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

□

Ejemplo 1.9

Efectuar,

$$\frac{2-5\cdot\left(\dfrac{1}{2}-3\right)^2}{\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}\right)+(-3^2)}.$$

Solución: Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-3\right)^2&=\left(\frac{-5}{2}\right)^2=\frac{25}{4},\\ \left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)&=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{2-5\cdot\left(\dfrac{1}{2}-3\right)^2}{\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}\right)+(-3^2)} &= \frac{2-5\cdot\dfrac{25}{4}}{\dfrac{1}{3}-9}=\frac{\frac{-117}{4}}{\frac{-26}{3}}\\ &= \frac{117}{4}:\frac{26}{3}=\frac{117\times 3}{4\times 26}=\frac{351}{104}.\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 1.10

Calcular y simplificar la expresión

$$\frac{3-5\left(\frac{1}{3}-2\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}.$$

Solución: Procedemos como sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{3-5\left(\frac{1}{3}-2\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}} &= \frac{3-5\left(-\frac{5}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}-\frac{4}{9}} = \frac{3-125/9}{-3/9} \\
&= \frac{(27-125)/9}{-3/9} = \frac{98}{3}.
\end{aligned}$$

□

Los radicales (radicación) constituyen otra forma de expresar las potencias. La relación que existe entre ambas operaciones viene dada por,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee raíz n-ésima de a, donde a es el radicando y n el índice de la raíz.

De este modo tenemos, por ejemplo,

$$\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}.$$

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{2/3},$$

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{2/2} = 3, \text{ puesto que } 3^2 = 9.$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2, \text{ puesto que } 2^3 = 8.$$

Ahora podemos reescribir las propiedades de las potencias estudiadas anteriormente para expresarlas en términos de radicales, como se muestra en el siguiente cuadro.

Propiedades (de los radicales)

Las siguientes propiedades son ciertas para cualesquiera $a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Ejemplo 1.11

Simplificar las siguientes operaciones:

$a)$ $\sqrt{8}$.

$b)$ $3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3}$.

$c)$ $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}$.

$d)$ $\dfrac{\sqrt{50}}{3\sqrt{8}}$.

$e)$ $\sqrt{\dfrac{3}{4}} : \sqrt{\dfrac{1}{4}}$.

$f)$ $\sqrt[3]{x} : \sqrt{x}$.

Solución: Resulta lo siguiente.

$a)$ Descomponiendo factorialmente 8 se tiene, $8 = 2^3$, luego

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$b)$ Se tiene que $12 = 2^2 \cdot 3$, luego,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

$c)$ $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

$d)$ $\dfrac{\sqrt{50}}{3\sqrt{8}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{5}{6}$.

$e)$ $\sqrt{\dfrac{3}{4}} : \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{4}} = \sqrt{3}$.

f) En este caso, en el que los índices de las raíces son distintos conviene convertir las raíces en semejantes. Para ello, obsérvese que $\sqrt[3]{x} : \sqrt{x} = x^{1/3} : x^{1/2}$. El mínimo común múltiplo de 3 y 2 es 6, luego,

$$x^{1/3} : x^{1/2} = x^{2/6} : x^{3/6} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{x^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$$

□

Ejercicios propuestos tipo test

1. Sólo una de estas afirmaciones es cierta:

   a) $-3 \in \mathbb{R}, \dfrac{3}{4} \in \mathbb{Q}$. *b*) $-3 \in \mathbb{Q}, -\dfrac{3}{4} \in \mathbb{Z}$.

   c) $-3 \in \mathbb{N}, \dfrac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.

2. Sólo una de estas afirmaciones es cierta:

   a) $0 \in \mathbb{N}^*, 5 \in \mathbb{Q}$. *b*) $0 \in \mathbb{Z}, 5 \in \mathbb{Q}$.

   c) $5 \in \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{I}$.

3. Sólo una de estas afirmaciones es cierta:

   a) $1 \in (1, 2)$. *b*) $1 \in [-1, 0.9]$. *c*) $1 \in [1, 2)$.

4. Sólo una de estas afirmaciones es correcta:

   a) $-\dfrac{3}{2} \in (-1, 2)$. *b*) $-\dfrac{3}{2} \in \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right]$.

   c) $-\dfrac{3}{2} \in (-\infty, 2)$.

5. El resultado de la operación $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{4}$ es:

   a) $\dfrac{1}{84}$. *b*) $-\dfrac{3}{84}$. *c*) $-\dfrac{1}{84}$.

6. El resultado de la operación $3\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)-2\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)$ es:

   a) $-\frac{3}{5}$. *b*) $\frac{3}{5}$. *c*) $\frac{5}{3}$.

7. El resultado de $\left(\frac{2}{7}-\frac{5}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{4}$ es:

   a) $-\frac{179}{28}$. *b*) $-\frac{178}{29}$. *c*) $\frac{179}{28}$.

8. Al efectuar $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{5}-1$ se obtiene:

   a) $\frac{19}{24}$. *b*) $-\frac{5}{36}$. *c*) $-\frac{19}{24}$.

9. Al efectuar $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{2}{5}-1\right)$ resulta:

   a) $\frac{119}{120}$. *b*) $-\frac{5}{36}$. *c*) $-\frac{119}{120}$.

10. Al efectuar $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)$ resulta:

    a) $-\frac{77}{36}$. *b*) $\frac{36}{31}$. *c*) $\frac{31}{36}$.

11. El resultado de $-2^3+\dfrac{\frac{1}{3}-4\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{4}{3}}$ es:

    a) $-\frac{11}{2}$. *b*) $\frac{11}{2}$. *c*) $\frac{1}{2}$.

12. El resultado de $(-2)^4 + \dfrac{\dfrac{1}{3} - 4 \cdot \dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{3}}$ es:

   a) $\dfrac{37}{2}$. *b*) $\dfrac{11}{2}$. *c*) $-\dfrac{37}{2}$.

13. El resultado de $\dfrac{\dfrac{5}{3} + 2 \cdot \dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}}$ es:

   a) $\dfrac{170}{55}$. *b*) $-\dfrac{172}{55}$. *c*) $\dfrac{172}{55}$.

14. El resultado de $\dfrac{(-2)^3 - 3\left(\dfrac{1}{3} - 1\right)^2}{1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2}$ es:

   a) $\dfrac{136}{9}$. *b*) $-\dfrac{32}{3}$. *c*) $-\dfrac{224}{3}$.

15. El resultado de $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot 3^3$ es:

   a) 729. *b*) $(-3)^6$. *c*) -729.

16. Al efectuar $\dfrac{2^{-2} \cdot 2 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 2^{-1}}$ resulta:

   a) $\dfrac{1}{2}$. *b*) $-\dfrac{1}{2}$. *c*) $2^{-1/2}$.

17. El resultado de $\dfrac{(2 \cdot 3)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^{-3}}$ es:

$a)$ 261. $b)$ 216. $c)$ $2^3 \cdot 3^{-3}$.

18. El resultado de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ es:

$a)$ $-\dfrac{9}{4}$. $b)$ $\dfrac{9}{4}$. $c)$ $-\dfrac{4}{9}$.

19. El resultado de $2^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ es:

$a)$ $\dfrac{1}{5}$. $b)$ -5. $c)$ 5.

20. Simplificando la expresión $\dfrac{(x^2y)^2xz^3}{x^3(y^2)^3z}$ resulta:

$a)$ $\dfrac{xz^2}{y^4}$. $b)$ $\dfrac{x^2z^2}{y^{-4}}$. $c)$ $\dfrac{x^2z^2}{y^4}$.

21. Simplificando la expresión $(2x^3y^2)^2 \cdot (6x^2y)^{-3}$ resulta:

$a)$ $\dfrac{y}{54}$. $b)$ $\dfrac{y^2}{6}$. $c)$ $\dfrac{2y^2x}{54}$.

22. Simplificando la expresión $\dfrac{(y\sqrt{x}z^{-1})^2}{x^2y^{-3}z}$ resulta:

$a)$ $\dfrac{y^5}{xz^3}$. $b)$ $\dfrac{y^5}{x^3z}$. $c)$ $\dfrac{(yz)^5}{xz}$.

23. El resultado de $2\sqrt{3} - \sqrt{27} - \sqrt{12}$ es:

$a)$ $3\sqrt{2}$. $b)$ $3\sqrt{3}$. $c)$ $-3\sqrt{3}$.

24. El resultado de $3\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{18}$ es:

$a)$ $9\sqrt{2}$. $b)$ $-\sqrt{2}$. $c)$ $9\sqrt{3}$.

25. El resultado de $3\sqrt{5} - \sqrt{125} + \sqrt{5}$ es:

$a)$ $2\sqrt{5}$. $b)$ $-\sqrt{5}$. $c)$ $\sqrt{25}$.

CAPÍTULO 2

Expresiones algebraicas

Este capítulo está dedicado a las expresiones algebraicas y los polinomios. Cuando en Europa se vivía una época de oscurantismo, el matemático árabe Al-Khuwarizmi escribió en el siglo IX un tratado en el que introdujo de manera sistemática el uso de letras y otros símbolos para configurar expresiones matemáticas, dando lugar al nacimiento de una parte de las Matemáticas conocida como Álgebra.

En matemáticas, una expresión algebraica es una expresión construida a partir de constantes enteras, variables y operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación). Estas expresiones permiten ampliar enormemente el campo de las matemáticas a numerosos terrenos. Por ejemplo, el área de un cuadrado de lado l se puede expresar de manera algebraica como $A = l^2$ y si p representa el precio de un determinado bien, el ingreso que se obtiene por la venta de q unidades de dicho bien podrá expresarse algebraicamente como $I = p \cdot q$.

2.1 Expresiones algebraicas y polinomios

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras ligados por los signos de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, aunque no tienen que estar todos presentes simultáneamente. Son ejemplos de expresiones algebraicas las siguientes: $3x^2$, $2xy - \frac{1}{2}$, $\sqrt{xy^3} - 3x - y$, etc.

Las letras, usualmente las últimas del alfabeto, se utilizan en matemáticas como símbolos para expresar cantidades desconocidas. Algunos ejemplos significativos son los siguientes: el doble de un número x lo podemos expresar como $2x$; la mitad de un número x como $x/2$; un número par lo podemos denotar como $2x$, siendo $x \in \mathbb{N}$, y si lo que deseamos es expresar un número impar podemos escribir $2x + 1$, donde $x \in \mathbb{N}$.

Se llama valor numérico de una expresión algebraica al número que se obtiene al sustituir las letras por números concretos. El siguiente ejemplo trata de ilustrar este concepto.

Ejemplo 2.1

Calcular el valor numérico de la expresión algebraica

$$2x^2y - 3x^3y^2 + 4$$

en $x = -1,\ y = 2.$

Solución: Sustituyendo en la expresión dada x por –1 e y por 2 se obtiene,

$$2(-1)^2 2 - 3(-1)^3(2)^2 + 4 = 4 + 12 + 4 = 20.$$

$\square$

Un monomio es una expresión algebraica en la que los números y letras están ligados sólo por los signos de multiplicación, división, potenciación y radicación. A la parte numérica se le denomina coeficiente.

Dos monomios son semejantes cuando tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes.

Por ejemplo, las expresiones

$$5x^3y^2,\quad \frac{3}{2}\sqrt{x}y^4,\quad \frac{3x^2}{7y^3},\quad \frac{2}{5}x^3y^2,\quad \frac{4x^7}{y^3}$$

son monomios con coeficientes $5, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}$ y 4. Además, los monomios $5x^3y^2, \frac{2}{5}x^3y^2$ son semejantes.

Cuando se efectúan operaciones con monomios hay que tener en cuenta, por un lado, que sólo pueden sumarse monomios semejantes, y por otro, que para multiplicar, dividir o efectuar potencias de monomios se aplican las propiedades de potencias estudiadas en el capítulo 1 de este texto.

Ejemplo 2.2

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

$a)$ $3x^3y^2 - \frac{2}{3}x^3y^2 + x^2y.$ $\quad$ $b)$ $(3xy^3) \cdot (-2x^2y^2).$

$c)$ $\frac{5x^2y}{10xy^3}.$ $\quad$ $d)$ $\frac{3x^3y^2z}{9xy^3z^2}.$

Solución: Se tiene lo siguiente:

$a)$ Resulta sencillo obtener,

$$\begin{aligned} 3x^3y^2 - \frac{2}{3}x^3y^2 + x^2y &= \left(3 - \frac{2}{3}\right)x^3y^2 + x^2y \\ &= \frac{7}{3}x^3y^2 + x^2y. \end{aligned}$$

$b)$ $(3xy^3) \cdot (-2x^2y^2) = -6x^3y^5.$

$c)$ $\frac{5x^2y}{10xy^3} = \frac{x}{2y^2}.$

d) $\dfrac{3x^3y^2z}{9xy^3z^2} = \dfrac{x^2}{3yz}$.

□

Ejemplo 2.3

Escribir como una expresión algebraica los siguientes conceptos:

a) El triple de un número.

b) La tercera parte de un número más uno.

c) El siguiente de un número entero.

d) El anterior de un número entero.

e) La suma por la diferencia de dos números.

f) El cuadrado de una diferencia.

g) La diferencia de cuadrados.

Solución:

a) Denominando al número por x tenemos que el triple del mismo se representará mediante $3x$.

b) Ahora tenemos $\dfrac{x}{3} + 1$.

c) Si el número entero es x, el siguiente será $x + 1$.

d) El anterior, obviamente, vendrá dado por $x - 1$.

e) Sean x e y los dos números, entonces la suma por diferencia se representará mediante $(x + y)(x - y)$.

f) El cuadrado de la diferencia de dos números x e y se denotará mediante $(x - y)^2$.

g) La diferencia de cuadrados se representa mediante $x^2 - y^2$.

□

Un binomio es la suma (resta) de dos monomios y un trinomio la suma (resta) de tres monomios. En general, un polinomio consiste de la suma o resta de muchos monomios. Suele representarse mediante

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son los coeficientes del polinomio. Además, a_0 se denomina término independiente.
- x es la variable o indeterminada.
- n es el grado del polinomio, el valor del exponente más alto del polinomio.

- Se dice que x_0 es una raíz, solución o cero del polinomio $p(x)$ si $p(x_0) = 0$.

Las raíces del polinomio $p(x)$ se obtienen resolviendo la ecuación $p(x) = 0$, teniendo en cuenta que un polinomio de grado n puede tener como mucho n raíces[1]. Además, si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son raíces del polinomio $p(x)$ entonces,

$$p(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Ejemplo 2.4

Dados los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 3x + 2, \\ q(x) &= -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

indicar sus grados, coeficientes y términos independientes.

Solución: Se tiene que $p(x) = x^2 - 3x + 2$ es un polinomio de grado 2, con coeficientes 1, –3 y 2. El término independiente es 2.

El polinomio $q(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x$ tiene grado 3. Sus coeficientes son $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}$ y 0. El término independiente es 0.

[1]Estas raíces pueden ser reales o complejas, aunque estas últimas no serán estudiadas en este texto.

Puesto que $p(1) = 0$ y $p(2) = 0$, se tiene que 1 y 2 son raíces o ceros del polinomio $p(x)$.

Por otro lado, puesto que $q(0) = 0$ y $q(1) = 0$ se tiene que 0 y 1 son raíces, soluciones o ceros del polinomio $q(x)$.

Es interesante señalar que si el término independiente de un polinomio es cero, entonces 0 es siempre raíz del mismo. $\square$

2.1.1 Operaciones con polinomios

La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando todos los términos de ambos polinomios reduciendo a continuación los términos semejantes. Restar dos polinomios consiste en sumar al primero el opuesto del segundo. Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del primero por cada término del segundo, y después se reducen los términos semejantes.

Las expresiones que se muestran en el siguiente cuadro reciben el nombre de productos notables y son habituales cuando se realizan operaciones con expresiones algebraicas y polinómicas.

Propiedades (Productos notables)

$$\text{Cuadrado de una suma:} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\text{Cuadrado de una diferencia:} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{Suma por diferencia:} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ejemplo 2.5

Calcular y simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

$a)$ $(2x-1)^2$.

$b)$ $(x - 3\sqrt{x})(x + 3\sqrt{x})$.

$c)$ $(xy+7)^2$.

$d)$ $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(2x - \dfrac{1}{3}\right)\left(2x + \dfrac{1}{3}\right)$.

Solución:

$a)$ Esta expresión corresponde al cuadrado de una diferencia. Luego,

$$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

b) Se trata de una suma por una diferencia. Luego,

$$(x-3\sqrt{x})(x+3\sqrt{x}) = x^2-(3\sqrt{x})^2 = x^2-9x.$$

c) Se trata del cuadrado de una suma. En este caso se tiene,

$$(xy+7)^2 = (xy)^2+2\cdot(xy)\cdot 7+7^2 = x^2y^2+14xy+49.$$

d) Se trata de la diferencia entre el cuadrado de una diferencia y una suma por diferencia. El cuadrado de la diferencia viene dado por,

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2 &= (2x)^2-2(2x)\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= 4x^2-\frac{4x}{3}+\frac{1}{9},\end{aligned}$$

mientras que la suma por diferencia resulta,

$$\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right) = (2x)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2-\frac{1}{9},$$

de donde restando la primera expresión menos la segunda resulta,

$$4x^2-\frac{4x}{3}+\frac{1}{9}-4x^2+\frac{1}{9} = \frac{-12x+2}{9} = \frac{2(1-6x)}{9}.$$

□

2.1.2 Descomposición factorial de polinomios

Descomponer un polinomio en factores es expresarlo en forma de producto de polinomios más sencillos.

Así, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son raíces o ceros del polinomio

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

el polinomio puede descomponerse como

$$p(x) = c_n (x - a_n)(x - a_{n-1}) \ldots (x - a_1).$$

La primera operación de descomposición de una expresión que debe anteponerse a otras consiste en sacar factor común a uno o todos los factores comunes que aparecen en todos los sumandos de la expresión, siempre que sea posible. En el siguiente ejemplo se muestra este mecanismo.

Ejemplo 2.6

Extraer factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

$a)$ $3x^3 - 2x^2 + 5x$.

$b)$ $2x^2 y + xy^2$.

$c)$ $2x^2 y - 4xy^2$.

d) $xy - zy + xt - zt$.

Solución: Se procede como se detalla a continuación.

a) En esta expresión se observa que la variable x aparece en todos los sumandos. Luego, podemos escribir $3x^3 - 2x^2 + 5x = x(3x^2 - 2x + 5)$.

b) Ahora se tiene que el factor que se repite en todos los sumandos es xy, luego

$$2x^2y + xy^2 = xy(2x + y).$$

c) El factor que se repite ahora es $2xy$, luego $2x^2y - 4xy^2 = 2xy(x - 2y)$.

d) En este caso se repite el factor y, por un lado, y por otro lado se repite el factor t. Tenemos, pues,

$$xy - zy + xt - zt = y(x - z) + t(x - z) = (y + t)(x - z).$$

□

En otro caso, podemos descomponer un polinomio conociendo aquéllos valores que hagan que el polinomio tome el valor cero.

Estos valores se encuentran entre los divisores del término independiente, más fáciles de obtener cuando sean números enteros. Por tanto habrá que descomponer en factores primos el término independiente del polinomio, hallar sus divisores enteros y probar exclusivamente con estos utilizando la regla de Ruffini. Esta regla es una potente herramienta que permite dividir cualquier polinomio por un binomio de la forma $x - a$, donde a es un número real. Luego, lo que procede hacer es probar con los divisores del término independiente que hagan que el resto de la división sea cero. Los pasos a seguir se muestran a continuación.

- Se trazan dos líneas, una horizontal y otra vertical, como se muestra en la Tabla 2.1, escribiéndose los coeficientes de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ en la parte superior, ordenados de mayor a menor grado y sin omitir los términos nulos.

- Se escribe el valor con el que se desea probar en el lado izquierdo y el primer coeficiente, a_n, en el renglón inferior del mismo.

- Se multiplica a_n por a y se escribe debajo de a_{n-1}.

- Se suman los dos valores obtenidos en la misma columna.

- Se repite el proceso hasta llegar al final. Si el último término (resto de la división) es cero, indicará que el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor y, por tanto, $p(x) = (x - a) \cdot c(x)$, siendo $c(x)$ el polinomio cociente. Recuérdese que en toda división se verifica que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto (cero en este caso).

- A continuación se vuelve a aplicar la regla de Ruffini al polinomio $c(x)$, continuando de manera sucesiva hasta tener, si se puede, el polinomio inicial completamente factorizado.

Tabla 2.1: Regla de Ruffini.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
a		$a \cdot a_n$	$(a_{n-1} + a \cdot a_n) \cdot a$	$\dots$	$\dots$
	a_n	$a_{n-1} + a \cdot a_n$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	Coeficientes del cociente				Resto $= 0$

Obsérvese que el valor del polinomio para $x = a$ es cero, luego este valor es solución de la ecuación $p(x) = 0$, como tendremos ocasión de abordar en el capítulo 3 de este texto.

Ejemplo 2.7

Descomponer factorialmente los polinomios:

a) $p(x) = 2x^3 - 18x$.

b) $p(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6x$.

c) $p(x) = x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 55x + 50$.

Solución: Se procede como se detalla a continuación.

a) En este caso resulta sencillo obtener,

$$p(x) = 2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x + 3)(x - 3).$$

Obsérvese que la expresión $x^2 - 9$ es una diferencia de cuadrados que puede expresarse como la suma por diferencia; esto es, $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

b) Ahora se tiene,

$$3x^4 - 9x^2 + 6x = 3x(x^3 - 3x + 2).$$

Luego, descomponiendo por la Regla de Ruffini (los divisores enteros del término independiente 2 son ± 1 y ± 2) el polinomio $x^3 - 3x + 2$, resulta la descomposición que se muestra en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2: Descomposición factorial del polinomio $x^3 - 3x + 2$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

En definitiva,

$$
\begin{aligned}
3x^4 - 9x^2 + 6x &= 3x(x^3 - 3x + 2) \\
&= 3x(x-1)(x-1)(x+2) \\
&= 3x(x-1)^2(x+2).
\end{aligned}
$$

$c)$ El término independiente 50 tiene como divisores enteros ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25 y ± 50. Como el polinomio a descomponer tiene grado 4, sólo cuatro de estos divisores podrán ser candidatos a formar parte de la descomposición. Aplicando la Regla de Ruffini y probando con los divisores anteriores (usualmente se empieza con los más pequeños) se tiene la descomposición que se muestra a continuación de la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Descomposición factorial del polinomio $p(x) = x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 55x + 50$.

	1	–7	–3	55	50
–1		–1	8	–5	–50
	1	–8	5	50	0
5		5	–15	–50	
	1	–3	–10	0	
–2		–2	10		
	1	–5	0		
5		5			
	1	0			

$$p(x) = (x+1)(x-5)(x+2)(x-5) = (x+1)(x+2)(x-5)^2.$$

$\square$

Ejercicios propuestos tipo test

1. Dada la expresión algebraica $x^2y - 2xy^2 + 1$, entonces su valor numérico para $x = -1$, $y = 1$ es:

   $a)$ -4. $b)$ 4. $c)$ 0.

2. Dada la expresión algebraica $x^2y - 2xy^2 + 1$, entonces su valor numérico para $x = 1$, $y = -1$ es:

   $a)$ 2. $b)$ 0. $c)$ -2.

3. Dada la expresión algebraica $3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 - 2$, entonces su valor numérico para $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ es:

   $a)$ $-\dfrac{29}{8}$. $b)$ $\dfrac{3}{2}$. $c)$ $\dfrac{29}{8}$.

4. Dada la expresión algebraica $3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 - 2$, entonces su valor numérico para $x = 0$, $y = \frac{3}{5}$ es:

   $a)$ $\dfrac{29}{8}$. $b)$ -2. $c)$ 2.

5. El valor numérico en $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$ para la expresión $\dfrac{-2x^2y + xy^3}{x + y}$ es:

a) $\frac{9}{4}$. *b*) $-\frac{4}{9}$. *c*) 1.

6. El resultado de la operación $(2x^3-3x^2+1)+(5x^3+2x-3)$ es:

   a) $7x^3-3x^2+2x-2$.

   b) $7x^3-3x^2+2x+2$.

   c) $7x^3-3x^2-2x-2$.

7. El resultado de la operación $(2x^3-3x^2+1)-(5x^3+2x-3)$ es:

   a) $-3x^3-3x^2-2x-4$.

   b) $-3x^3-3x^2-2x+4$.

   c) $-3x^3+3x^2-2x+4$.

8. El resultado de la operación

$$(5x^2+7x+2)-(8x-3)+\left(4x^2-\frac{2}{3}\right)$$

   es:

   a) $9x^2+x+\frac{13}{3}$.

   b) $9x^2-x-\frac{13}{3}$.

   c) $9x^2-x+\frac{13}{3}$.

9. El resultado de la operación $(2x^3-3x^2+1)(5x^3+2x-3)$ es:

    a) $10x^6-15x^5+4x^4+7x^3+9x^2+2x-3$.

    b) $10x^6-15x^5+4x^4-7x^3+9x^2-2x-3$.

    c) $10x^6-15x^5+4x^4-7x^3+9x^2+2x-3$.

10. El resultado de la operación $(5x^2+7x+2)\left(4x^2-\frac{2}{3}\right)$ es:

    a) $20x^4+28x^3+\dfrac{14}{3}x^2+\dfrac{14}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

    b) $20x^4+28x^3+\dfrac{14}{3}x^2-\dfrac{14}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

    c) $20x^4+28x^3+\dfrac{14}{3}x^2-\dfrac{18}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

11. Al extraer factor común en la expresión x^3-3x^2+2x resulta:

    a) $x(x^2-3x+2)$.

    b) $2x(x^2-3x+1)$.

    c) $x(x^2+3x+2)$

12. Al extraer factor común en la expresión $2y^2x^3+\dfrac{3}{5}x^2y^3-xy$ resulta:

a) $xy\left(2yx^2 + \frac{3}{5}xy^2 + 1\right)$.

b) $xy\left(2yx^2 + \frac{3}{5}xy^2 - 1\right)$.

c) $xy^2\left(2x^2 + \frac{3}{5}xy - 1\right)$.

13. El resultado de $(2x-1)^2 - (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ es:

a) $x^2 + 3$.

b) $x^2 - 4x + 3$.

c) $3x^2 - 4x + 3$.

14. El resultado de $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 - \left(\frac{3x}{2} + 1\right)\left(\frac{3x}{2} - 1\right)$ es:

a) $-2x^2 - 3x + 10$.

b) $-x^2 - 4$.

c) $-2x^2 - 8$.

15. El resultado de $(3x-2)^2 - (3x+2)^2$ es:

a) $-24x$.

b) 24.

c) $18x^2 - 24$.

16. El resultado de $(3x-2)^2 + (3x+2)^2$ es:

a) $18x^2 + 24x + 8$. *b*) -24.

c) $2(9x^2 + 4)$.

17. Al desarrollar $(x-3)^2 + (x+1)(x-1)$, se obtiene:

a) $4x^4 - 12x + 1$. *b*) $2x^2 + 6x + 8$. *c*) $2x^2 - 6x + 8$.

18. Al desarrollar $\left(3x^2 + \dfrac{1}{2}\right)\left(3x^2 - \dfrac{1}{2}\right) - \left(3x^2 + 1\right)^2$, se obtiene:

a) $-6x^2 - \dfrac{5}{4}$. *b*) $6x^2 - \dfrac{5}{4}$. *c*) $-6x^2 - \dfrac{4}{5}$.

19. El resultado de $(3xy - x)^2 - (xy + x)(xy - x)$ es:

a) $2x^2(4y^2 - 3y - 1)$.

b) $2x(4xy^2 - 3xy - 1)$.

c) $2x^2(4y^2 - 3y + 1)$.

20. Al desarrollar $\left(2x^3 + \dfrac{x}{2}\right)\left(2x^3 - \dfrac{x}{2}\right)$, se obtiene:

a) $4x^6 + \dfrac{x^2}{4}$. *b*) $4x^6 - \dfrac{x^2}{4}$. *c*) $4x^6 - x^4 + \dfrac{x^2}{4}$.

21. Al descomponer factorialmente el polinomio

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

resulta:

a) $x(x-1)^2(x+2)$.

b) $x(x-1)^2(x-2)$.

c) $3(x-1)^2(x-2)$.

22. Al descomponer factorialmente el polinomio $2x^4+3x^3-x$ se obtiene:

a) $2x(x+1)^2(x-2)$.

b) $2x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

c) $x(x-1)^2(x-2)$.

23. La descomposición factorial del polinomio

$$x^4-x^3-3x^2+x+2$$

viene dada por:

a) $(x^2+1)^3(x-2)$.

b) $(x^2-1)(x+1)(x+2)$.

c) $(x^2-1)(x+1)(x-2)$.

24. La descomposición factorial del polinomio

$$3x^4 - \frac{25}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$$

está dada por:

a) $3(x-1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$.

b) $3(x+1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$.

c) $3(x-1)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$.

25. Al descomponer factorialmente el polinomio

$$x^5 - \frac{9x^4}{2} + 7x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 6x - 2$$

resulta:

a) $(x^2+1)(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

b) $(x-1)^2(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

c) $(x+1)^2(x-2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

CAPÍTULO 3

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

Las ecuaciones se utilizan en la mayoría de las disciplinas científicas para calcular y para enunciar leyes, permitiendo expresar relaciones entre distintas variables. Por ejemplo, en Economía el punto de equilibrio de mercado entre la oferta y la demanda de un bien es la solución, si existe, de una ecuación; la cantidad que maximiza la función de beneficios es también solución de una ecuación, mientras que el cálculo de los intervalos en que dicha función es creciente o decreciente se obtiene resolviendo una inecuación; etc.

La introducción de la notación simbólica, que permite un tratamiento más sencillo y cómodo de las ecuaciones, se le atribuye a Viète, matemático francés y uno de los precursores del álgebra moderna. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras, iniciando el camino de una nueva etapa en las ciencias en la que también Descartes contribuye de forma notable al desarrollo de dicha notación. La ecuación de segundo grado y su solución tiene origen muy antiguo. Se conocieron algoritmos para resolverla en la antigua Babilonia y Egipto y, posteriormente, en Grecia fue estudiada por el matemático Diofanto de Alejandría.

En este capítulo se estudian las ecuaciones de primer y segundo grado, las ecuaciones bicuadradas, las ecuaciones de grado superior a dos, las inecuaciones de primer grado y grado mayor que dos así como los sistemas de ecuaciones lineales.

3.1 Ecuaciones

Se denomina ecuación a cualquier igualdad que relaciona números y letras que representan cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que se desean calcular.

Generalmente las incógnitas se representan con las últimas letras del alfabeto en minúsculas. Grado de la ecuación es el mayor exponente que afecta a la incógnita. Así:

- $5x - 8 = 3$ es una ecuación de primer grado cuya incógnita es x.
- $2t^2 - 7t + 4 = 0$ es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es t.

- $5x^6 - 3x^2 - 4x = -5$ es una ecuación de sexto grado cuya incógnita es x.

El objetivo es calcular las soluciones, denominadas también *raíces*, que son los valores de la incógnita que hace cierta la ecuación. Una ecuación puede tener tantas soluciones reales como indique su grado.

3.1.1 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado se expresa de la forma $ax + b = 0$, en la que a y b son números reales con $a \neq 0$.

Para resolverla (calcular el valor de la incógnita x) se realizan operaciones hasta obtener una ecuación equivalente en la que pueda aislarse la incógnita para obtener la solución.

En algunas ocasiones cuando se procede a resolver una ecuación se llegan a expresiones absurdas, como por ejemplo $0 = 1$. Esto ocurre porque la ecuación no tiene solución (se habla entonces de que es incompatible). En otras ocasiones, si al resolver una ecuación se llega a una identidad, por ejemplo $2 = 2$, entonces es que la ecuación tiene infinitas soluciones (se dice en este caso que es compatible indeterminada).

Ejemplo 3.1

Resolver la ecuación $3x + 4 = 16$.

Solución: Si sumamos a ambos lados de la igualdad la cantidad -4, nos queda:

$$3x + 4 - 4 = 16 - 4,$$

$$3x = 12.$$

Finalmente, dividiendo ahora por 3 a ambos lados de la igualdad resulta:

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3},$$

$$x = 4.$$

Puede ahora comprobarse que la solución obtenida es correcta llevándola a la ecuación original y observando que la igualdad se convierte en una identidad, esto es dos cantidades iguales a ambos lados del signo de igualdad. En efecto, sustituyendo x por 4 en la ecuación $3x + 4 = 16$, resulta $3 \cdot 4 + 4 = 16$. $\square$

Ejemplo 3.2

Resolver la ecuación $3(x + 2) - 2(x - 1) = 4x + 5$.

Solución: Quitando paréntesis nos queda:

$$\begin{aligned} 3x + 6 - 2x + 2 &= 4x + 5, \\ 3x - 2x - 4x &= 5 - 6 - 2, \\ -3x &= -3, \\ x &= \frac{-3}{-3}, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3

Resolver la ecuación $\dfrac{x}{2} - 5 = -\dfrac{3(x+4)}{4} + 3.$

Solución: Multiplicando a ambos lados de la igualdad por 4 (que es el mínimo común múltiplo, m.c.m., de 2 y 4) resulta:

$$2x - 20 = -3(x+4) + 12,$$

de donde se obtiene, después de quitar paréntesis:

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= -12 + 12 + 20, \\ 5x &= 20, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4

Hallar la solución de la ecuación $5x + \frac{7}{2}(x-1) - \frac{1}{6} = \frac{3}{2}(x+2)$.

Solución: El m.c.m. es 6, luego:

$$\begin{aligned} 30x + 21(x-1) - 1 &= 9(x+2), \\ 30x + 21x - 21 - 1 &= 9x + 18, \\ 30x + 21x - 9x &= 18 + 21 + 1, \\ 42x &= 40, \\ x &= \frac{40}{42} = \frac{20}{21}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.5

Resolver la ecuación $\frac{5x-1}{18} - \frac{2x-3}{2} = 4$.

Solución: El m.c.m. es 18, luego:

$$\begin{aligned} 5x - 1 - 9(2x-3) &= 72, \\ 5x - 1 - 18x + 27 &= 72, \\ 5x - 18x &= 72 + 1 - 27, \\ -13x &= 46, \\ x &= -\frac{46}{13}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.6

Resolver la ecuación $2(x-3) - \dfrac{x-5}{2} - 1 = \dfrac{5x+2}{12}$.

Solución: El mínimo común múltiplo es 12, luego tenemos:

$$\begin{aligned} 24(x-3) - 6(x-5) - 12 &= 5x + 2, \\ 24x - 6x - 5x &= 2 + 72 - 30 + 12, \\ 13x &= 56, \\ x &= \frac{56}{13}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.7

Resolver las ecuaciones:

$a)$ $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+2}{15} = \dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{15} + 1.$

$b)$ $3(x+1) - 2(x-3) = x + 9.$

Solución:

$a)$ El m.c.m. es 15, luego:

$$5(x-1)-(x+2)=3x+x+15,$$
$$5x-5-x-2=3x+x+15,$$
$$0\,x=22.$$

Luego, esta ecuación es incompatible, esto es, no tiene solución, puesto que no existe ningún número que multiplicado por 0 resulte 22.

$b)$ En este caso tenemos,

$$3x+3-2x+6=x+9,$$
$$0\,x=0.$$

Luego esta ecuación tiene infinitas soluciones. El lector puede comprobar como, sustituyendo en la ecuación dada, la incógnita x por cualquier número real la ecuación se convierte en una identidad.

$\square$

Ejemplo 3.8

Resolver la ecuación $4(x+1)-\dfrac{3x+1}{6}+2=\dfrac{x-1}{3}$.

Solución: El mínimo común múltiplo es 6, luego tenemos:

$$\begin{aligned}
24(x+1)-(3x+1)+12 &= 2(x-1),\\
24x+24-3x-1+12 &= 2x-2,\\
24x-3x-2x &= -2-24+1-12,\\
19x &= -37,\\
x &= -\frac{37}{19}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.9

Resolver la ecuación $\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}=0.$

Solución: El m.c.m. de $x+3$ y $x+1$ es el producto $(x+3)(x+1)$, luego:

$$\begin{aligned}
10(x+1)-2(x+3) &= 0,\\
10x+10-2x-6 &= 0,\\
8x+4 &= 0,\\
x &= -\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Para resolverla utilizamos la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{3.1}$$

La expresión $b^2 - 4ac > 0$ recibe el nombre de discriminante, de cuyo valor depende el número de soluciones de la ecuación. Así, si:

- $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones distintas.
- $b^2 - 4ac = 0$, existe una sola solución (doble).
- $b^2 - 4ac < 0$, no existe solución.

Ejemplo 3.10

Hallar las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Solución: Se trata de una ecuación de segundo grado en la que $a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = -3$. Utilizando la fórmula (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = 1, \\ \\ \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, las dos soluciones son $x_1 = 1,\ x_2 = -3$. $\square$

Ejemplo 3.11

Resolver la ecuación $-2x^2 - x + 1 = 0$.

Solución: Se trata de una ecuación de segundo grado en la que $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$. Utilizando de nuevo la expresión (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4} \\ &= \frac{1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{-4} = -1, \\ \\ \dfrac{1-3}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, las dos soluciones son $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}$. $\square$

Ejemplo 3.12

Resolver la ecuación $2x^2 - 48 = -10x$.

Solución: Como en los ejemplos anteriores, se trata de una ecuación de segundo grado pero que aparece desordenada. En primer lugar la ordenamos, quedando $2x^2 + 10x - 48 = 0$. Ahora observemos que podemos dividir toda la ecuación por 2, de modo que quede escrita de una forma más sencilla. Luego la ecuación que debemos resolver es $x^2 + 5x - 24 = 0$. Los coeficientes de la ecuación son $a = 1, b = 5,\ c = -24$.

Utilizando de nuevo la expresión (3.1) tenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2}$$
$$= \frac{-5 \pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+11}{2} = 3 \\ \\ \dfrac{-5-11}{2} = -\dfrac{16}{2} = -8. \end{cases}$$

Luego, las dos soluciones son $x_1 = 3,\ x_2 = -8$. □

Ejemplo 3.13

Resolver las ecuaciones:

$a)$ $-7x^2 = 0.$

$b)$ $-4x^2 + 100 = 0.$

$c)$ $x^2 - 5x = 0.$

$d)$ $y = 3x^2 + 2x + 1.$

Solución: Las tres primeras ecuaciones cuadráticas no son completas, sino del tipo $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, o bien $ax^2 + bx = 0$, respectivamente. En todos estos casos las resolución puede llevarse a cabo utilizando, como en los ejemplos anteriores, la expresión (3.1), aunque resulta más sencillo proceder como se muestra a continuación.

$a)$ Dividiendo por -7 a ambos lados de la igualdad tenemos que la solución resulta $x^2 = \frac{0}{-7} = 0$, de donde $x = \pm\sqrt{0} = 0$. Luego se obtiene una solución doble.

Toda ecuación del tipo $ax^2 = 0$ siempre tiene la solución $x = 0$ doble.

$b)$ En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} -4x^2 &= -100, \\ x^2 &= \frac{100}{4} = 25, \\ x &= \pm\sqrt{25} = \pm 5. \end{aligned}$$

Toda ecuación cuadrática del tipo $ax^2 + c = 0$ tiene como solución $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, siempre que $-c/a$ sea positivo.

c) En este caso, sacando factor común a la incógnita x, que se repite en ambos sumandos, tenemos:

$$x^2 - 5x = x(x-5) = 0.$$

De aquí se deduce:

$$\begin{cases} \quad x = 0, \\ x - 5 = 0, \quad \text{luego } x = 5. \end{cases}$$

Luego las dos soluciones de esta ecuación son $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

Toda ecuación del tipo $ax^2 + bx = 0$ tiene como soluciones $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.

d) En este caso tenemos,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6},$$

de donde se deduce que la ecuación carece de soluciones ya que el discriminante de la misma es negativo.

□

3.1.3 Ecuaciones de grado superior a dos

Empezamos esta sección estudiando un tipo particular de ecuación polinómica de grado mayor que dos. Lo constituye las ecuaciones bicuadradas, que adoptan la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

donde $a,\ b,\ c$ constantes y $a \neq 0$.

Esta ecuación puede tener hasta cuatro soluciones reales. Haciendo el cambio de variable $y = x^2$ se obtiene la ecuación de segundo grado $ay^2 + by + c = 0$, que puede resolverse aplicando la expresión (3.1), esto es

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente se deshace el cambio haciendo $x = \pm\sqrt{y}$.

Ejemplo 3.14

Resolver la ecuación $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $y = x^2$ la ecuación puede reescribirse como $y^2 - 6y + 5 = 0$, cuya solución viene dada por:

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} y_1 = 5, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtienen las soluciones, $x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm 1.$ $\square$

Para resolver una ecuación de grado superior a dos del tipo $p(x) = 0$, en el que $p(x)$ es un polinomio de grado mayor que dos, aplicamos la regla de Ruffini con el objeto de obtener las posibles soluciones enteras. Estas soluciones se encuentran entre los divisores del término independiente de la ecuación.

El procedimiento a seguir es el siguiente. Si a es un divisor del término independiente del polinomio $p(x)$ entonces el resto de la división de $p(x)$ entre $x - a$ es cero y $x = a$ es una raíz o cero de $p(x)$.

En los siguientes ejemplos se muestra el procedimiento.

Ejemplo 3.15

Resolver la ecuación polinómica $x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 55x + 50 = 0$.

Solución: Aplicando la regla de Ruffini se obtiene el desarrollo correspondiente que se muestra en la Tabla 3.1. Luego las soluciones o raíces del polinomio son $x = -1$, $x = 5$ que sale dos veces y $x = -2$. $\square$

Tabla 3.1: Regla de Ruffini para el Ejemplo 3.15

	1	–7	–3	55	50
–1		–1	8	–5	–50
	1	–8	5	50	0
5		5	–15	–50	
	1	–3	–10	0	
–2		–2	10		
	1	–5	0		
5		5			
	1	0			

El ejemplo que viene a continuación muestra una ecuación polinómica en el que el polinomio carece de término independiente. Por tanto, $x = 0$ es siempre solución de un polinomio con esta característica.

Ejemplo 3.16

Resolver la ecuación polinómica $x^5 + x^4 - 11x^3 + x^2 - 12x = 0.$

Solución: Obsérvese que

$$x^5 + x^4 - 11x^3 + x^2 - 12x = x(x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12),$$

luego, $x = 0$ es una solución. Ahora, aplicando la regla de Ruffini al polinimio $x^4+x^3-11x^2+x-12$ se tiene el desarrollo mostrado en la Tabla 3.2. El polinomio final resulta $x^2 + 1$, que no tiene raíces reales. Luego las soluciones o raíces del polinomio inicial son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -4$. □

Tabla 3.2: Regla de Ruffini para el Ejemplo 3.16

	1	1	–11	1	–12
3		3	12	3	12
	1	4	1	4	0
–4		–4	0	–4	
	1	0	1	0	

Ejemplo 3.17

Resolver la ecuación polinómica $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$.

Solución: Aplicando directamente la regla de Ruffini tenemos el desarrollo que se muestra en la Tabla 3.3. El polinomio final resulta $x^2 - 2$. Resolvemos ahora la ecuacion $x^2 - 2 = 0$, cuyas raíces son $\pm\sqrt{2}$. Luego las soluciones o raíces de la ecuación dada son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\sqrt{2}$ y $x_4 = \sqrt{2}$. □

Tabla 3.3: Regla de Ruffini para el Ejemplo 3.17

	1	–3	0	6	–4
1		1	–2	–2	4
	1	–2	–2	4	0
2		2	0	–4	
	1	0	–2	0	

3.2 Incecuaciones

Son desigualdades en las que aparecen letras y números con las operaciones usuales. Las letras son las variables o incógnitas de las inecuaciones. La desigualdad se reconoce por aparecer algunos de los siguientes símbolos:

- $<$ se lee *menor que*,
- $>$ se lee *mayor que*,
- $\leq$ se lee *menor o igual que*,
- $\geq$ se lee *mayor o igual que*.

Resolver una inecuación es averiguar el conjunto de valores de x que hacen que la desigualdad se sostenga.

Las inecuaciones se clasifican, al igual que las ecuaciones, atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas, aunque aquí sólo se tratarán las inecuaciones de primer y segundo grado y que constan solamente de una incógnita.

Para resolverla se siguen procedimientos similares a los utilizados en las ecuaciones pero teniendo en cuenta una cuestión importante, si se multiplica o divide a ambos lados del símbolo de desigualdad de una inecuación por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

$$\boxed{\text{Si } ax < b \text{ entonces } -ax > -b}$$

$$\boxed{\text{Si } ax > b \text{ entonces } -ax < -b}$$

3.2.1 Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado es una expresión que aparece escrita de alguna de las formas siguientes:

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0.$$

Ejemplo 3.18

Resolver la inecuación $15 - 3x \leq 3$.

Solución: Procediendo como en el caso de las ecuaciones tenemos:

$$
\begin{aligned}
-3x &\le -12,\\
x &\ge \frac{-12}{-3},\\
x &\ge 4.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que al dividir por –3 a ambos lados de la desigualdad el sentido de ésta cambia. Luego, el conjunto de soluciones de la inecuación lo constituye todos los números reales mayores o iguales que 4. Este conjunto de soluciones se puede expresar también como el intervalo $[4, +\infty)$. $\square$

Ejemplo 3.19

Resolver la inecuación $(x+3)(x+2) > x^2 - 1$.

Solución: Haciendo las operaciones oportunas se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x + 6 &> x^2 - 1,\\
5x &> -7,\\
x &> -\frac{7}{5}.
\end{aligned}
$$

Luego, el conjunto de soluciones de la inecuación lo constituye todos los números reales mayores que $-\frac{7}{5}$. Este conjunto de soluciones se puede expresar también mediante el intervalo $(-7/5, +\infty)$. $\square$

Ejemplo 3.20
Resolver la inecuación $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{2x+1}{5} < \dfrac{x}{10} + \dfrac{x+1}{4}$.

Solución: El mínimo común múltiplo es 20. Luego:

$$\begin{aligned}
10(x-3) - 4(2x+1) &< 2x + 5(x+1),\\
10x - 8x - 2x - 5x &< 5 + 30 + 4,\\
-5x &< 39,\\
x &> -\frac{39}{5}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que al dividir por –5 a ambos lados de la desigualdad el sentido de ésta cambia. Luego, el conjunto de soluciones de la inecuación lo constituye todos los números reales mayores que $-39/5$. Este conjunto de soluciones se puede expresar también como el intervalo $(-39/5, +\infty)$. $\square$

3.2.2 Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación polinómica de grado superior a uno es una expresión que aparece escrita de alguna de las formas siguientes:

$$p(x) < 0, \quad p(x) > 0, \quad p(x) \leq 0, \quad p(x) \geq 0,$$

donde p(x) es un polinomio de grado mayor que uno.

Para resolver una inecuación de grado superior a uno representamos en la recta real las raíces del polinomio $p(x)$ (podrán obtenerse utilizando la regla de Ruffini) que dividirán la recta real en intervalos. Tomamos ahora valores en cada uno de esos intervalos, sustituyéndolos en el polinomio $p(x)$, de modo que evaluamos de esta manera el signo que toma en cada uno de esos intervalos. Finalmente, la solución estará en aquéllos intervalos que verifican la condición dada por la inecuación. En la práctica bastará con evaluar el signo en uno solo de los intervalos de manera que los intervalos consecutivos alternan el signo si la raíz salió un número impar de veces. Si la raíz salió un número par de veces los intervalos consecutivos a cada lado de dicha raíz conservan el mismo signo. Es interesante notar que no hay que olvidar considerar los extremos del intervalo en el caso de que la inecuacion contenga los signos $\leq$ ó $\geq$.

Ejemplo 3.21

Resolver la inecuación $2x^2 > -3 + 7x$.

Solución: La inecuación dada es equivalente a la inecuación $2x^2 - 7x + 3 > 0$. Las raíces del polinomio $2x^2 - 7x + 3$ son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$. Representamos estos valores en la recta real y evaluamos el signo del polinomio anterior en cada uno de los intervalos, obteniendo la gráfica de la Figura 3.1. Por ejemplo, en este caso es sencillo comprobar que el signo que toma el polinomio en $0 \in (-\infty, 1/2)$ es positivo. Como la inecuación trata de calcular los valores que hacen mayor que cero la expresión, tendremos que elegir aquellos intervalos donde la evaluación del signo no haya dado negativa o cero, por lo que la solución corresponderá al intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

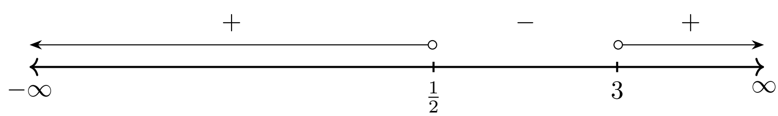


Figura 3.1: Gráfico correspondiente al ejemplo 3.21

Téngase en cuenta que el polinomio $p(x)$ corresponde a una parábola convexa[1] (el coeficiente de x^2 es positivo) que corta al eje OX en $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$. En definitiva tenemos que el polinomio es positivo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$ y negativo en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. $\square$

Ejemplo 3.22

Resolver la inecuación $3x^2 - 7x < -2$.

[1] Este tipo de funciones se estudiará en el Capítulo 4.

Solución: Reescribimos la inecuación como $3x^2 - 7x + 2 < 0$. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$ son $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2$. Representamos estos valores en la recta real y evaluamos el signo en cada uno de los intervalos, obteniendo la gráfica de la Figura 3.2.

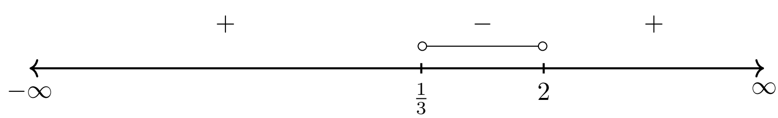


Figura 3.2: Gráfico del ejemplo 3.22

Como la inecuación trata de calcular los valores que hacen menor que cero (negativo) la expresión, se tiene que la solución corresponderá al intervalo $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$. □

Ejemplo 3.23

Resolver la inecuación $x^4 - 7x^2 \geq 20x + 12 - 2x^3$.

Solución: Primeramente ordenamos la inecuación escribiéndola como $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 \geq 0$. Calculamos las raíces del polinomio $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12$ mediante la regla de Ruffini, obteniéndose $x_1 = -2$ (doble), $x_1 = -1$, $x_3 = 3$. Representamos estos valores en la recta real y evaluamos el signo en cada uno de los intervalos, obteniendo la gráfica de la Figura 3.3.

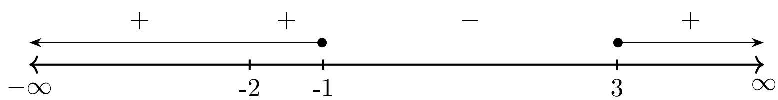


Figura 3.3: Gráfico del ejemplo 3.23

Obérvese que, puesto que la raíz $x_1 = -2$ es doble, la misma no cambia el signo del polinomio. Como la inecuación trata de calcular los valores que hacen mayor o igual que cero la expresión, tendremos que elegir aquellos intervalos donde la evaluación del signo no haya dado negativa, por lo que la solución será el intervalo $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. $\square$

3.3 Sistemas de ecuaciones

Estudiamos en esta sección los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se expresa de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = m, \\ cx + dy = n. \end{cases}$$

en donde $a,\ b,\ c,\ d,\ m,\ n$ son números reales, siendo x, y las incógnitas. Para su resolución utilizaremos indistintamente el método de reducción, sustitución o igualación. Veamos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 3.24

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$

Solución: Procederemos por reducción. Para ello multiplicamos la primera ecuación por 3, con el objetivo de que una de las incógnitas en ambas ecuaciones tenga el mismo coeficiente pero con signo diferente.

$$\begin{cases} 9x + 3y = 3, \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Sumando ahora ambas ecuaciones tenemos la ecuación $11x = 11$, de donde resulta $x = 1$.

Sustituyendo ahora este valor en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera, podemos calcular la otra incógnita de la manera siguiente:

$$3 \cdot 1 + y = 1; \quad y = 1 - 3 = -2.$$

En definitiva, la solución del sistema es $x = 1,\ y = -2$. $\square$

Ejemplo 3.25

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x - y = -1, \\ 6x + 2y = 9. \end{cases}$

Solución: En este caso resolvemos por igualación. Para ello despejamos una de las incógnitas en ambas ecuaciones e igualamos. Así, por ejemplo, despejando la incógnita y de ambas ecuaciones resulta:

$$y = 4x + 1,$$
$$y = \frac{9 - 6x}{2}.$$

Igualando las expresiones de la derecha tenemos la ecuación (sólo en la incógnita x):

$$4x + 1 = \frac{9 - 6x}{2}$$

cuya solución resulta $x = 1/2$.

Sustituyendo ahora este valor en cualquiera de las dos expresiones en la que aparece y despejada (por ejemplo, la primera) podemos obtener la incógnita y como sigue:

$$y = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

En definitiva, la solución es $x = 1/2,\ y = 3.$ □

Ejemplo 3.26

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1, \\ 6x - 3y = 0. \end{cases}$

Solución: En este caso procederemos por el método de sustitución. Para ello despejamos una de las incógnitas en alguna de las ecuaciones y sustituimos en la otra. Así, por ejemplo, despejando la incógnita y de la primera ecuación resulta $y = 1 - x$, que sustituida en la otra ecuación proporciona la ecuación en x siguiente:

$$6x - 3(1 - x) = 0;\ 9x = 3,\ x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo ahora este valor en la expresión en la que aparece la incógnita y despejada resulta $y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Luego, la solución del sistema es $x = 1/3,\ y = 2/3$. □

Ejemplo 3.27

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{y + 5x}{2} = y - 1, \\ 5(x + y) + 2 = y. \end{cases}$

Solución: La primera ecuación del sistema equivale a $5x - y = -2$, luego el sistema de ecuaciones puede reescribirse como,

$$5x - y = -2$$

$$5x + 4y = -2.$$

Multiplicando la segunda ecuación por -1, el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} 5x - y &= -2 \\ -5x - 4y &= 2. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene $-5y = 0$, cuya solución es $y = 0$. Este valor se lleva a cualquiera de las ecuaciones anteriores para obtener el valor de x. Por ejemplo, sustituyendo en la ecuación $5x - y = -2$ tenemos $5x - 0 = -2$, de donde se obtiene inmediatamente $x = -\frac{2}{5}$.

$\square$

Los sistemas de ecuaciones anteriores son todos lineales. En todos ellos, si escribimos la incógnita y en función de x (despejando) resulta un polinomio de grado 1, cuya representación gráfica es una recta. De hecho, otro método que permite resolver el sistema consiste en representar ambas rectas (las correspondientes a cada una de las ecuaciones que componen el sistema) y encontrar el punto de intersección de ambas. Se deja propuesto al lector que lo haga para los sistemas resueltos en los ejemplos anteriores.

Si al resolver un sistema de ecuaciones, este tiene infinitas soluciones entonces es que las dos rectas son coincidentes, mientras que si no tiene solución (incompatible) es que las rectas son paralelas.

3.4 Problemas con ecuaciones

Ejemplo 3.28

Calcular dos números cuya diferencia sea 13 y su cociente 2.

Solución: Si llamamos x e y a los números que se desean calcular, tenemos que el sistema que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} x - y &= 13, \\ \frac{x}{y} &= 2. \end{aligned}$$

Despejando de la segunda ecuación la incógnita x tenemos $x = 2y$, que llevado a la primera ecuación proporciona la ecuación $2y - y = 13$, cuya solución es $y = 13$. Finalmente, la incógnita x es $x = 2y = 2 \cdot 13 = 26$. Luego los dos números que se pedían son 13 y 26. □

Ejemplo 3.29

La edad de Juan es doble de la edad de Carlos mientras que hace cuatro años era el triple. Averiguar la edad actual de Juan y Carlos.

Solución: Si llamamos x a la edad de Carlos entonces la edad de Juan será $2x$. Hace cuatro años la edad de Carlos era $x - 4$, mientras que la edad de Juan era $2x - 4$. Como ésta era el triple de la de Carlos formamos la ecuación $2x - 4 = 3(x - 4)$, cuya solución es $x = 8$. En definitiva, la edad de Carlos es de $x = 8$ años y la de Juan de $2x = 16$ años. $\square$

Ejercicios propuestos tipo test

Resolver las ecuaciones, incecuaciones y sistemas que se muestran a continuación.

1. $5(x-1)+3(x+2)=12.$

   a) $x=\frac{11}{8}.$ *b*) $x=-\frac{11}{8}.$ *c*) $x=0.$

2. $-3(x+1)-5(x-3)=12(x+1).$

   a) $x=0.$ *b*) $x=1.$ *c*) $x=-1.$

3. $\frac{x}{6}-\frac{x}{2}=-4.$

   a) $-\frac{12}{5}.$ *b*) $12.$ *c*) $-12.$

4. $x^2+2x-1=(x+1)^2+2x.$

   a) $x=-1.$ *b*) $x=1.$ *c*) $x=0.$

5. $\frac{x}{5}+\frac{x}{10}=\frac{1}{20}.$

   a) $-\frac{1}{6}.$ *b*) $6.$ *c*) $\frac{1}{6}.$

6. $\frac{x+2}{3}-\frac{2x-5}{6}+1=\frac{x+1}{3}.$

a) $\dfrac{13}{2}$. *b*) $-\dfrac{2}{13}$. *c*) 13.

7. $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+2}{3} = -\dfrac{5}{6} + 3(x+1)$.

   a) $-\dfrac{17}{20}$. *b*) $\dfrac{20}{17}$. *c*) $-\dfrac{20}{17}$.

8. $\dfrac{1}{3}(x+2)(x-1) = \dfrac{x^2+8}{3}$.

   a) 10. *b*) $\dfrac{1}{4}$. *c*) -4.

9. $5(x-3) - 7(x-1) + x = 4(x+5) + 1$.

   a) $-\dfrac{5}{29}$. *b*) $-\dfrac{29}{5}$. *c*) 29.

10. $\dfrac{3(x+4)}{5} - \dfrac{2x-6}{10} + 3 = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x-1}{5}$.

    a) $\dfrac{93}{4}$. *b*) $\dfrac{93}{2}$. *c*) $-\dfrac{93}{2}$.

11. $x^2 - 10x + 24 = 0$.

    a) $x_1 = 4,\ x_2 = -6$. *b*) $x_1 = -4,\ x_2 = -6$.

    c) $x_1 = 4,\ x_2 = 6$.

12. $3x^2 - 2 = -x$.

a) $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{2}{3}$. *b*) $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{2}{3}$.

c) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{3}$.

13. $9x^2 - 12x = 5$.

a) $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{5}{3}$. *b*) $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{5}{3}$.

c) $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{5}{3}$.

14. $6x^2 - x - 2 = 0$.

a) $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$. *b*) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{2}{3}$.

c) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{2}{3}$.

15. $x^2 - 24 = 0$.

a) $x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = 6$. *b*) $x = 2\sqrt{6}$.

c) $x = \pm 2\sqrt{6}$.

16. $-6x^2 = 0$.

a) $x = 0$ (doble). *b*) $x_1 = 0,\ x_2 = -6$.

c) $x = 0$.

17. $7x^2 + 5x = 0$.

a) $x_1 = 0,\ x_2 = -7.$ *b*) $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{5}{7}.$

c) $x = 0.$

18. $x^2 + 6x + 9 = 0.$

a) $x_1 = -3,\ x_2 = 3.$ *b*) $x = -3.$

c) $x = -3$ (doble).

19. $2x^2 - 6x = 0.$

a) $x_1 = 0,\ x_2 = 3.$ *b*) $x_1 = -0,\ x_2 = -3.$

c) $x = -3$ (doble).

20. $x^2 - x + 24 = 0.$

a) $x_1 = 0$ (doble). *b*) $x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

c) No tiene solución real.

21. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$

a) $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 5.$

b) $x_1 = 3,\ x_2 = 3,\ x_3 = -5,\ x_4 = -5.$

c) $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 5,\ x_4 = -5.$

22. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0.$

$a)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 5.$

$b)$ $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 5.$

$c)$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = -3.$

23. $3x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 15x^2 + 12x + 12 = 0.$

$a)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$

$b)$ $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2 = -\dfrac{1}{2},\ x_5 = -\dfrac{3}{2}.$

$c)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = -2.$

24. $4x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 11x^2 - x + 3 = 0.$

$a)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = \dfrac{1}{2},\ x_5 = -\dfrac{3}{2}.$

$b)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = \dfrac{1}{2}.$

$c)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -\dfrac{1}{2},\ x_5 = -\dfrac{3}{2}.$

25. $80x - 80x^2 + x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 32 = 0.$

$a)$ $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

$b)$ $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2.$

$c)$ $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2.$

26. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0.$

    a) $x_1 = 3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1.$

    b) $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3.$

    c) $x_1 = -1,\ x_2 = 3.$

27. $2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 3 = 0.$

    a) $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1.$

    b) $x_1 = -1,\ x_2 = -1.$

    c) $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

28. $2x^4 = 3 - x^2.$

    a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -1.$

    b) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

    c) $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -1.$

29. $4x^4 - 101x^2 + 25 = 0.$

    a) $x_1 = 1/2,\ x_2 = -1/2,\ x_3 = -5,\ x_4 = 5.$

    b) $x_1 = -1/2,\ x_2 = -1/2,\ x_3 = -5,\ x_4 = 5.$

    c) $x_1 = 1/2,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = -5,\ x_4 = 5.$

30. $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{x-1}{10} \geq 2(x+1) - \dfrac{5}{3}x + 1.$

$a)$ $x \leq \dfrac{69}{7}.$ $b)$ $x \leq -\dfrac{69}{7}.$ $c)$ $x \geq -\dfrac{69}{7}.$

31. $\dfrac{x+1}{8} - 2 \cdot \dfrac{3-x}{4} \geq \dfrac{2(x-1)}{12} - \dfrac{x}{6}.$

$a)$ $x \geq \dfrac{29}{15}.$ $b)$ $x \geq -\dfrac{29}{15}.$ $c)$ $x \geq -\dfrac{15}{29}.$

32. $-\dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{x+4}{12} \geq \dfrac{3(x+1)}{4} - \dfrac{2x}{3} - 5.$

$a)$ $x \geq -\dfrac{51}{8}.$ $b)$ $x \geq -\dfrac{51}{8}.$ $c)$ $x \leq \dfrac{43}{8}.$

33. $x^2 + 3(x-1) < (x+1)^2 - 5x + 2.$

$a)$ $x < 1.$ $b)$ $x > 1.$ $c)$ $x < -1.$

34. $x^2 + x - 2 \geq 0.$

$a)$ $(-\infty, -2] \cup [1, \infty).$ $b)$ $(-\infty, -2) \cup (1, \infty).$

$c)$ $(-2, 1).$

35. $2x^2 - 1 \leq -x.$

$a)$ $[-1, \frac{1}{2}].$ $b)$ $(-1, \frac{1}{2}).$

$c)$ $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, \infty).$

36. $x^2 + x + 1 > 0$.

$a)$ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $b)$ $\mathbb{R}$.

$c)$ $(-1, 1)$.

37. $x^2 + 3x - 4 < 0$.

$a)$ $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$. $b)$ $\mathbb{R}$.

$c)$ $(-4, 1)$.

38. $x^2 < 3 + 2x$.

$a)$ $(-1, 3)$. $b)$ $(-\infty, -1) \cup (-1, 3)$.

$c)$ $[-1, 3]$.

39. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$

$a)$ $x = 3,\ y = 2$. $b)$ $x = 3,\ y = 1$.

$c)$ $x = 1,\ y = 3$.

40. $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ y = x - 1. \end{cases}$

$a)$ $x = 1,\ y = -2.$ $b)$ $x = -1,\ y = 2.$

$c)$ $x = -1,\ y = -2.$

41. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{4}{3} \\ x + 3y = 3. \end{cases}$

$a)$ $x = 2,\ y = 1/3.$ $b)$ $x = 1/3,\ y = 2.$

$c)$ $x = 2,\ y = 3.$

42. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} + \dfrac{y-2}{2} = -2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 0. \end{cases}$

$a)$ $x = 0,\ y = 1.$ $b)$ $x = 0,\ y = 0.$

$c)$ $x = 1,\ y = 0.$

43. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \dfrac{x}{2} - y = 2. \end{cases}$

$a)$ Incompatible. $b)$ $x = 2,\ y = 3.$

$c)$ Infinitas soluciones.

44. Calculando dos números cuya suma sea 12 y tal que el primero sea el doble que el segundo resulta:

$a)$ 16 y 8. $b)$ 8 y 4. $c)$ 20 y 10.

45. Al calcular dos números cuya diferencia sea 6 y dados que el segundo sea la tercera parte que el primero resulta:

    $a)$ 9 y 3. $b)$ $\frac{1}{3}$ y 1. $c)$ 30 y 10.

46. Un adolescente tiene tres cuentas en las redes sociales Facebook, Twiter y MySpace con un total de 200 seguidores. Si en Twiter tiene el doble de seguidores que en Facebook y en ésta red el triple que en MySpace, entonces la cantidad de seguidores que tiene en Facebook, Twiter y MySpace es, respectivamente:

    $a)$ 60, 120 y 20. $b)$ 120, 60 y 20.

    $c)$ 100, 50 y 50.

47. En un corral hay gallinas y conejos, contabilizándose en total 55 cabezas y 180 patas. Entonces el número de gallinas y conejos que hay en el corral es, respectivamente:

    $a)$ 35 y 20. $b)$ 20 y 20. $c)$ 20 y 35.

48. Un inversor tiene 14000 € repartido en tres fondos de inversión, A, B y C. Si en el fondo A tiene invertido el do-

ble que en el fondo C y en éste el doble que en el fondo B, entonces la cantidad invertida en el fondo A, B y C es, respectivamente:

a) 2000, 8000 y 4000 €. *b*) 8000, 2000 y 4000 €.

c) 5000, 6000 y 3000 €.

49. La suma de tres números impares consecutivos es 309. Entonces los números son:

a) 101, 103 y 105. *b*) 101, 105 y 107.

c) 305, 307 y 309.

50. El propietario de un local desea alquilarlo y recibir una renta neta anual de 5400 €, teniendo en cuenta que el impuesto anual sobre el alquiler totaliza el 10% de éste. Entonces la renta bruta mensual deberá ser de:

a) 400 €. *b*) 500 €. *c*) 200 €.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES

En este capítulo se comienza con una revisión de algunos conceptos básicos de las funciones reales de variable real. Se define la función real de variable real, así como su dominio, operaciones que se pueden realizar con las mismas y se repasan las gráficas de la funciones polinómicas de grado uno y dos; esto es, la recta y la parábola. El concepto de función como un objeto matemático independiente, susceptible de ser estudiado por sí solo, no apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables, debiéndose a Leibniz los términos de variable y función. La primera vez que aparece la notación $f(x)$ parece clara que fue en el siglo XVIII por los matemáticos A.C. Clairaut y por Leonhard Euler.

Este concepto es uno de los más importantes de las matemáticas, cuya aplicación es evidente en todas aquellas disciplinas que necesitan las matemáticas como herramienta de trabajo. Una función es una relación entre dos o más magnitudes que expresa como una cantidad depende de otra. Por ejemplo, en Economía, el consumo, C, depende de la renta, Y, que se expresa mediante $C = f(Y)$. Otros ejemplos de funciones en este escenario lo constituyen la función de oferta (indica la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio determinado), la función de demanda (indica la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio determinado), la función de utilidad (expresa el grado de satisfacción de un consumidor al consumir un bien), etc.

4.1 Concepto de función. Dominio y operaciones

Cuando se desea indicar que cierta magnitud depende de otra se suele decir que dicha magnitud es función de esta última. Formalmente esta relación exigirá que la dependencia sea elemento a elemento. La siguiente definición establece el concepto de función.

Concepto de función

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto uno y sólo uno del segundo conjunto. Generalmente las funciones se representan con las letras f, g, h, etc., y se expresa

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x), \end{aligned}$$

donde x se denomina variable independiente e y variable dependiente.

Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se habla de función real de variable real, que serán las tratadas siempre en este texto.

Dominio de una función real de variable real es el conjunto de números reales para los que tiene sentido la expresión analítica de la misma. Si la expresión de la función es $y = f(x)$ el dominio se expresa con la terminología $\text{Dom}(f)$. La expresión analítica es un conjunto de números y letras (variables) unidos mediante las operaciones aritméticas.

Por ejemplo, la función que duplica un número real tiene como expresión analítica $y = f(x) = 2x$ y su dominio es $\mathbb{R}$ ya que a la variable independiente x le está permitido tomar cualquier valor real. La función que relaciona un número con el recíproco del mismo tiene como expresión analítica $y = f(x) = \frac{1}{x}$. El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{0\}$, puesto que la expresión $\frac{1}{0}$ no tiene sentido.

Ejemplo 4.1

Calcular el dominio de las siguientes funciones.

$a)$ $f(x) = x^2 - 1.$

$b)$ $f(x) = \dfrac{1}{x-5}.$

$c)$ $f(x) = \sqrt{x}.$

$d)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Solución: Se procede como sigue:

$a)$ Esta función es polinómica de grado dos. Su dominio es $\mathbb{R}$. Hay que destacar que el dominio de una función polinómica es siempre $\mathbb{R}$.

$b)$ Igualando a cero el denominador se obtiene $x = 5$, que es el valor que habrá que excluir del dominio. Luego tenemos, $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{5\}$.

$c)$ Puesto que la raíz cuadrada de los números negativos no existe en $\mathbb{R}$ tendremos que exigir que $x \geq 0$. Luego, $\text{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

d) Este ejemplo es similar al anterior con el añadido de que a la variable independiente x tampoco le está permitido tomar el valor 0, que anula el denominador. En definitiva, $\text{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

□

La gráfica de una función, que es el conjunto de puntos que define a esa función, suele ser muy ilustrativa ya que ofrece información sobre la forma en que las variables x e y están relacionadas. Obsérvese, que dada la definición de función anterior, una gráfica corresponde a una función si cada recta vertical (recta paralela al eje OY) corta a la gráfica solamente una vez. En la Figura 4.1 se muestra una gráfica que no corresponde a una función (izquierda) ya que para el valor del dominio x_0 le corresponden dos puntos sobre la gráfica y otra que sí representa una función (derecha).

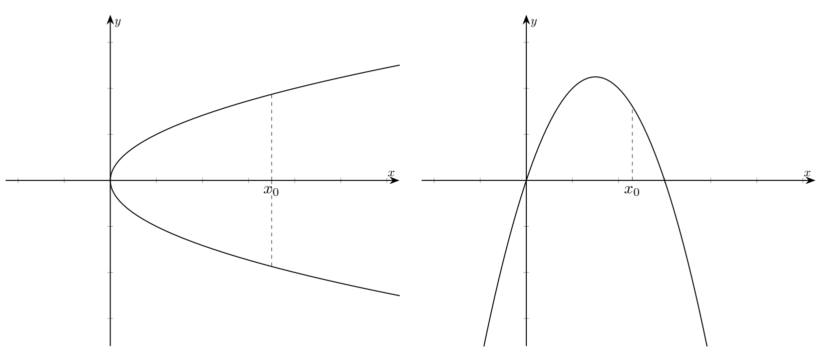


Figura 4.1: La gráfica de la izquierda no representa una función.

Se denomina recorrido o imagen de una función al conjunto de valores que toma la variable dependiente. Dada una función $y = f(x)$, suele denotarse a la imagen mediante $\text{Im}(f)$. Así, por ejemplo la función $y = f(x) = x + 1$ tiene como imagen todo el conjunto de los números reales, y escribiremos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Sin embargo, la función $y = f(x) = x^2$ tiene como imagen $\mathbb{R}_0^+$, ya que el cuadrado de un número real siempre es positivo o cero.

4.1.1 Operaciones con funciones

De manera natural se definen las operaciones suma (resta), producto y cociente de funciones.

Dadas las funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se define:

- Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Producto: $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$.
- Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Ejemplo 4.2

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 1$, calcular:

$a)$ $2f(x) - g(x)$. $\qquad$ $b)$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Solución: Se obtiene de forma inmediata lo siguiente:

$a)$ $2f(x) - g(x) = 2(x^2 - 1) - (x + 1) = 2x^2 - x - 3.$

$b)$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x \neq -1.$

□

4.1.2 Extremos y monotonía

Estudiamos en esta sección el concepto de extremos locales y globales (máximos y mínimos locales y globales), así como el concepto de monotonía, esto es, el hecho de que una función sea creciente, decreciente o constante.

De manera informal se dice que una función alcanza un máximo relativo o local en un punto x_M si para cualquier x que esté próximo a x_M se cumple que $f(x) \leq f(x_M)$, es decir que en las cercanías de x_M la función toma valores menores que en dicho punto. De la misma manera, la función alcanza un mínimo local o relativo en x_m si para cualquier x que esté próximo a x_m la función toma valores mayores que en dicho punto. En la práctica, una función puede tener más de un máximo o mínimo relativo, denominándose máximo absoluto o global al mayor de todos los máximos relativos y mínimo absoluto o global al menor de todos los mínimos relativos.

En consecuencia, el máximo global de una función, si lo alcanza, estará en aquel valor del dominio para el que la función toma el mayor valor. De la misma manera, el mínimo global de una función, si lo alcanza, estará en aquel valor en el que la función toma el mínimo valor.

Obviamente, de todo lo anterior se desprende que todo extremo (máximo o mínimo) global es local.

Una ilustración de lo señalado aparece en la Figura 4.2 en la que se muestra una función definida en el dominio $[a_1, a_5]$.

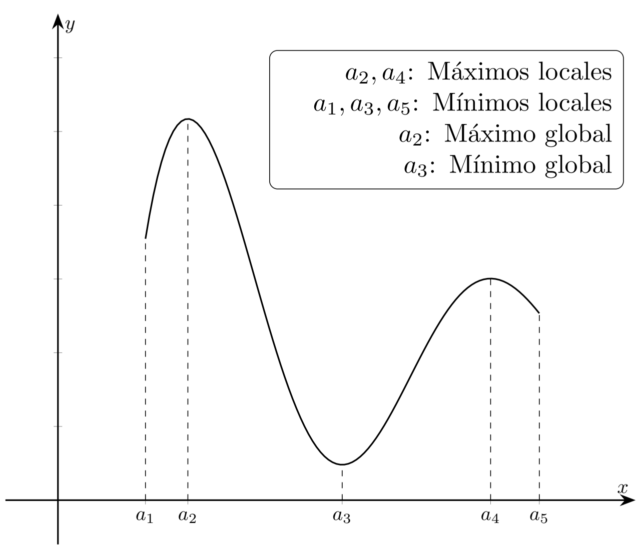
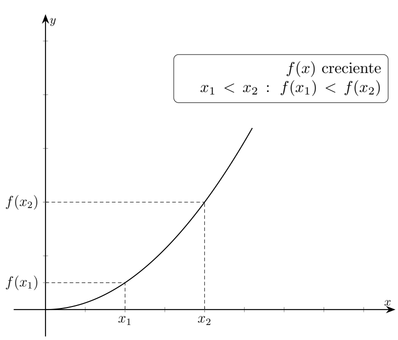


Figura 4.2: Extremos locales y globales.

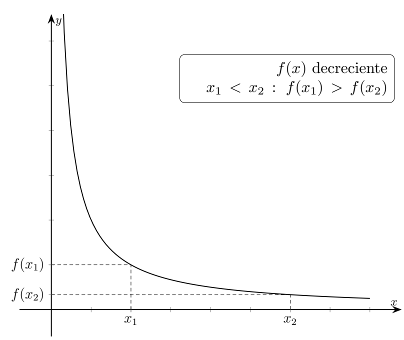
En ella se observa que el máximo global se corresponde con el mayor de todos los máximos relativos, y que el máximo global es también máximo local o relativo. El mismo comentario puede hacerse también en relación al mínimo global.

El concepto de crecimiento o decrecimiento (monotonía) de una función es algo bastante intuitivo. De manera informal decimos que una función es creciente (decreciente) si los valores que toma la función aumentan (disminuyen) conforme avanzamos de izquierda a derecha en el dominio de la función.

En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo de función creciente (derecha) y otra decreciente (izquierda). Cuando una función no crece ni decrece se dice que es constante, lo que se traduce gráficamente en una línea horizontal y, por tanto paralela al eje OX.



(a) Función creciente



(b) Función decreciente

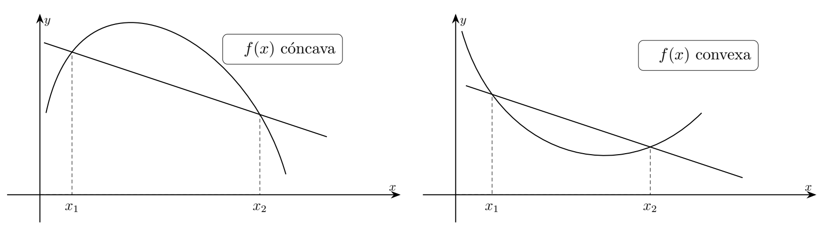
Figura 4.3: Ilustración de una función creciente y otra decreciente.

4.1.3 Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Abordamos ahora, también de una forma suscinta e informal, los conceptos de concavidad, convexidad y punto de inflexión.

Se dice que una función $f(x)$ es convexa en un intervalo si dados x_1 y x_2 pertenecientes al mismo, el segmento que une $f(x_1)$ y $f(x_2)$ queda por encima de la gráfica de $f(x)$ en dicho intervalo.

Por otro lado, se dice que $f(x)$ es cóncava en un intervalo si dados x_1 y x_2 pertenecientes al mismo, el segmento que une $f(x_1)$ y $f(x_2)$ queda por debajo de la gráfica de $f(x)$ en dicho intervalo.



(a) Función cóncava (b) Función convexa

Figura 4.4: Ilustración de una función cóncava y otra convexa.

En la Figura 4.4 se muestran las gráficas de una función cóncava (arriba) y otra convexa (abajo).

Un punto en el que la función cambia la concavidad (pasa de cóncava a convexa o viceversa) se denomina punto de inflexión. Por ejemplo, la función que se muestra en la Figura 4.5 tiene un punto de inflexión en x_0 ya que la función es cóncava a su izquierda y convexa a su derecha.

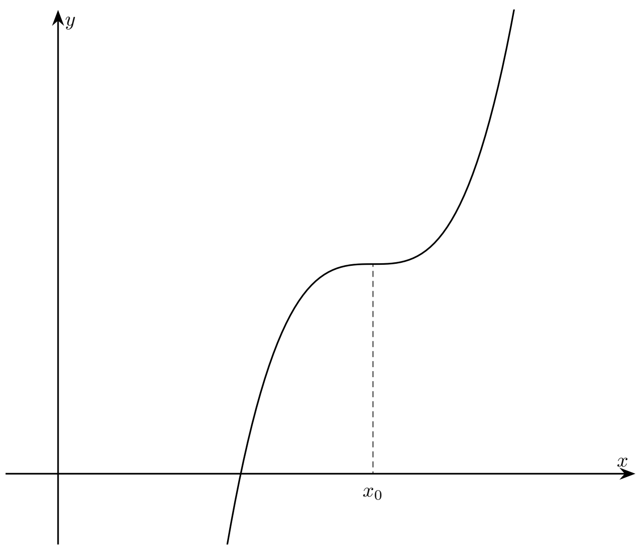


Figura 4.5: Ilustración de una función con un punto de inflexión en x_0.

Conceptos como el de monotonía (crecimiento y decrecimiento) y extremos locales se volverán a estudiar en el capítulo 4 de este manual utilizando ciertas herramientas matemáticas proporcionadas por el cálculo diferencial (la derivada). De hecho, estas herramientas nos permitirán estudiar en qué partes de su dominio una función es creciente, decreciente y presenta extremos locales.

4.2 Funciones polinómicas

En este apartado se estudiarán las funciones más sencillas que aparecen en el estudio del análisis real de una variable. Nos referimos a las funciones polinómicas de grado uno y dos.

4.2.1 Función lineal (la recta)

La expresión analítica de una función lineal es un polinomio de grado uno. Esto es,

$$y = f(x) = a\,x + b,$$

donde a y b son números reales. Evidentemente al tratarse de una función polinómica se tiene que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. Su representación gráfica es una recta y los dos parámetros que aparecen en la expresión analítica, a y b, son la pendiente y la ordenada en el origen, respectivamente. Así:

- a es la pendiente (inclinación) de la recta. De modo que:
  - Si $a > 0$, la recta es creciente.

  – Si $a < 0$, la recta es decreciente.

- b es la ordenada en el origen (corte con el eje OY).

Además:

- Dos rectas $y = a\,x + b$ e $y = a'\,x + b'$ son paralelas si tienen la misma pendiente. Esto es, $a = a'$.
- Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ entonces las rectas son paralelas y coincidentes.

En la Figura 4.6 se muestran algunas representaciones gráficas de rectas en función de los parámetros a y b.

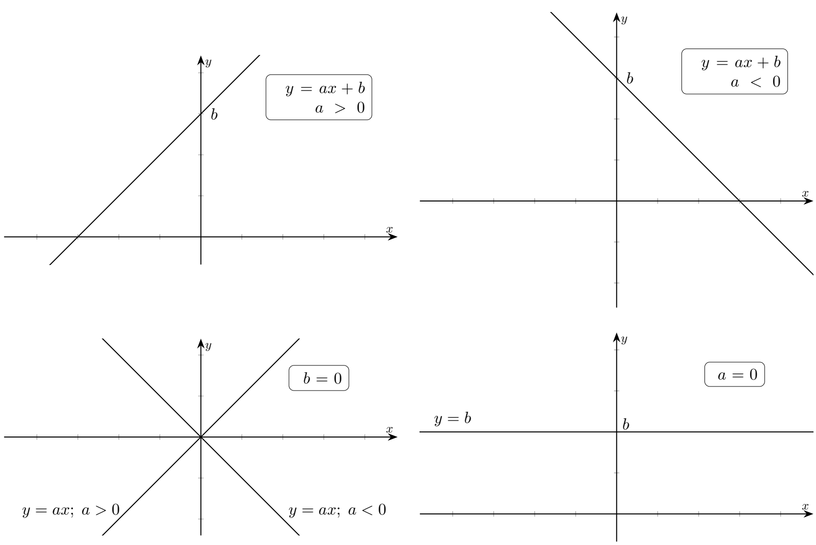


Figura 4.6: Distintas gráficas de la función lineal.

Téngase en cuenta que la recta $x = k$ (recta vertical) no representa una función porque a un solo valor de la variable x le corresponden más de un valor de y.

Muchos fenómenos naturales y económicos pueden modelizarse a través de funciones lineales. Por ejemplo, el coste de un viaje, la cantidad demandada de un bien, que puede depender linealmente del precio, etc.

Ejemplo 4.3

Disponemos de 15 días de vacaciones y deseamos alquilar un vehículo. La empresa de alquiler nos ofrece dos opciones: 40 € diarios con kilometraje ilimitado o 10 € diarios más 10 € por kilómetro recorrido. Calcular la función de gasto en cada opción y estudiar a partir de cuántos kilómetros es más rentable la opción primera que la segunda.

Solución: Denominando al gasto incurrido por y y al número de kilómetros recorridos por x tenemos que en el primer caso la función de gasto viene dada por $y = 40 \cdot 15 = 600$, y por tanto una función constante. En el segundo caso la función viene dada por $y = 10x + 150$. Igualando ambas expresiones se tiene $10x + 150 = 600$. Despejando la variable x resulta $x = 45$. Luego, si tenemos pensado realizar más de 45 km durante los 15 días de vacaciones la primera opción resulta más rentable que la segunda. Véase la Figura 4.7. □

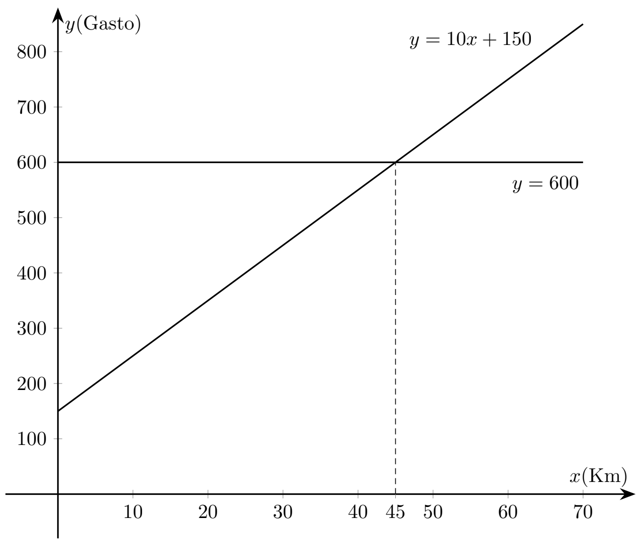


Figura 4.7: Gráfica de la funciones $y = 600$, $y = 150 + 10x$.

Ejemplo 4.4

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y su pendiente es -2. Representarla gráficamente.

Solución: La expresión de una recta de pendiente a es $y = ax+b$. Luego la recta pedida (la pendiente es -2) vendrá dada por $y = -2x+b$. Imponiendo ahora a que la recta pase por el punto $(2, -1)$

resulta $-1 = -2 \cdot 2 + b$, de donde de forma inmediata se obtiene $b = 3$.

Luego, la recta pedida es $y = -2x + 3$. Su representación gráfica aparece en la Figura 4.8. $\square$

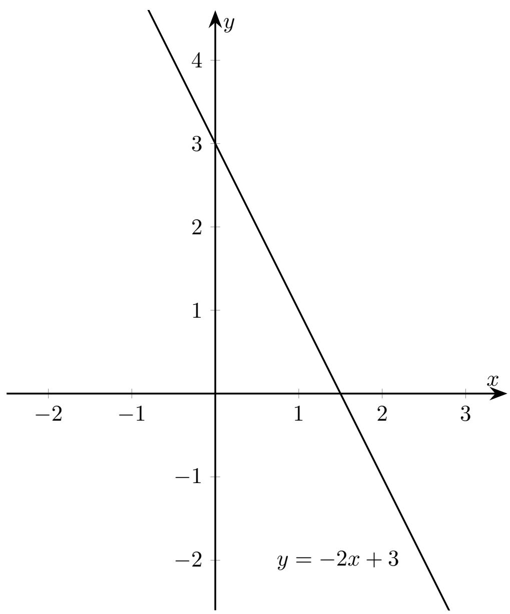


Figura 4.8: Gráfica de la función $y = -2x + 3$.

Ejemplo 4.5

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, -2)$. Representarla.

Solución: En este caso imponemos a la recta $y = ax + b$ a pasar por los dos puntos dados, constituyendo el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= 2a + b, \\ -2 &= b, \end{aligned}$$

cuya solución es $a = 1,\ b = -2$. Luego, la ecuación de la recta es $y = x - 2$. Su representación gráfica se muestra en la Figura 4.9. $\square$

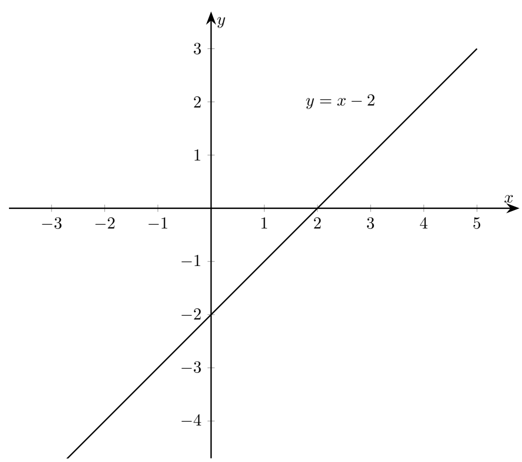


Figura 4.9: Gráfica de la función $f(x) = x - 2$.

Ejemplo 4.6

Calcular y representar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 1)$ y es paralela a la recta de ecuación $3x - y = 1$.

Solución: La recta $3x - y = 1$ puede escribirse como $y = 3x - 1$, cuya pendiente es 3. Luego la recta que se pide ha de pasar por el punto $(-1, 1)$ y tener la misma pendiente que la anterior, ya que es paralela. Después de algunos cálculos se obtiene la recta $y = 3x + 4$. Su gráfica se muestra en la Figura 4.10. □

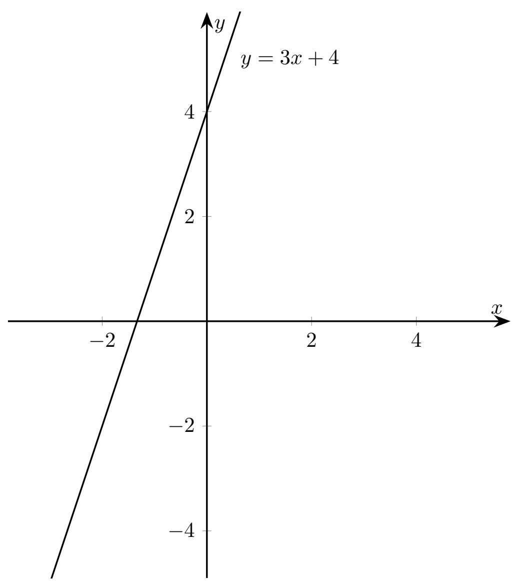


Figura 4.10: Gráfica de la función $f(x) = 3x + 4$.

Modelo de oferta y demanda

En Economía, para cada nivel de precios de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandan en un determinado período.

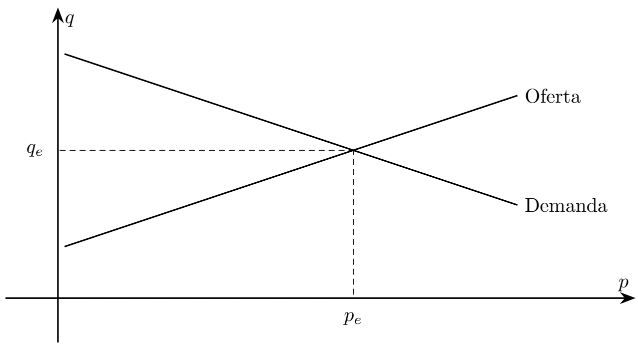


Figura 4.11: Equilibrio de mercado.

Por lo general, conforme mayor es el precio, menor es la cantidad demandada. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente por q, la expresión que relaciona p y q, en algunos casos particulares, se puede expresar mediante una expresión lineal denominada función de demanda y, consecuentemente la función de demanda tendrá pendiente negativa. En respuesta a diversos precios, existe una cantidad de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en un período. Por lo general, cuanto mayor es el precio, tanto mayor será la cantidad que los fabricantes están dispuestos a ofrecer; al reducirse el precio, se reduce también la cantidad de oferta. En este caso hablamos de la función de oferta, que si se representa también mediante una función lineal, tendrá pendiente positiva. Representando conjuntamente la función de oferta y demanda, como función de p, $q = f(p)$, el punto en que coinciden ambas curvas (p_e, q_e) se denomina punto de equilibrio de mercado (véase la Figura 4.11).

Ejemplo 4.7

Supóngase que la demanda semanal de un producto es de 10 unidades cuando el precio es de 30 unidades monetarias por unidad, y de 20 unidades cuando el precio es de 25. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal. Si la función de oferta viene dada por la ecuación $q = \frac{1}{2}p + 21$, determinar el punto de equilibrio del mercado.

Solución: Dados los datos, se sabe que la ecuación de demanda es una recta que pasa por los puntos $(10, 30)$ y $(20, 25)$. Por tanto, resolviendo el sistema dado por las ecuaciones

$$30 = 10a + b,$$

$$25 = 20a + b,$$

se obtiene la solución $a = -\frac{1}{2}$, $b = 35$. Por tanto, la función de demanda viene dada por $q = -\frac{1}{2}p + 35$.

Para hallar el punto de equilibrio resolvemos el sistema dado por las funciones de oferta y demanda,

$$
\begin{aligned}
q &= -\frac{1}{2}p + 35, \\
q &= \frac{1}{2}p + 21,
\end{aligned}
$$

cuya solución es $p = 14,\ q = 28$. Por tanto, el punto de equilibrio del mercado viene dado por $(p^*, q^*) = (14, 28)$. $\square$

4.2.2 Función cuadrática (la parábola)

La expresión analítica de la función cuadrática se corresponde con un polinomio de grado dos. Esto es,

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \quad a \neq 0.$$

El dominio es $\mathbb{R}$ y su gráfica es una parábola.

- Si $a > 0$ la parábola es convexa y tiene mínimo y si $a < 0$ es cóncava y tiene máximo. Según que el valor de a sea mayor o menor que uno, la parábola está menos o más abierta respectivamente.

- El máximo o mínimo de la parábola se alcanza en $x = -\frac{b}{2a}$, que también es eje de simetría de la parábola.

- Si $x = 0$ entonces $f(0) = c$, la parábola corta el eje vertical en $(0, c)$.

- Los puntos de corte con el eje OX (si los tiene) se obtienen resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y se obtienen mediante la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

  Dependiendo del signo del discriminante, $\triangle = b^2 - 4ac$, se tiene:

  - Si $\triangle < 0$, entonces, no hay raíces reales y la parábola no corta al eje horizontal.
  - Si $\triangle = 0$, entonces, $x = -\frac{b}{2a}$ es raíz doble y la parábola es tangente al eje horizontal.
  - Si $\triangle > 0$, entonces, hay dos raíces reales distintas y la parábola corta al eje horizontal en dos puntos.

Como ejemplos de casos particulares se tiene:

- $b = 0$, $y = ax^2 + c$: la parábola es simétrica respecto al eje vertical.

- $c = 0$, $y = ax^2 + bx$: la parábola corta al eje OX en $x = 0$ y $x = -b/a$.

- $b = c = 0$, $y = ax^2$: la parábola pasa por $(0, 0)$ y tiene el vértice en el origen.

La Figura 4.12 muestra diferentes gráficas de parábolas en función de los parámetros a, b y c para el caso en que $a > 0$ (superior) y $a < 0$ (inferior).

Ejemplo 4.8

Representar la función cuadrática $y = f(x) = x^2 + 4x - 12$.

Solución:

- Tenemos que $a = 1,\ b = 4,\ c = -12$, luego, puesto que $a > 0$, se trata de una parábola convexa, que alcanza el mínimo en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$, que a su vez es eje de simetría de la parábola.

- Corte con OY: Si $x = 0$, entonces $y = -12$. Luego el corte está en $(0, -12)$.

- Corte con OX: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \Longrightarrow x = 2,\ x = -6.$

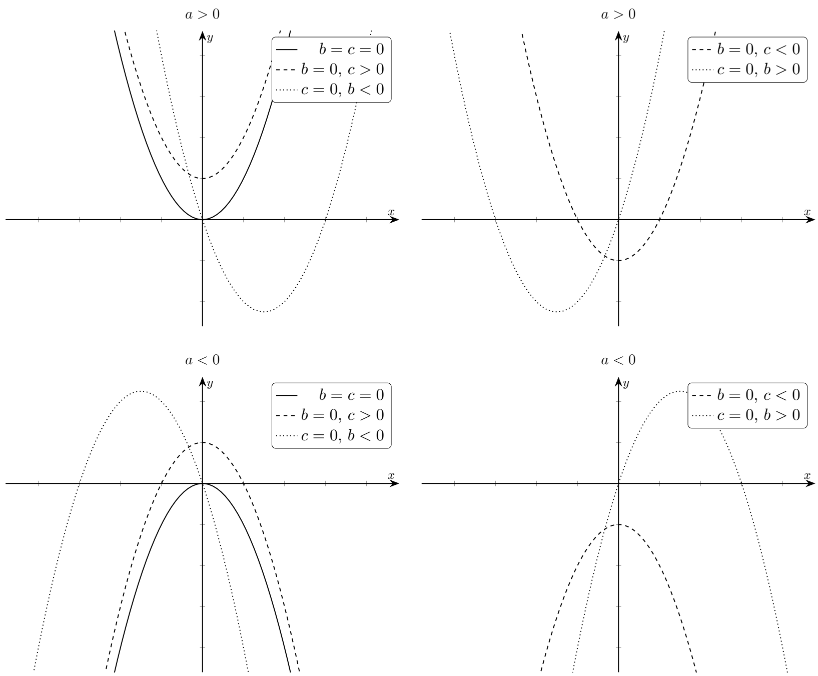


Figura 4.12: Diferentes tipos de parábolas según los parámetros b y c, caso $a > 0$ (superior) y $a < 0$ (inferior).

Su representación gráfica se muestra en la Figura 4.13. En ella se ha representado también la recta $x = -2$, que es el eje de simetría de la parábola.

$\square$

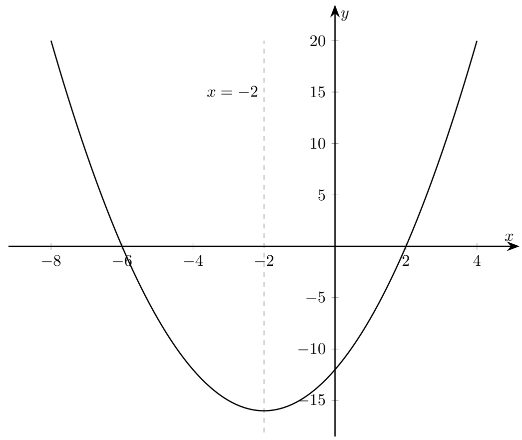


Figura 4.13: Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 12$.

Ejemplo 4.9

Dada una función de demanda lineal $p = f(q) = aq + b,\ a < 0$, la función de ingresos se define como $I(q) = pq = (aq + b)q$ que es una función cuadrática y cóncava ya que el coeficiente de q^2 es negativo. A un precio de $p = 200 - q$ euros una empresa vende q unidades de un producto mensualmente. Se pide, calcular el precio al que debe vender el producto para maximizar el ingreso mensual, así como el ingreso máximo mensual.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Ingreso } &= I(q) = \text{precio} \times \text{cantidad} = (200 - q)q \\ &= 200q - q^2,\end{aligned}$$

que es una parábola cóncava (el coeficiente de q^2 es negativo), con máximo en $q = -\frac{b}{2a} = \frac{-200}{2\cdot(-1)} = 100$; luego la cantidad que maximiza el ingreso es $q = 100$. El precio será $p = 200 - 100 = 100$ €, mientras que el ingreso máximo es $100 \times 100 = 10000$ €.

□

Ejercicios propuestos tipo test

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$, entonces su dominio es:

   a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$.

   b) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.

   c) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$.

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, entonces su dominio es:

   a) $\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: x<-1\}$.

   b) $\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -1\}$.

   c) $\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$.

3. Dadas las funciones $f(x)=(x+2)^2,\ \ g(x)=x^2-1$, entonces $(fg)(x)$ resulta:

   a) $x^4+4x^3+3x^2-4x-4$.

   b) $x^4-4x^3+3x^2+4x+4$.

   c) $x^4+4x^3-3x^2+4x-4$.

4. Dadas las funciones $f(x)=x^2+1,\ \ g(x)=x^2-1$, entonces $2f(x)-3g(x)$ es igual a:

a) $5 - x^2$. *b*) $5 - x^4$. *c*) $x^4 + 2x - 5$.

5. La ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ y tiene por pendiente -2 es:

   a) $y = -2x + \frac{5}{3}$. *b*) $y = -2x - \frac{7}{3}$.
   c) $y = -2x - \frac{5}{3}$.

6. La ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene por pendiente 4 es:

   a) $y = 4x + \frac{21}{10}$. *b*) $y = 4x + \frac{10}{21}$. *c*) $y = 4x - \frac{11}{10}$.

7. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(-3, 2)$ es:

   a) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. *b*) $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.
   c) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.

8. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $(0, 1)$ es:

   a) $y = x + \frac{1}{2}$. *b*) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. *c*) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

9. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-1)$ y paralela a la recta $3x-y=2$ es:

   a) $y=3x-4$. *b*) $y=3x+4$. *c*) $y=-3x-4$.

10. La ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y paralela a la recta $y=-\frac{4}{3}x+1$ es:

    a) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{6}$. *b*) $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{6}$.

    c) $y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{6}$.

11. La recta $y=2x+3$ corta a los ejes OX y OY, en los puntos respectivos:

    a) $(0,3)\,,\ \left(-\frac{3}{2},0\right)$. *b*) $\left(-\frac{3}{2},0\right),\ (0,3)$.

    c) $\left(\frac{3}{2},0\right),\ (0,3)$.

12. La recta $\frac{4}{3}(x-1)+3(y+2)=3$ corta a los ejes OX y OY, en los puntos respectivos:

    a) $\left(-\frac{5}{9},0\right),\ \left(0,-\frac{5}{4}\right)$. *b*) $\left(-\frac{5}{4},0\right),\ \left(0,-\frac{5}{9}\right)$.

    c) $\left(-\frac{11}{2},0\right),\ \left(0,\frac{11}{9}\right)$.

13. Las rectas $y = 5x - 1$, $y = -5x - 1$:

    $a)$ Son paralelas.

    $b)$ Se cortan en el punto $(-1, 0)$.

    $c)$ Se cortan en el punto $(0, -1)$.

14. Las rectas $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$:

    $a)$ Son paralelas.

    $b)$ Son coincidentes.

    $c)$ Se cortan en el punto $(-1, 0)$.

15. La recta $-2(x + 1) + 5(y - 3) - 2 = 0$:

    $a)$ Es creciente y la ordenada en el origen es $\dfrac{19}{5}$.

    $b)$ Es decreciente y la ordenada en el origen es $\dfrac{19}{5}$.

    $c)$ Es creciente y la ordenada en el origen es $-\dfrac{19}{5}$.

16. La recta $y - 4x = 1$:

    $a)$ Es decreciente y pasa por el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

    $b)$ Es creciente y pasa por el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

    $c)$ Es creciente y pasa por el origen de coordenadas.

17. Si las funciones de oferta y demanda son $q_{\text{o}} = 2p + 10$, $q_{\text{d}} = -\frac{3p}{2} + 45$, respectivamente, el equilibrio se alcanza para:

    $a)$ $p = \dfrac{50}{7},\ q = \dfrac{107}{17}$. $b)$ $p = 10,\ q = 30$.

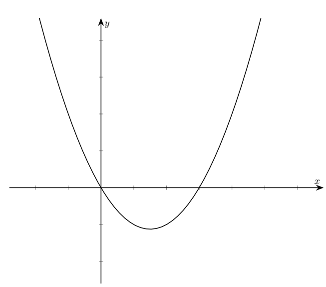
    $c)$ $p = 30,\ q = 10$.

18. Si las funciones de oferta y demanda son $q_{\text{o}} = \frac{3p}{2} + 485$, $q_{\text{d}} = -\frac{p}{2} + 505$, respectivamente, el equilibrio se alcanza para:

    $a)$ $p = 500,\ q = 10$. $b)$ $p = 10,\ q = 500$.

    $c)$ $p = 10,\ q = 50$.

19. Si la gráfica de una parábola es

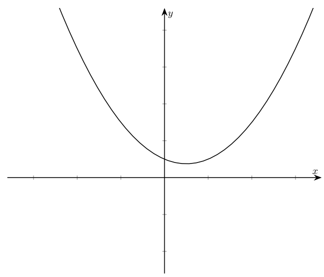


    entonces su expresión analítica sólo puede corresponder a:

$a)$ $y = x^2 + 3x$. $b)$ $y = x^2 - 3x + 2$.

$c)$ $y = x^2 - 3x$.

20. Si la gráfica de una parábola es

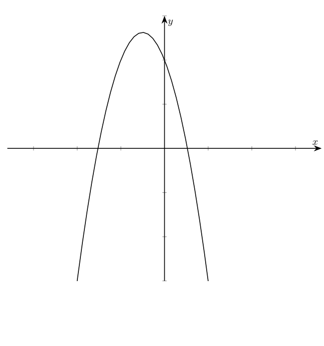


entonces su expresión analítica sólo puede corresponder a:

$a)$ $y = x^2 - x + 1$. $b)$ $y = x^2 - 3x$.

$c)$ $y = x^2 - 3x + 2$.

21. Si la gráfica de una parábola es

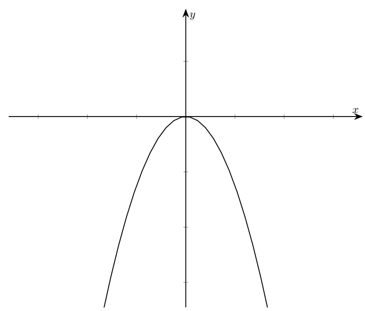


entonces su expresión analítica sólo puede corresponder a:

$a)$ $y = -x^2 + x$. $b)$ $y = -5x^2 - 5x + 4$.

$c)$ $y = -2x^2 + 2$.

22. Si la gráfica de una parábola es



entonces su expresión analítica sólo puede corresponder a:

$a)$ $y = 3x^2$.

$b)$ $y = -5x^2$.

$c)$ $y = -x^2 + 2x$.

23. La parábola $y = 4x^2 + 4x + 1$:

$a)$ Es convexa y corta dos veces al eje OX en $x = -\frac{1}{2}$.

$b)$ Es convexa y corta dos veces al eje OX en $x = \pm\frac{1}{2}$.

$c)$ Es cóncava y corta dos veces al eje OX en $x = \frac{1}{2}$.

24. La parábola $f(x) = x^2 - 3x$:

$a)$ Es convexa y tiene el vértice en el punto $\left(-\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

$b)$ Es cóncava y tiene el vértice en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

$c)$ Es convexa y tiene el vértice en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

25. La parábola $y = -x^2 + 3x - 10$:

$a)$ Es convexa y no corta al eje OX.

$b)$ Es cóncava y corta al eje OX en $x_1 = -1,\ x_2 = -8$.

$c)$ Es cóncava y no corta al eje OX.

CAPÍTULO 5

DERIVACIÓN

Una de las grandes áreas de estudio tratadas en los textos de Cálculo es el Cálculo Diferencial (cálculo de derivadas), que se ocupa del estudio de la variación que experimenta una cantidad y cuando se produce una variación sobre otra cantidad x, de la que depende la primera.

Históricamente, el cálculo de derivadas fue introducido durante el siglo XVII por Newton y Leibniz cuando se plantean calcular la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. Cuestiones que típicamente se han resuelto con estas técnicas son problemas de optimización, de razón de cambio y de cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

En Economía, el estudio de la variación en la demanda de un producto cuando se incrementa en una unidad monetaria su precio, la variación en el coste total como resultado de producir una unidad adicional, o la variación en el ahorro cuando se incrementa la renta y, en general, todo el análisis económico marginal y los problemas de optimización, utilizan como herramienta el cálculo de derivadas.

5.1 Derivabilidad. Cálculo y reglas

El problema de la derivada, como ya se ha señalado, surge porque se desea calcular la pendiente de la recta tangente t a la función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0. Esta pendiente medirá la inclinación de la curva $y = f(x)$ en x_0 y, por tanto, nos dará aproximadamente la variación de y ante variaciones de x.

Atendiendo a la Figura 5.1 se observa que esta pendiente puede calcularse como el límite de la pendiente de la recta secante s cuando h está próximo a cero. Esto es,

$$\text{Pendiente de } t \approx \text{pendiente de } s,$$

cuando el valor de h está cercano a cero.

Puesto que la pendiente de la recta s viene dada por

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se tiene que la pendiente de la recta tangente t será aproximadamente igual a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{5.1}$$

si h está próximo a cero.

Por definición, al cociente dado en (5.1), cuando h es aproximadamente cero, se le denomina derivada de la función $f(x)$ en $x = x_0$ y se expresa como $f'(x_0)$.

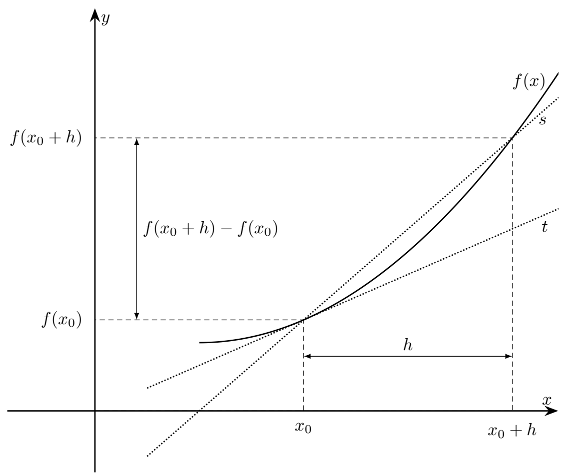


Figura 5.1: Interpretación geométrica de la derivada.

Otras notaciones usualmente empleadas para denotar la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 son las siguientes:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$$

Cuando una función $y = f(x)$ es derivable en todos los puntos de su dominio se dice que es derivable en el mismo.

Geométricamente, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en x_0. La ecuación de esta recta (véase la sección que viene a continuación) es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables y $c \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces, puede probarse a partir de la definición de la derivada las siguientes propiedades.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(c\,f)'(x) = c\,f'(x).$$

La primera expresión establece que la derivada de una suma (resta) de funciones es la suma (resta) de las derivadas de las funciones correspondientes. La segunda expresión señala que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

A continuación mostramos, sin demostrar, la derivada de las funciones elementales.

Derivadas de las funciones elementales

$y = k,\ k = \text{constante}$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = x$	$y = 1$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -1/x^2$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 5.1

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ y = x^4 - 2x^3 + 5x - 3.$ $\qquad b)\ y = 3x^2 + \dfrac{1}{x} - 6\sqrt{x} + 1.$

$c)\ y = x^7 - \dfrac{2}{x} + x + 10.$ $\qquad d)\ y = 2x^4 - 3x + 5.$

Solución: Utilizando las reglas del cálculo de derivadas así como las derivadas de las funciones elementales que aparecen en el cuadro anterior resulta lo siguiente:

$a)\ y' = 4x^3 - 6x^2 + 5.$ $\qquad b)\ y' = 6x - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}.$

$c)\ y' = 7x^6 + \dfrac{2}{x^2} + 1.$ $\qquad d)\ y' = 8x^3 - 3.$

□

Ejemplo 5.2

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$a)$ $y = -x^3 + x - 1$, en $x_0 = 0$.

$b)$ $y = x^2 + \frac{4}{x} + x + 10$, en $x_0 = 1$.

Solución: Utilizando de nuevo las reglas del cálculo de derivadas así como las derivadas de las funciones elementales que aparecen en el cuadro correspondiente resulta:

$a)$ $y' = -3x^2 + 1$. Por tanto $y'(0) = 1$.

$b)$ $y' = 2x - \frac{4}{x^2} + 1$. Entonces, $y'(1) = -1$.

$\square$

5.2 Recta tangente a una función dada

Ya se comentó en la sección anterior que la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_0. La ecuación de esta recta, como se estudió en el capítulo anterior, es $y = ax + b$. Ahora bien, como ya se vio, el parámetro a, la pendiente de la recta, coincide con $f'(x_0)$. Luego la recta tangente tendrá por ecuación

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \tag{5.2}$$

Forzando a esta recta a pasar por el punto $(x_0, f(x_0))$ resulta

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

y despejando de esta última ecuación el parámetro b se obtiene $b = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$, que reemplazado en (5.2) proporciona la expresión dada por

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5.3}$$

En los siguientes ejercicios se estudiará cómo calcular dicha recta tangente.

Ejemplo 5.3

Calcular la recta tangente a la función $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $x = 5$. Representar la función así como la recta tangente calculada.

Solución: Se tiene que $f'(x) = 2x - 3$, y por tanto $f'(5) = 7$. Por otro lado, $f(5) = 12$, luego utilizando la expresión dada en

(5.3) se obtiene,

$$y = 7(x - 5) + 12.$$

Luego, la recta pedida es $y = 7x - 23$. Ambas funciones aparecen representadas en la Figura 5.2. $\square$

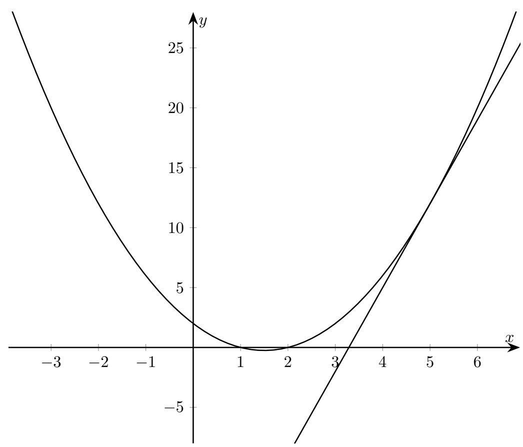


Figura 5.2: Gráfica de la función (parábola) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y la tangente, $y = 7x - 23$, a la misma en $x = 5$.

Ejemplo 5.4

Calcular la recta tangente a la función

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} - 2$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: La recta tangente a $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} - 2$ en $x = 1$ tiene pendiente dada por $f'(1)$. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 4x^3 + 6x + \frac{1}{x^2}$, que sustituída en $x = 1$ da $f'(1) = 11$. La recta pedida, utilizando (5.3) es, por tanto,

$$y = 11(x - 1) + 1 = 11x - 10,$$

ya que $f(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{1} - 2 = 1$. □

Ejemplo 5.5

Dadas las funciones del ejemplo 5.2 calcular la recta tangente a cada una de ellas en los puntos considerados.

Solución: Utilizaremos en todos los casos la expresión dada en (5.3).

$a)$ Se tiene que $f(0) = -1$ y $f'(0) = 1$. Luego, utilizando (5.3) resulta,

$$y = 1(x - 0) - 1 = x - 1.$$

b) Ahora $f(1) = 16$ y $f'(1) = -1$ y usando de nuevo (5.3) resulta,

$$y = -1(x - 1) + 16 = -x + 17.$$

□

NOTA HISTÓRICA

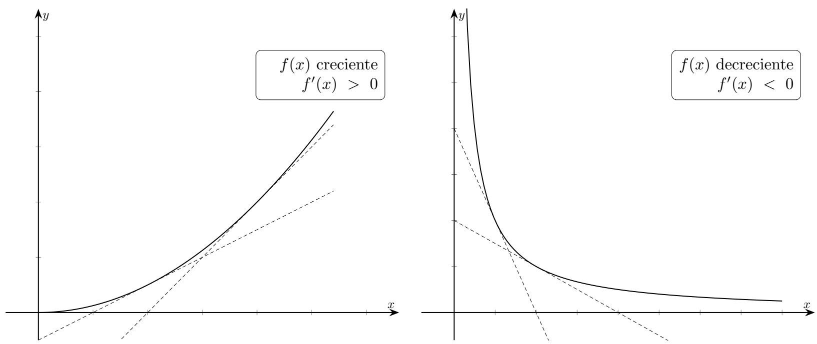
Probablemente la mayor creación matemática de toda la historia corresponda a lo que Newton denominó fluxiones, y que hoy en día se le conoce como derivada. Sin embargo Newton eligió guardar su descubrimiento y no lo difundió, dando origen a una disputa acerca de la invención del cálculo diferencial que al mismo tiempo estaba trabajando Leibniz. Se debe a este último la introducción de la notación actualmente empleada para la derivada de una función $y = f(x)$, $y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Si bien, los problemas que dieron origen al cálculo diferencial tienen sus antecedentes en la época clásica de la antigua Grecia (siglo III a.c), con conceptos de tipo geométrico, como el problema de la tangente a una curva, los métodos sistemáticos de la resolución de estos problemas no aparecieron hasta el siglo XVII con los trabajos de de Isaac Newton y Gottfried Leibniz, entre otros.

5.3 Aplicaciones de la derivada al estudio local de funciones

Es esta sección veremos que la derivada se muestra como una poderosa herramienta que permite estudiar la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de una función.

Obsérvese, a partir de la Figura 5.3 donde se representa una función $f(x)$ derivable, que las regiones de crecimiento de la función se corresponden con el signo positivo de su derivada, es decir sus tangentes tienen pendiente positiva. Por otro lado, las regiones de decrecimiento de la función se corresponden con aquéllas en las que el signo de su derivada es negativo (sus tangentes tienen pendiente negativa). Como consecuencia de lo comentado es evidente que, dada una función $y = f(x)$ derivable, y $x^* \in (a, b)$ un máximo o mínimo local de $f(x)$, necesariamente tendrá que cumplirse $f'(x^*) = 0$, ya que en este punto la función pasa de creciente a decreciente o viceversa, por lo que $f'(x)$ cambiará de signo.

En definitiva, se tiene lo que se comenta en el siguiente resultado.



(a) $f(x)$ creciente, $f'(x) > 0$ (b) $f(x)$ decreciente, $f'(x) < 0$

Figura 5.3: Regiones donde la derivada de $y = f(x)$ tiene el mismo signo.

Resultados sobre monotonía

Sea $y = f(x)$ una función derivable:

- Si $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).
- Si $f(x)$ tiene un extremo local (máximo o mínimo) en x^*, entonces $f'(x^*) = 0$.

El recíproco de este resultado no es cierto. Una función puede admitir un punto x_0 con la derivada nula, o sea, $f'(x_0) = 0$, y, sin embargo, este punto no ser ni máximo ni mínimo local de f. Seguidamente se presenta un ejemplo que ilustra esta afirmación.

Ejemplo 5.6

Sea la función $f(x) = x^3$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2$. El punto $x_0 = 0$, que anula la primera derivada, no es ni máximo ni mínimo local de f, como puede apreciarse a partir de su gráfica que se muestra en la Figura 5.4.

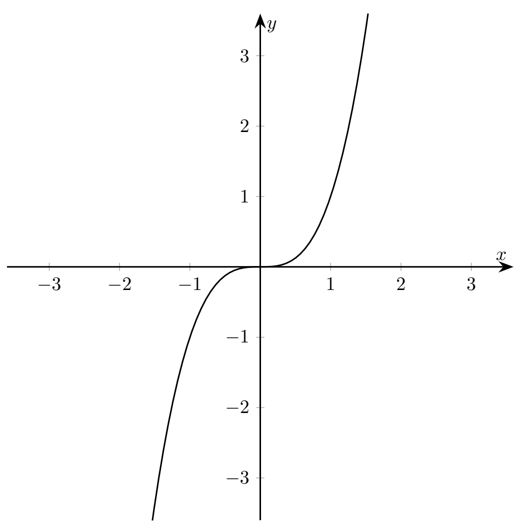


Figura 5.4: Gráfica de la función $f(x) = x^3$.

No obstante, si una función $f(x)$ es derivable, los máximos y mínimos de esta función se encuentran entre todos los puntos que anulan la primera derivada. Al conjunto de puntos que anulan la primera derivada de una función $f(x)$ se les llama puntos críticos de $f(x)$.

Ejemplo 5.7

Estudiar la monotonía de la función

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5x^2}{2} - 3x + 2,$$

y dar los extremos locales, si los tiene.

Solución: Sobre el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función nos proporciona la información la derivada de la misma. En este caso tenemos, $f'(x) = 2x^2 - 5x - 3$, que es cero cuando

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

Por tanto, se obtiene $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$. Evaluando el signo de la derivada, por ejemplo en $x = 0$, se desprende el signo que toma la derivada en los tres intervalos en que queda dividida la recta. Véase la Figura 5.5.

En ella se deduce que la derivada, $f'(x)$, es positiva en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-\frac{1}{2}, 3)$. Por tanto $f(x)$

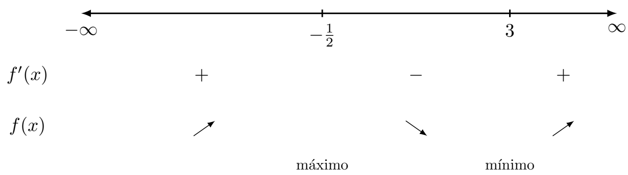


Figura 5.5: Gráfico correspondiente al ejemplo 5.7

es creciente en $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-\frac{1}{2}, 3)$, presentando un máximo local en $x = -\frac{1}{2}$ y un mínimo local en $x = 3$. $\square$

Ejemplo 5.8

Calcular los puntos críticos de la función

$$f(x) = 12x^5 - 75x^4 + 120x^3 + 10$$

y estudiar la monotonía.

Solución: Tenemos que $f'(x) = 60x^2(x^2 - 5x + 6) = 0$ si $x = 0$ (raíz doble), $x = 2$ y $x = 3$, que son los puntos críticos.

Evaluando el signo de la derivada, por ejemplo en $x = 1$ se desprende el signo que toma la derivada en los cuatro intervalos en que queda dividida la recta. Recuérdese que una raíz doble (multiplicidad par) no genera cambio de signo, de ahí que a la izquierda y derecha de $x = 0$ el signo no cambie. Esto se observa en la Figura 5.6.

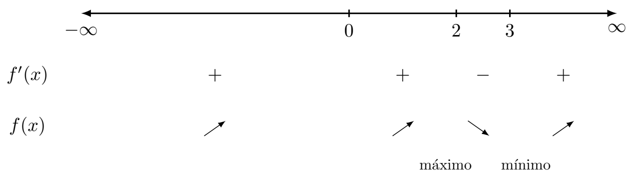


Figura 5.6: Gráfico correspondiente al ejemplo 5.8

En ella se deduce que la derivada, $f'(x)$, es positiva en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$, donde la función es creciente y negativa en $(2, 3)$, en el que es decreciente. La función tiene un máximo local en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 3$. $\square$

Obsérvese a partir de los ejemplos anteriores que el estudio de los máximos y mínimos de una función se deduce a partir del estudio de las regiones de crecimiento y decrecimiento de la misma. En el caso que la función sea derivable en todos los puntos de un dominio abierto, los máximos y mínimos serán localizados a partir de los cambios de monotonía en los puntos críticos.

Por otro lado, si existen puntos del dominio donde la función no es derivable, éstos han de considerarse como puntos donde es posible que la monotonía cambie, por lo que pueden ser máximos o mínimos (como puede observarse en la Figura 5.7).

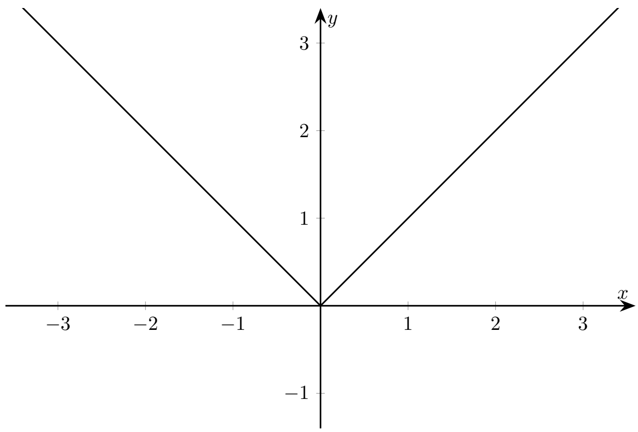


Figura 5.7: La función $f(x)$ tiene en $x = 0$ un mínimo (local y global) aunque la función no sea derivable en ese punto.

5.4 Aplicaciones de la derivada a la Economía

Dada una función de naturaleza económica, como por ejemplo la función de demanda, de ingresos o de costes, cuando se realiza la derivada de la misma se le suele poner el calificativo de marginal. Así, por ejemplo, dadas las funciones de ingreso $I(x)$, coste $C(x)$ y beneficios $B(x)$, sus derivadas, $I'(x)$, $C'(x)$ y $B'(x)$, se les denomina ingreso marginal, coste marginal y beneficio marginal, respectivamente. La interpretación económica que admite estas últimas funciones es la siguiente:

- Ingreso marginal, $I'(x)$ refleja aproximadamente el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de producto.
- Coste marginal, $C'(x)$ refleja aproximadamente el coste adicional necesario para producir una unidad más de producto.
- Beneficio marginal, $B'(x)$ refleja aproximadamente el beneficio adicional que se consigue al producir y vender una unidad más de producto.

Ejemplo 5.9

A un precio de p euros una empresa vende $q = 30 - 2p$ unidades de un producto mensualmente. Se pide, calcular el precio al que debe vender el producto para maximizar el ingreso mensual y el ingreso máximo mensual.

Solución: La función de ingresos será $I(q) = (30 - 2p)p = -2p^2 + 30p$, cuya derivada es $I'(p) = -4p + 30$. Esta función se anula en $p = 15/2$, que corresponde, como es fácil deducir, a un máximo. La cantidad a vender será $q = 30 - 2 \cdot \frac{15}{2} = 15$ unidades.

Por último, el ingreso máximo vendrá dado por $I(15/2) = \frac{15}{2} \cdot 15 = 112.5$ €. $\square$

Ejemplo 5.10

Las funciones de ingresos y costes mensuales por la fabricación y venta de q unidades de un producto vienen dadas por

$$I(q) = -\frac{5q^2}{2} + 20,$$
$$C(q) = -3q + \frac{2q^3}{3}.$$

Se pide:

$a)$ Hallar las funciones de ingresos y costes marginales.

$b)$ Averiguar cuál es el ingreso marginal y el coste marginal para $q = 2$.

$c)$ Hallar la función de beneficio mensual.

$d)$ Averiguar cuántas unidades hay que producir y vender para maximizar el beneficio.

$e)$ ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución: Procedemos como sigue:

a) Derivando se obtiene las funciones pedidas. Esto es,

$$I'(q) = -5q,$$
$$C'(q) = -3 + 2q^2.$$

b) En este caso obtenemos $I'(2) = -10$, $C'(2) = 5$.

c) La función de beneficios se obtiene como

$$B(q) = I(q) - C(q) = -\frac{5q^2}{2} + 20 - \frac{2q^3}{3} + 3q.$$

d) Derivando la función de beneficios obtenemos,

$$B'(q) = -2q^2 - 5q + 3.$$

Puesto que $B'(q) = 0$ si $q = \frac{1}{2}$ y $q = -3$, tenemos que el beneficio marginal es cero cuando $q = \frac{1}{2}$ ya que no tiene sentido económico una cantidad negativa. Finalmente, estudiando el signo de $B'(q)$, se obtiene que $q = \frac{1}{2}$ es un máximo local. Luego, habrá que producir y vender 0.5 unidades del producto.

e) El valor del beneficio máximo resulta $B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{499}{24} = 20.7917$ unidades monetarias.

$\square$

Ejercicios propuestos tipo test

1. La derivada de la función $y = x^2 + x^3$ es:

   $a)$ $y' = 2x + 3$.

   $b)$ $y' = 3x^3 + 2x^2$.

   $c)$ $y' = x(3x + 2)$.

2. La derivada de la función $y = x^2 + x^3$ en $x = -1$, esto es $y'(-1)$, es:

   $a)$ 1. $b)$ 2. $c)$ -1.

3. La derivada de la función $y = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{9}x^3 - 5$ es:

   $a)$ $y' = 24x^2 - 2x + \frac{1}{3}x^2 - 5$.

   $b)$ $y' = 24x^2 - 2x + 3x^2$.

   $c)$ $y' = 24x^2 - 2x + \frac{1}{3}x^2$.

4. Si $y = 8x^3 - x^2 + \dfrac{1}{9}x^3 - 5$, entonces $y'\left(\frac{1}{2}\right)$ es igual a:

   $a)$ $\dfrac{61}{2}$. $b)$ $\dfrac{61}{12}$. $c)$ $-\dfrac{23}{4}$.

5. La derivada de la función $y = 5x - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x} - 2$ es:

   a) $y' = 3 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

   b) $y' = 5 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   c) $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

6. Si $y = 5x - \dfrac{1}{x} + 4\sqrt{x} - 2$, entonces $y'(4)$ es igual a:

   a) $\dfrac{97}{6}$. *b*) $\dfrac{95}{16}$. *c*) $\dfrac{97}{16}$.

7. La derivada de $y = x^4 + \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{2}{x^2} + 5x - \sqrt{x} + 9$ es:

   a) $y' = 4x^3 + \dfrac{4}{x^3} + 2x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 5$.

   b) $y' = 4x^3 + \dfrac{4}{x^3} + 2x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 5$.

   c) $y' = 4x^3 - \dfrac{4}{x^3} + 2x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 9$.

8. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + 2$ en $x = -1$ es:

   a) $y = -2x + 1$. *b*) $y = -2x - 2$. *c*) $y = 3x - 2$.

9. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ en $x = \frac{1}{2}$ es:

   a) $y = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

   b) $y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

   c) $y = -\dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

10. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ en $x = 1$ es:

    a) $y = 4 - 8x$. *b*) $y = 8x - 4$. *c*) $y = 8x - 1$.

11. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$ es:

    a) $y = 3x - \dfrac{15}{4}$. *b*) $y = \dfrac{15}{4}x - 3$. *c*) $y = \frac{15}{4}x - \dfrac{39}{4}$.

12. La función $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + 4x^2 - 3x + \dfrac{4}{5}$ es:

    a) Creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

    b) Decreciente en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

    c) Creciente en $(-3, 1)$.

13. La función $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + 4x^2 - 3x + \dfrac{4}{5}$ tiene:

    a) Un mínimo local en $x = -3$ y un máximo local en $x = 1$.

    b) Dos mínimos locales en $x = -3$ y $x = 1$.

    c) Un máximo local en $x = -3$ y un mínimo local en $x = 1$.

14. La función $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ tiene un máximo local en:

    a) $x = -1$. *b*) $x = 5$. *c*) $x = \dfrac{2}{3}$.

15. La función $f(x) = -3x^5 + 2$:

    a) Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

    b) Es creciente en su dominio.

    c) Es decreciente en su dominio.

16. La función $f(x) = x^3 + 1$:

    a) Tiene un mínimo local en $x = 0$.

b) No tiene máximos ni mínimos locales.

c) Tiene un máximo local en $x = 0$.

17. La función $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 12x - 1$:

    a) Es decreciente en $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$ y tiene un máximo en $x = -3$.

    b) Es decreciente en $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$ y tiene un mínimo en $x = -3$.

    c) Es decreciente en $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ y tiene un máximo en $x = -3$.

18. La función $f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 30x - 10$ es:

    a) Creciente en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ y tiene un máximo en $x = 5$.

    b) Creciente en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ y tiene un mínimo en $x = 5$.

    c) Creciente en $(-1, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 5$.

19. La función de beneficios mensuales por la fabricación y venta de q unidades de un producto viene dada por

$$B(q) = -\frac{q^3}{3} + \frac{3q^2}{2} + 10q - 40,$$

medida en unidades monetarias (u.m.). Entonces la cantidad q que maximiza los beneficios, así como el beneficio máximo vienen dados por:

$a)$ $q = 5$, beneficio máximo igual a $\frac{35}{6}$ u.m.

$b)$ $q = \frac{35}{6}$, beneficio máximo igual a 5 u.m.

$c)$ $q = 5$, beneficio máximo igual a $\frac{50}{3}$ u.m.

20. Sean las funciones de ingresos y de costes $I(q) = 2q^2 - q$, $C(q) = 2q^3 + 5q + 400$, respectivamente. Entonces, los ingresos y costes marginales cuando la cantidad vendida es $q = 2$, son respectivamente:

$a)$ 29 y 7. $b)$ 7 y 14. $c)$ 7 y 29.

21. La demanda de un producto en una empresa es función del precio de venta de ese producto. A un precio de p euros la empresa vende una cantidad de $q = 30 - 2p$ unidades de ese producto al día. Entonces, el precio al que debe vender

el producto para maximizar los ingresos, así como el ingreso máximo vienen dados por:

$a)$ $p = 112.5$ €, Ingreso $= 7.5$ €.

$b)$ $p = 7.5$ €, Ingreso $= 112.5$ €.

$c)$ $p = 7$ €, Ingreso $= 112.5$ €.

22. La función de costes mensuales por la fabricación y venta de q unidades de un determinado producto viene dada por

$$C(q) = \frac{q^3}{3} - 25q + 280.$$

Entonces, la cantidad que hay que producir y vender para que el coste mensual sea mínimo así como el coste mínimo vienen dados, respectivamente por.

$a)$ $q = 5$, Coste $= 196.667$.

$b)$ $q = 5$, Coste $= 195.5$.

$c)$ $q = 3$, Coste $= 196.667$.

23. La demanda diaria de viajeros de una compañía aérea está en función del precio de venta del trayecto estrella que oferta. La función de demanda viene dada por $p = 18 - \frac{3}{2}q$,

donde p es el precio (en euros) y q la cantidad de viajeros que transporta al día (en miles). La función de costes total de la empresa viene dada por

$$C(q) = \frac{q^3}{3} - 1000.$$

Entonces, el precio (en euros) al que debería vender el trayecto estrella para maximizar el beneficio, así como el beneficio diario vienen dados, respectivamente, por:

a) $p = 13.5$ €, Beneficio máximo $= 1031.5$ €.

b) $p = 3$ €, Beneficio máximo $= 1000$ €.

c) $p = 13.5$ €, Beneficio máximo $= 10310.5$ €.

24. La demanda semanal de una empresa viene dada por la función $p = \frac{1}{2}(1-q)$, donde q son las unidades demandadas de un producto. Entonces, la cantidad que maximiza el ingreso semanal así como dicho ingreso máximo semanal, medido en u.m., vienen dados por:

a) $q = \dfrac{1}{2}$ unidades, Ingreso máximo $= \dfrac{1}{8}$ u.m.

b) $q = 1$ unidad, Ingreso máximo $= 0$ u.m.

c) $q = \dfrac{1}{2}$ unidades, Ingreso máximo $= 8$ u.m.

25. A un precio de p euros una empresa vende $q = 100 - 2p$ unidades de un producto mensualmente. Entonces, el precio al que debe vender el producto para maximizar el ingreso mensual y el ingreso máximo mensual es, respectivamente:

    $a)$ $p = 1250$ €, Ingreso máximo $= 25$ €.

    $b)$ $p = 25$ €, Ingreso máximo $= 1250$ €.

    $c)$ $p = 25$ €, Ingreso máximo $= 50$ €.

CAPÍTULO 6

Introducción a la estadística

Del estudio de los fenómenos aleatorios se ocupa la parte de las matemáticas que se denomina Estadística. Esta disciplina a su vez aparece dividida en tres grandes bloques denominados Estadística Descriptiva, Cálculo de Probabilidades y Estadística Inferencial. De las dos primeras nos ocupamos brevemente en este último capítulo.

La Estadística, conocida también como la Ciencia de los datos, es la parte de las Matemáticas que describe y estudia los datos, que pueden tener procedencias diversas, datos económicos, biológicos, médicos, actuariales, etc. Básicamente esta disciplina se ocupa del tratamiento de los datos para, después de analizarlos e interpretarlos, tratar de predecir resultados futuros que ayuden al investigador en la toma de decisiones óptimas.

Por su parte, la probabilidad trata de modelizar los fenómenos del azar. El desarrollo del cálculo matemático de los fenómenos aleatorios comenzó en los siglos XVI y XVII cuando Fermat y Pascal tratan de resolver problemas relacionados con los juegos de mesa, como los juegos de cartas, relacionados con el azar.

En la actualidad la teoría de la probabilidad proporciona herramientas a la Estadística Descriptiva y constituye la base de las aplicaciones estadística que tiene, entre otras, una importancia fundamental en la toma de decisiones.

6.1 Estadística descriptiva

La Estadística descriptiva se ocupa del tratamiento de datos relacionados con todo tipo de fenómenos, los colecciona, los analiza e interpreta, tratando de predecir resultados futuros para la toma óptima de decisiones. Una vez recogidos los datos es posible hacerse una idea de los resultados a partir de una tabla estadística. En ella se ordenan los valores observados en orden creciente y acompañados de sus respectivas frecuencias (el número de veces que se repite). La variable observada es la característica que se desea estudiar: altura de un determinado grupo de personas, número de varones en familias con más de un hijo, peso de un determinado grupo de personas, salario de un grupo de trabajadores, etc. Así, si la variable observada X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la tabla estadística correspondiente a estos datos se muestra en la Tabla 6.1. donde f_1 es el número de veces que se repite el dato x_1, f_2 es

Tabla 6.1: Tabla de frecuencias

Variable observada	Frecuencia
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n
	Total $= \sum_{i=1}^{n} f_i = N$

el número de veces que se repite el dato x_2, etc. El símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ se lee sumatorio desde i igual a 1 hasta n, y se usa para indicar una suma que consta de n sumandos, siendo n un número natural. Estos datos pueden resultar en ocasiones más ilustrativos mediante una representación gráfica. Algunos de ellos son el diagrama de barras y el diagrama de sectores. En el siguiente ejemplo se muestran estos dos tipos de gráficos.

Ejemplo 6.1

La Tabla 6.2 muestra la distribución de las rentas en euros percibidas por las 20 personas que trabajan en una empresa de transporte.

Tabla 6.2: Rentas percibidas por 20 trabajadores en una empresa de transporte

Rentas (en €)	750	800	900	1200
Número de trabajadores	6	7	4	3

Puede observarse que hay 6 trabajadores que perciben 750 €, 7 trabajadores que perciben 800 €, 4 trabajadores que perciben 900 € y 3 trabajadores que perciben 1200 €. A partir de dicha Tabla podemos configurar la siguiente Tabla de frecuencias absolutas y relativas (Tabla 6.3),

Obsérvese que la columna porcentaje se ha obtenido de la columna anterior multiplicando por 100. En la Figura 6.1 se muestra el diagrama de barras o de rectángulos correspondiente a esos datos. Consiste este diagrama en representar las distintas modalidades (rentas en este caso) en el eje de abscisas y dibujar sobre cada una de las modalidades un rectángulo cuya altura sea igual a la correspondiente frecuencia absoluta o relativa.

Tabla 6.3: Tabla de frecuencias

Variable observada	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
750	6	$6/20 = 0.30$	30%
800	7	$7/20 = 0.35$	35%
900	4	$4/20 = 0.20$	20%
1200	3	$3/20 = 0.15$	15%
	$N = 20$	Total $= 1$	Total $= 100\%$

Por otro lado, la Figura 6.2 muestra el diagrama de sectores de los datos. En este diagrama se representa sobre un círculo las diferentes modalidades (rentas) en diversos sectores con un área proporcional a la correspondiente frecuencia absoluta o relativa.

6.2 Medidas de centralización

Las medidas de centralización, también llamadas medidas de tendencia central, tratan de resumir los datos recogidos en unos pocos números que nos proporcionen una idea del comportamiento de todos los datos recogidos. Son:

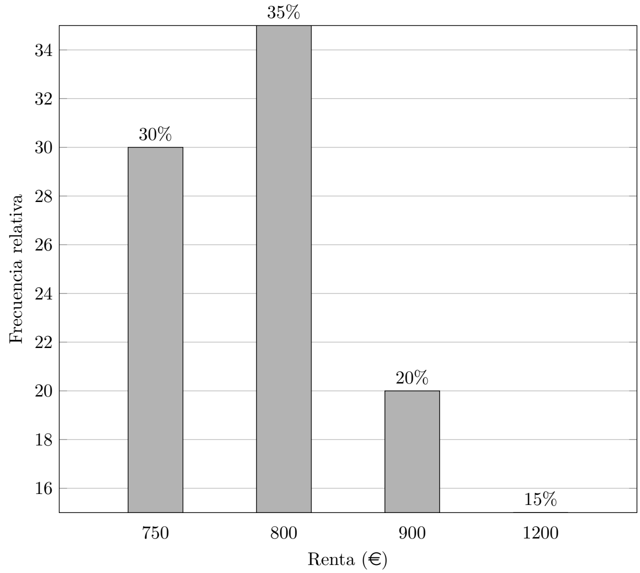


Figura 6.1: Diagrama de barras correspondiente al ejemplo 6.1

- Media, denotada por $\bar{x}$, es la medida central más utilizada como representante de los datos recogidos. Se calcula utilizando la expresión,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}. \qquad (6.1)$$

- Moda es el valor o valores que presenta mayor frecuencia.

- Mediana es el valor que ocupa el lugar central, si hay un número impar de datos, o la media de los valores intermedios, si el número de datos es par. De un modo más preciso,

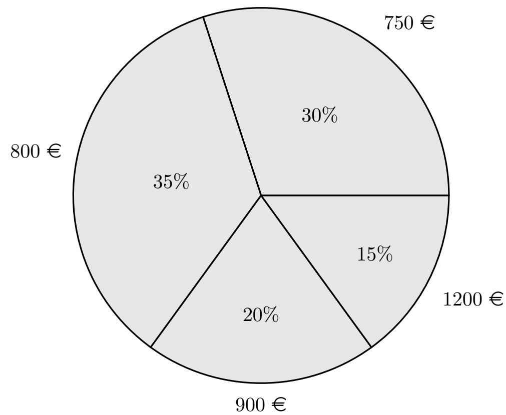


Figura 6.2: Diagrama de sectores correspondiente al ejemplo 6.1

la mediana es aquel valor que deja por debajo de sí y por encima de sí el 50% de las observaciones.

Ejemplo 6.2

Calcular la media, mediana, moda para los datos del ejemplo 6.1.

Solución: Disponemos los datos como se muestra en la Tabla 6.4 y aplicamos la expresión dada en (6.1).

Luego, la media viene dada por

$$\bar{x} = \frac{17300}{20} = 865\,€.$$

Luego, el salario medio de los trabajadores es de 865 €. La moda corresponden al dato con mayor frecuencia, que es 7. Luego

Tabla 6.4: Tabla de frecuencias

Variable observada, x	Frecuencia absoluta, f	$x \cdot f$
750	6	4500
800	7	5600
900	4	3600
1200	3	3600
	$N = 20$	Total $= 17300$

la moda es 800 €, que es por tanto el salario más frecuente entre los 20 trabajadores.

Finalmente, ordenando los datos de menor a mayor tenemos que puesto que existe un número par de datos quedan dos en el centro que corresponden a 800 y 800. Luego la mediana es la semisuma de estos dos valores, $\frac{800+800}{2} = 800$ €. Este valor nos indica que un 50% de los trabajadores perciben salarios por encima de 800 € y otro 50% por debajo. $\square$

6.3 Medidas de dispersión

Cuando los datos están muy concentrados alrededor de la media se dice entonces que la media es una medida representativa de los datos. Sin embargo, si los valores están muy dispersos, la media es poco representativa.

Por ejemplo, supongamos que disponemos de dos conjuntos de datos relativos a las notas obtenidas en cinco controles por un alumno en el primer y segundo cuatrimestre en la asignatura de Matemáticas, que son los siguientes:

Tabla 6.5: Notas en dos cuatrimestres

Primer cuatrimestre	2	6	8	7	2
Segundo cuatrimestre	1.1	6.5	6.2	6.1	5.1

Es fácil calcular la nota media obtenida en ambos cuatrimestres, que resulta 5. Está claro que aunque la media sea igual para ambos cuatrimestres la evolución del alumno no ha sido la misma. Parece que en el segundo cuatrimestre su evolución ha sido más homogénea que en el primer cuatrimestre, donde salta a la vista que los datos están muy dispersos. Necesitamos, pues, de una medida que nos indique el grado de dispersión de los datos en relación a la media. Dos medidas de esta naturaleza que estudiaremos son la varianza y la desviación típica, que pasamos a exponer a continuación.

- Varianza, denotada como σ^2, es la media de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media. Se calcula como,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 f_i \\ &= \frac{1}{N}\left[(x_1-\bar{x})^2 f_1+\cdots+(x_n-\bar{x})^2 f_n\right], \qquad (6.2)\end{aligned}$$

  donde σ se ha de leer como ”sigma”. Obsérvese que tal y como está definida la varianza esta siempre es una cantidad positiva. Un valor de la varianza cercano a cero indicaría que todos los datos están agrupados en torno a la media mientras que un valor elevado señalaría una alta dispersión de los mismos.

  En la práctica resulta muchísimo más fácil obtenerla a partir de la expresión,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - \bar{x}^2,$$

  que puede comprobarse que es equivalente a la expresión (6.2).

- Desviación típica es la raíz cuadrado positiva de la varianza. Esto es, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Ejemplo 6.3

Calcular las dos medidas de dispersión estudiadas para los datos del ejemplo 6.1.

Solución: Ampliamos la Tabla 6.4 en la forma que se muestra en la Tabla 6.6. Utilizando la expresión (6.2) se tiene que la varianza viene dada por,

Tabla 6.6: Tabla de frecuencias

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
750	6	4500	3375000
800	7	5600	4480000
900	4	3600	3240000
1200	3	3600	4320000
	$N = 20$	Total $= 17300$	Total $= 15415000$

$$\sigma^2 = \frac{15415000}{20} - 865^2 = 22525.$$

La desviación típica resulta $\sigma = \sqrt{22525} = 150.083$. Como se aprecia, los datos de la renta en esta empresa tienen una varianza bastante alta lo que señala una elevada dispersión de la misma. $\square$

6.4 Coeficiente de variación

Nos planteamos ahora si tiene sentido usar magnitudes, de centralización y dispersión, para comparar dos variables diferentes. Supongamos que pretendemos comparar la altura de los alumnos de una clase con el peso de los mismos. Tanto la media como la desviación típica se expresan en las mismas unidades que la variable. Por ejemplo, en la variable altura podemos usar como unidad de longitud el metro y en la variable peso, el kilogramo. Comparar una desviación (con respecto a la media) medida en metros con otra en kilogramos no tiene ningún sentido. El coeficiente de variación permite evitar estos problemas, pues elimina la dimensionalidad de los datos y tiene en cuenta la proporción existente entre medias y desviación típica. Suele representarse por medio de las siglas C.V., y viene dado por:

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

Uno de sus usos más comunes consiste en expresar la desviación estándar como porcentaje de la media aritmética, mostrando una mejor interpretación porcentual del grado de variabilidad de los datos. A mayor valor de C.V. mayor dispersión de los datos; y a menor C.V., menor dispersión y, por tanto, mayor homogeneidad en los mismos. Se puede expresar por tanto en porcentaje, calculando entonces como,

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%.$$

Ejemplo 6.4

Calcular el coeficiente de variación para los datos del ejemplo 6.1.

Solución: Se obtiene de forma inmediata,

$$\text{C.V.} = \frac{150.083}{865}\% = 17.35\%.$$

□

6.5 Introducción a la probabilidad

Se denominan sucesos o experimentos aleatorios o estocásticos aquéllos en los que repitiéndose en las mismas condiciones cuantas veces se quiera pueden presentar resultados distintos, no pudiendo con seguridad asegurarse el resultado que se obtendrá. Por otro lado, un experimento es determinista si se sabe con certeza el resultado que se obtendrá al llevarlo a cabo.

Son ejemplos de experimentos aleatorios el lanzamiento de un dado o de una moneda. Por contra, un objeto seguro que cae si no hay nada que lo soporte, tratándose éste de un experimento determinista.

La probabilidad se ocupa de medir o cuantificar la incertidumbre que se tiene sobre el resultado de un experimento aleatorio. Son ejemplos de experimentos aleatorios, el lanzamiento de un dado no trucado, la extracción de cartas de una baraja, el resultado de una lotería, etc.

Las siguientes definiciones resultan fundamentales en el desarrollo del cálculo de probabilidades.

$a)$ Se denomina espacio muestral al conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio, usualmente denotado mediante S.

$b)$ Se denomina suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral, usualmente denotados mediante letras mayúsculas. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado son sucesos ”obtener número par”, ”obtener número impar”, ”obtener un número mayor que 3”, etc.

$c)$ Se denomina suceso seguro al que siempre ocurre al realizar el experimento aleatorio. Por ejemplo, es seguro que al lanzar una moneda al aire se obtendrá una cara o una cruz, o bien que al lanzar un dado se obtendrá un número menor que 7.

$d)$ Suceso imposible al que nunca ocurre. Suele denotarse este último mediante $\emptyset$ (conjunto vacío). Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda una vez es imposible que se obtengan dos caras, o en el lanzamiento de un dado que pueda obtenerse un 9.

En el siguiente ejemplo se ilustran todos los conceptos introducidos anteriormente.

Ejemplo 6.5

Se lanza una moneda tres veces, se pide:

$a)$ Escribir el espacio muestral y dar el número de elementos que lo componen.

$b)$ Escribir los sucesos

$$A = \{\text{obtener tres caras}\},$$
$$B = \{\text{obtener tres cruces}\},$$
$$C = \{\text{obtener dos o más cruces consecutivas}\}$$

y dar el número de elemenos que lo componen.

Solución:

$a)$ Denotando por c y x los eventos cara y cruz, respectivamente, es claro que el espacio muestral vendrá dado por

$$\begin{aligned} S = \{&(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(c,x,x),\\ &(x,c,c),(x,c,x),(x,x,c),(x,x,x)\}, \end{aligned}$$

que se compone de 8 elementos, esto es $n = 8$.

$b)$ En este caso se tiene,

$$A = \{(c,c,c)\}, \quad \text{que tiene 1 elemento},$$
$$B = \{(x,x,x)\}, \quad \text{que tiene 1 elemento},$$
$$C = \{(c,x,x),(x,x,c),(x,x,x)\}, \quad \text{que tiene 3 elementos}.$$

Esto es, $n_A = n_B = 1$ y $n_C = 3$.

□

Si un experimento tiene un número finito de resultados posibles y no hay razón que privilegie un resultado frente a otro, para cualquier suceso A se tiene que la probabilidad del mismo se calcula mediante la regla de Laplace,

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{n_A}{n}, \tag{6.3}$$

siendo n_A el número de elementos de A y n el número de elementos de S, el espacio muestral.

Es evidente, a partir de (6.3) que la probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1, esto es $0 \leq p(A) \leq 1$, tomando el valor cero para el suceso imposible y el valor 1 para el suceso seguro.

Ejemplo 6.6

Para los datos del ejemplo 6.5 se pide calcular las probabilidades de los sucesos S, A, B, C así como la del suceso D, obtener cuatro caras.

Solución: Utilizando la regla de Laplace obtenemos

$$\begin{aligned} p(S) &= \frac{n}{n} = \frac{8}{8} = 1, & p(A) &= \frac{n_A}{n} = \frac{1}{8}, \\ p(B) &= \frac{n_B}{n} = \frac{1}{8}, & p(C) &= \frac{n_C}{n} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Finalmente el suceso D no consta de ningún elemento (se trata de un suceso imposible) y su probabilidad es por tanto cero, $p(D) = 0/8 = 0$. $\square$

Ejemplo 6.7

Se lanza una vez un dado no trucado. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

$a)$ Obtener un cinco.

$b)$ Obtener un número par.

$c)$ Obtener un número mayor que dos.

Solución: El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que consta de 6 elementos, $n = 6$. Entonces.

$a)$ Sea A el suceso *obtener un cinco*; luego como este número sólo puede salir una sola vez al lanzar el dado una vez se tiene que aplicando la regla de Laplace obtenemos,

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{6}.$$

$b)$ En este caso se tiene $A = \{2, 4, 6\}$, con $n_A = 3$. Luego, aplicando (6.3) resulta,

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$c)$ Ahora, $A = \{3, 4, 5, 6\}$, con $n_A = 4$. Luego,

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

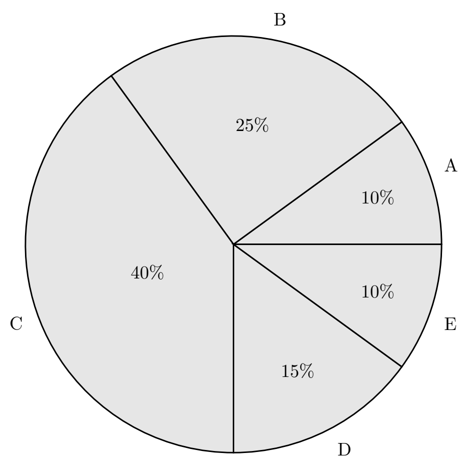
□

Ejercicios propuestos tipo test

1. Si $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 0$, $b_1 = b_2 = 2$, $b_3 = -1$ y $b_4 = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{4}(a_i + b_i)$, $\sum_{i=1}^{4}(a_i - b_i)^2$ y $\sum_{i=1}^{4}(a_i + b_i)^2$ vienen dados, respectivamente, por:

   $a)$ 12, 10 y 36. $b)$ 10, 12 y 36. $c)$ 12, 15 y 30.

2. Si el diagrama de sectores de un determinado conjunto de datos con atributos A, B, C, D y E viene dado por

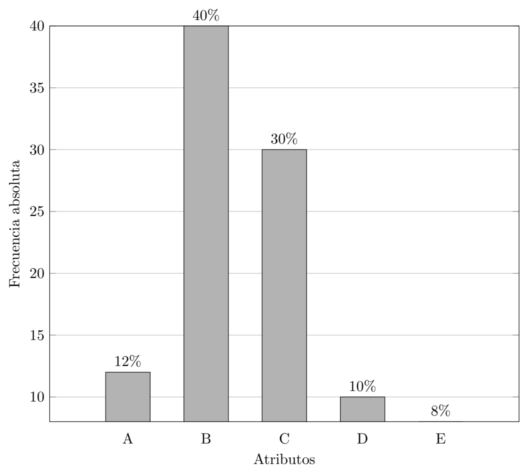


   entonces la moda está en:

   $a)$ El atributo C. $b)$ Los atributos A y E.

   $c)$ El atributo D.

3. Si el diagrama de barras de un determinado conjunto de datos con atributos A, B, C, D y E viene dado por



entonces la moda está en:

$a)$ El atributo B. $b)$ Los atributos A y E.

$c)$ El atributo E.

4. Sean los salarios mensuales en euros de 10 personas son 1200, 800, 950, 3000, 560, 1000, 750, 2600, 1500, y 700. Entonces, el salario medio, la mediana, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación son, respectivamente:

$a)$ 1306, 975, 793.86, 630224, 60.78%.

$b)$ 1306,975, 630224, 793.86, 60.78%.

$c)$ 1306,975, 630224, 793.86, 63.78%.

5. Al lanzar un dado 100 veces se ha obtenido las siguientes frecuencias para cada uno de los puntos del mismo: Enton-

Puntos	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	16	17	14	15	20	18

ces, la media de puntos y la mediana son, respectivamente:

$a)$ 3.5 y 3.6. $b)$ 3.5 y 3.5. $c)$ 3.6 y 4.

6. Si la cotización de las acciones de una determinada empresa durante los cinco días de la semana han sido 35 €, 40 €, 38 €, 38 € y 41 €, entonces la cotización media ha sido de:

$a)$ 34.8 €. $b)$ 35 €. $c)$ 38.4 €.

7. La media aritmética de los seis primeros números pares es:

$a)$ 10. $b)$ 7. $c)$ 6.

8. Los accidentes, X, sufridos por 20 asegurados de una compañía de seguros se recogen en la siguiente tabla. tabla. En-

Accidentes	0	1	2	3	4
Frecuencia	8	6	3	1	2

tonces, la media, la desviación típica y el coeficiente de variación vienen dados por:

a) $\bar{x} = 0$, $\sigma = 1.27$, C.V. $= 110.11\%$.

b) $\bar{x} = 1.15$, $\sigma = 1.15$, C.V. $= 111\%$.

c) $\bar{x} = 1.15$, $\sigma = 1.27$, C.V. $= 111\%$.

9. La temperatura medida durante 36 días a las 17 horas en un mismo punto de Gran Canaria aparece recogida en la siguiente tabla. Entonces, la media y la varianza es:

Temperatura	20	22	24	26	28
Frecuencia	2	7	15	8	4

a) $\bar{x} = 24.27$, $\sigma^2 = 2.06$. *b*) $\bar{x} = 2.06$, $\sigma^2 = 4.25$.

c) $\bar{x} = 24.27$, $\sigma^2 = 4.25$.

10. Tras entrevistar a los 20 estudiantes de una clase acerca del número de libros que había leído el año anterior se obtuvo la siguiente tabla de frecuencias:

Número de libros	0	1	2	3	4	5
Número de estudiantes	8	5	1	1	4	1

Entonces, el número medio de libros leídos así como la moda y el coeficiente de variación son:

$a)$ Media $= 1.55$, moda $= 8$, C.V. $= 107.110\%$.

$b)$ Media $= 1.35$, moda $= 0$, C.V. $= 93.85\%$.

$c)$ Media $= 1.55$, moda $= 0$, C.V. $= 110.76\%$.

11. El juego de dados del casino se basa en las probabilidades de la suma de dos dados. Después de 10 lanzamientos los resultados han sido los siguientes:

Suma	4	5	6	8	9	10	11
Frecuencia	1	2	2	1	1	2	1

Entonces, la media, la mediana y el coeficiente de variación son:

$a)$ Media $= 7$, mediana $= 7.5$, C.V. $= 33.82\%$.

$b)$ Media $= 7.4$, mediana $= 7$, C.V. $= 32.10\%$.

$c)$ Media $= 6.5$, mediana $= 7$, C.V. $= 295.64\%$.

12. En una residencia en la que hay 20 ancianos con minusvalía se ha anotado, durante el día, el número aproximado de metros que cada uno de los mismos anda, seguido y sin cansarse, obteniéndose al final del día la siguiente tabla de información:

Número de metros	5	7	8	15	20
Número de ancianos	2	4	3	5	6

Entonces, la media, la moda y el coeficiente de variación son, respectivamente:

$a)$ 12.85, 20 y 44.72%. $b)$ 12.85, 20 y 47.42%.

$c)$ 20, 6 y 44.72%.

13. Preguntamos el número de zapato a 30 niños de dos clases de primaria y obtenemos la siguiente tabla de frecuencias:

Número	31	32	33	34
Frecuencia	1	14	11	4

Entonces, la media, la mediana y el coeficiente de variación son:

$a)$ Media $= 32.6$, moda $= 33$, C.V. $= 4.14\%$.

$b)$ Media $= 32$, moda $= 32$, C.V. $= 12.72\%$.

$c)$ Media $= 32.6$, moda $= 32$, C.V. $= 2.32\%$.

14. Se han seleccionado 20 números entre los seis primeros de un juego de loto y el número de veces que han aparecido en las últimas semanas se muestra en la siguiente tabla:

Números seleccionados	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	3	4	3	5	4	1

Entonces, la media, la mediana y el coeficiente de variación son, respectivamente:

$a)$ 3.30, 3 y 45.05%. $b)$ 3.30, 4 y 48.05%.

$c)$ 3.14, 3 y 45.05%.

15. Sólo uno de estos experimentos es aleatorio:

$a)$ El lanzamiento de un dado.

$b)$ El lanzamiento de un dado trucado.

$c)$ Extraer una bola de una urna que tiene sólo bolas blancas.

16. Sólo uno de estos experimentos es aleatorio:

    $a)$ Extraer una bola de una urna con 2 bolas blancas.

    $b)$ Sumar los ángulos de un triángulo y anotar el resultado.

    $c)$ Extraer una bola de una urna con 2 bolas blancas y 1 negra.

17. Sólo uno de estos experimentos es aleatorio:

    $a)$ Mezclar agua y aceite y observar lo que ocurre.

    $b)$ El resultado de una quiniela de fútbol.

    $c)$ Contar el número de números pares que hay entre 100 y 200.

18. En el experimento que consiste en lanzar dos monedas al aire y observar el número de caras que se obtienen, el espacio muestral consta de:

    $a)$ 8 elementos. $b)$ 4 elementos. $c)$ 12 elementos.

19. Se lanzan al aire al mismo tiempo tres monedas iguales. Entonces, la probabilidad de que salgan dos cruces y una cara es:

$a)$ $\frac{1}{6}$. $b)$ $\frac{3}{8}$. $c)$ $\frac{5}{8}$.

20. Se dispone de una bolsa que contiene 3 bolas blancas y 2 rojas. Si se extrae una bola al azar, entonces la probabilidad de que la misma sea blanca es:

$a)$ $\frac{3}{5}$. $b)$ $\frac{5}{3}$. $c)$ $\frac{2}{5}$.

21. Se extrae una carta al azar de una baraja española. Entonces la probabilidad de que la carta extraída sea una figura (sota, caballo o rey) es:

$a)$ $\frac{4}{40}$. $b)$ $\frac{1}{3}$. $c)$ $\frac{3}{10}$.

22. Se extrae una carta al azar de una baraja española. Entonces la probabilidad de que la carta extraída sea copa y figura (sota, caballo o rey) es:

$a)$ $\frac{4}{40}$. $b)$ $\frac{3}{40}$. $c)$ $\frac{3}{10}$.

23. La probabilidad de que al lanzar dos dados simultáneamente la suma de los puntos obtenidos sea menor que 10 es:

$a)$ $\frac{2}{3}$. $b)$ $\frac{1}{10}$. $c)$ $\frac{5}{6}$.

24. Disponemos para enviar de tres cartas con sus sobres correspondientes e introducimos al azar cada carta en uno de los sobres. Entonces, la probabilidad de que al menos una carta vaya en el sobre que le corresponde es:

    $a)$ $\frac{2}{3}$. $b)$ 0. $c)$ $\frac{1}{6}$.

25. La ventaja de que el equipo de fútbol A gane al equipo B es 5 a 3. Entonces la probabilidad de que ganen A y B vienen dadas respectivamente por:

    $a)$ $p(A) = \frac{3}{8}$, $p(B) = \frac{5}{8}$. $b)$ $p(A) = \frac{5}{8}$, $p(B) = \frac{3}{8}$.

    $c)$ $p(A) = \frac{5}{3}$, $p(B) = \frac{3}{5}$.

Soluciones a los ejercicios propuestos

Capítulo						
1	**2**	**3**		**4**	**5**	**6**
$1.a$	$1.b$	$1.a$	$26.c$	$1.b$	$1.c$	$1.b$
$2.b$	$2.c$	$2.a$	$27.b$	$2.c$	$2.a$	$2.a$
$3.c$	$3.a$	$3.b$	$28.b$	$3.a$	$3.c$	$3.a$
$4.c$	$4.b$	$4.a$	$29.a$	$4.a$	$4.b$	$4.b$
$5.c$	$5.a$	$5.c$	$30.b$	$5.c$	$5.c$	$5.c$
$6.b$	$6.a$	$6.a$	$31.a$	$6.a$	$6.c$	$6.c$
$7.a$	$7.b$	$7.c$	$32.c$	$7.a$	$7.b$	$7.b$
$8.c$	$8.c$	$8.a$	$33.a$	$8.c$	$8.a$	$8.c$
$9.b$	$9.c$	$9.b$	$34.a$	$9.a$	$9.b$	$9.c$
$10.c$	$10.b$	$10.b$	$35.a$	$10.a$	$10.b$	$10.c$
$11.a$	$11.a$	$11.c$	$36.b$	$11.b$	$11.b$	$11.b$
$12.a$	$12.b$	$12.a$	$37.c$	$12.b$	$12.a$	$12.a$
$13.c$	$13.c$	$13.a$	$38.a$	$13.c$	$13.c$	$13.c$
$14.b$	$14.a$	$14.b$	$39.b$	$14.a$	$14.a$	$14.a$
$15.c$	$15.a$	$15.c$	$40.c$	$15.a$	$15.c$	$15.a$
$16.a$	$16.c$	$16.a$	$41.a$	$16.b$	$16.b$	$16.c$
$17.b$	$17.c$	$17.b$	$42.b$	$17.b$	$17.a$	$17.b$
$18.b$	$18.a$	$18.c$	$43.c$	$18.b$	$18.b$	$18.b$
$19.b$	$19.c$	$19.a$	$44.b$	$19.c$	$19.a$	$19.b$
$20.c$	$20.b$	$20.c$	$45.a$	$20.a$	$20.c$	$20.a$
$21.a$	$21.b$	$21.c$	$46.a$	$21.b$	$21.b$	$21.c$
$22.a$	$22.b$	$22.b$	$47.c$	$22.b$	$22.a$	$22.b$
$23.c$	$23.c$	$23.c$	$48.b$	$23.a$	$23.a$	$23.c$
$24.a$	$24.a$	$24.a$	$49.a$	$24.c$	$24.a$	$24.a$
$25.b$	$25.a$	$25.c$	$50.b$	$25.c$	$25.b$	$25.b$

Bibliografía

García, M.D., Gómez-Déniz, E. (2010). *Introducción a las Matemáticas para las Ciencias Sociales*. Editorial: ULPGC

Gómez-Déniz, E., Dávila, N., González-Martel, C. (2014). *Elementos de Cálculo para Matemáticas Empresariales.* Editorial Delta.

Machín, M., Gutiérrez, R. (2018). *Introducción a las Matemáticas*. Ediciones CEF.-

Ramos, A.M., Rey, J.M. (2018). *Matemáticas básicas para el acceso a la universidad*. Pirámide.

Ramos, E., Hernández, V., Vélez, R. (2019). *Introducción a las Matemáticas*. Editorial Sanz y Torres.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Lengua castellana • Comentario de textos • Inglés • Biología general • Química • Física • Matemáticas Especiales • Introducción al derecho • Economía y Dirección de Empresas • Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales • Geografía • Historia General • Literatura Española

En los últimos tiempos uno de los retos más enriquecedores en educación ha sido la implantación del acceso a la universidad por criterios de edad.

Hace ya más de dos décadas, la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, consciente de la importancia que esta modalidad de acceso podía suponer para nuestra sociedad, puso en marcha un atractivo plan de estudios y un curso preparatorio para la prueba de acceso a la única modalidad que por entonces existía, el acceso para mayores de 25 años sin estudios previos. Posteriormente, se amplió el sistema a otros nuevos colectivos de acceso por criterio de edad: mayores de 45, y mayores de 40 años con experiencia laboral y profesional.

Dada la peculiaridad de las personas que podrían interesarse por este tipo de acceso, la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria fue más allá y publicó unos manuales con los contenidos básicos del curso adaptados al nivel exigible y al tiempo de duración del mismo. Este trabajo implicó a un gran número de profesionales universitarios de las distintas ramas del saber. A través de estos años estos materiales han sido renovados en función de la exigencia y de la legislación vigente. Continuamos en este momento adaptando y redefiniendo los objetivos y contenidos del curso con el fin de integrar este singular sistema de acceso en el Espacio Europeo de Educación Superior.

ULPGC