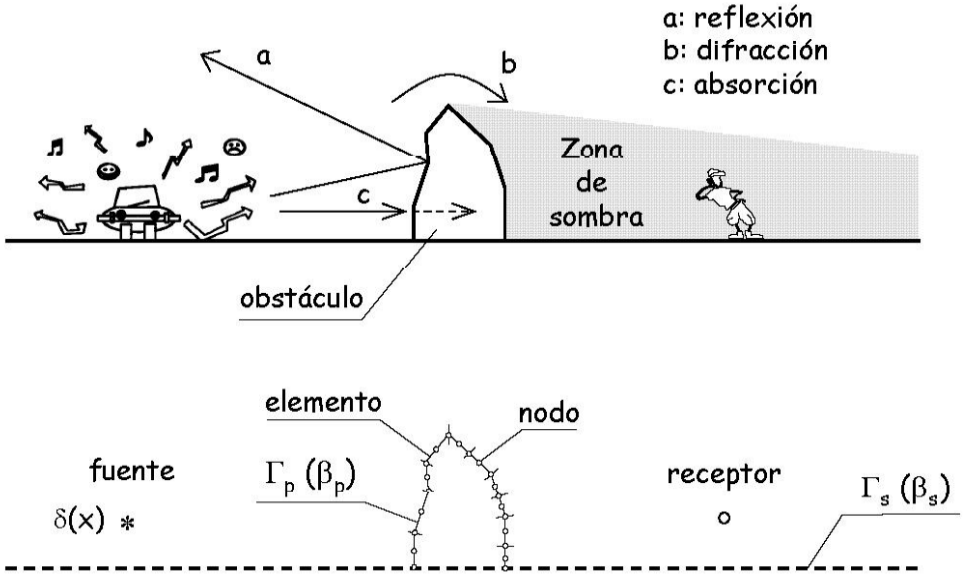
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

# ESTRATEGIAS PARA LA REDUCCIÓN DEL IMPACTO ACÚSTICO EN EL ENTORNO DE CARRETERAS. UNA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.




Orlando Maeso Fortuny
Juan José Aznárez González

Instituto Universitario de
Sistemas Inteligentes y
Aplicaciones Numéricas en Ingeniería

IUSIANI

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# ESTRATEGIAS PARA LA REDUCCIÓN DEL IMPACTO ACÚSTICO EN EL ENTORNO DE CARRETERAS. UNA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Orlando Maeso Fortuny
y
Juan José Aznárez González

*Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI)*
*Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Orlando Maeso Fortuny
Juan José Aznárez González

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes
y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI)
División de Mecánica del Medio Continuo y Estructuras
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Edificio Central del Parque Científico y Tecnológico
Campus Universitario de Tafira
35017. Las Palmas de Gran Canaria. España

Copyright © Los Autores
Reservados todos los derechos

ISBN: 84-689-0340-X
D.L.: G.C.385-2005

Queda rigurosamente prohibido, sin autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas por las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático.

Impresión y encuadernación: Placeres, Papelería – Imprenta
C/ Jerónimo Falcón, 26
35003, Las Palmas de Gran Canaria

Impreso en España

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

*A nuestras familias*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# ÍNDICE GENERAL

**Presentación**

**1. Introducción**

1.1. Presentación del problema ..... 1-1
1.2. Objetivos, hipótesis de metodología ..... 1-3
1.3. Eficacia acústica de pantallas. Estudios previos ..... 1-4
1.4. Descripción de contenidos ..... 1-6

**2. Ecuaciones de gobierno y conceptos básicos**

2.1. Introducción ..... 2-1
2.2. Hipótesis de partida y ecuaciones básicas ..... 2-2
2.2.1. Ecuación de continuidad ..... 2-3
2.2.2. Ecuación constitutiva o ecuación de estado ..... 2-5
2.2.3. Ecuación de equilibrio dinánico ..... 2-7
2.2.4. Ecuación de onda ..... 2-8
2.2.5. Ondas armónicas planas ..... 2-10
2.3. Magnitudes y unidades de medida del sonido ..... 2-12
2.3.1. Intensidad acústica ..... 2-12
2.3.2. Impedancia acústica específica ..... 2-13
2.3.3. Niveles de presión, potencia e intensidad sonora ..... 2-14
2.3.4. Análisis en frecuencia ..... 2-15
2.3.5. Coeficiente de pérdida por inserción ..... 2-18
2.3.6. Composición de niveles sonoros provocados por fuentes no coherentes ..... 2-19
2.3.7. Coeficiente de pérdida por inserción medio espectral ..... 2-19
2.4. Condiciones de contorno ..... 2-20
2.4.1. Problema monodimensional de interacción entre dos fluidos ..... 2-21
2.4.2. Modelo de Delany y Bazley ..... 2-24

**3. Representación integral y elementos de contorno en problemas escalares**

3.1. Introducción ..... 3-1
3.2. Ecuaciones básicas ..... 3-1
3.3. Relación de reciprocidad ..... 3-3
3.4. Solución fundamental ..... 3-4
3.5. Igualdad integral en el contorno ..... 3-7
3.6. Condición de radiación en el infinito ..... 3-9

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

3.7. Igualdad integral para el problema exterior ..... 3-13
3.8. Solución fundamental para el semiespacio ..... 3-15
3.9. Discretización del contorno. Formulación del MEC en problemas bidimensionales ..... 3-19
3.10. Tratamiento simplificado para problemas con condiciones de simetría ..... 3-22

**4. Aplicación del MEC a problemas de propagación acústica 2-D. Programa de ordenador desarrollado**

4.1. Introducción ..... 4-1
4.2. Descripción del código ..... 4-2
Programa Principal. POSAMEC.f ..... 4-2
Entrada de datos. Rutina INPUT ..... 4-6
Elementos y nodos en el contorno. Rutina PREPROCES ..... 4-9
Ensamblaje del sistema de ecuaciones. Rutina SISTEM ..... 4-10
Integrales de la solución fundamental. Rutina GHMAT ..... 4-12
Imposición de las condiciones de contorno. Montaje. Rutina ASSEMBLE ..... 4-16
Integración exterior. Rutina EXTIN ..... 4-18
Integración en el propio elemento. Rutina LOCIN ..... 4-21
Cálculo del término libre. Rutina FREETERM ..... 4-23
Salida de resultados en el contorno. Rutina SOLCON ..... 4-26
Valores de la presión en puntos internos. Rutina INTER ..... 4-27
Eficacia de pantallas acústicas. Rutina INSERT ..... 4-29
Cálculo de $\beta$ en los contornos. Rutinas MORSE y DELANYBAZLEY 4-30
Resolución del sistema de ecuaciones resultante. Rutina CSOLVER ... 4-32
Rutinas complementarias relacionadas con el cálculo de la solución fundamental ..... 4-33
PREKAW ..... 4-33
FLUKAW ..... 4-34
FUNERROR ..... 4-35
BESSEL ..... 4-37
FUNSOL ..... 4-39
4.3. Algunos ejemplos de aplicación ..... 4-39

**5. Resultados del modelo numérico. Estudio de la eficacia de pantallas acústicas**

5.1. Introducción ..... 5-1
5.2. Validación experimental ..... 5-4
5.3. Espectros de pérdida por inserción. Estudio paramétrico ..... 5-6
5.3.1. Influencia de la altura de la pantalla ..... 5-7
5.3.2. Influencia del perfil de la pantalla ..... 5-10
5.3.2.1. Sección transversal en cuña ..... 5-10
5.3.2.2. Sección transversal en dique ..... 5-10
5.3.2.3. Sección tranversal acodada ..... 5-13
5.3.2.4. Sección transversal en **Y** ó **T** ..... 5-13

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

5.3.2.5. Variantes desde la pantalla simple y la pantalla en **Y** ..... 5-16
5.3.3. Influencia del tratamiento absorbente de la barrera ..... 5-20
5.3.3.1. Pantalla simple vertical ..... 5-20
5.3.3.2. Sección transversal en cuña ..... 5-21
5.3.3.3. Sección transversal en dique ..... 5-22
5.3.3.4. Sección transversal en **Y** ó **T** ..... 5-22
5.3.4. Influencia de la capacidad absorbente del terreno ..... 5-25
5.4. Pérdida por inserción espectral ..... 5-29
5.5. Pantallas a ambos lados de la fuente ..... 5-32

**6. Modelización de otras actuaciones para la reducción del impacto acústico**

6.1. Introducción ..... 6-1
6.2. Calzadas elevadas. Viaductos y terraplenes ..... 6-1
6.3. Depresión de la vía. Carreteras en trinchera ..... 6-7
6.3.1. Modelo numérico ..... 6-7
6.3.2. Resultados y discusión ..... 6-10

**Referencias**

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# *PRESENTACIÓN*

Esta Memoria recoge el trabajo realizado por los autores en el campo de la propagación de ondas acústicas en relación con el estudio de medidas para la minoración del ruido provocado por el tráfico rodado. Esta línea de trabajo se inicia en 1995 con la concesión de un Proyecto de Investigación financiado por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria al que siguieron otros dos concedidos por la Dirección Gral. de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias y la Fundación Universitaria de Las Palmas, respectivamente. Transcurrido el tiempo, hemos creído conveniente (y esperemos que útil) publicar un resumen de todo aquél trabajo en un formato que permita su uso como material docente, especialmente orientado a cursos de doctorado o postgrado. De hecho, este libro no es otra cosa que la recopilación ordenada de diverso material que ha servido durante los últimos años para impartir un curso de doctorado en esta línea.

En relación con el estudio de medidas anti-ruido existen multitud de modelos analíticos y experimentales que han mostrado su eficacia durante mucho tiempo, si bien, con el desarrollo que en los últimos años han experimentado los ordenadores, se ha abierto un campo interesante en relación con el estudio de problemas de acústica exterior haciendo uso de métodos numéricos como el Método de los Elementos de Contorno. Así, en la actualidad, este tipo de problemas son ya abordables numéricamente en un tiempo razonable.

En relación con otros métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (MEF), el Método de los Elementos de Contorno (MEC) presenta numerosas ventajas en la resolución de problemas de propagación de ondas en dominios infinitos, como es el problema de acústica exterior. Desde la década de los setenta numerosos autores han planteado este problema haciendo uso del MEC con mayor o menor fortuna: validación de resultados experimentales, estudio de la eficacia de pantallas acústicas, análisis de la influencia de las capacidades absorbentes de los materiales y el terreno, etc. Este trabajo se enmarca en esta corriente, y pretende estudiar la eficacia de medidas para la minoración del impacto acústico haciendo uso de este Método.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Esta modesta publicación también pretende ser una herramienta de trabajo para aquellos que se acerquen por vez primera a la formulación del MEC en problemas dinámicos. A lo largo de la misma se presta especial atención a todos aquellos aspectos singulares del Método: formulación, discretización, integración, etc., constituyendo un punto de partida en la compresión, utilización y programación del mismo.

No queremos terminar estas líneas sin agradecer la financiación aportada por las entidades mencionadas y la ayuda y comentarios realizados por compañeros y alumnos de postgrado a quienes en definitiva están dedicadas estas páginas. A Francisco Perdomo Lorenzo, pues de su labor surgieron algunos de las aplicaciones incluidas en esta memoria. Suyo también es el trabajo para visualizar en forma de mapas en color los resultados de algunos modelos analizados. Agradecimiento muy especial al profesor José Domínguez Abascal, el "culpable" de que sólo pensemos en discretizar el contorno de las cosas. Finalmente a Juana Eugenia e Inés Gladys, por su paciencia durante estos años, y aprovechar para pedirles un poquito (solo un poquito) más.

Las Palmas de Gran Canaria. Otoño de 2004.

Los Autores

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 1
# INTRODUCCIÓN

## 1.- PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

No cabe duda que entre los subproductos más negativos del desarrollo industrial y tecnológico de la sociedad moderna destaca el deterioro del medio ambiente. Desgraciadamente este deterioro ha seguido una evolución creciente con el tiempo, y esta tónica, a la par que la concienciación de las personas por este problema, se ha acentuado en los últimos años. De hecho, la contaminación se ha convertido en un serio obstáculo para el desarrollo ordenado y, en definitiva, para progresar en la consecución de mayores estados de bienestar.

En nuestras ciudades y áreas urbanas merece destacarse el impacto asociado al transporte en general y, sobre todo, al tráfico rodado. El fenómeno del ruido contaminante, por su incidencia directa sobre la salud y el rendimiento de las personas, resulta ser el factor ambiental del que más se quejan los ciudadanos en la mayoría de los estudios de opinión.

Haciéndose eco de esta situación, la OCDE, la Unión Europea y otros organismos internacionales han promovido diversas recomendaciones para intentar reducir el nivel de ruido actual y, especialmente, para minimizar el impacto de ruido derivado de nuevas infraestructuras de transporte. En este sentido conviene recordar la presentación en Madrid de la monografía que el comité de expertos de la OCDE ha desarrollado bajo el título genérico de "Reducción del Ruido en el Entorno de Carreteras" (1995).

Las políticas de lucha contra el ruido están en general orientadas hacia la consecución de un doble objetivo: de una parte recuperar en lo posible ambientes sonoros ya degradados, y de otra evitar la creación de nuevas situaciones no deseadas. El primero de los casos corresponde a la situación típica de zonas urbanas con una infraestructura ya implantada, donde las posibilidades de actuación son muy limitadas. El problema puede difícilmente abordarse mediante actuaciones estrictamente "acústicas" (pantallas, depresión de vías, pavimentos absorbentes...) y es preciso en la mayoría de los casos actuar mediante planes específicos de recuperación que afectan a toda la actividad de la zona: modificación de usos, limitación de velocidades y horario de tráfico, redireccionamiento de rutas, etc.

El problema es radicalmente distinto en el caso de infraestructuras de nueva creación. Se trata ahora de ser capaces de prever correctamente el impacto asociado a la nueva vía, y en base a ello modificar su diseño, incorporando las medidas necesarias que mantengan los niveles de ruido dentro de límites aceptables.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

No resulta difícil convencer al lector de los efectos perniciosos que el ruido, o mejor, el exceso de ruido, produce en todos los ámbitos de nuestra vida diaria. Los estudios al respecto son numerosos (ver p.e. Taylor y Wilkins, 1987 y Carter et al., 1994) y la evidencia científica de que el ruido constituye una agresión a la salud, a la capacidad de realizar actividades, y al estado anímico de las personas, es unánimemente aceptada. Así por ejemplo, es conocido el efecto de pérdida sucesiva de audición en sujetos expuestos a niveles acústicos moderados-altos durante periodos elevados. La incapacidad de conciliar el sueño o la pérdida de calidad del mismo, la disminución de rendimiento profesional, la irritabilidad, la influencia sobre el estrés, son asimismo otros efectos usuales. Las implicaciones económicas que todo ello trae consigo resultan evidentes, por lo que las políticas de actuación y los fondos destinados a la atenuación del problema son un bien amortizable a corto plazo.

Sin embargo, la disminución del nivel de ruido no es un problema sencillo, y en ello influye considerablemente la forma en la que el oído humano percibe la señal sonora. De hecho, la relación que existe entre disminución de potencia sonora y sensación de mejoría subjetiva no es lineal. Para cuantificar el problema podemos dar algunos valores numéricos: una reducción del 25% de la energía emitida por una fuente ruidosa (p.e. un medio de transporte) cuantitativamente significaría una reducción de únicamente 1 decibelio (dB), y apenas sería detectada por una persona expuesta a la emisión. Por contra, para que el mismo observador reconozca una clara mejoría subjetiva, que él cualificara como una reducción del ruido a la mitad, sería preciso disminuir la emisión en 10 dB, lo que equivale a eliminar el 90% de la energía acústica inicial.

El problema se complica aun más si tenemos en cuenta que la capacidad de tolerancia de intensidad sonora del oído humano es muy variable para las diferentes frecuencias dentro del amplio espectro de frecuencias audibles asociadas a cualquier fenómeno ruidoso. Esto significa que no siempre es suficiente o apropiado disminuir la intensidad global de la emisión, sino que en muchas situaciones resulta más efectivo modificar el perfil sonoro que capta el perceptor, en el sentido de aminorar el rango de frecuencias más molestas. Es este un campo completamente abierto que sólo puede ser abordado si el método de análisis permite un estudio selectivo de la propagación a cada una de las frecuencias de la banda de audición -punto en el que flaquean la mayor parte de los procedimientos clásicos de estudio empleados en la actualidad dentro de la acústica ambiental-.

Para determinar el nivel de ruido en una situación dada, una de las técnicas más utilizadas es la medida experimental directa, mediante sonómetros u otros equipos de medida. Es ésta una actuación indispensable para la cuantificación del problema ambiental en una situación real, y actualmente es la forma más precisa y segura de elaborar mapas de contaminación acústica. Aun así, esta técnica adolece de dos problemas fundamentales. Por un lado es costosa si se quiere un alto nivel de detalle y por tanto se incluye un elevado número de puntos de medida, y, por otro, no permite predecir los niveles de ruido en situaciones futuras, como es por ejemplo el caso del ruido en el entorno de una carretera que se pretende construir, o bien de una ya construida que se pretende aumentar con la creación de nuevos carriles.

Para predecir el nivel de ruido existen diversos métodos analíticos y numéricos basados en diferentes técnicas (método de rayos acústicos, simulación partícula a partícula...). Entre

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

ellos, es el método de rayos acústicos el más ampliamente utilizado en acústica ambiental. Proporciona una descripción de la propagación de las ondas acústicas a lo largo de grandes distancias, como por ejemplo la atmósfera, o la propagación bajo el agua. Para ello se utilizan familias de rayos, y es posible mediante la introducción de coeficientes semi empíricos, el tomar en consideración de forma aproximada fenómenos perturbadores como faltas de homogeneidad por gradientes de temperatura, viento, etc. A pesar de su indudable aptitud como método de predicción de ruido ambiental, estos métodos tienen como principal limitación la dificultad de tratar geometrías complicadas, como por ejemplo, detalles de la forma de las pantallas acústicas o de la geometría de los edificios. Otra limitación importante es que este método aporta información del nivel sonoro en términos de intensidad, a partir de los datos que definan la fuente perturbadora y la geometría ambiente. Sin embargo, no aporta información alguna acerca del contenido en frecuencia de la onda global que se propaga, ni, por tanto, de las posibles atenuaciones o amplificaciones que las diferentes medidas correctoras (p.e. pantallas acústicas) puedan ocasionar en determinados rangos de frecuencias más molestas al oído humano, factor éste que ya ha sido comentado como necesario en las actuales estrategias de disminución de impacto.

Con el desarrollo de los métodos numéricos se abren nuevas posibilidades de abordar el problema de la propagación de ruido en ambientes complejos. Los más empleados son el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC). La dificultad del MEF para abordar los problemas de dominios infinitos o de campo libre, como es el caso de la acústica ambiental, hacen que el MEC aparezca como el más adecuado. Para el lector poco familiarizado con el método, la lectura de Brebbia y Domínguez (1989) puede resultar un espléndido punto de partida en la comprensión de las singularidades del mismo y sus ventajas e inconvenientes frente al MEF.

La idea de aplicar el MEC al estudio de medidas de aislamiento acústico nació en los autores (que lo habían aplicado ya a otros problemas) sin conocer cuál era el estado del arte sobre el particular, si bien, como comentaremos más adelante, se habían desarrollado ya bastantes trabajos que utilizaban este método en el análisis del problema. Algunos de los resultados publicados les han permitido iniciar el camino, concretar objetivos y validar los programas desarrollados. Con todo, y como es natural, continua siendo un tema abierto donde existen multitud de aspectos en los que pueden realizarse aportaciones interesantes, algunas de las cuales, fruto del trabajo realizado en estos años, se recogen en esta publicación.

## 1.2.- OBJETIVOS, HIPÓTESIS Y METODOLOGÍA

El objetivo concreto de este trabajo ha sido el desarrollo de un modelo numérico capaz de simular de una manera realista el fenómeno de la propagación de ondas acústicas generadas por cualquier fuente, y que sea útil, por tanto, para la determinación del nivel de ruido, y su composición en frecuencias, en las inmediaciones. A la luz de los resultados obtenidos, podrán determinarse medidas correctoras que permitan reducir el impacto producido (utilización de pantallas acústicas, soterramiento de vías, etc.).

Si se considera el caso de tráfico rodado, se supone un estado de tráfico denso y continuo, y una calzada recta, la situación de propagación acústica es idéntica en cualquier plano

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

perpendicular a la vía. El problema entonces puede ser estudiado mediante un modelo bidimensional (Fig.1.1).

El análisis requiere la caracterización de las tres componentes implicadas en el mismo: la fuente, el medio de propagación y el entorno. Para definir la fuente es necesario conocer tanto su rango en frecuencias como la potencia sonora asociada a cada una de ellas. Para el caso de ruido de tráfico existen algunos espectros normalizados. La vía de transmisión de la propagación es el aire, que se modela como medio elástico compresible, y para el que se admiten las hipótesis clásicas de homogeneidad e isotropía con viscosidad despreciable y comportamiento lineal. El entorno se caracteriza por su geometría, así como por la posible capacidad absorbente de energía acústica de los diferentes obstáculos, que a su vez depende de las características de los materiales y del tratamiento de sus superficies.

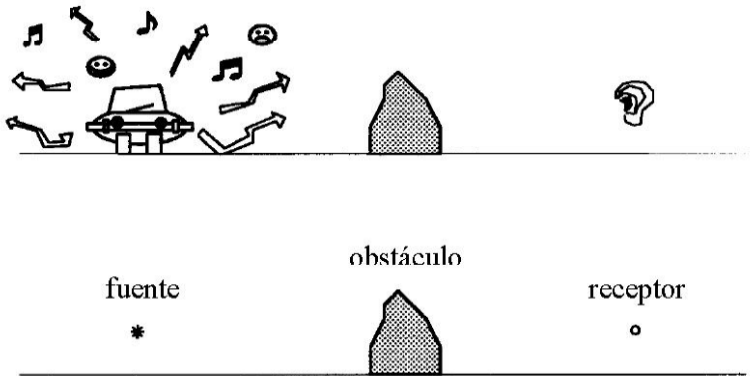



Figura 1.1. Modelo bidimensional.

Por tanto, cualquier metodología que aborde el problema deberá ser capaz de modelar adecuadamente todos estos aspectos. En este trabajo, y como ya se ha anticipado, se hace uso de la formulación dinámica del MEC (ver p.e. Domínguez, 1993), que consiste en un método numérico susceptible de ser programado en un código de ordenador. El usuario introduce los datos relativos a la señal en la fuente, la geometría y las características de los materiales, y el programa determina el nivel de intensidades acústicas en los puntos del entorno.

## 1.3.- EFICACIA ACÚSTICA DE PANTALLAS. ESTUDIOS PREVIOS

La colocación de barreras acústicas entre la fuente y el receptor constituye el procedimiento más habitual para disminuir el impacto acústico (estamos excluyendo obviamente la posibilidad de disminución del ruido en origen). La inclusión de estos elementos interfiere el recorrido normal de la propagación creando una zona de sombra del lado opuesto al emisor donde los niveles sonoros serán inferiores respecto de la situación en que no exista barrera. En esta memoria se analiza la eficacia de estas medidas y se estudiarán comparativamente diferentes diseños haciendo uso de un modelo numérico basado en el Método de los Elementos de Contorno propuesto por Chirino et al. (1998).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En cualquier caso, sea cual sea el modelo de análisis, éste habrá de simular de la forma más real posible los efectos de reflexión, difracción y absorción provocados por este elemento. En este sentido, existe un gran número de trabajos de investigación basados en procedimientos diferentes que pretenden desarrollar diseños cada vez más eficientes desde el punto de vista del aislamiento acústico.

Así, existe abundante bibliografía relativa a modelos experimentales. En este sentido son destacables las aportaciones realizadas por Ringheim (1971) que estudia el comportamiento de barreras trapezoidales sobre terreno reflejante Rapin (1969), que analiza el comportamiento de barreras absorbentes a ambos lados de la vía, May y Osman (1980) y Hutchins el al (1984). Estos últimos autores estudian comparativamente el comportamiento de varios diseños de pantallas acústicas incluyendo el efecto de absorción provocado por un terreno con cubierta vegetal. Asimismo, Rasmussen (1981) determina la atenuación del impacto acústico provocado por barreras sobre terrenos absorbentes. Como ejemplo de la validez de la metodología utilizada en esta Memoria pueden referirse los trabajos de Watts (1996) que establece una validación muy satisfactoria de los resultados obtenidos mediante el MEC a través de un modelo experimental para el caso de situaciones con apantallamiento a ambos lados de la fuente. Este tipo de medidas experimentales ha permitido durante mucho tiempo la elaboración de procedimientos prácticos simplificados para el diseño de barreras (ver p.e. Scholes y Sargent, 1971).

Son también muy destacables las aportaciones al estudio del problema realizadas desde modelos teóricos basados en el método de rayos acústicos y en la acústica geométrica. A pesar de su carácter teórico, estos modelos hacen uso de multitud de parámetros determinados de forma empírica. Entre estos trabajos pueden incluirse las publicaciones realizadas por Kurze y Anderson (1971), Isei et al. (1980) y Maekawa (1986). Estos autores aplican estos métodos a la predicción de la eficacia de pantallas rectas y son utilizados en Estados Unidos y Gran Bretaña como herramientas en la normativa sobre el particular. Cinco son los planteamientos teóricos diferenciados que permiten predecir el campo de presiones en estos modelos: la teoría geométrica de Keller (1962), la teoría de difracción de Kirchhoff-Fresnel (ver p.e. Elmore y Heald, 1985), la teoría de Thomasson (1977), la teoría de la integral de línea (Embleton, 1980) y una modificación de la teoría de la difracción de Macdonald (Isei, 1980). Muchos de estos planteamientos teóricos son tratados con ejemplos prácticos en Bies y Hansen (1988).

La aplicación del Método de los Elementos de Contorno (MEC) permite el análisis de configuraciones más complejas desde el punto de vista de la geometría de la barrera o el posible tratamiento absorbente de sus superficies. Haciendo un poco de historia, la primera solución numérica a la ecuación de onda en acústica mediante el uso de la formulación integral del problema se encuentra en los artículos de Friedman y Shaw (1962) y Banaugh y Goldsmith (1963), los primeros en régimen transitorio y los segundos para problemas armónicos. En estos artículos ya se encuentran algunos de los conceptos fundamentales de la formulación directa del MEC recogida en dos artículos complementarios de Jawson (1963) y Symm (1963) para el problema de potencial estático y que fueron publicados de forma casi simultánea con los anteriores. Más recientes son las aportaciones de Mansur y Brebbia (1982a, 1982b) que aplican el método a la resolución numérica de la ecuación de onda escalar 2D y Groenenboom (1983). Una interesante revisión histórica del Método aplicado a problemas de acústica puede verse en Shaw (1995). Una revisión algo más breve

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

pero no menos interesante y que recoge la aplicación del MEC a varios problemas de la mecánica del medio continuo puede leerse en Domínguez (1993).

En el empleo del MEC al estudio de la eficacia acústica de pantallas pueden referirse los trabajos de Daumas (1978) que estudia modelos bidimensionales que valida experimentalmente y Seznec (1980) que es reconocido por muchos autores como el primer investigador que analiza el comportamiento acústico de barreras sobre terreno absorbente utilizando este método.

Más recientemente, también utilizando el MEC en el análisis acústico de barreras, hay que considerar la aportación realizada en el Reino Unido por Hothersall. De entre los trabajos publicados por este autor y sus colaboradores cabe destacar aquellos relativos al estudio de la eficacia de pantallas individuales (Hothersall et al., 1991a, 1991b), obteniendo coeficientes de pérdida por inserción para geometrías diferentes y estudiando la influencia que sobre este parámetro tiene la existencia de superficies absorbentes en la barrera. Trabajos posteriores hacen referencia a configuraciones con varias pantallas consecutivas entre la fuente y el receptor (Crombie y Hothersall, 1994). Este tipo de disposiciones tiene indudable interés ya que permite reflexiones consecutivas de la onda difractada por cada pantalla. También en la aplicación del MEC pueden citarse referirse los trabajos de Antes (ver p.e. Antes, 1995) que analiza configuraciones bi y tridimensionales con barreras de diferente tipología y fuentes en movimiento. También en Antes (1995) puede leerse una interesante revisión de las metodologías y trabajos más destacados realizados en el campo del estudio de la eficiencia acústica de barreras. En esta líneas hemos recogido algunos aspectos de este trabajo. Muy interesante es también la revisión bibliográfica realizada por Ciskowski y Brebbia (1995) que va desde los años 1967 a 1991 relativa a la aplicación del MEC en acústica.

En España, la investigación relacionada con problemas de acústica tiene un desarrollo importante en los últimos años. En 1969 se funda la Sociedad Española de Acústica (SEA) que engloba a reconocidos investigadores nacionales en este campo y que patrocina congresos y revistas de publicación periódica. Así, y relacionado con el problema que nos ocupa, pueden referirse muchas publicaciones de interés que hacen uso de las metodologías descritas. Así, de entre los investigadores pertenecientes al Instituto de Acústica dependiente del CSIC pueden destacarse los trabajos de Pfretzschner et al. 1995 y 1996, Pfretzschner y Simón 1996 y 1997 y Simón et al. 1998, directamente relacionados con el estudio acústico de pantallas. Otros trabajos de interés se han desarrollado en nuestro país por investigadores adscritos a diferentes universidades. Sólo mencionando algunos, pueden citarse los realizados por Sanchís et al. 1996 y 1997 que aplica el MEC al problema del aislamiento acústico con barreras, Ballesteros et al. 1996, Estellés et al. 1996, Barti y Servera 1995, etc.

## 1.4.- DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS

Luego de estas breves notas introductorias, el capítulo 2 se centra en el estudio de las ecuaciones que rigen la propagación de ondas acústicas en el aire, así como la definición de los conceptos fundamentales vinculados a esta disciplina.

En el capítulo 3 se desarrolla la formulación de partida del Método de los Elementos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Contorno como herramienta numérica para el estudio del problema de acústica en dos dimensiones. Así, se obtiene la ecuación integral del problema dinámico escalar en el dominio de la frecuencia y se estudian las características de la solución fundamental utilizada para resolverla. Se continua luego con aquellos aspectos de carácter numérico necesarios para la implementación del método.

El capítulo 4 está dedicado a la descripción del programa desarrollado al efecto así como algunos ejemplos sencillos donde se explica la estructura de los ficheros de entrada de datos y de salida de resultados.

Los capítulos 5 y 6 se centran en el estudio de la eficacia de barreras acústicas y otras medidas para la minoración del impacto acústico. Haciendo uso del código de ordenador desarrollado, se analiza la eficacia de pantallas de tipología variada con superficies absorbentes o completamente reflejantes. Los resultados obtenidos para cada tipología se presentan, en primera instancia, en función de la frecuencia de la fuente emisora. Posteriormente se hace uso de un espectro normalizado de ruido de tráfico para componer los resultados anteriores y se presentan mapas y curvas de eficacia media para el espectro considerado en el entorno de la barrera.

Se cierra esta Memoria con un último apartado dedicado a las referencias bibliográficas de interés.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 2
# ECUACIONES DE GOBIERNO Y CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo, a modo de resumen y a un nivel introductorio, se van a revisar las variables y a plantear las relaciones básicas que rigen la propagación de ondas acústicas en el aire. También se van a ir introduciendo algunas definiciones y conceptos que posteriormente serán útiles para definir el problema del impacto acústico del ruido de tráfico, y el de la determinación de la eficacia de pantallas (u otras estrategias) para la minoración de dicho impacto. El capítulo, por tanto, pretende ser una guía abreviada de manera que, inevitablemente, el lector no familiarizado con la acústica necesitará completar su lectura con textos específicos donde podrá profundizar en los conceptos y desarrollos presentes aquí (p.e. Bies y Hansen, 1988; Kinsler et al., 1982; Recuero, 1980). Los autores hemos intentado no obstante que el conjunto de contenidos sea suficiente como para emprender con cierta garantía de éxito la lectura de los capítulos siguientes, y de hecho la selección de los mismos está determinada en buena medida por las necesidades posteriores. Al mismo tiempo se ha intentado que el conjunto mantenga un cierto nivel de autonomía, de forma que el texto que el lector mantiene en este momento en sus manos pueda considerarse, en mayor o menor medida, auto contenido. Con ello intentamos facilitar al lector el avance en su lectura, al tiempo que nos permitimos guiarlo por un 'atajo conveniente' hacia los nuevos 'descubrimientos' que esperan más allá. Será él quien habrá de juzgar el acierto o no de la solución adoptada, y sólo esperamos que las inevitables faltas de rigor que encuentre sean disculpadas y admitidas como sacrificio necesario en pro de la consecución de los objetivos expuestos.

## 2.1 - INTRODUCCIÓN

La capacidad de la audición, entendida en su acepción más coloquial y frecuente como capacidad para percibir e interpretar sonidos (en toda la extensión de esta palabra), resulta finalmente de la posibilidad de *recoger* cierta información ambiental. Esta información está asociada a la distorsión del estado de presiones del 'fluido' que nos envuelve, que, como es bien conocido, obedece a la existencia de un mecanismo de propagación energética que denominamos onda. La caracterización del ruido que se propaga requiere, pues, caracterizar convenientemente tales ondas, y éste será el primero de los objetivos de este capítulo. Asumiendo que el medio soporte de la propagación (habitualmente el aire) posee una viscosidad despreciable, las ondas acústicas son ondas elásticas longitudinales, esto es, ondas que provocan en las partículas desplazamientos hacia delante y atrás según la dirección de propagación,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

alrededor de su posición inicial (que llamaremos posición imperturbada o de reposo). De este modo, en las inmediaciones de cada partícula se producirán zonas de acumulación y enrarecimiento, y por ende, de sobrepresión y de subpresión. Estos cambios de presión que ocurren cuando el fluido se comprime o se expande dan como resultado la existencia de unas fuerzas internas recuperadoras, responsables de la existencia de la onda de presión que se propaga.

Acabamos de introducir el término 'partícula de fluido'. Es preciso detenernos brevemente y revisar el significado que va a tener para nosotros. La partícula de fluido será un elemento de volumen suficientemente grande como para contener una gran cantidad de moléculas, y a la vez lo suficientemente pequeño para que permita considerar todas las variables acústicas constantes a lo largo de dicho volumen elemental. Dicho de otro modo, los valores de las variables acústicas son un promedio de las correspondientes de las moléculas del fluido (modelo de medio continuo). Éstas entran y salen del elemento de volumen, si bien el número total es considerado constante en promedio. Así pues las propiedades macroscópicas de la partícula de fluido son uniformes en ella, y podemos hablar de velocidad de partícula, aceleración de partícula, etc., cuando tratamos ondas acústicas en fluidos, del mismo modo que se hace en el estudio de ondas elásticas en sólidos.

Independientemente de que las distintas variables acústicas se irán introduciendo a lo largo del desarrollo del capítulo, nos parece oportuno relacionar a continuación la notación de algunas de ellas, que serán empleadas con profusión:

$t$ = variable tiempo

$\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ = radio vector que define la posición de la partícula en la situación imperturbada. **i**, **j**, **k** representan vectores unitarios según las direcciones coordenadas.

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ = desplazamiento de partícula desde la posición de equilibrio.

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ = velocidad de partícula.

$\rho_o(\mathbf{x})$ = constante que representa la densidad del fluido en el estado imperturbado.

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ = densidad instantánea.

$p_o(\mathbf{x})$ = campo de presión del fluido correspondiente al estado imperturbado.

$p_T = p_T(\mathbf{x}, t)$ = presión instantánea en cualquier punto.

$p(\mathbf{x}, t) = p_T - p_o$ = presión acústica en cualquier punto.

$c$ = velocidad de propagación o velocidad de fase de la onda.

## 2.2 - HIPÓTESIS DE PARTIDA Y ECUACIONES BÁSICAS

Este apartado y el próximo están dedicados a la obtención de las variables básicas que dejan planteado el problema desde un punto de vista matemático. La formulación diferencial que va a obtenerse puede entenderse de modo absolutamente equivalente al planteamiento diferencial del problema elástico en sólidos (o en general en cualquier

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

medio continuo) con el mismo tipo de relaciones básicas y el mismo significado: (1) ecuaciones cinemáticas (en el caso del fluido establecen la condición de continuidad del medio (medio continuo), (2) ecuaciones constitutivas o de estado, y (3) ecuaciones de equilibrio.

Antes de pasar a escribirlas, enunciaremos las hipótesis fundamentales de partida, que enmarcan el campo de aplicación de la formulación que se va a obtener. Éstas son:

- Se desprecian los efectos de disipación que pudieran deberse a la viscosidad del medio.

- Trataremos en todas las aplicaciones el caso de propagación de ondas acústicas en el aire, y en entornos no lejanos de la fuente de ruido. Ello justifica despreciar la influencia de la fuerza gravitatoria, de manera que supondremos que la presión y la densidad que caracterizan el medio son uniformes ($p_o(\boldsymbol{x}) = p_o$; $\rho_o(\boldsymbol{x}) = \rho_o$). Estaremos pues admitiendo que el medio es homogéneo.

- El aire se considera como un medio continuo perfectamente elástico y comportamiento isótropo. Se asume entonces que son despreciables los efectos que, sobre la propagación del sonido, puedan tener gradientes de temperatura, etc.

- Admitiremos que las perturbaciones en el medio producidas por la propagación del sonido son suficientemente pequeñas, de manera que los cambios de presión y densidad son muy pequeños comparados con los valores *de reposo*. Admitiremos entonces que la variación de presión o densidad en el entorno de una partícula está suficientemente representada si restringimos el desarrollo a los términos lineales.

- Admitimos que el fluido (aire) se encuentra inicialmente en reposo, despreciándose todos los posibles efectos del viento.

Con estas hipótesis obtenemos la más simple de las formulaciones posibles para la propagación de ondas en fluidos. Afortunadamente los resultados que ella prevé están avalados por las evidencias experimentales para un amplísimo rango de problemas acústicos. Debe recordarse, sin embargo, que existen situaciones de gran interés en que la teoría propuesta no resulta válida (ondas de choque, ondas de gran intensidad, etc.) y debe ser revisada.

## 2.2.1- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Imaginemos un volumen elemental $d\Omega$, que por simplicidad consideraremos paralelepípedo $d\Omega = dx\, dy\, dz$, 'anclado' en el espacio mientras el fluido entra y sale de él a través de su superficie. La relación de continuidad establece que, para un medio continuo en el que no existen fuentes ni sumideros de masa, la cantidad neta de fluido que entra en $d\Omega$ tiene que ser igual al aumento de masa en $d\Omega$. Esta condición va a relacionar el movimiento del fluido con su dilatación o compresión. Admitiendo una variación lineal de la velocidad en el entorno del origen podemos escribir que la cantidad de fluido que entra en $d\Omega$ como consecuencia del desplazamiento de aquél en dirección $x$ es igual a:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx(dy\,dz) = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}d\Omega$$

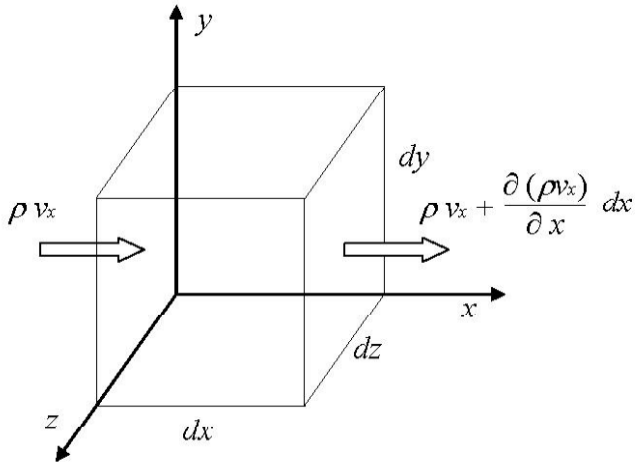



Figura 2.1. Tránsito de fluido a través de dΩ en dirección x.

Por tanto la cantidad que entra en $d\Omega$ debido al flujo en las tres direcciones será:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]d\Omega = -\nabla(\rho\,\mathbf{v})\,d\Omega \qquad (2.1)$$

donde se ha empleado el operador divergencia $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. La cantidad expresada en (2.1) debe ser, como hemos dicho, igual al aumento de masa en $d\Omega$, de manera que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}d\Omega = -\nabla(\rho\,\mathbf{v})\,d\Omega$$

obteniéndose finalmente la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\,\mathbf{v}) = 0 \qquad (2.2)$$

Es habitual caracterizar el incremento de densidad en el entorno de la partícula relativo al valor de reposo. Denominaremos *condensación* ($s$) a esta nueva variable:

$$s = \frac{\rho-\rho_o}{\rho_o} \qquad (2.3)$$

de manera que

$$\rho = \rho_o\,(1+s)\,.$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Con ello la ecuación (2.2) puede re-escribirse ($\rho_o$ constante) como:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla\left[\mathbf{v}(1+s)\right] = 0$$

En la hipótesis admitida de pequeñas perturbaciones $|s| << 1$ y la ecuación puede ser linealizada

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} + \nabla(s\,\mathbf{v}) = 0$$

Teniendo en cuenta que el último término es un infinitésimo de orden superior, puede ser despreciado quedando finalmente

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} = 0 \tag{2.4}$$

que es la ecuación de continuidad linealizada. La integral respecto del tiempo de la expresión (2.4) debe ser nula (una constante diferente de cero implicaría valores no nulos de las variables acústicas en ausencia de perturbación). Es decir:

$$\int\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}\right) dt = 0$$

luego

$$\int\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) dt = -\int(\nabla \mathbf{v})\, dt = -\nabla \int \mathbf{v}\, dt = -\nabla \mathbf{u}$$

$$s = -\nabla \mathbf{u} \tag{2.5}$$

que es otra expresión equivalente para relacionar las fluctuaciones unitarias de densidad (y por tanto de volumen ocupado) con las variaciones de posición de las partículas.

## 2.2.2- ECUACIÓN CONSTITUTIVA O ECUACIÓN DE ESTADO

Esta ecuación relaciona las deformaciones que se producen en el medio fluido, en términos de cambio de densidad (o condensación) con las fuerzas internas recuperadoras. Por su propia naturaleza, en la ecuación de estado debe aparecer alguna constante que caracterice las propiedades del medio continuo. Una vez admitida la isotropía del medio y la ausencia de onda de corte, es claro que el medio fluido quedará determinado conociendo el valor de una sola constante. (Piense el lector en la analogía que supone la particularización de las ecuaciones de la elasticidad isótropa para el caso de estado tensional esférico).

Llegados a este punto es bueno enfatizar en la idea de que es el tipo de comportamiento del medio lo que determina el tipo de expresión formal para la ecuación de estado. Y lo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

cierto es que la evidencia experimental permite deducir que la propagación acústica se desarrolla de acuerdo a un proceso sensiblemente adiabático. Es decir, los intercambios de calor entre una partícula de fluido y las vecinas son despreciables[1]. Como hemos admitido también que el comportamiento del fluido es perfectamente elástico, con valores pequeños de las perturbaciones alrededor del equilibrio, concluimos que el comportamiento del fluido es, además de adiabático, reversible.

El problema que nos ocupa y que da título a esta monografía tiene al aire como vehículo que transporta la perturbación acústica. Al no ser el aire un gas perfecto la forma habitual para obtener la relación isoentrópica entre la presión y los cambios de densidad es escribiendo el desarrollo de Taylor:

$$p_T = p_o + \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho}\right)_{\rho_o} (\rho - \rho_o) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p_T}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_o} (\rho - \rho_o)^2 + \ldots$$

donde las derivadas parciales son constantes que se determinan para la compresión o expansión del fluido alrededor de su densidad de equilibrio. En un estado de pequeñas perturbaciones despreciamos los términos de orden superior y nos quedamos con la expresión lineal

$$p_T = p_o + \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho}\right)_{\rho_o} (\rho - \rho_o) \tag{2.6}$$

Definiendo como *módulo de compresión adiabático* ($K$)

$$K = \rho_o \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho}\right)_{\rho_o} \tag{2.7}$$

la ecuación de estado isoentrópico para pequeñas perturbaciones $|s| << 1$ puede escribirse como

$$p = K\, s \tag{2.8}$$

que relaciona, como buscábamos, los cambios de presión con los cambios de densidad relativos, a través de una constante dependiente del medio. Terminamos este apartado combinando las ecuaciones de estado y de continuidad (2.5) y (2.8). Así obtenemos

$$p = -K\, \nabla \mathbf{u} \tag{2.9}$$

que podríamos considerar como una ecuación de comportamiento-compatibilidad.

[1] Esto significa que la conductividad térmica del fluido y los gradientes de temperatura durante la distorsión acústica deben ser suficientemente pequeñas como para hacer despreciable el flujo de calor en el lapsus de la distorsión. Así ocurre en el rango de frecuencias y amplitudes de interés en acústica. Por otro lado, el efecto que tendría la existencia de conductividad térmica sería disipar cierta fracción de la energía acústica, de manera que la perturbación se atenuase con el tiempo y la distancia. Este efecto, de interés en otros casos, no será tenido en cuenta en nuestro estudio.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 2.2.3- ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO

Hemos acordado despreciar el efecto de a viscosidad amen de cualquier otro efecto disipativo referido a la falta de comportamiento adiabático. También acordamos despreciar los efectos gravitatorios. En estas condiciones la obtención de las ecuaciones de equilibrio resulta muy simple, sin más que aplicar la ley de Newton sobre un elemento de volumen $d\Omega = dx\, dy\, dz$ que se mueve con el fluido

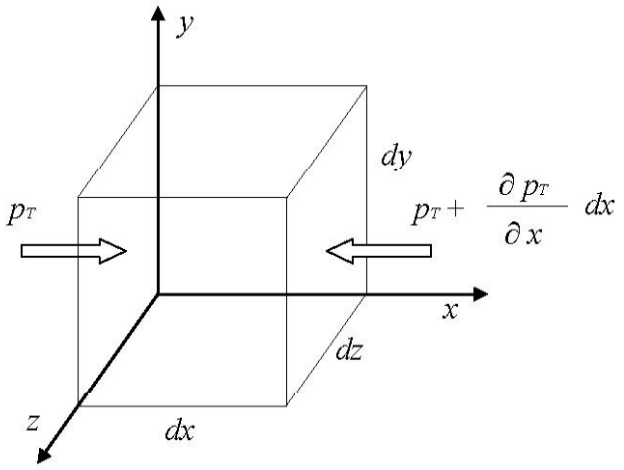



Figura 2.2. Esquema de fuerzas unitarias sobre $d\Omega$ en dirección $x$.

En ausencia de fuerzas de volumen la condición de equilibrio en dirección $x$ establece:

$$df_x = dm \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

siendo $dm$ la masa de fluido en $d\Omega$. Expresiones análogas corresponderán a las otras direcciones coordenadas. Admitiendo, como hasta ahora, un estado de pequeñas perturbaciones, podemos suponer una variación lineal de la presión

$$(p_T = p + p_o) \quad (p_o \equiv cte.)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx (dy\, dz) = \rho_o\, d\Omega \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_o \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

y finalmente en las tres direcciones del espacio

$$-\nabla p = \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{2.10}$$

que es la ecuación de equilibrio linealizada que estábamos buscando[2].

[2] Una expresión algo más general puede obtenerse si se considera que la aceleración (**a**) involucra términos de gradiente de velocidad. En efecto, véase que **v** es función del espacio y del tiempo. Por tanto, en el lapso de tiempo de $t$ a $(t+dt)$ la partícula se mueve de $(x, y, z)$ a $(x+v_x\, dt,\ y+v_y\, dt,\ z+v_z\, dt)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Es importante, a la vista de la expresión (2.10) ó (2.11), hacer ver que las fuerzas internas que trabajan para hacer evolucionar a la partícula hacia la posición de reposo (fuerzas internas recuperadoras o fuerzas elásticas del medio) no están condicionadas por los valores de la presión, sino por su variación espacial.

### 2.2.4- ECUACIÓN DE ONDA

Las ecuaciones de continuidad (2.4), de estado (2.8) y de equilibrio (2.10), junto con las condiciones iniciales y de contorno, cierran matemáticamente el planteamiento del problema, dentro de las hipótesis admitidas. Resulta inmediato, sin embargo, obtener una formulación diferencial más simple, con una única ecuación y una sóla variable. Aunque esta ecuación puede plantearse en término de cualquiera de las variables acústicas (presión, densidad, desplazamiento/velocidad) aquí lo haremos de la forma más habitual, escogiendo la presión como variable dependiente. Tomando divergencia de la ecuación de equilibrio:

$$-\nabla^2 p = \rho_o \nabla \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

y de ambas:

$$\nabla^2 p = \rho_o \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

---

Quedándonos solo con términos lineales del desarrollo de Taylor podemos escribir el incremento de velocidad como:

$$\mathbf{v}(x+v_x dt, y+v_y dt, z+v_z dt, t+dt) - \mathbf{v}(x,y,z,t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$$

y por tanto la aceleración del elemento de fluido será:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z$$

Introduciendo el operador $(\mathbf{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$, escribimos $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, llegando entonces a la expresión de equilibrio no lineal para fluidos no viscosos conocida como ecuación de Euler:

$$-\nabla p = \rho_o \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \right]$$

Es evidente que si $|s| << 1$ podremos despreciar infinitésimos de orden superior, llegando entonces a la expresión (2.10).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

y usando la ecuación de estado obtenemos

$$\nabla^2 p = \frac{\rho_o}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Introduciendo la constante $c$:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_o}} \tag{2.12}$$

que tiene dimensiones de velocidad, escribimos finalmente

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

que la ecuación diferencial buscada, conocida como 'ecuación de onda', que define la propagación acústica en fluidos no viscosos en un rango lineal de pequeñas perturbaciones.

La constante $c$ representa la *velocidad de propagación* de las ondas o *velocidad de fase*. Resulta ser independiente de la frecuencia de la perturbación, lo cual significa que estamos admitiendo que el medio de propagación es no dispersivo. Podemos decir que $c$ depende de las características termodinámicas del medio (temperatura, presión y densidad), pero igualmente es apropiado decir que $c$ define las propiedades elásticas del fluido. Ya se ha comentado que, en el rango audible de frecuencias, es muy aproximado admitir el mecanismo propagatorio como adiabático y reversible. La combinación de (2.7) y (2.12) permite obtener:

$$c = \sqrt{\left( \frac{\partial p_T}{\partial \rho} \right)_{\rho_o}}$$

Para un gas perfecto, el uso de la ecuación de compresión adiabática permite obtener estas otras expresiones de la velocidad:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_o}{\rho_o}} = \sqrt{\gamma r T_K} \tag{2.14}$$

siendo $\gamma$ el cociente de calores específicos a presión y volumen constante, y $r$ una constante que depende de cada gas en particular. La particularización en la primera de las dos expresiones de (2.14) de los valores de $\gamma$ y $\rho_o$ para el aire, a una temperatura de 0° C y una presión $p_o$ = 1 atm = 1013 × $10^5$ Pa conduce a un valor de $c_o$ = 331.6 m/s, valor muy cercano al obtenido experimentalmente. La segunda de las expresiones en (2.14) permite obtener la velocidad en términos de su valor $c_o$ a 0° C:

$$c = c_o \sqrt{1 + T/273}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

donde la temperatura $T$ se introduce en grados Celsius. De acuerdo a esta expresión, particularizando para el aire, se obtiene los siguientes valores:

| $T$ ºC | $c$ (m/s) |
|---|---|
| 0 | 331.6 |
| 16 | 341 |
| 20 | 343 |

En otro orden de cosas, la ecuación (2.13) deja de ser homogénea cuando, o bien existen fuentes/sumideros de masa, o bien cuando fuentes internas de presión, pues en ambos casos se modifican las ecuaciones de continuidad y/o de equilibrio. Es posible en estos casos obtener una expresión más general de la ecuación de onda que, para facilitar su aplicación en capítulos posteriores, conviene escribir de la siguiente forma:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} b(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{2.15}$$

## 2.2.5- ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Cuando la variación espacial de cualquier variable acústica depende exclusivamente de una coordenada espacial, de modo que en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación todos sus puntos vibran en fase, estamos en un caso de ondas planas. Si además las condiciones de contorno y las posibles fuentes internas de presión presentan una variación temporal de tipo armónico con pulso $\omega$, todas las variables acústicas serán también armónicas con el mismo pulso. Escogiendo el sistema coordenado de modo que la propagación se produzca a lo largo del eje $x$, podremos escribir entonces:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= p(x;\omega)\, e^{\mathrm{i}\omega t} \\ b(x,t) &= b(x;\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{2.16}$$

cuya sustitución en (2.15) conduce de forma inmediata a la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia:

$$\frac{d^2 p}{d x^2} + k^2 p + \frac{1}{c^2}\, b = 0 \tag{2.17}$$

donde $p = p(x;\omega)$ es la función de respuesta compleja, y donde se ha introducido el número de onda $k = \omega/c$. En ausencia de fuerzas de volumen (fuentes internas) la ecuación homogénea a resolver es la conocida como ecuación de Helmholtz:

$$\frac{d^2 p}{d x^2} + k^2 p = 0 \tag{2.18}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La ecuación de equilibrio dinámico (2.10) permite obtener en este caso las relaciones:

$$-\nabla p = \mathrm{i}\rho_o \omega \mathbf{v}$$

y para una dirección determinada $\eta$ el desplazamiento $u_\eta$ según ella se expresa como:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\mathrm{i}\rho_o \omega \, v_\eta \quad ; \quad v_\eta = \mathrm{i}\omega \, u_\eta \tag{2.19}$$

La solución general de la ecuación (2.18) es una expresión compleja del tipo:

$$p(x;\omega) = A\, e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + B\, e^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} \tag{2.20}$$

Es decir, la suma de dos ondas planas, en general de amplitudes complejas, una de avance y otra de retroceso según la dirección $x$ de propagación[3]:

$$\begin{aligned} x^+ : \quad & p^+ = A\, e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} \\ x^- : \quad & p^- = B\, e^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

La velocidad de partícula se obtiene por derivación:

$$\mathbf{v} = v(x;\omega)\mathbf{i} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x} = \left[\frac{A}{\rho_o c} e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_o c} e^{\mathrm{i}(\omega t + kx)}\right]\mathbf{i} \tag{2.22}$$

pudiendo escribir, para las ondas de avance y de retroceso:

$$v^+ = +\frac{p^+}{\rho_o c} \quad ; \quad v^- = -\frac{p^-}{\rho_o c} \tag{2.23}$$

La constante $\rho_o c$ se conoce como impedancia característica, es una propiedad del medio y es un número real. Deducimos pues que, en el caso de ondas planas, presión y velocidad de partícula están en fase.

La generalización de la propagación armónica plana a una dirección arbitraria del espacio conduce a la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \tag{2.24}$$

que permite ensayar soluciones en la forma:

$$p(\mathbf{x};\omega) = P\, e^{\mathrm{i}(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \tag{2.25}$$

[3] En un medio infinito no acotado solo existirá una onda que avanza en el sentido de alejarse de la fuente (plana en este caso) perturbadora.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

siendo **x** el vector posición y **k** un vector que define la dirección de propagación, tal que:

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \tag{2.26}$$

de modo que **k x** = *constante* corresponde a planos de fase constante, esto es, planos paralelos al frente de onda.

## 2.3 - MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA DEL SONIDO

### 2.3.1- INTENSIDAD ACÚSTICA

Se define la intensidad acústica $I$ de una onda como el promedio temporal de la potencia acústica transmitida a través de un área unitaria normal a la dirección de propagación (frente de onda) en una posición fija del espacio. En el sistema internacional se expresa en unidades de vatios por metro cuadrado ($W/m^2$):

$$I = \langle p\,v \rangle_t = \frac{1}{t}\int_0^t pv\,dt \tag{2.27}$$

La evaluación de (2.27) requiere el conocer la relación entre $p$ y $v$. En el caso de ondas planas esta relación acaba de ser evaluada $v = \pm p/\rho_o c$. Particularizando para la onda progresiva en régimen armónico:

$$I = \frac{1}{\rho_o c}\,\frac{1}{T}\int_0^T p^2 dt \tag{2.28}$$

La intensidad acústica para una onda plana puede escribirse como:

$$I = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_o c} = \langle v^2 \rangle \rho_o c \tag{2.29}$$

donde se han introducido la media cuadrática temporal

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p^2\,dt \tag{2.30}$$

Esta última expresión puede ser desarrollada. Sea una perturbación armónica que en un punto del espacio vibra con pulso $\omega$:

$$p = P\cos(\omega t) \qquad \langle p^2 \rangle = \frac{P^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

realizando el cambio de variable:

$$\alpha = \omega t \qquad ; \qquad T = \omega/2\pi$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} P^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \, \frac{d\alpha}{\omega}$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{P^2}{2} \tag{2.31}$$

$$I = \frac{P^2}{2\rho_o c} \tag{2.32}$$

Un aparato de medida evalúa usualmente la *amplitud efectiva* $P_e$, o raíz cuadrática media $\left\langle p^2 \right\rangle^{1/2}$. Para una onda armónica este valor es pues, en términos de la amplitud:

$$P_e = \frac{|P|}{\sqrt{2}} \tag{2.33}$$

Debe notarse que la expresión (2.27) es general, mientras que (2.32) es sólo de aplicación en el caso de ondas armónicas planas o en el de ondas divergentes a grandes distancias de la fuente perturbadora.

## 2.3.2- IMPEDANCIA ACÚSTICA ESPECÍFICA

Recibe este nombre el cociente entre la presión acústica en un medio y la velocidad asociada de partícula:

$$z = \frac{p}{v} \tag{2.34}$$

En el caso particular de ondas planas este cociente es un valor real que ya se ha obtenido anteriormente $z = \pm\rho_o c$, dependiendo el signo del sentido de la propagación. Es decir, en este caso la impedancia acústica específica coincide con la constante que hemos denominado *impedancia característica* $\rho_o c$, que tal como veremos posteriormente, define las propiedades acústicas del medio.

En un caso general de propagación $z$ será un valor complejo, recibiendo su parte real e imaginaria los nombres de *resistencia acústica específica* y *reactancia acústica específica,* respectivamente.

Particularizando para el aire como vehículo de la propagación, a una temperatura de 20ºC y presión atmosférica, el valor de la impedancia característica resulta ser:

$$\left(\rho_o c\right)_{20^0} = 415 \quad \text{Pa}\cdot\text{s/m}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 2.3.3- NIVELES DE PRESIÓN, POTENCIA E INTENSIDAD SONORA

La presión acústica es una variable fácilmente evaluable. Sin embargo, el oído humano no responde linealmente a la presión, sino que responde aproximadamente de forma lineal a la energía que le llega, siendo ésta proporcional al cuadrado de la presión acústica.

La mínima presión acústica que el oído humano puede detectar es de 20 μPa, mientras que el mayor valor soportable antes del dolor está en torno a 60 Pa. El rango de presiones es pues, como se observa, bastante amplio. El marcado rango dinámico del oído humano sugiere que se debe usar algún tipo de escala comprimida. Una escala adecuada para expresar el cuadrado de la presión acústica en unidades que se ajusten a la respuesta subjetiva del oído humano es la logarítmica, más que la lineal. Para evitar una escala demasiado comprimida se introduce un factor de 10, definiéndose el decibelio (dB).

El nivel de presión sonora $p$ se dice que es $L_p$ decibelios (dB) mayor o menor que una determinada presión de referencia $p_{ref}$ de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$L_p = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2 >}{< p_{ref}^2 >} \quad \text{(dB)} \tag{2.35}$$

donde la expresión de $\langle p^2 \rangle$ corresponde a la media cuadrática temporal definida en (2.30), que el caso armónico adopta el valor definido en (2.31).

Cuando se pretende determinar un valor absoluto (no relativo) del nivel de presión sonora, se utiliza como presión de referencia la mínima presión sonora que el oído humano normal puede detectar (20 μPa). El valor así obtenido se denomina *nivel de presión sonora* (en inglés sound pressure level, notado por las siglas *SPL*), que medido en decibelios es:

$$SPL = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2 >}{(20 \cdot 10^{-6})^2} = 10 \cdot \log_{10} < p^2 > - 20 \cdot \log_{10}(20 \cdot 10^{-6})$$

$$SPL = 10 \cdot \log_{10} < p^2 > + 94 \quad \text{(dB)} \tag{2.36}$$

Para un tono puro la expresión queda:

$$SPL = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{|P|^2}{2} \right) + 94 \quad \text{(dB)} \tag{2.37}$$

donde $|P|$ se mide en pascales. La siguiente tabla permite adquirir una idea aproximada del nivel de *molestia sonora* asociado a cada nivel de *SPL*.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

| *SPL* (dB) ref 20 μPa | descripción de la fuente | nivel subjetivo de sonoridad ambiental |
|---|---|---|
| 0 | umbral de audición | |
| 20 | estudio de grabación | muy silencioso |
| 40 | ambiente residencial tranquilo, conversación tranquila | silencioso |
| 60 | restaurante, centro comercial | ruidoso |
| 80 | grito, cercanías de autopista | |
| 100 | cadena en industria textil; taladro | muy ruidoso |
| 120 | concierto de rock cerca de los altavoces; sala de máquinas de un barco | intolerable |
| 140 | fuego de artillería en la posición de disparo | |

Tabla 2.1. Correlación sensación sonora – nivel de presión sonora *SPL* (dB).

Se puede definir también el *nivel de potencia sonora* $L_W$ *o PWL* (sound power level) mediante la siguiente relación:

$$L_w = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\text{Potencia sonora}}{\text{Potencia sonora de referencia}}\right) \tag{2.38}$$

Si se toma como potencia de referencia $10^{-12}$ W, que corresponde con la mínima potencia sonora que el oído humano normal puede detectar, la expresión anterior puede escribirse como sigue:

$$L_W = 10 \cdot \log_{10} W + 120 \quad \text{(dB)} \tag{2.39}$$

donde $W$ se mide en vatios.

De forma parecida, se define el *nivel de intensidad sonora* $L_I$ de la siguiente forma:

$$L_I = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\text{Intensidad sonora}}{\text{Intensidad sonora de referencia}}\right) \tag{2.40}$$

Si se toma como referencia el umbral de intensidad $10^{-12}$ W·m$^{-2}$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$L_I = 10 \cdot \log_{10} I + 120 \quad \text{(dB)} \tag{2.41}$$

donde I se mide en W·m$^{-2}$.

## 2.3.4- ANÁLISIS EN FRECUENCIA

El rango de frecuencias audible por una persona joven y sana se sitúa entre los 16 y los 30000 Hz. Es este, pues, un rango bastante amplio y, en general, cualquier *ruido* estará compuesto por una *adición* de multitud de componentes sonoras, vibrando cada una en distintas frecuencias a lo largo del rango de frecuencias audibles. La caracterización de un ruido requiere, por tanto, el conocimiento del nivel sonoro asociado a cada una de esas componentes mono-frecuencia. En la práctica, sin embargo, la gran extensión del rango de frecuencias aconseja resumir la información de modo que el rango de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

frecuencias es dividido en *bandas*. Cada banda de frecuencia (de amplitud variable) representa al conjunto de frecuencias que componen dicha banda. El ruido completo estará en la práctica bien representado si se conoce el nivel de intensidad sonora asociado a cada una de las bandas que componen el rango completo. Esta información es la que se conoce como *espectro* del ruido.

Dependiendo de su amplitud las bandas reciben la denominación de bandas de octava, bandas de tercio de octava, etc. Se dice que una banda tiene una amplitud de una octava cuando la frecuencia más alta de la banda, expresada en hertzios, es el doble que la frecuencia más baja. Si esta banda de octava, representada en escala logarítmica, la dividimos en tres partes iguales, obtenemos tres bandas de tercio de octava. El rango de frecuencias audible va a ser, pues, dividido bien en bandas de octava, bien en bandas de tercio de octava. Cada una de ellas está representada por el valor de su frecuencia central. Aunque la definición dada de bandas deja muy abierta la selección concreta de éstas, lo cierto es que la Internacional Standard Organization aconseja la armonización de bandas utilizadas en el análisis acústico. En la tabla siguiente se recogen las bandas de octava y de tercio de octava que habitualmente se utilizan:

| núm. de banda | Frecuencia central de banda de octava | Frecuencia central de banda tercio de octava | frecuencias límites de banda | |
|---|---|---|---|---|
| | | | inferior | superior |
| 14 | | 25 | 22 | 28 |
| 15 | 31.5 | 31.5 | 28 | 35 |
| 16 | | 40 | 35 | 44 |
| 17 | | 50 | 44 | 57 |
| 18 | 63 | 63 | 57 | 71 |
| 19 | | 80 | 71 | 88 |
| 20 | | 100 | 88 | 113 |
| 21 | 125 | 125 | 113 | 141 |
| 22 | | 160 | 141 | 176 |
| 23 | | 200 | 176 | 225 |
| 24 | 250 | 250 | 225 | 283 |
| 25 | | 315 | 283 | 353 |
| 26 | | 400 | 353 | 440 |
| 27 | 500 | 500 | 440 | 565 |
| 28 | | 630 | 565 | 707 |
| 29 | | 800 | 707 | 880 |
| 30 | 1000 | 1000 | 880 | 1130 |
| 31 | | 1250 | 1130 | 1414 |
| 32 | | 1600 | 1414 | 1760 |
| 33 | 2000 | 2000 | 1760 | 2250 |
| 34 | | 2500 | 2250 | 2825 |
| 35 | | 3150 | 2825 | 3530 |
| 36 | 4000 | 4000 | 3530 | 4400 |
| 37 | | 5000 | 4400 | 5650 |
| 38 | | 6300 | 5650 | 7070 |
| 39 | 8000 | 8000 | 7070 | 8800 |
| 40 | | 10000 | 8800 | 11300 |
| 41 | | 12500 | 11300 | 14140 |
| 42 | 10000 | 16000 | 14140 | 17600 |
| 43 | | 20000 | 17600 | 22500 |

Tabla 2.2. Bandas de octava, tercios de octava y frecuencias centrales de banda.

Se conoce como análisis en frecuencia a aquél que consiste en el estudio a cada una de las frecuencias del espectro. Se trata de un análisis del régimen permanente de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

perturbación acústica, teniendo presente que en el contexto de linealidad que se ha admitido cualquier respuesta temporal puede obtenerse a partir de la respuesta en frecuencia mediante series de Fourier.

El análisis, tal y como se ha dicho, exige en primer lugar la *discretización* del rango audible de frecuencias en un número finito de bandas (en este trabajo se han escogido bandas de tercio de octava). Una vez definidas las bandas, se elige una frecuencia representativa de cada una, que normalmente es la frecuencia central de la banda, por lo que se denominan frecuencias centrales de tercio de octava. Una vez obtenida la serie de frecuencias, se procede a obtener la respuesta del sistema frente a una excitación senoidal. La frecuencia de la senoide se irá variando de forma que se barra toda la serie de frecuencias. De esta forma se habrá obtenido la respuesta del sistema para cada una de las frecuencias centrales de tercio de octava.

El siguiente paso consistirá en componer todos estos datos para obtener la respuesta del sistema frente a la excitación real del problema en estudio. Para ello es necesario conocer el espectro de la fuente, que, como ya se ha dicho, no es más que la intensidad sonora de ésta en cada una de las bandas de frecuencia.

Otro aspecto que es necesario mencionar es el hecho de que el oído humano no responde por igual a todas las frecuencias. Es decir, el nivel subjetivo de sonoridad no sólo depende del nivel de presión sonora, sino también de la frecuencia. Por tanto, un sonido a una determinada frecuencia puede resultar más molesto que otro, de la misma intensidad que el primero, pero con otra frecuencia. Por ello se emplean correcciones (o ponderaciones) a los espectros, de forma que el espectro ponderado refleje mejor la forma subjetiva en que nos afectan las distintas frecuencias. Cuando se estudia control de ruidos se utiliza la corrección tipo A, definiéndose de esta forma el decibelio-A (dBA). La siguiente tabla recoge las correcciones a hacer en cada frecuencia central de tercio de octava para obtener un espectro ponderado tipo-A:

| frecuencia central (Hz) | corrección (dB) | frecuencia central (Hz) | corrección (dB) |
|---|---|---|---|
| 25 | -44.7 | 800 | -0.8 |
| 31.5 | -39.4 | 1000 | 0.0 |
| 40 | -34.6 | 1250 | 0.6 |
| 50 | -30.2 | 1600 | 1.0 |
| 63 | -26.2 | 2000 | 1.2 |
| 80 | -22.5 | 2500 | 1.3 |
| 100 | -19.1 | 3150 | 1.2 |
| 125 | -16.1 | 4000 | 1.0 |
| 160 | -13.4 | 5000 | 0.5 |
| 200 | -10.9 | 6300 | -0.1 |
| 250 | -8.6 | 8000 | -1.1 |
| 315 | -6.6 | 10000 | -2.5 |
| 400 | -4.2 | 12500 | -4.3 |
| 500 | -3.2 | 16000 | -6.6 |
| 630 | -1.9 | 20000 | -9.3 |

Tabla 2.3.Correcciones correspondientes a ponderación tipo A .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Existen diversos espectros normalizados para describir el ruido de tráfico. Se presenta a continuación el que ha sido utilizado en este trabajo:

| frecuencia (Hz) | *SPL* (dBA) |
|---|---|
| 63 | 75.3 |
| 80 | 80.0 |
| 100 | 83.3 |
| 125 | 85.7 |
| 160 | 88.2 |
| 200 | 89.8 |
| 250 | 91.0 |
| 315 | 91.7 |
| 400 | 92.9 |
| 500 | 94.5 |
| 630 | 95.9 |
| 800 | 97.0 |
| 1000 | 98.1 |
| 1250 | 98.2 |
| 1600 | 98.0 |
| 2000 | 96.2 |
| 2500 | 93.8 |
| 3150 | 91.6 |
| 4000 | 89.0 |

Tabla 2.4.Espectro normalizado de ruido de tráfico.

### 2.3.5- COEFICIENTE DE PÉRDIDA POR INSERCIÓN

El título de esta monografía hace referencia al uso de estrategias para reducir el nivel de ruido en el entorno de carreteras. Entre éstas, sin duda, la más generalizada es la interposición de pantallas acústicas entre la fuente (vía de tráfico) y el receptor. La pantalla dificulta la propagación acústica hacia el receptor, pues ocasiona que parte de la onda incidente sea reflejada por el nuevo obstáculo. Sólo una fracción de la onda acústica es capaz de difractarse sobre la pantalla (la transmisión a través de la pantalla es en la práctica despreciable). El resultado obvio es que en la localización del receptor, el nivel de ruido que se registra al interponer la barrera es inferior al que se registraría en la situación sin barrera. La medida en decibelios de la reducción obtenida por interponer la barrera es una buena forma de evaluar la eficacia de dicha estrategia. Se conoce como *pérdida por inserción de la pantalla IL* (Insertion Loss en terminología inglesa) a la diferencia de nivel de presión sonora antes y después de introducir la medida correctora. El *IL* es un parámetro muy utilizado en la evaluación de medidas de control de ruido, y en el capítulo 5 será utilizado para presentar los resultados. Matemáticamente se define como:

$$IL = SPL_{después} - SPL_{antes}$$

$$IL = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2_{después} >}{< p^2_{ref} >} - 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2_{antes} >}{< p^2_{ref} >}$$

$$IL = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2_{después} >}{< p^2_{antes} >} \quad \text{(dB)} \qquad (2.42)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 2.3.6- COMPOSICIÓN DE NIVELES SONOROS PROVOCADOS POR FUENTES NO COHERENTES

Cuando existe más de una fuente sonora y éstas no están en fase o tienen distinta frecuencia se dice que dichas fuentes son incoherentes. Un caso análogo se produce cuando el espectro de la fuente contiene múltiples armónicos que vibran con desfases aleatorios. En estos casos se puede calcular el nivel de presión sonora total aplicando el principio lineal de adición de energía (que es proporcional al cuadrado de la presión). De este modo, una vez conocida la presión media cuadrática de cada armónico $\langle p_i^2 \rangle$, se obtiene la presión media cuadrática total como la suma de las correspondientes a cada frecuencia:

$$< p^2 >= \sum_i < p_i^2 >$$

y por tanto el nivel de presión sonora $SPL$ total:

$$SPL_{total} = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p^2 >}{< p_{ref}^2 >} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\sum_i < p_i^2 >}{< p_{ref}^2 >} \quad \text{(dB)} \qquad (2.43)$$

## 2.3.7- COEFICIENTE DE PÉRDIDA POR INSERCIÓN MEDIO ESPECTRAL

En este apartado afrontamos el cálculo del coeficiente de inserción global cuando se conocen los coeficientes de inserción para cada frecuencia y el espectro en frecuencia de una fuente genérica. De acuerdo con (2.31) el coeficiente de inserción para un tono puro puede escribirse como:

$$IL_i = 10 \cdot \log_{10} \frac{< p_i^2 >}{< p_i^{*2} >} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|P_i|^2 / 2}{|P_i^*|^2 / 2} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|P_i|^2}{|P_i^*|^2} \qquad (2.44)$$

donde se ha notado con el símbolo * a la presión inicial, es decir, antes de que se introduzca la medida correctora del ruido. El subíndice $i$ alude a la frecuencia pura a la que se está realizando el cálculo. El valor absoluto de la presión sonora total puede ser calculado a partir del valor absoluto de la presión sonora originada a cada una de las frecuencias:

$$\begin{aligned} < p^2 >&= \sum_i < p_i^2 > \\ |P|^2 &= \sum_i |P_i|^2 \end{aligned} \qquad (2.45)$$

Introduzcamos el coeficiente $\alpha_i$ como el porcentaje de presión sonora aportada en la fuente por la frecuencia $i$ a la presión sonora total:

$$\alpha_i = \frac{|P_i|^2}{|P|^2} = \frac{|P_i|^2}{\sum_i |P_i|^2} = \frac{10^{\frac{IL_i}{10}}}{\sum_i 10^{\frac{IL_i}{10}}} \qquad (2.46)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

El espectro que define una fuente sonora normalmente contiene los niveles de presión sonora originados por dicha fuente a un metro de distancia. Estos datos se obtienen experimentalmente en campo con un sonómetro. Introduciendo estos valores en la fórmula anterior se obtienen los coeficientes $\alpha_i$ de la fuente sonora.

Conocidos los valores $\alpha_i$ se procede a calcular el *peso* de cada armónico en el receptor:

$$\left|P_i^*\right|^2 = \alpha_i \cdot \left|P^*\right|^2 \tag{2.47}$$

Despejando de la fórmula (2.41) se obtiene la siguiente relación:

$$\left|P_i\right|^2 = \left|P_i^*\right|^2 \cdot 10^{\frac{IL_i}{10}} \tag{2.48}$$

Partiendo de la ecuación (2.45) y sustituyendo en ella las dos últimas relaciones puede escribirse:

$$\left|P\right|^2 = \sum_i \left|P_i\right|^2 = \sum_i \left|P_i^*\right|^2 \cdot 10^{\frac{IL_i}{10}} = \sum_i \alpha_i \cdot \left|P^*\right|^2 \cdot 10^{\frac{IL_i}{10}} \tag{2.49}$$

Sustituyendo ahora la expresión anterior en la definición del $IL$ total obtenemos finalmente:

$$IL = 10 \cdot \log_{10} \frac{\sum_i \alpha_i \cdot \left|P^*\right|^2 \cdot 10^{\frac{IL_i}{10}}}{\left|P^*\right|^2}$$

$$IL = 10 \cdot \log_{10} \left( \sum_i \alpha_i \cdot 10^{\frac{IL_i}{10}} \right) \quad \text{(dB)} \tag{2.50}$$

Expresión que permite obtener coeficiente $IL$ medio espectral a partir de los $IL_i$ de cada componente del espectro.

## 2.4 - CONDICIONES DE CONTORNO

La integración de la ecuación de onda (2.24) requiere la imposición de condiciones de contorno. Las condiciones posibles son:

- Presión conocida en el contorno. Este es el caso de un contorno radiante, es decir, un contorno que pulsa con una amplitud de onda determinada.
- Flujo de presión conocido en el contorno. El ejemplo más frecuente corresponde a un flujo de valor nulo, lo cual es representativo de un contorno completamente reflejante.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

- Contorno parcialmente absorbente. Es la condición más habitual y se presenta cuando el contorno es capaz de absorber (sin reflejar) parte de la energía acústica que le llega.

El apartado siguiente está dedicado a la obtención de la relación matemática entre la presión y el flujo de presión, válida para un contorno absorbente en el caso de incidencia normal. Veremos que presión y flujo normal están relacionados a través del coeficiente de absorción del contorno. Finalmente, el último apartado de este capítulo presenta una metodología para dar valor numérico a dicho coeficiente en función de las propiedades de ambos medios.

### 2.4.1- PROBLEMA MONODIMENSIONAL DE INTERACCIÓN ENTRE DOS FLUIDOS

Sean dos medios fluidos en contacto a través de una interfase plana. Sea una onda armónica plana que se propaga en el primero de ellos (medio 1) con pulso $\omega$ en dirección al segundo (medio 2) perpendicularmente a la interfase común (fig. 2.3). Las propiedades acústicas de ambos fluidos están caracterizadas por las respectivas impedancias acústicas características: $r_1 = \rho_o c$ en el medio 1 (para nosotros el aire) y $r_2 = \rho_2 c_2$ en el medio 2. Cuando la onda incidente alcanza la interfase se genera una onda reflejada en el medio 1 y otra transmitida hacia el medio 2. En las condiciones descritas, obviamente, la onda reflejada y la transmitida serán también ondas planas propagándose perpendicularmente a dicha interfase, por lo que el problema es monodimensional.

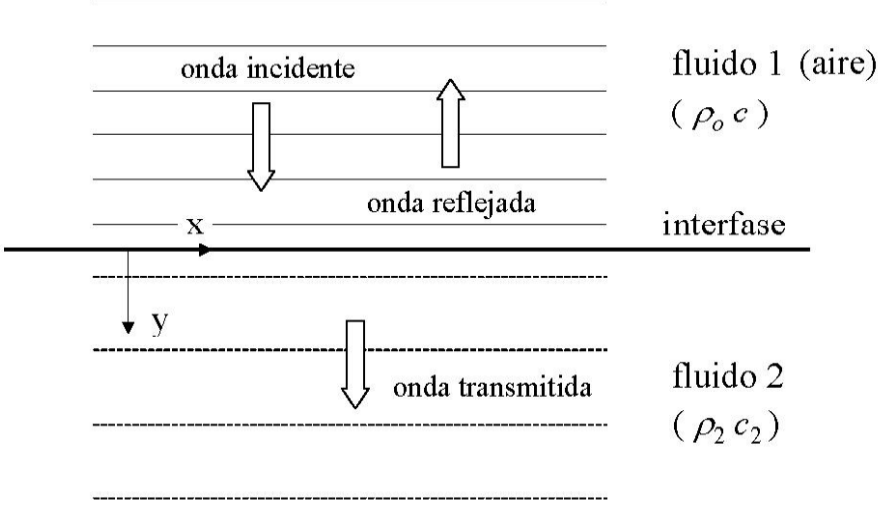



Figura. 2.3. Transmisión y reflexión de ondas planas. Incidencia normal.

En estado permanente, la onda completa de presión en el fluido 1 es la suma, pues, de una onda incidente $p_i$ y una onda reflejada $p_r$ por el contorno. Una vez pasado al

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

dominio de la frecuencia, utilizando notación compleja y omitiendo la variación temporal $e^{i\omega t}$ puede escribirse:

$$p_i(y;\omega) = P_i(\omega)e^{-iky}$$

$$p_r(y;\omega) = P_r(\omega)e^{iky}$$

$$p(y;\omega) = p_i(y;\omega) + p_r(y;\omega) \tag{2.51}$$

siendo $k = \omega/c$ el número de onda en el primer medio. En el medio 2 solo existe onda transmitida $\Box_t$:

$$p_t(y;\omega) = P_t(\omega)e^{-iky} \tag{2.52}$$

siendo $k_2 = \omega/c_2$ el número de onda en el medio 2, y donde los signos de los exponentes se han elegido de acuerdo al sentido de avance de cada onda. La naturaleza plana de las ondas permite escribir, para cada una de ellas (de acuerdo con (2.23)):

$$\frac{p_i}{v_i} = r_1 \quad , \quad \frac{p_r}{v_r} = -r_1 \quad , \quad \frac{p_t}{v_t} = r_2 \tag{2.53}$$

Nótese que la onda transmitida vibra con la misma frecuencia $\omega$ que la incidente, pero se produce un cambio en el número de onda por la diferencia entre las velocidades de propagación en ambos medios. En la interfase común ($y = 0$) deben imponerse las siguientes condiciones ($\forall x$ y $\forall t$):

*Equilibrio*, que exige igualdad de presión a ambos lados de la interfase:

$$p_i(0;\omega) + p_r(0;\omega) = p_t(0;\omega) \tag{2.54}$$

*Continuidad de velocidades* normales, condición que asegura el contacto entre fluidos:

$$v_i(0;\omega) + v_r(0;\omega) = v_t(0;\omega) \tag{2.55}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{p_i + p_r}{v_i + v_r} = \frac{p_t}{v_t} \quad \text{en } y = 0 \tag{2.56}$$

lo cual implica la continuidad de la impedancia acústica específica normal a lo largo de la interfase. La sustitución de las relaciones (2.54) en (2.56) conduce a:

$$r_1 \frac{p_i + p_r}{p_i - p_r} = r_2 \tag{2.57}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Es posible obtener una relación entre la presión acústica y el flujo de presión en la interfase aplicando las relaciones (2.19), (2.53) y (2.56). Así:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{i}\rho_o\,\omega v = -\mathrm{i}k\,r_1\,v$$

$$\frac{p(0;\omega)}{v(0;\omega)} = -\frac{p(0;\omega)\,\mathrm{i}k\,r_1}{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}(0;\omega)} = \frac{p_t(0;\omega)}{v_t(0;\omega)} = r_2$$

y finalmente:

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{i}k\frac{r_1}{r_2}\,p\right)_{y=0} \tag{2.58}$$

y en general para cualquier dirección $\eta$ normal a la interfase:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta} = -\mathrm{i}k\,\beta\,p \tag{2.59}$$

donde se ha introducido la admitancia $\beta$ del contorno:

$$\beta = \frac{r_1}{r_2} \tag{2.60}$$

La expresión (2.59) es aplicable cuando el medio 2, en lugar de un fluido, es un sólido poroso, si bien en este caso la impedancia acústica específica $r_2$ que lo caracteriza y, por tanto, la admitancia $\beta$, pasan a ser (en general) números complejos (Delany y Bazley, 1970).

Suele definirse el coeficiente de reflexión $c_r$ del contorno como:

$$c_r = \frac{p_r}{p_i} \tag{2.61}$$

La sustitución de (2.57) en (2.61) permite obtener la siguiente expresión del coeficiente de reflexión en función de la admitancia:

$$c_r = \frac{1-\dfrac{r_1}{r_2}}{1+\dfrac{r_1}{r_2}} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{2.62}$$

Deducimos que $c_r$ es real si $r_1$ y $r_2$ lo son: positivo si $r_1 < r_2$ y negativo si $r_1 > r_2$. Por tanto, en la interfase la presión acústica de la onda reflejada está en fase o en desfase de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

180° con la de la onda incidente. El caso $r_1 = r_2$ corresponde a $c_r = 0$, esto es, transmisión de toda la onda incidente.

Resulta necesario en muchas ocasiones cuantificar la proporción de energía incidente que es capaz de absorber el contorno, es decir, la proporción de energía incidente que es transmitida hacia el segundo fluido. Se define el *coeficiente de absorción* $\alpha$ de energía del contorno:

$$\alpha = \frac{\text{energía transmitida}}{\text{energía incidente}} \tag{2.63}$$

Se debe cumplir el principio de conservación de la energía, luego $\alpha$ puede expresarse también como:

$$\alpha = 1 - \frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} \tag{2.64}$$

Como la energía es proporcional al cuadrado de la presión puede escribirse:

$$\alpha = 1 - \frac{p_r^2}{p_i^2} = 1 - c_r{}^2 \tag{2.65}$$

Sustituyendo (2.62) en (2.65) se obtiene finalmente la expresión del coeficiente de absorción de energía del contorno en función de la admitancia:

$$\alpha = 1 \quad \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \tag{2.66}$$

Finalizamos este apartado generalizando esta expresión al caso de un sólido poroso ($\beta$ en general complejo). El significado de coeficiente de absorción aconseja mantener para $\alpha$ un valor real. Podemos tomar entonces:

$$\alpha = 1 - \left| \frac{1-\beta}{1+\beta} \right|^2 \tag{2.67}$$

## 2.4.2- MODELO DE DELANY Y BAZLEY

La aplicación de la expresión (2.59) como condición en contornos absorbentes requiere estimar el valor de la admitancia $\beta$ del contorno. Para ello, un modelo ampliamente utilizado por muchos autores es el que se debe a Delany y Bazley (1970). Estos investigadores propusieron una relación empírica para determinar la admitancia de un contorno en el caso de materiales porosos (normalmente utilizados como materiales absorbentes). Dicha relación responde a la expresión:

$$\frac{1}{\beta} = 1 + 9.08 \cdot \left( 10^3 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.75} - \mathrm{i} \cdot 11.9 \left( 10^3 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.73} \tag{2.68}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

donde $f$ representa la frecuencia de excitación en hertzios y $\sigma$ la resistividad al flujo de aire del material (inversa de la permeabilidad del medio) ($Nsm^{-4}$ en unidades del S.I.). Este último parámetro es una variable que depende de las características del material que constituye el medio absorbente. La relación (2.68) se entiende para medios de espesor grande y es válida para valores de $\sigma$ comprendidos entre $10^3$ y $5\times10^5$ $Nsm^{-4}$.

Sin embargo, en muchas aplicaciones, y como recubrimiento de superficies reflejantes, se utilizan materiales absorbentes de espesor relativamente pequeño. En este caso la admitancia de estos contornos responde a la expresión:

$$\beta_e = \beta \tanh(\gamma e) \tag{2.69}$$

siendo $\beta$ la admitancia obtenida de la expresión (2.68), $e$ el espesor del recubrimiento en metros y $\gamma$ el número de onda asociado a la propagación en el medio absorbente, que responde a la ecuación:

$$\frac{\gamma}{k} = 10.3\left(10^3\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.59} + \mathrm{i}\left[1+10.8\left(10^3\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.70}\right] \tag{2.70}$$

siendo $k$ el número de onda de la propagación en el aire. Una vez obtenida la admitancia, se puede calcular el coeficiente de absorción de energía del contorno $\alpha$ en base a la ecuación (2.67).

Todas las relaciones planteadas asumen la incidencia normal de una onda plana sobre el contorno, situación que normalmente dista mucho de la que se presenta en un caso práctico real. En este sentido, puede adaptarse un coeficiente de absorción que tenga en cuenta que la energía incide sobre el contorno en todas direcciones. Así, Morse y Bolt (1944) han propuesto un coeficiente estadístico de absorción $\alpha_{st}$ (muy utilizado en acústica de interiores) y que caracteriza el comportamiento absorbente de los materiales utilizados como recubrimiento. Esta variable puede obtenerse a partir de la *impedancia normal* del contorno $Z = 1/\beta$ a través de la expresión:

$$\alpha_{st} = \frac{8\cos\theta}{\xi}\left\{1-\frac{\cos\theta}{\xi}\ln\left(1+2\xi\cos\theta+\xi^2\right)+\frac{\cos 2\theta}{\xi\,\mathrm{sen}\,\theta}\tan^{-1}\frac{\xi\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+\xi\cos\theta}\right\} \tag{2.71}$$

donde si $Z/\rho c = R + \mathrm{i}X$, $\xi^2 = R^2 + X^2$ y $\theta = \tan^{-1}(X/R)$.

Una vez conocido el coeficiente estadístico de absorción de energía puede calcularse el valor de la admitancia a partir de la expresión (2.66):

$$\beta = \frac{1-\sqrt{1-\alpha_{st}}}{1+\sqrt{1-\alpha_{st}}} \tag{2.72}$$

que, obviamente, es un valor real, a diferencia de los obtenidos por las expresiones (2.68) ó (2.69) que en general son variables complejas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 3
# REPRESENTACIÓN INTEGRAL Y ELEMENTOS DE CONTORNO EN PROBLEMAS ESCALARES

## 3.1 - INTRODUCCIÓN

Como ya hemos comentado en la introducción a esta Memoria, la primera aplicación de procedimientos numéricos basados en la ecuación integral en el contorno se realiza para el estudio de problemas de propagación de ondas acústicas. Desde finales de la década de los setenta, la formulación directa del Método de los Elementos de Contorno se ha impuesto como técnica numérica para la resolución de la ecuación integral en problemas escalares y elásticos tanto en estática como en dinámica. Como veremos en este capítulo, este planteamiento en el contorno presenta algunas ventajas frente a los métodos de dominio. Teniendo en cuenta que sólo es necesario discretizar el contorno del modelo, lo hace especialmente apto para la resolución de problemas dinámicos en dominios infinitos. Entre sus desventajas, está su incapacidad para hacer frente a problemas no lineales apelando sólo a integrales en el contorno. En cualquier caso, para el problema que analizamos en este trabajo, es el método más adecuado.

En este capítulo presentaremos las ideas básicas que permitirán al lector iniciarse en la comprensión del Método de los Elementos de Contorno. Iniciaremos el capítulo con la obtención de la expresión integral para problemas armónicos escalares (teorema de Green) que sirve de base teórica para la formulación del método y estudiaremos brevemente algunas ideas básicas relacionadas con los fenómenos de propagación en campo abierto. Los conceptos básicos serán planteados para problemas bi y tridimensionales, si bien la formulación propia del MEC se realizará sólo para el supuesto bidimensional.

## 3.2 - ECUACIONES BÁSICAS

Como ya desarrollamos en el capítulo anterior, la ecuación que gobierna la propagación de ondas de presión en un medio homogéneo, no viscoso y lineal en el dominio de la frecuencia responde a la ecuación:

$$\nabla^2 p + k^2 p + \frac{1}{c^2} b = 0 \qquad (3.1)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

donde $k$ representa el número de onda ($\omega$ /$c$) y $c$ la velocidad de propagación que depende de las características termodinámicas del medio. El tercer término está relacionado con la presencia de fuentes de presión internas.

La solución de cualquier problema de acústica en el dominio de la frecuencia habrá de verificar (3.1) y cumplir con las condiciones impuestas en los contornos del dominio en estudio. En lo que se refiere a ellas, pueden ser de tres tipos:

$$p = \bar{p}: \quad \text{presión conocida (condición tipo Dirichlet)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \bar{q}: \quad \text{flujo conocido (condición tipo Neumann)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\mathrm{i}\, k\, \beta\, p: \quad \text{condición mixta (condición tipo Robin)}$$

Esta última condición nos es familiar ya que fue obtenida en el capítulo anterior y representa la relación entre flujo y presión en la interfase de dos fluidos diferentes para un problema de propagación monodimensional. Depende del número de onda y de la admitancia $\beta$ del contorno, siendo $n$ la normal al mismo. Si $\beta = 0$, nos encontramos ante un contorno acústicamente rígido. Si $\beta = 1$, toda la energía incidente en dicho contorno sale del dominio en estudio. En otras palabras, este tipo de contornos el coeficiente de reflexión es nulo. Desde el problema de propagación monodimensional visto en el capítulo anterior, $\beta = 1$ implica que ambos medios tienen idénticas propiedades. En general, $\beta$ es una variable compleja que depende de las características del contorno (Delany y Bazley,1970).

Ya vimos en el capítulo anterior que esta condición de tipo Robin es rigurosa en el caso de propagación plana normal al contorno. No se cumple siquiera para un problema de propagación plana donde la dirección de propagación de la onda no sea perpendicular al contorno. Esta condición, por tanto, implica una simplificación de la realidad del problema pero, sin embargo, es asumida por la mayor parte de los estudios realizados sobre el particular.

Con lo anterior y para el problema exterior, la solución habrá de cumplir las condiciones de radiación en el infinito, condición de radiación de Sommerfeld, que para problemas *n-dimensionales* (generalizada por Rellich) se expresa matemáticamente como sigue:

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\partial p}{\partial r} + \mathrm{i}\, k\, p \right) = 0 \tag{3.2}$$

Justificaremos e interpretaremos estas ecuaciones en apartados posteriores de este capítulo.

Así, la función $p$ que cumpla simultáneamente (3.1) y las condiciones de contorno impuestas constituye la solución del problema, si bien su obtención analítica se presenta, en casi la totalidad de los casos, como un problema inabordable. En este sentido, el planteamiento numérico del problema es la única actuación viable y la formulación que se presenta, un camino muy adecuado para acometerlo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 3.3 - RELACIÓN DE RECIPROCIDAD

El planteamiento de una relación de reciprocidad para el problema dinámico análoga a la establecida por el teorema de Green para el problema estático (ecuación de Poisson), representa el punto de partida para obtener la formulación integral en el contorno cuya solución numérica se abordará mediante el MEC. En este apartado obtendremos la expresión matemática de esta relación de reciprocidad planteando el procedimiento de los residuos ponderados sobre la ecuación diferencial de gobierno del problema (3.1) (ver p.e. Brebbia y Domínguez, 1989).

En este procedimiento se plantea la búsqueda de una solución del problema que anule la integral de volumen del residuo ponderado por una campo virtual de presiones $p^*$ a la que sólo se exige, por el momento, que pueda ser derivada. Así:

$$\int_\Omega \left( \nabla^2 p + k^2 p + \frac{1}{c^2} b \right) p^* \, d\Omega = 0 \tag{3.3}$$

Integrando por partes dos veces, podemos escribir el término correspondiente a la laplaciana de la presión como sigue:

$$\int_\Omega p^* \nabla^2 p \, d\Omega = \int_\Omega (p^* p_{,i} - p^*_{,i} \, p)_{,i} \, d\Omega + \int_\Omega p \, \nabla^2 p^* d\Omega \tag{3.4}$$

Aplicando el teorema de la divergencia sobre la primera integral de dominio del segundo miembro, escribiremos (3.4) como sigue:

$$\int_\Omega p^* \nabla^2 p \, d\Omega = \int_\Gamma (p^* p_{,i} - p^*_{,i} \, p) \, n_i \, d\Gamma + \int_\Omega p \, \nabla^2 p^* d\Omega \tag{3.5}$$

donde $\Gamma$ representa el contorno del dominio analizado y $n_i$ las componentes del vector normal unitario en puntos del mismo. Por tanto si tenemos en cuenta que:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = p_{,i} \, n_i \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial p^*}{\partial n} = p^*_{,i} \, n_i \tag{3.6}$$

fácilmente podemos escribir (3.5) de la forma siguiente:

$$\int_\Omega p^* \nabla^2 p \, d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} \, p^* d\Gamma - \int_\Gamma p \, \frac{\partial p^*}{\partial n} \, d\Gamma + \int_\Omega p \, \nabla^2 p^* d\Omega \tag{3.7}$$

Sustituyendo esta expresión en el planteamiento residual inicial (3.3):

$$\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} \, p^* d\Gamma - \int_\Gamma p \, \frac{\partial p^*}{\partial n} \, d\Gamma + \int_\Omega (\nabla^2 p^* + k^2 p^*) \, p \, d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{c^2} \, b \, p^* d\Omega = 0 \tag{3.8}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En esta situación, introducimos una segunda exigencia a la función $p^*$. Así, este campo de presiones virtual habrá de verificar la ecuaciones de gobierno del problema real en su formulación genérica. Por tanto:

$$\nabla^2 p^* + k^2 p^* = -\frac{1}{c^2} b^* \tag{3.9}$$

y podemos escribir (3.8), luego de ordenarla, como sigue:

$$\int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_\Omega \frac{1}{c^2} b^* p \, d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma + \int_\Omega \frac{1}{c^2} b \, p^* d\Omega \tag{3.10}$$

Esta ecuación constituye la relación de reciprocidad buscada y representa el punto de partida para la aplicación del MEC. Nótese como, a diferencia del MEF, no se impone el cumplimiento de las condiciones de contorno a la solución buscada. En este caso, la condición impuesta a la solución (o función de ponderación luego del proceso de integración por partes) es relativa al cumplimiento de la ecuación de gobierno del problema de tal forma que sólo es desconocido su comportamiento en el contorno (ver p.e. Brebbia y Walker, 1980 ó Brebbia y Domínguez, 1989).

Esta relación de reciprocidad (3.10) puede convertirse en una igualdad integral que afecta sólo a los contornos del dominio en estudio. Para ello, habrá que elegir una función de ponderación $p^*$ adecuada que verifique (3.9) y que denominaremos *solución fundamental*. A ella dedicaremos el próximo apartado de este capítulo.

## 3.4 - SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

Como punto de partida comenzaremos por considerar que no existen fuentes internas de presión en el problema real a resolver. Así, la ecuación (3.10) queda como sigue:

$$\int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_\Omega \frac{1}{c^2} b^* p \, d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \tag{3.11}$$

En este punto, y según los comentarios realizados en el apartado anterior, consideraremos la función de peso $p^*$ como el campo de presiones provocado por una función delta de Dirac aplicada en una región virtual de iguales propiedades que la analizada en el problema real en la que no se tienen en cuenta las condiciones de contorno de ésta (fig.3.1). Por tanto, según (3.9) $p^*$ sólo habrá de verificar la ecuación de gobierno del problema:

$$\nabla^2 p^* + k^2 p^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0 \tag{3.12}$$

Esta función delta de Dirac es singular en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ y vale cero en el resto de puntos del dominio. Su integral de volumen extendida a todo el dominio es igual a la unidad. Desde un punto de vista matemático, esta función delta de Dirac puede interpretarse como el límite de una función impulso rectangular cuando la dimensión de su base tiende a cero. Físicamente representa una fuente puntual armónica que pulsa a la misma

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

frecuencia que el problema real, aplicada en un punto de coordenadas $\mathbf{x}_i$ que, por ahora, consideraremos interior al dominio real en estudio (Fig.3.1). Así, y teniendo en cuenta estas propiedades de la función delta de Dirac, la integral de volumen correspondiente a (3.11) puede escribirse como sigue:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b^* p \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \, p \, d\Omega - p_i \tag{3.13}$$

Con lo que la relación de reciprocidad es ahora:

$$p_i + \int_{\Gamma} p \frac{\partial p^*}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \tag{3.14}$$

Esta expresión ya es muy cercana a la identidad integral necesaria para el tratamiento numérico del problema en variables del contorno. Ahora (3.14) permite obtener, a través de la solución fundamental, el valor de la presión acústica en cualquier punto interno del dominio conocido su valor y el de su derivada en el contorno del mismo.

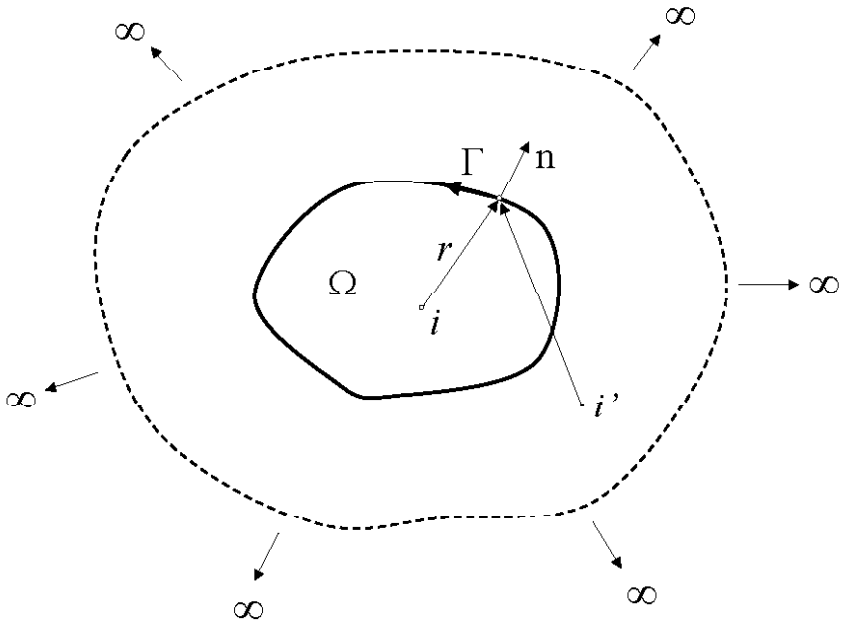



Figura 3.1. Ecuación Integral y Solución Fundamental.

La solución fundamental que corresponde a la solución de (3.12) en problemas armónicos escalares bi y tridimensionales, se escribe a continuación:

$$p^*(k,r) = \frac{1}{2\pi} K_o(\mathrm{i}kr) \qquad \text{problemas 2D} \tag{3.15a}$$

$$p^*(k,r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\mathrm{i}kr} \qquad \text{problemas 3D} \tag{3.15b}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

dónde, como hasta ahora, $k$ representa el número de onda, i es la unidad imaginaria y $r$ la distancia entre el punto $i$ de aplicación de la fuente puntual (punto de colocación) y el punto donde se desea calcular el valor de la variable $p^*$ (punto de observación) (Fig.3.1). Para el problema bidimensional $K_o$ es la función modificada de Bessel de segunda especie y orden cero cuyo argumento es '$ikr$' (ver Abramowitz y Stegun, 1970).

Es sencillo demostrar que las expresiones de la solución fundamental dadas por (3.15) verifican la ecuación homogénea de gobierno (3.12) para $r \neq 0$. El lector puede hacerlo como ejercicio. Esta demostración en el entorno de la singularidad ($r = 0$), es algo más compleja conceptualmente. En este caso, y teniendo en cuenta la definición de la función impulso, lo único que puede hacerse es comprobar que estas expresiones verifican en el límite la integral de dominio de (3.12) en un círculo de radio $\varepsilon \to 0$ que encierra la singularidad (ver J. Domínguez, 1993).

Por otra parte, las derivadas según la normal al contorno de la solución fundamental serán:

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{ik}{2\pi} K_1(ikr) \frac{\partial r}{\partial n} \qquad \text{problemas 2D} \qquad (3.16a)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \qquad \text{problemas 3D} \qquad (3.16b)$$

donde $K_1$ es también una función modificada de Bessel de segunda especie y orden uno. El resto de variables ya son conocidas para nosotros.

Por otra parte, y si hasta aquí se comprenden las características de esta formulación, podemos plantear la posibilidad de *colocar* la fuente de presión en un punto de espacio virtual exterior al dominio en estudio ($i'$ en Fig.3.1). En este caso se anula la integral de volumen correspondiente de (3.11) y la relación de reciprocidad adopta la forma:

$$\int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \qquad (3.17)$$

Sin embargo, y a pesar de ser rigurosamente cierta, esta versión de la relación de reciprocidad tiene un uso más limitado.

Ampliando el planteamiento inicial de este apartado, y como veremos más adelante, el problema que pretendemos resolver numéricamente presenta una fuente de presión interna (delta de Dirac) en un punto $\mathbf{x}_0$. Por tanto, en la relación de reciprocidad (3.10), teniendo en cuenta lo visto, la integral de volumen correspondiente podrá escribirse de la siguiente forma:

$$\int_\Omega \frac{1}{c^2} b\, p^* d\Omega = \int_\Omega \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\, p^* d\Omega = p_o^* \qquad (3.18)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

donde $p_o^*$ es el valor de la solución fundamental en el punto $\mathbf{x}_0$ donde se sitúa la fuente puntual en el problema real. Con todo ello, la relación de reciprocidad adopta la forma:

$$p_i + \int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma = p_o^* + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \tag{3.19}$$

y que será la expresión que emplearemos en adelante como punto de partida en la formulación del MEC.

## 3.5 - IGUALDAD INTEGRAL EN EL CONTORNO

La ecuación (3.19) obtenida en el apartado anterior aún implica valores de la variable en puntos interiores al dominio analizado. De cualquier forma, como ya hemos comentado, es de gran utilidad si se pretenden obtener los valores de la presión acústica en puntos internos conocidos los valores que adopta esta variable en el contorno. Obtener una igualdad integral que implique sólo a puntos del contorno, requiere de la aplicación de la fuente puntual en puntos del mismo. Existen, sin embargo, algunas dificultades operacionales cuando situamos el punto $\mathbf{x}_i$ sobre el contorno $\Gamma$ del problema. En esta situación las expresiones de los integrandos de (3.19) son singulares en el punto de colocación.

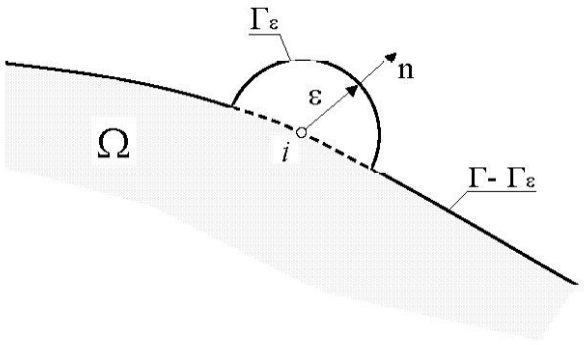



Figura 5.2. Igualdad integral en el contorno

La estrategia que permite esquivar la singularidad a la hora de evaluar las integrales de contorno, consiste en recrecer infinitesimalmente el dominio en el entorno del punto de colocación mediante un contorno circular de radio $\varepsilon$. Con ello, el punto de colocación es interno al dominio y será de aplicación (3.19). Representaremos ahora las integrales de contorno en esta ecuación como la suma de otras dos extendidas a los contornos $\Gamma$-$\Gamma_\varepsilon$ y $\Gamma_\varepsilon$ respectivamente:

$$p_i + \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma = p_o^* + \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \tag{3.20}$$

Para que esta igualdad implique sólo variables del contorno, será necesario estudiar el comportamiento de estas integrales cuando $\varepsilon$ tiende a cero. Las primeras integrales no presentan problemas ya que el contorno sobre el que se extienden no incluye la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

singularidad. Por otra parte y como veremos a continuación, las extendidas al contorno infinitesimal $\Gamma_\varepsilon$ están perfectamente acotadas en el límite.

Así, para las integrales extendidas al contorno diferencial, distinguiremos entre aquella que incorpora en su integrando la solución fundamental en presiones $p^*$ y aquella que tiene que ver con su derivada respecto de la normal. La primera, para problemas 2D, teniendo en cuenta (3.15) y la posibilidad de un punto de colocación anguloso (Fig.3.3):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial n}\,p^*\,d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial n}\,\frac{1}{2\pi}\,K_o\left(\mathrm{i}\,k\,\varepsilon\right)\varepsilon\;d\alpha \tag{3.21}$$

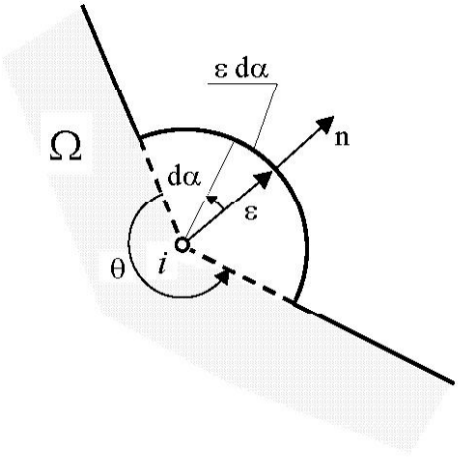



Figura 3.3. Término Libre. Cálculo de las integrales en el entorno de la singularidad.

En (3.21) ε es constante. Asimismo en el límite la variable de campo es constante y con el valor que adopta en el punto de colocación. Por tanto podemos escribir (3.21) como sigue:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial n}\,p^*\,d\Gamma=\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_i\frac{\alpha}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[K_o\left(\mathrm{i}\,k\,\varepsilon\right)\varepsilon\right] \tag{3.22}$$

donde $\alpha$ es el ángulo exterior de la esquina en radianes (Fig.3.3). Teniendo en cuenta la expresión de $K_o\left(\mathrm{i}\,k\,\varepsilon\right)$ en el límite (ver Abramowitz y Stegun, 1970), podemos concluir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial n}\,p^*\,d\Gamma=\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_i\frac{\alpha}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[Ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon\right]=0 \tag{3.23}$$

Por otra parte, la integral que incorpora la derivada de la solución fundamental tiene un comportamiento diferente. Así, realizando un proceso análogo, podemos escribir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}p\,\frac{\partial p^*}{\partial n}\,d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\alpha}p\,\frac{\left(-\mathrm{i}\,k\right)}{2\pi}\,K_1\left(\mathrm{i}\,k\,\varepsilon\right)\frac{\partial r}{\partial n}\,\varepsilon\;d\alpha \tag{3.24}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Para el contorno circular $\Gamma_\varepsilon$ se cumple además que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i}\, n_i = 1 \tag{3.25}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $K_1(\mathrm{i}k\varepsilon)$ (ver Abramowitz y Stegun, 1970) y lo visto anteriormente, podemos desarrollar (3.24) como sigue:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} p\,\frac{\partial p^*}{\partial n}\,d\Gamma = p_i\,(-\mathrm{i}k)\frac{\alpha}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{i}k\varepsilon}\,\varepsilon\right) = -\frac{\alpha}{2\pi}\,p_i \tag{3.26}$$

Así, sustituyendo (3.23) y (3.26) en (3.20) podremos escribir la igualdad integral en el contorno como sigue:

$$c_i p_i + \int_\Gamma p\,\frac{\partial p^*}{\partial n}\,d\Gamma = p_o^* + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}\,p^*\,d\Gamma \tag{3.27}$$

siendo:

$$c_i = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi} \tag{3.28}$$

dónde θ representa el ángulo interno de la esquina en radianes. Este término adicional a considerar en la formulación integral en el contorno ($c_i$) recibe el nombre de *término libre*. En problemas escalares su valor depende únicamente de la geometría del contorno en el punto de colocación. Si el contorno es suave (Fig.3.2) es sencillo observar cómo $c_i$=*0.5*. La obtención del término libre para problemas tridimensionales lo dejamos como ejercicio para el lector (Hartman, 1981 ó Brebbia y Domínguez, 1989). Las conclusiones son análogas a las obtenidas para el caso bidimensional.

Las integrales de contorno de (3.27) han de ser entendidas en el sentido del valor principal de Cauchy. Se trata de integrales extendidas a todo el contorno del problema que presentan una discontinuidad evitable en la singularidad (punto de colocación). El cierre del contorno alrededor de la singularidad se recoge en el término libre obtenido hace un momento. Por lo demás, son integrales perfectamente acotadas cuyo valor puede obtenerse, luego de algunas operaciones, mediante procedimientos de integración numérica estándar.

## 3.6 - CONDICIÓN DE RADIACIÓN EN EL INFINITO

Al comienzo de este capítulo nos hemos referido a esta condición (condición de radiación de Sommerfeld) como una exigencia más que habría de cumplir la solución a la ecuación de onda para problemas exteriores. Entendamos mejor aquí que estas condiciones habrán de ser cumplidas para un problema definido en un dominio infinito. Del problema exterior nos ocuparemos en el próximo apartado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La forma más sencilla de comprender el significado de esta condición de radiación es a través de un problema monodimensional. Así, en primer lugar, obtengamos el campo de presiones en el fluido contenido en un cilindro de paredes rígidas y longitud finita ($L$). Dicho cilindro está provisto de un pistón móvil que ejerce una presión armónica sobre el fluido que está en contacto con su cara interior (fig.3.4). La elección del sistema de referencia obedece a razones de conveniencia. La localización de los ejes que aparece en la figura 3.4 permite un tratamiento matemático más sencillo del problema.

El carácter monodimensional del problema definido es evidente, por tanto la solución general a la ecuación de onda [(3.1)] depende espacialmente sólo de la coordenada $x$ y responde a la expresión:

$$p = A\, e^{-ikx} + B\, e^{ikx} \tag{3.29}$$

donde el primer término representa una onda que se propaga en sentido positivo de $x$ mientras el segundo representa una onda que se propaga en sentido negativo.

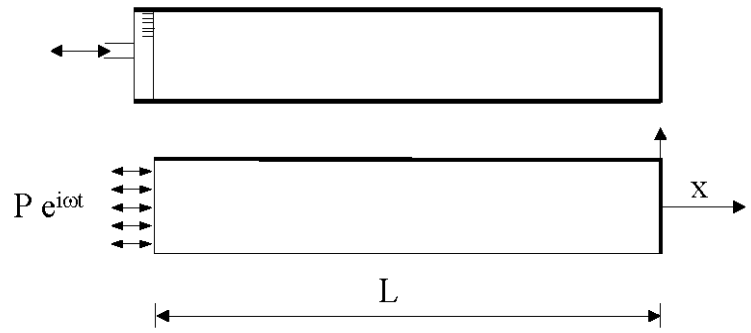



Figura 3.4. Cilindro de longitud finita y paredes rígidas sometido a presión armónica.

Las constantes $A$ y $B$ de (3.29) se obtienen de acuerdo a las condiciones de contorno del problema. Así:

$$x = -L \;\rightarrow\; p = P \qquad \text{presión conocida} \tag{3.30a}$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{contorno rígido} \tag{3.30b}$$

Sustituyendo (3.29) en las expresiones anteriores, podemos escribir:

$$A\, e^{ikL} + B\, e^{-ikL} = P \tag{3.31a}$$

$$A - B = 0 \tag{3.31b}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las amplitudes de la onda incidente ($A$) y reflejada ($B$), que sustituidas en (3.29) y tras de algunas operaciones simples, podemos escribir como sigue:

$$p = P\, \frac{\cos(kx)}{\cos(kL)} \tag{3.32}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Si bien trabajamos en el dominio de la frecuencia, para comprender lo que ocurre dentro del cilindro sería interesante visualizar este campo de presiones para varios instantes de tiempo. Para ello, basta multiplicar (3.32) por $e^{i\omega t}$ y representar para distintos valores de $t$ la componente real de la presión a lo largo del eje $x$. Es lo que hemos realizado en la figura 3.5. En esta aplicación de lo anterior, hemos adoptado un valor de $kL = 4\pi$, un valor unitario para la amplitud de la presión en las paredes del émbolo ($P = 1$) y representamos el valor de la presión para 6 valores de $t$ (0.0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 y 0.25 sg.).

En esta figura se observa un fenómeno que el lector seguro recuerda. La onda incidente (viajera en sentido positivo del eje) y la onda reflejada (viajera en sentido negativo del eje) se superponen dando lugar a un campo estacionario de presiones. Existen puntos en los cuales la presión es nula en cualquier instante de tiempo (nodos) y otros en los que su valor adopta valores máximos y mínimos a lo largo del tiempo (crestas). En el dominio de la frecuencia (ver curva para $t = 0$ sg) y en términos acústicos (ver capítulo 2), los nodos representarían puntos de intensidad acústica nula, mientras que las crestas constituyen máximos de percepción del sonido. Como el lector puede intuir, el número de nodos dependerá del valor del parámetro $kL$.

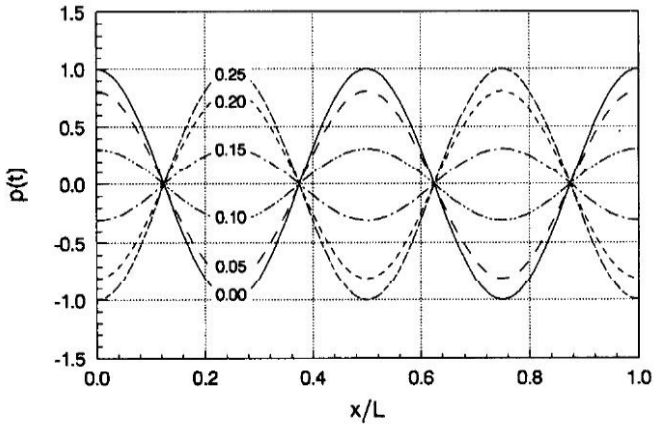



Figura 3.5. Campo de presiones estacionario monodimensional.

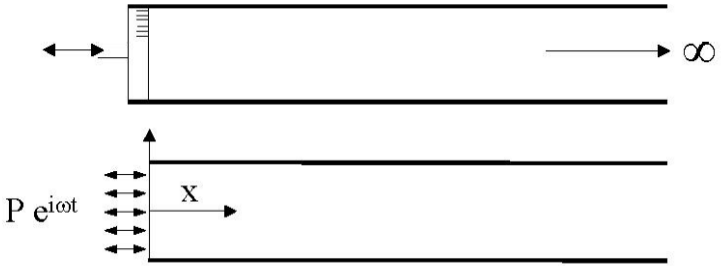



Figura 3.6. Cilindro de longitud infinita y paredes rígidas sometido a presión armónica.

Consideremos ahora el mismo problema pero con un cilindro de longitud infinita (fig.3.6). La solución general a la ecuación de onda responde también a la expresión

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

(3.29). Nótese que el origen del sistema de referencia se encuentra en la superficie del pistón. La condición de contorno en $x = 0$ permite obtener la primera ecuación:

$$A + B = P \tag{3.33}$$

La segunda ecuación se obtiene de la aplicación de la condición radiación de Sommerfeld para el problema monodimensional. Esta ecuación se obtiene de (3.2) para $n = 1$. Su expresión será:

$$x \to \infty \quad \to \quad \lim_{x\to\infty} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mathrm{i}k\, p \right) = 0 \tag{3.34}$$

Sustituyendo el campo de presiones dado por (3.29) en (3.34), podemos escribir:

$$\lim_{x\to\infty} \left( 2\mathrm{i}k B e^{\mathrm{i}kx} \right) = 0 \quad \to \quad B = 0 \tag{3.35}$$

así, la condición de radiación en el infinito implica la no existencia de onda reflejada en este problema. Por tanto, teniendo en cuenta (3.33) y (3.35), la solución a este problema será:

$$p = P\, e^{-\mathrm{i}kx} \tag{3.36}$$

que representa una onda armónica que se propaga en dirección positiva del eje $x$. La aplicación (3.34) a problemas monodimensionales puede parecer una sutileza matemática con poco interés (podíamos intuir (3.36) desde el comienzo), si bien debemos reparar algo más en su significado físico. Así, esta condición obliga a la solución buscada del problema a comportarse en zonas alejadas de la perturbación como una onda plana que se propaga en sentido de $x$ crecientes. Dicho de otro modo, la condición de radiación implica la no existencia de propagación de ondas desde el infinito.

Veamos esto mismo para el único problema tridimensional al que, por ahora, hemos dado solución: la solución fundamental. La expresión del campo de presiones para el problema en un dominio infinito 3-D con una fuente puntual es la dada por (3.15b). Veremos ahora en que términos verifica esta expresión la condición de radiación. Así, introduciendo las expresiones del campo de presiones y su derivada en (3.2) para $n$=3, podemos escribir:

$$\lim_{r\to\infty} r \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} + \mathrm{i}k\, p^* \right) = \lim_{r\to\infty} \left( p^* \right) = 0 \tag{3.37}$$

A la luz de esta expresión, habitualmente se expresan este tipo de condiciones de la forma siguiente:

$$\lim_{r\to\infty} r \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} + \mathrm{i}k\, p^* \right) = 0 \tag{3.38a}$$

$$\lim_{r\to\infty} \left( p^* \right) = 0 \tag{3.38b}$$

donde la (3.38a) representa la condición de radiación ya vista y (3.38b) la que denominaremos condición de regularidad. Esta última está vinculada al amortiguamiento por radiación propio de ondas bi y tridimensionales y no se verifica,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

como es lógico, para problema monodimensionales. Así, la solución fundamental propuesta del problema cumple las condiciones de radiación y regularidad en el infinito. Es, como sabíamos, la única solución físicamente posible del problema propuesto. Sin embargo, es interesante observar cómo soluciones del tipo:

$$p^*(k,r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad \text{ó} \quad p^*(k,r) = \frac{1}{4\pi r} \cos(kr)$$

verifican también la ecuación de gobierno del problema en los términos expuestos. En ambas, la amplitud disminuye con la distancia a la fuente, cumplen, por tanto, las condiciones de regularidad (3.38b). Sin embargo, el lector puede comprobar con facilidad que ninguna de ellas verifica las condiciones de radiación en el infinito y esto las descarta como soluciones físicamente posibles del problema. Efectivamente, la primera representa una onda que se propaga desde el infinito hacia la fuente con amplitudes crecientes y la segunda constituye una onda estacionaria. Si pensamos un poco más en estas soluciones desestimadas, vemos que ambas están en contra del principio de conservación de la energía. Este es otra interpretación física interesante de esta condición de radiación.

Por tanto, y según lo que hemos visto, la consideración de las condiciones de radiación es fundamental en la obtención de la única solución posible en problemas con dominio infinito. Un análisis mucho más detallado de estas cuestiones puede verse en Eringen y Suhubi (1975) donde se generaliza está condición al caso elastodinámico. Recomendar también en este punto la obra de Hacar y Alarcón (1971). Se trata de texto amplio y con muchos capítulos de carácter generalista en los que el lector puede iniciarse de forma más rigurosa en el estudio de problemas genéricos de dinámica y propagación de ondas.

## 3.7 - IGUALDAD INTEGRAL PARA EL PROBLEMA EXTERIOR

Hemos hecho referencia al problema exterior. En este problema, muy habitual en acústica, la región estudiada es infinita y los contornos son interiores a la misma. Se trata de huecos en el dominio infinito con condiciones de contorno conocidas. Por contrapartida, en el problema interior, implícitamente considerado hasta ahora en la formulación desarrollada, los contornos encierran el dominio analizado. En la figura 3.7 se muestran ambos tipos de problemas.

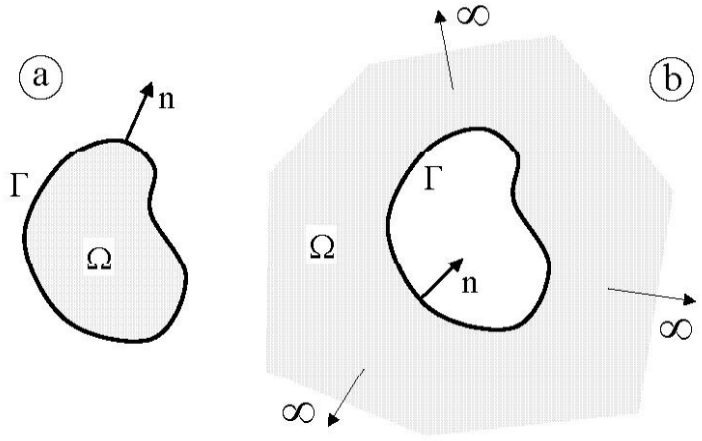



Figura 3.7. (a) Problema Interior. (b) Problema Exterior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En este apartado estudiaremos las características de la formulación integral para el problema exterior. Demostraremos algo que ya intuimos: las integrales de superficies se extienden a los contornos interiores del modelo. Para ello, consideremos el problema exterior como un caso particular del problema interior y consideremos de aplicación la igualdad integral (3.27). Para ello cerraremos artificialmente el dominio con una circunferencia (problemas 2-D) o una esfera (problemas 3-D) de radio $r \to \infty$ y centrada en el punto de colocación donde pretende aplicarse la igualdad integral (fig.3.8).

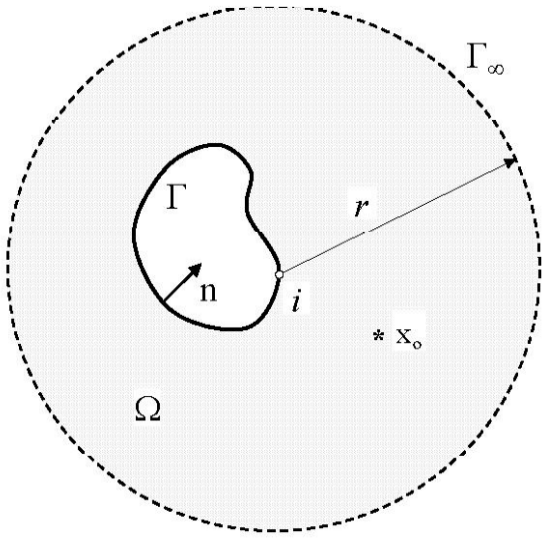



Figura 3.8. Formulación integral del problema exterior.

Así, la igualdad integral el dominio encerrado por el contorno $\Gamma_\infty$ puede escribirse como sigue:

$$c_i p_i + \int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} p \frac{\partial p^*}{\partial r} d\Gamma = p_o^* + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial p}{\partial r} p^* d\Gamma \qquad (3.39)$$

donde $\partial/\partial n$ es reemplazada por $\partial/\partial r$ en el contorno $\Gamma_\infty$. La solución buscada para el problema habrá de cumplir las condiciones de radiación en puntos de este contorno, lo cual implica, como ya hemos comentado, que dicha solución se aproxima a una onda cilíndrica (2-D) o esférica (3-D) que se propaga en dirección de $r$ crecientes. Por tanto en puntos de $\Gamma_\infty$ podemos escribir:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\mathrm{i} k p \qquad (3.40)$$

Sustituyendo esta expresión de la derivada de la presión en la igualdad integral (3.39), podemos escribir:

$$c_i p_i + \int_\Gamma p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} p \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} + \mathrm{i} k p^* \right) d\Gamma = p_o^* + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \qquad (3.41)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

De esta expresión se concluye que, para el problema exterior, es muy interesante trabajar con una solución fundamental del problema que verifique las condiciones de radiación en el infinito. Si ello es así, la integral de contorno extendida a $\Gamma_\infty$ se anula y la formulación integral se extiende únicamente al contorno $\Gamma$ interior. Como ya sabemos, las soluciones fundamentales propuestas (3.15) cumplen dichas condiciones de radiación. En el problema interno no es necesario este requerimiento sobre la solución fundamental. Este papel puede ser desempeñado por cualquier función que cumpla la ecuación de gobierno del problema. Así, por ejemplo, pueden ser utilizadas la solución de onda convergente o la onda estacionaria vistas en el apartado anterior que, como recordamos, no verifican esta condición.

El lector puede plantearse la necesidad de recurrir a este requerimiento para la solución fundamental si puede llegarse a la misma conclusión apelando a la condición de regularidad que debe cumplir la solución que buscamos. Esto es incorrecto. Si bien es cierto que $p$ tiende a cero, si la solución fundamental no cumple la condición de radiación (aunque verifique la regularidad), la integral extendida al contorno infinito $\Gamma_\infty$ no se anula en el límite. Para entender esto con más claridad, en el problema tridimensional puede imaginar el contorno $\Gamma_\infty$ como una esfera de radio finito lo suficientemente alejada para garantizar el comportamiento esférico del campo de presiones real. En este caso, la condición de radiación es más útil si se expresa de la forma:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \mathrm{i}\,k\,p\right) = O(p) \tag{3.42}$$

donde "$O$" representa orden de magnitud. El lector puede comprobar que la aplicación de (3.42) a la igualdad integral para el problema exterior anula también las integrales sobre $\Gamma$ quedando sólo las extendidas al contorno interior $\Gamma$.

Con lo visto hasta aquí, ya el lector puede entender la importante ventaja que supone la aplicación del MEC en este problema frente a los métodos de dominio como el MEF. Cuando tratamos con dominios de naturaleza infinita, los métodos de dominio presentan inconvenientes ya que es imposible extender la discretización del medio hasta el infinito. Como es lógico, la discretización se extenderá hasta cierta distancia de la fuente donde se localizará un contorno artificial al que habrá que imponer condiciones de radiación. Aún así, este tipo de contornos de cierre habrá de estar lo bastante alejado para que esta condición se verifique, si no es así, su presencia alterará de forma importante la solución en las cercanías de la fuente debido a las reflexiones artificiales de la onda en dicho contorno.

## 3.8 - SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA EL SEMIESPACIO

En el apartado 3.4 se introdujo la solución fundamental utilizada para establecer la formulación integral en el contorno del problema escalar. En aquel momento, el único requerimiento sobre esta función era el cumplimiento de la ecuación diferencial de gobierno del problema. Posteriormente, se establece otra condición sobre dicho campo de presiones, a saber, la verificación de las condiciones de radiación en el infinito. Esto último permite el adecuado tratamiento del problema exterior. En este apartado,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

presentaremos una modificación de dicha solución fundamental de forma que también cumpla alguna de las condiciones de contorno del problema real. Como en el apartado anterior, esto permitiría la no-consideración de las integrales extendidas al contorno cuya condición es satisfecha por dicha solución fundamental.

Esta necesidad parte de la geometría genérica que, para el problema bidimensional, se presenta en la figura 3.9. En esta figura representamos una fuente pulsando en un semiespacio cuyo contorno $\Gamma_s$ está caracterizado por la admitancia $\beta_s$. Las ondas emitidas por esta fuente se encuentran en su camino con un obstáculo con contorno $\Gamma_p$ de admitancia $\beta_p$ genérica. Como veremos en el capítulo 5, estamos interesados en evaluar en qué medida influyen las características del obstáculo (altura, geometría, etc...) en los valores de la presión acústica al otro lado del mismo. Así, la aplicación de la igualdad integral en los términos conocidos implica integrales extendidas a los tres contornos del problema ($\Gamma_\infty$, $\Gamma_s$ y $\Gamma_p$). Sabemos que las integrales extendidas a $\Gamma_\infty$ desaparecen si la solución fundamental cumple las condiciones de radiación en el infinito. Por tanto, y teniendo esto en cuenta, podemos escribir (3.19) en términos de cada uno de los contornos que definen el problema, para un punto de colocación genérico *i* interior al dominio, como sigue:

$$p_i + \int_{\Gamma_s} p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma = p_o^* + \int_{\Gamma_s} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \qquad (3.43)$$

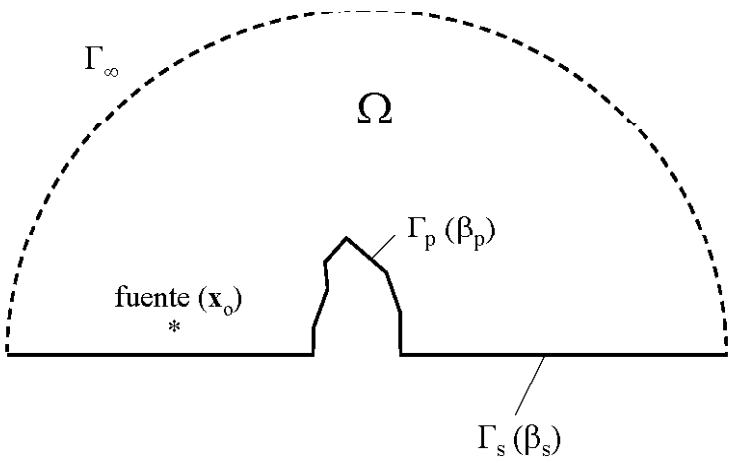



Figura 3.9. Semiespacio bidimensional con obstáculo.

Al igual que el problema real, adoptaremos una función $p^*$ que verifique la condición de contorno en $\Gamma_s$. Así:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\mathrm{i} k \beta_s p \quad \text{y} \quad \frac{\partial p^*}{\partial n} = -\mathrm{i} k \beta_s p^* \quad \text{en } \Gamma_s \qquad (3.44)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La inclusión de la condición anterior en la representación integral (3.43) permite la cancelación mutua de las integrales extendidas al contorno del semiespacio $\Gamma_s$. Por tanto:

$$p_i + \int_{\Gamma_p} p \frac{\partial p^*}{\partial n} d\Gamma = p_o^* + \int_{\Gamma_p} \frac{\partial p}{\partial n} p^* d\Gamma \qquad (3.45)$$

Con lo que la identidad integral para este problema se extiende únicamente a los contornos del obstáculo cuya eficiencia pretende determinarse. Por tanto, como veremos, la utilización de este tipo de soluciones fundamentales presenta grandes ventajas desde un punto de vista numérico, ya que será el contorno que delimita el obstáculo el único que será necesario discretizar.

Para un punto de colocación sobre el contorno del obstáculo, la identidad integral puede escribirse de la forma siguiente:

$$c_i p_i - p_o^* - \int_{\Gamma_p} \left( \frac{\partial p^*}{\partial n} + \mathrm{i} k \beta_p p^* \right) p \, d\Gamma \qquad (3.46)$$

donde ya hemos incorporado la condición de contorno correspondiente a la superficie del obstáculo. Bajo este formato y con soluciones fundamentales de este tipo, presentan sus formulaciones del MEC para el estudio de la eficiencia de pantallas anti-ruido autores como Seznec (1980), Chandler-Wilde (1988) o Hothersall et al (1991a), este último para solicitaciones armónicas del tipo $e^{-\mathrm{i}\omega t}$.

Veamos, en lo que sigue, la expresión matemática de la solución fundamental a la que hemos hecho referencia a lo largo de este apartado. Comencemos por el caso más sencillo. supongamos que el contorno del semiespacio es completamente reflejante ($\beta_s$=0). Por tanto, la solución fundamental buscada habrá de cumplir en puntos de este contorno que $\partial p^*/\partial n = 0$. Conseguir esta condición es sencillo, bastará considerar, además de la fuente aplicada en el punto de colocación donde se escribe la identidad integral, otra fuente simétrica respecto del contorno del semiespacio pulsando a la misma frecuencia (delta de Dirac armónica) (para problemas 2-D ver figura 3.10). Así, con esta superposición, el valor de la presión en un punto de observación genérico será:

$$p^*(k,r) = \frac{1}{2\pi} \left[ K_o(\mathrm{i}kr) + K_o(\mathrm{i}k\bar{r}) \right] \qquad \text{problemas 2D} \qquad (3.47a)$$

$$p^*(k,r) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} e^{-\mathrm{i}kr} + \frac{1}{\bar{r}} e^{-\mathrm{i}k\bar{r}} \right] \qquad \text{problemas 3D} \qquad (3.47b)$$

Donde $r$ y $\bar{r}$ representan las distancias de la fuente y la imagen al punto de observación respectivamente. Es muy sencillo demostrar que el flujo en $\Gamma_s$ es nulo para la solución fundamental propuesta.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Obtengamos primero el flujo de $p^*$ en un contorno genérico determinado por su normal **n**. Así:

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\left[K_1(\mathrm{i}kr)\frac{\partial r}{\partial n} + K_1(\mathrm{i}k\bar{r})\frac{\partial \bar{r}}{\partial n}\right] \qquad \text{problemas 2D} \qquad (3.48a)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\mathrm{i}k}{r}\right)e^{-\mathrm{i}kr}\,\frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{1}{\bar{r}^2}+\frac{\mathrm{i}k}{\bar{r}}\right)e^{-\mathrm{i}k\bar{r}}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial n}\right] \qquad \text{problemas 3D} \qquad (3.48b)$$

Veamos estas expresiones particularizadas para $\Gamma_s$. En este contorno se cumple que $r = \bar{r}$ y $\partial r/\partial n = -\partial \bar{r}/\partial n = y_i/r$ (2-D), con lo cual es sencillo ver en (3.48) que $\partial p^*/\partial n = 0$.

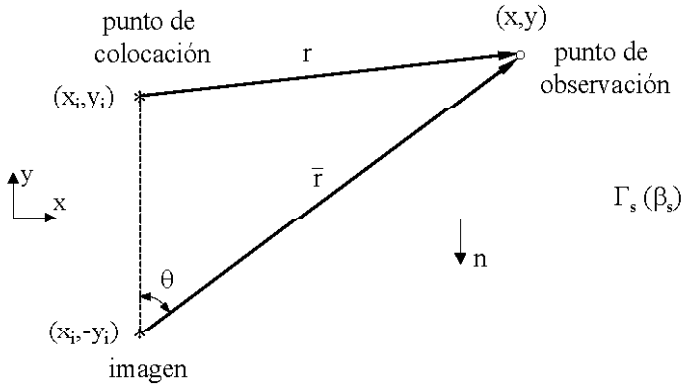



Figura 3.10. Solución fundamental fuente-imagen.

La interpretación de (3.47) es sencilla a la vista de la figura 3.10. El primer término representa la componente directa de la propagación desde el emisor. El segundo término constituye la componente debida a las reflexiones en el contorno rígido del semiespacio.

Si $\beta_s \neq 0$ la expresión matemática de la solución fundamental se complica algo más. Para el caso bidimensional, la expresión de la solución fundamental empleada en la confección del código MEC se basa en la ecuación de propagación en campo lejano (ver Kawai et al, 1982) y que, tras algunas operaciones, puede expresarse los mismos términos de (3.47a):

$$p^*(k,r) = \frac{1}{2\pi}\left[K_o(\mathrm{i}kr) + K_o(\mathrm{i}k\bar{r}) + \Phi(\mathrm{i}k\bar{r})\right] \qquad (3.49)$$

La componente adicional de esta solución respecto de (3.47a), responde a la siguiente expresión:

$$\Phi(\mathrm{i}k\bar{r}) = \pi\sqrt{\frac{a}{2}}\,\omega\left(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}k\bar{r}\,a}\right)\left[V(\gamma)-1\right]e^{-\mathrm{i}kr} \qquad (3.50)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

siendo (ver figura 3.10):

$$a = 1 + \gamma\,\beta_s - \sqrt{\left(1-\beta_s^2\right)\left(1-\gamma^2\right)} \quad ; \quad \gamma = \cos\theta = \frac{y+y_i}{\bar{r}}$$
$$V(\gamma) = \frac{\gamma-\beta_s}{\gamma+\beta_s} \quad ; \quad \omega(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}k\bar{r}a}) = e^{\mathrm{i}k\bar{r}a}\,\mathrm{erfc}(\sqrt{\mathrm{i}k\bar{r}a}) \tag{3.51}$$

donde *erfc(z)* es la función complementaria de error con argumento complejo (ver Abramowitz y Stegun, 1970). De otra parte, $V(\gamma)$ es un término que seguro resulta familiar al lector de cursos de física fundamental. Este término representa el coeficiente de reflexión para ondas planas que inciden con ángulo θ sobre el contorno en estudio.

El primer término de (3.49) sigue representando la componente directa de la propagación desde el emisor. El segundo y tercer término engloban la componente debida a las reflexiones en el contorno del semiespacio. En este caso, esta componente depende, como es lógico, de las características absorbentes de este contorno.

Hemos comentado anteriormente que esta expresión de la solución fundamental es rigurosa cuando se estudia la propagación en el campo lejano. Matemáticamente, esto significa que la ecuación es válida por encima de cierto valor del parámetro $k\bar{r}$. Chandler-Wilde y Hothersall (1985) proponen una aproximación asintótica muy similar que estos autores garantizan para valores de $k\bar{r} > 1$. De cualquier forma, la utilización de esta solución fundamental en el código MEC desarrollado (no adecuada para argumentos pequeños), permite obtener resultados muy aceptables como se comprobará en las validaciones realizadas del mismo en el capítulo 5 de este trabajo.

## 3.9 - DISCRETIZACIÓN DEL CONTORNO. FORMULACIÓN DEL MEC EN PROBLEMAS BIDIMENSIONALES.

En este apartado desarrollaremos los procedimientos fundamentales para el planteamiento numérico de la identidad integral (3.46) en problemas bidimensionales. Haremos uso de gran parte de las estrategias desarrolladas para la formulación numérica estándar del Método de Elementos Finitos con la que el lector se encuentra familiarizado. Así aproximaremos el comportamiento de las variables de forma localizada en una serie de porciones o elementos en que se divide el contorno del problema. Dentro de cada elemento, la variable será interpolada en función del valor que adopta en una serie de puntos (nodos) del mismo. Como en el MEF, las características de esta aproximación (constante, lineal, parabólico, ...) dependerán de las peculiaridades del problema analizado y del grado de aproximación que pretenda alcanzarse. A diferencia del MEF, en el Método de los Elementos de Contorno es necesario aproximar tanto la variable fundamental como su derivada ya que ambas están presentes en la formulación integral de partida (3.45), si bien en la formulación que empleamos para determinar la eficacia de barreras (3.46), la variable derivada ha desaparecido de forma explícita al imponer la condición de contorno en el obstáculo.

Las tipologías más usuales para los elementos con los que se parcela el contorno se presentan en la figura 3.11. Así, en los elementos *constantes* la variable se aproxima a

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

través de un único nodo situado en el centro del mismo. El valor de la variable es el mismo en todos los puntos de dicho elemento. En este caso, cada elemento aporta una sola incógnita al problema. En los elementos *lineales*, cada elemento está determinado por dos nodos, cada uno situado en un extremo del mismo. Dentro de estos elementos, la variable se aproxima linealmente en función de los valores que adopta en estos nodos. En los elementos *parabólicos*, cada elemento está constituido por tres nodos. Dos de estos nodos están en los extremos y un tercero en el interior. La aproximación de la variables es de orden dos en este caso. En el modelo desarrollado por los autores, se han utilizado elementos parabólicos para interpolar tanto las variables campo como la geometría del contorno (elementos isoparamétricos).

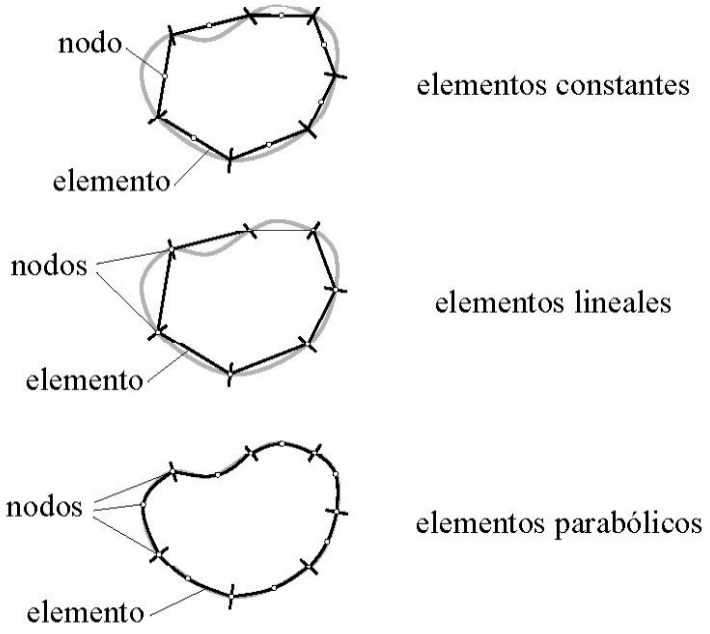


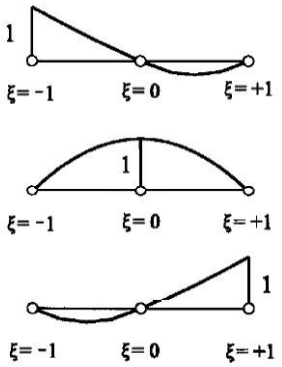

Figura 3.11. Diferentes tipologías para elementos de contorno.

Una vez adoptado el tipo de elemento con el que se va a trabajar, el planteamiento del problema será más sistemático y generalizado si se hace uso de un sistema de referencia asociado al elemento. En el caso de elemento parabólicos, la coordenada local $\xi$ se extiende desde '-1', para el nodo inicial, a '+1' donde se encuentra el otro nodo extremo. Para el nodo central $\xi$=0. En este sistema de referencia, la variable de campo (presión en nuestro caso) en el elemento *j* podrá expresarse a través de los tres valores nodales, de la forma siguiente:

$$p^j = \phi_1 \, p_1^j + \phi_2 \, p_2^j + \phi_3 \, p_3^j \tag{3.52}$$

donde $\phi_1$, $\phi_2$ y $\phi_3$ son funciones de aproximación cuadráticas de la variable $\xi$. Estas funciones se denominan también funciones de forma y cada una adopta valor unitario en el nodo cuya presión pondera y valor cero en el resto (fig. 3.12).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005




$\phi_1 = 0.5\ \xi\ (\xi - 1)$

$\phi_2 = (1 + \xi)\ (1 - \xi)$

$\phi_3 - 0.5\ \xi\ (\xi + 1)$

Figura 3.12. Funciones de forma parabólicas.

Por tanto, aplicando la expresión (3.46) de la identidad integral en un nodo *i* genérico de la discretización e introduciendo la aproximación de la variable por elementos descrita, podemos escribir:

$$c_i\ p_i = p_o^* - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{k=1}^{3} \left( h_k^{ij} + \mathrm{i} k \beta_j\ g_k^{ij} \right) p_k^j \tag{3.53}$$

donde *NE* representa el número total de elementos en que ha sido dividido el contorno y $\beta_j$ la admitancia del contorno en cada elemento, siendo:

$$h_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial n}\ \phi_k\ d\Gamma_j \quad ; \quad g_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} p^*\ \phi_k\ d\Gamma_j \tag{3.54}$$

los conocidos como núcleos de integración de la solución fundamental y cuya evaluación se realiza, luego de algunos arreglos, mediante procesos de cuadratura numérica estándar. En resumen, mediante este procedimiento hemos convertido la igualdad integral en una ecuación algebraica donde las incógnitas son el valor de la presión en los nodos. Esta discretización de (3.46) aplicada de forma reiterada utilizando como puntos de colocación todos los nodos del contorno, permite plantear un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\left( \mathbf{H} + \mathrm{i} k \beta\ \mathbf{G} \right) \mathbf{P} = \mathbf{P_o^*} \tag{3.55}$$

En esta expresión **H** y **G** son matrices cuadradas (NxN), siendo N el número de nodos de la discretización. Asimismo, **P** es un vector cuyas componentes son los valores de la presión en los nodos (incógnitas del problema) y $\mathbf{P_o}^*$ un vector de coeficientes donde se almacena el valor obtenido de la solución fundamental en la fuente interna real de presión ($\mathbf{x_o}$) utilizando como punto de colocación cada nodo del contorno. La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener toda la información en el contorno, presión y, por tanto, flujo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Conocidas estas variables, la obtención de sus correspondientes valores en puntos interiores del dominio analizado, puede realizarse de forma simple sin más que aplicar la ecuación (3.19) discretizada. Así:

$$p_i = p_o^* - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{k=1}^{3} \left( h_k^{ij} + \mathrm{i} k \beta_j g_k^{ij} \right) p_k^j \tag{3.56}$$

donde $i$ es ahora un punto interior donde se desea conocer el valor de la presión y $p_k^j$ la presión en los nodos del contorno obtenida de resolver (3.55).

Un detalle interesante para terminar este apartado. Los términos de la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones (3.55), son todos distintos de cero (matriz llena) y además se trata de una matriz no simétrica. Esto es un importante inconveniente del MEC frente al MEF. En este último la matriz de coeficientes del sistema resultante es una matriz en banda y simétrica, con lo que, demás de ahorrar recursos de memoria, se pueden aplicar algoritmos de resolución que requieren mucho menos tiempo de computación para dar una solución a dicho sistema. Así, en el MEC cuando el número de grados de libertad del problema aumenta, la resolución del sistema de ecuaciones obtenido se convierte en el cuello de botella del método. Como veremos en el apartado que sigue, en ocasiones pueden aprovecharse las condiciones de simetría (antimetría) para reducir la dimensión del problema.

## 3.10 - TRATAMIENTO SIMPLIFICADO PARA PROBLEMAS CON CONDICIONES DE SIMETRÍA

En algunos problemas que estudiaremos más adelante, la geometría y condiciones de contorno de los mismos presentan un plano de simetría. En este caso particular, pueden realizarse algunas modificaciones sobre el planteamiento general de método en orden a economizar recursos informáticos. Como veremos en este apartado, pueden reducirse sensiblemente el número de integraciones a realizar y, lo que es más importante, disminuye de manera sensible la dimensión del sistema de ecuaciones a resolver.

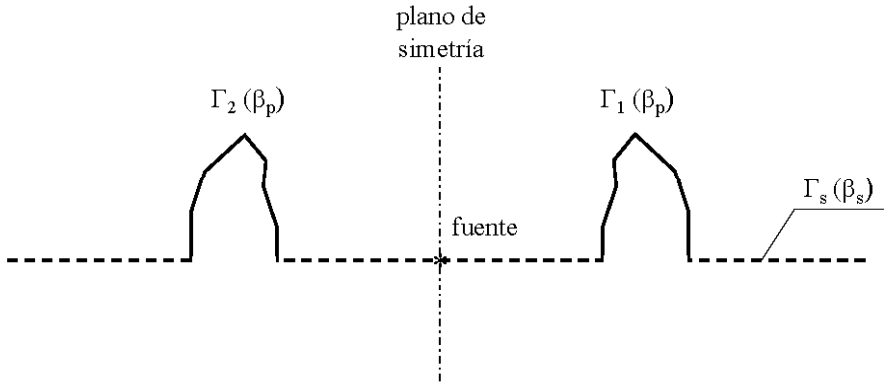



Figura 3.13. Doble apantallamiento con condiciones y geometría simétricas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Para ilustrar este punto, en la figura 3.13 presentamos un problema simétrico al que haremos referencia en el capítulo 5. En esta figura se muestra una fuente armónica apantallada a ambos lados. Dicha fuente se sitúa en el plano de simetría geométrica del problema. Para que el campo de presiones provocado por la fuente sea también simétrico respecto de dicho plano, los obstáculos, de forma genérica en la figura, han de tener las mismas características absorbentes (condiciones de contorno simétricas).

Con la utilización de la solución fundamental para el semiespacio que hemos visto, el planteamiento general del MEC al problema solo requiere discretizar el contorno de los obstáculos. Así, y si llamamos **A** a la matriz de coeficientes de (3.55), podemos escribir este sistema de ecuaciones a resolver de forma particionada como sigue (ver fig.3.14):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^*_{o1} \\ \mathbf{P}^*_{o2} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

donde $\mathbf{P}_i$ es un vector que almacena los valores de la presión para los nodos del contorno $\Gamma_i$, $\mathbf{A}_{ij}$ una submatriz cuyos términos representan los núcleos de integración correspondientes al contorno $\Gamma_j$ siendo los puntos de colocación todos los nodos de $\Gamma_i$ y $\mathbf{P}_{oi}^*$ el vector de soluciones fundamentales en la fuente con colocación en nodos de $\Gamma_i$.

Teniendo en cuenta la simetría del problema ($\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$) podemos reducir el sistema de ecuaciones y resolver:

$$\left(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\right)\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^*_{o1} \tag{3.58}$$

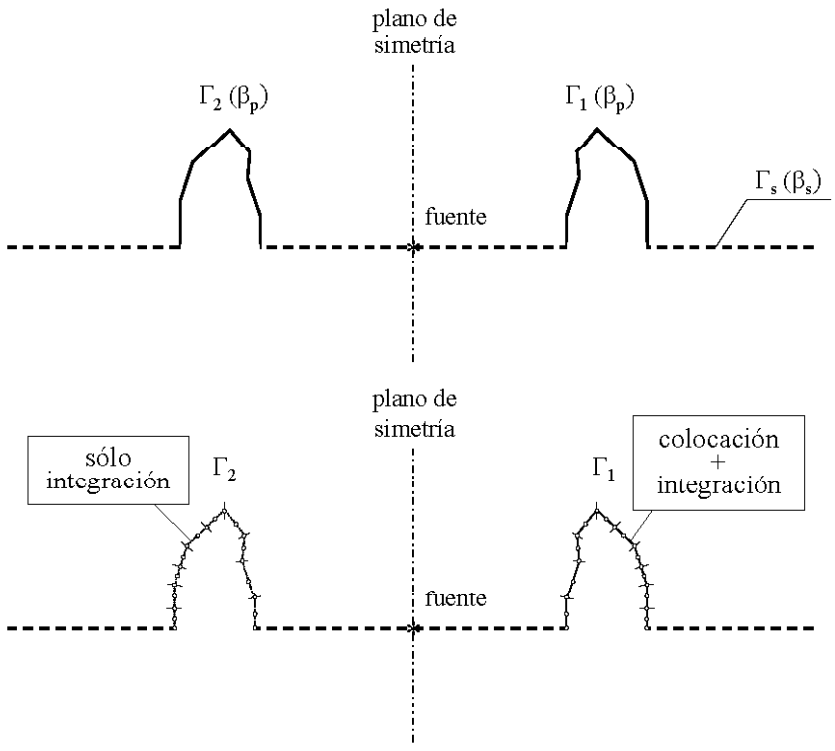



Figura 3.14. Reducción del sistema de ecuaciones con la consideración de la simetría del problema.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Así, únicamente será preciso el cálculo de las matrices $\mathbf{A}_{1i}$ con lo que el número de integraciones se reduce a la mitad. Por tanto, sólo será necesario *colocar* en los nodos de $\Gamma_1$ e integrar la solución fundamental en ambos contornos (fig.3.14). Por otra parte, y esto es más interesante, el sistema de ecuaciones a resolver ocupa cuatro veces menos recursos de memoria y su resolución requiere menor tiempo de computación.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 4
# APLICACIÓN DEL MEC A PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN ACÚSTICA 2-D. PROGRAMA DE ORDENADOR DESARROLLADO

## 4.1 - INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe el programa de ordenador desarrollado y basado en la modelo ya expuesto de Elementos de Contorno. Dicho programa, escrito en código FORTRAN, permite modelar la propagación de ondas acústicas bidimensionales en el dominio de la frecuencia. Si bien el propósito del mismo es absolutamente general, la salida de resultados de la versión que se describe se ha enfocado en el sentido de presentar valores en puntos internos de factores de eficacia (coeficientes de inserción) de pantallas acústicas.

Algunas características generales del código se verán con más detenimiento en los apartados que siguen. La discretización del problema se realiza con elementos parabólicos. En la versión que tratamos en este capítulo, se ha incorporado un preprocesador muy simple que obliga a que la geometría del contorno deba estar constituida por tramos rectos. Mejorando las posibilidades de este preprocesador o introduciendo directamente nodos y coordenadas, el resto de rutinas del programa están construidas pensando en abordar una geometría absolutamente genérica. Es posible la introducción de cualquier tipo de condición de contorno (incluso contornos con capacidad absorbente) así como la consideración de fuentes de ruido internas. En esta versión, no incorpora simplificaciones asociadas a problemas simétricos, debiendo por tanto considerarse la totalidad de la geometría.

En el próximo apartado se escribe completo el código del programa, aclarando, en la medida de lo posible, el significado de las variables más importantes de cada rutina. Obviamente este programa puede optimizarse desde un punto de vista computacional, si bien el principal objetivo en su confección ha sido que el código resulte claro y fácil de seguir por el lector interesado. En este sentido, podrán realizarse modificaciones a la hora de incluir la posibilidad de otras geometrías, simetrías o dar salida a otros resultados tanto en el contorno como en puntos internos.

Dedicaremos el tercer apartado de este capítulo a la confección de ficheros de datos para algunos ejemplos sencillos, las operaciones necesarias para la ejecución del programa y veremos los ficheros de salida correspondientes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 4.2 - DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO

Describiremos el programa rutina a rutina, operaciones que realizan, variables, etc... imprimiendo el listado de cada una por separado. En algunos casos pueden ser necesarias aclaraciones adicionales de carácter teórico que, en la medida de lo posible, serán realizadas aquí. En el peor de los casos remitiremos al lector a bibliografía complementaria. Como el lector comprobará en breve, a lo largo de los listados aparecen muchas líneas de comentarios que facilitarán el seguimiento del mismo.

### Programa Principal, POSAMEC.F

El nombre del Programa Principal que será también el que designe a la versión ejecutable, y es el acrónimo constituido a partir de la frase Propagación de Ondas Sonoras Armónicas con el Método de los Elementos de Contorno.

En el Programa Principal se definen las dimensiones máximas del modelo y se localizan los canales de entrada de datos (5) y salida de resultados (6 y 7). Desde el mismo, en primer lugar, se invoca a la rutina de entrada de datos y posteriormente, para cada frecuencia, al resto de rutinas que completan la ejecución del código. En el diagrama de flujo que se muestra en la Figura 4.1 se indican las rutinas invocadas desde el Programa Principal y se aclara, de forma telegráfica, el cometido llevado a cabo por cada una.

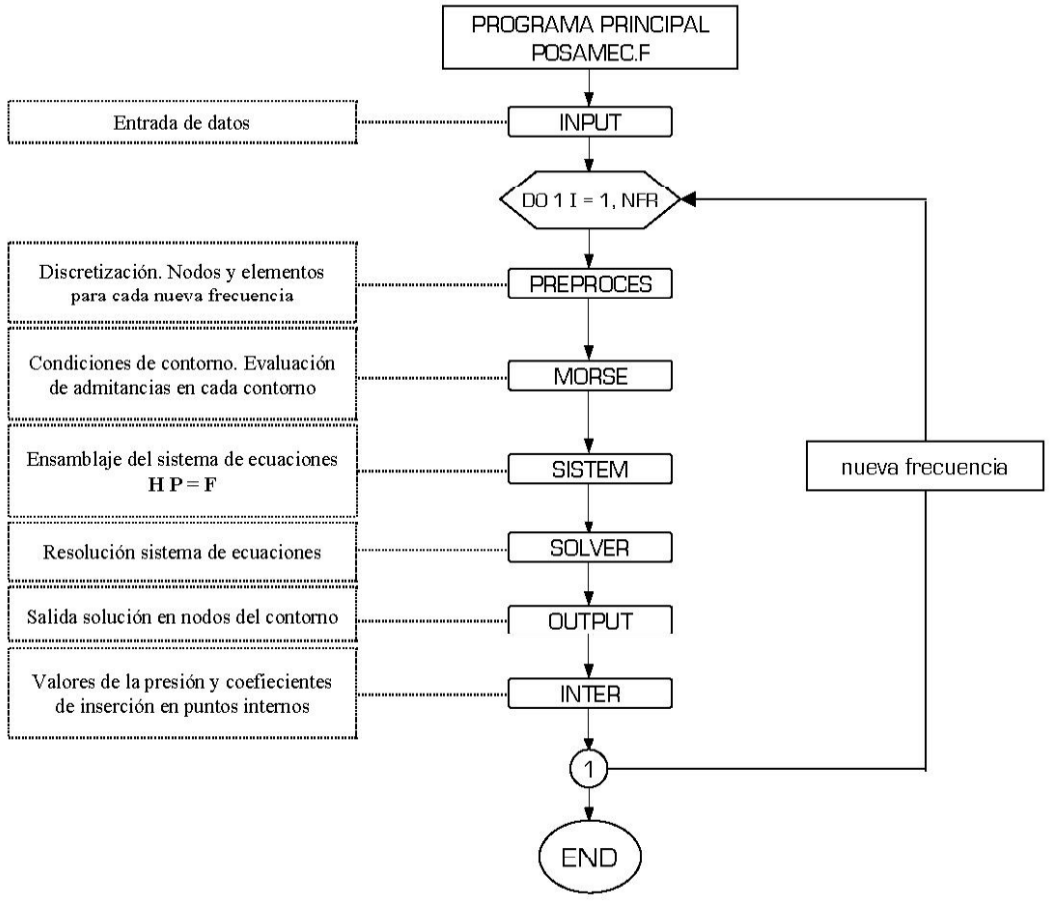



Figura 4.1. Diagrama de Flujo del Programa

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En primer lugar se relacionan las dimensiones máximas establecidas en la versión del código que se suministra:

NMC: Número Máximo de Contornos (20).
NMNC: Número Máximo de Nodos por Contorno (150).
NFM: Número de Frecuencias Máximo (30).
NMPI: Número Máximo de Puntos Internos (100).
NX: NX = NMC×NMNC. Dimensión máxima del sistema de ecuaciones a resolver.

A continuación se describen las variables más destacadas (escalares, vectores y matrices) utilizadas en el programa:

IRE: Número del canal de entrada (fichero de entrada).
IWR6 (7): Números de canales de salida (ficheros de salida).
AFR: Vector de frecuencias (relación de frecuencias centrales de tercios de octava, entre 25 y 20.000 Hz).
FR: Frecuencia (rad/s).
CW: Velocidad de propagación de las ondas acústicas en el aire.
NCONT: Número de contornos diferenciados del problema.
XI: Vector en el que cada componente es el valor de la abscisa en los puntos iniciales que determinan cada contorno del problema. XI(J) es la coordenada $x$ del punto inicial del contorno J.
YI: Vector en el que cada componente es el valor de la ordenada en los puntos iniciales que determinan cada contorno del problema. YI(J) es la coordenada $y$ del punto inicial del contorno J.
XF,YF: Idem que XI e YI para los puntos finales de cada contorno.
NI: Vector entero que contiene la numeración correspondiente a los nodos iniciales de cada contorno.
NF: Vector entero que contiene la numeración correspondiente a los nodos finales de cada contorno.
ANELO: Número de elementos a utilizar en la discretización del contorno para una longitud de onda.
N: Número de nodos de la discretización.
X: Vector que contiene las coordenadas $x$ de los nodos de la discretización.
Y: Vector que contiene las coordenadas $y$ de los nodos de la discretización.
NPINT: Número de puntos internos.
XPINT: Vector que contiene la coordenada $x$ de cada uno de los puntos internos.
YPINT: Vector que contiene la coordenada $y$ de cada uno de los puntos internos.
XFONT: Coordenada $x$ de la fuente interna.
YFONT: Coordenada $y$ de la fuente interna.
BETA: Vector cuyas componentes son los valores de la admitancia de cada contorno (BETA(J) = 0 si la presión es dato en el contorno J). Se trata, en general, de una variable compleja.
BETSEMI: Valor de la admitancia en el contorno del semiespacio. Real.
T: Vector cuyas componentes son los valores del espesor del tratamiento absorbente de la superficie de cada contorno (= 0 si el espesor es infinito).
TSEMI: Valor del espesor del tratamiento absorbente en la superficie del semiespacio (= 0 si el espesor es infinito).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

KODE: Vector entero que indica el tipo de condición de contorno en cada contorno del problema. Si KODE(J) = 0, en el contorno J la presión es dato y el flujo incógnita. Si KODE(J) = 1, en el contorno J presión y flujo son incógnita ambos relacionados a través de BETA(J).

P: Vector cada una de cuyas componentes es el valor prescrito de la presión en cada contorno. Si P(J) = 0 la presión es incógnita en el contorno J. Complejo.

DP: Vector cada una de cuyas componentes es el valor del flujo prescrito en cada contorno. Si DP(J) = 0 el flujo de presión es incógnita en el contorno J. Complejo.

H: Matriz del sistema de ecuaciones a resolver. Compleja.

F: Vector de coeficientes del sistema de ecuaciones a resolver. Después de resuelto el sistema, en este vector se almacena la solución de presión o flujo en cada nodo de la discretización. Complejo.

P1: Vector en el que se almacena, una vez resuelto el problema, el valor de la presión en cada nodo de la discretización. Complejo.

DP1: Vector en el que se almacena, una vez resuelto el problema, el valor del flujo de presión en cada nodo de la discretización. Complejo.

El listado del Programa Principal se muestra a continuación:

```
*234567
      PROGRAM POSAMEC
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Programa de Elementos de Contorno para el análisis de problemas 2-D
*  de propagación de ondas acústicas en el dominio de la frecuencia.
*  La discretización se realiza mediante elementos parabólicos.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      PARAMETER(NMC=20,NMNC=150,NFM=30,NMPI=100)
*
      DIMENSION XI(NMC),YI(NMC),XF(NMC),YF(NMC),SIGMA(NMC),T(NMC)
      DIMENSION AFR(NFM),X(NMC*NMNC),Y(NMC*NMNC),NI(NMC),NF(NMC)
     @,KODE(NMC),XPINT(NMPI),YPINT(NMPI)
      COMPLEX*16 P(NMC),DP(NMC),P1(NMC*NMNC),DP1(NMC*NMNC),BETA(NMC)
      COMPLEX*16 BETSEMI
*
      COMPLEX*16 H(NMC*NMNC,NMC*NMNC)
      COMPLEX*16 F(NMC*NMNC)
*
*   Frecuencias posibles a analizar (centrales de tercios de octava)
*
      DATA AFR/25.,31.5,40.,50.,63.,80.,100.,125.,160.,200.,250.,315.
     @        ,400.,500.,630.,800.,1000.,1250.,1600.,2000.,2500.,3150.
     @        ,4000.,5000.,6300.,8000.,10000.,12500.,16000.,20000./
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
*
*  Asignacion de Unidades de Entrada-Salida
*
      IRE=5
      IWR6=6
      IWR7=7
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
*   Lectura de datos de entrada
*
       CALL INPUT(IRE,CW,NFR,ANELO,NCONT,XI,YI,XF,YF,KODE,P,DP,SIGMA,T
      @,NPINT,XPINT,YPINT,XFONT,YFONT,SIGSEMI,TSEMI)
*
*   Ejecución del programa para cada frecuencia especificada
*
       DO 1 I=1,NFR
*
*   Llamada al Preprocesador
*
       CALL PREPROCES(NCONT,AFR(I),CW,ANELO,XI,YI,XF,YF,N,X,Y,NI,NF)
*
*   Beta representa la admitancia de cada contorno(Incluido el semiesp.)
*   Se obtiene de acuerdo a las expresiones de Delany y Bazley. Se obtiene
*   luego un parámetro de admitancia estadístico (Morse)
*
       DO 10 IJ=1,NCONT
       IF(SIGMA(IJ).EQ.0.)GO TO 8
       CALL MORSE(AFR(I),CW,SIGMA(IJ),T(IJ),BETA(IJ))
       GO TO 10
     8 BETA(IJ)=(0.0D0,0.0D0)
    10 CONTINUE
*
       IF(SIGSEMI.EQ.0.)GO TO 20
       CALL MORSE(AFR(I),CW,SIGSEMI,TSEMI,BETSEMI)
       GO TO 30
    20 BETSEMI=(0.0D0,0.0D0)
*
    30 FR=AFR(I)*2.*PI
*
*   Inicialización de la matriz de coeficientes "H(i,j)" y vector de
*   resultados "F(1)" del sistema de ecuaciones resultante
*
       DO 60 J=1,N
       DO 60 K=1,N
       H(J,K)=(0.0D0,0.0D0)
    60 CONTINUE
*
       DO 40 J=1,N
       F(J)=(0.0D0,0.0D0)
    40 CONTINUE
*
*   Construcción del sistema de ecuaciones a resolver
*
       CALL SISTEM(CW,N,X,Y,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,BETA,FR,H,F,NMC,NMNC
      @,XFONT,YFONT,BETSEMI)
*
*   Resolución del Sistema de Ecuaciones resultante
*
       NX=NMC*NMNC
       CALL CSOLVER(H,F,N,NX)
*
*   Salida de Resultados
*
       CALL SOLCON(IWR7,CW,X,Y,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,P1,DP1,DETA,FR,F
      @,NMC,NMNC)
*
*   Calculo de los valores de presión acústica en puntos internos
*
       IF(NPINT.NE.0)THEN
       CALL INTER(IWR6,X,Y,NCONT,NI,NF,P1,DP1,NMPI,NPINT,XPINT,YPINT,CW
      @,FR,XFONT,YFONT,BETSEMI)
       END IF
    1  CONTINUE
*
       STOP
       END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**Entrada de datos. Rutina INPUT**

Todos los datos del problema requeridos por el programa son leídos en esta rutina. Como ya se ha adelantado, la entrada de datos no se realiza de forma interactiva desde el teclado, sino desde un fichero de entrada elaborado al efecto.

A la vista del listado de esta rutina y del significado de las variables visto anteriormente, es sencillo confeccionar un fichero de entrada para el ejemplo que desee, sólo es necesario tener en cuenta algunas cuestiones que aclararemos en este apartado. En principio, el fichero de datos ha de estar constituido por las líneas siguientes:

(1) CW. Real. Velocidad de propagación de las ondas acústicas en el aire.

(2) NFR. Entero. Número de frecuencias a considerar. Ejemplo: si NFR = 10, las frecuencias analizadas serán: 25, 31.5, 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160 y 200Hz. Aclarar que no es necesario introducir los valores de estas frecuencias.

(3) ANELO. Entero. Número de elementos en una longitud de onda.

(4) XFONT, YFONT. Reales. Coordenada *x*, coordenada *y* de la fuente interna.

(5) SIGSEMI, TSEMI. Reales. Resistividad al flujo de aire, espesor del tratamiento absorbente del semiespacio.

(6) NCONT. Entero. Número de contornos.

(7) XI(J), YI(J), XF(J), YF(J). Reales. (J = 1, NCONT). Para cada uno de los contornos, coordenadas de los puntos inicial y final respectivamente en una línea. El carácter de punto inicial y final lo marca el sentido de recorrido del contorno que mantiene el dominio (aire) a la izquierda (Fig.4.2). Sobre la diferenciación de contornos y estas variables relacionadas, volveremos al final de este apartado.

(8) KODE(J), P(J), DP(J), SIGMA(J) ,T(J). Entero (KODE), complejas (P, DP) y reales (SIGMA y T). Luego de las coordenadas de los puntos inicial y final del contorno J, y antes de pasar al contorno J+1, se especifican las condiciones de contorno impuestas al mismo. Se escribe el valor del vector KODE(J), los valores de la presión P(J) y flujo DP(J) prescritos, así como los valores de la resistividad al flujo de aire SIGMA(J) y espesor T(J) del tratamiento absorbente aplicado a dicho contorno. Así, como ya se ha adelantado, si KODE(J) = 0 la presión P(J) es dato en el contorno J y el flujo incógnita. En este caso se escriben el resto de términos de la línea DP(J) = (0., 0.), SIGMA(J) = 0 y T(J) = 0. Por otra parte, si KODE(J) = 1 en dicho contorno la presión y el flujo son incógnita. En este caso es dato la admitancia BETA(J) que se obtendrá a partir de SIGMA(J) y T(J) (ec. (2.68) a (2.72)) y se escribirá P(J) = (0.,0.) y DP(J) = (0.,0.).

(9) NPINT. Entero. Número de puntos internos. Si NPINT = 0 no existen puntos internos y no se leerán las líneas siguientes.

(10) XPINT(I), YPINT(I). Reales. Coordenada *x*, coordenada *y* de los puntos internos. Se lee cada punto interno en una línea.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

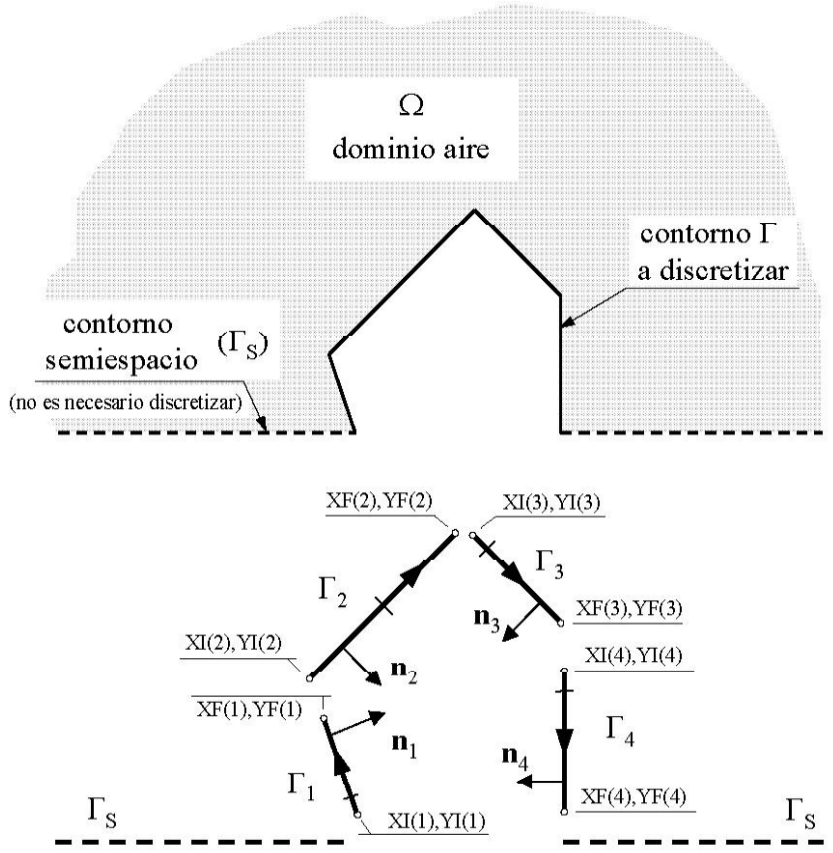



Figura 4.2. Obstáculo con geometría genérica. Descomposición del contorno a discretizar. Recorrido para definición de puntos que determinan cada contorno. El recorrido se establece manteniendo el dominio (aire) a la izquierda.

Como puede observarse, no es necesario introducir las coordenadas de los nodos de la discretización. Se introduce la geometría del problema y la discretización se realizará para cada frecuencia en la rutina PREPROCES que luego analizaremos. Es necesario, sin embargo, hacer algunas consideraciones en relación con la introducción de la geometría del contorno y para ello nos apoyaremos en el problema descrito en la Figura 4.2.

En esta figura se muestra un obstáculo con geometría genérica formada a partir de tramos rectilíneos. El contorno del obstáculo ($\Gamma$) es el único a discretizar en este problema (recuérdese que, por el tipo de solución fundamental implementada, no es necesario discretizar el contorno del semiespacio $\Gamma_S$). En primera instancia los contornos han de diferenciarse por el tipo de condición impuesta. En la versión del programa que se muestra en este capítulo, y debido a lo simplificado del preproceso, los contornos a discretizar han de ser rectilíneos. En este ejemplo, como se muestra en la figura, existen cuatro contornos diferenciados (cada tramo recto es un contorno), por tanto NCONT = 4. Todo ello a pesar de que todos los tramos puedan tener la misma condición de contorno. Se indica también cómo se establecen los puntos inicial y final de cada contorno en función del sentido de recorrido manteniendo el dominio a la izquierda. Como es lógico, se cumple que, por ejemplo, XF(1) = XI(2) y YF(1) = YI(2).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Por último, el listado de la rutina INPUT se muestra a continuación:

```
*  ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE INPUT(IRE,CW,NFR,ANELO,NCONT,XI,YI,XF,YF,KODE,P
     @,DP,SIGMA,T,NPINT,XPINT,YPINT,XFONT,YFONT,SIGSEMI,TSEMI)
*
*  ---------------------------------------------------------------------
*   Esta Rutina realiza la lectura de los parametros necesarios para
*   la ejecución del programa desde un Fichero de Entrada
*  ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      DIMENSION KODE(1),XPINT(1),YPINT(1),SIGMA(1)
      DIMENSION XI(1),YI(1),XF(1),YF(1),T(1)
      COMPLEX*16 P(1),DP(1)
*
*    Lectura características mecánicas del aire
*
      READ(IRE,*)CW
*
*    Lectura número de frecuencias a analizar
*
      READ(IRE,*)NFR
*
*    Lectura del numero de elementos en cada longitud de onda
*
      READ(IRE,*)ANELO
*
*    Lectura de las coordenadas de la fuente de ruido
*
      READ(IRE,*)XFONT,YFONT
*
*    Lectura resistividad al flujo del contorno del semiesp.
*    Lectura espesor material absorbente del semiespacio.
*
      READ(IRE,*)SIGSEMI,TSEMI
*
*    Numero de contornos diferenciados
*
      READ(IRE,*)NCONT
*
*    Caracterización de cada contorno
*
*    XI(I) YI(I)  Coordenadas Nudo Inicial Contorno en estudio
*    XF(I) YF(I)  Coordenadas Nudo final Contorno en estudio
*    KODE(I)=0  Presión conocida
*    KODE(I)=1  Relación entre flujo y presión conocida
*    T(I)= Espesor del Contorno. Si cero, contorno infinito
*
      DO 6 I=1,NCONT
      READ(IRE,*)XI(I),YI(I),XF(I),YF(I)
      READ(IRE,*)KODE(I),P(I),DP(I),SIGMA(I),T(I)
    6 CONTINUE
*
*    Lectura Coordenadas de Puntos Internos
*
      READ(IRE,*)NPINT
      IF(NPINT.NE.0)THEN
      DO 7 I=1,NPINT
      READ(IRE,*)XPINT(I),YPINT(I)
    7 CONTINUE
      END IF
*
      RETURN
      END
*
*  ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**Elementos y Nodos en el contorno. Rutina PREPROCES.**

En esta rutina se realiza la discretización de los contornos del modelo. La precisión en problemas dinámicos es muy dependiente de la relación entre la longitud de onda $\lambda$ ($\lambda = c/f$ $c$: velocidad de propagación, $f$: frecuencia en Hz) y el tamaño de los elementos de la discretización. El valor de este parámetro (ANELO) es gestionado por el usuario en el fichero de entrada, si bien aclaramos que para el tipo de aproximación utilizada (elementos parabólicos) el valor de ANELO no debe ser nunca inferior a 2.

Por tanto, la discretización es redefinida por PREPROCES para cada valor de la frecuencia. El número de elementos y nodos cambian y, como es lógico, las coordenadas de estos últimos también. La discretización se adapta a una distribución de presiones más oscilante conforme aumenta la frecuencia. El lector puede entender que es lo más económico desde el punto de vista computacional. Veamos esto con un ejemplo sencillo: un obstáculo cuadrado de 3 m. de lado. En la Figura 4.3 aparecen las discretizaciones para dos frecuencias (100 Hz y 400 Hz) escogidas de la relación de frecuencias centrales de octava. En ambas ANELO = 2 y consideraremos $c$ = 340 m/s. Para la primera, el tamaño máximo permitido para elemento (ALELMAX) será 1.70 m. El tamaño del final de los elementos (ALELM) dependerá de la longitud del contorno (en cada contorno todos los elementos tienen igual longitud). En este caso, la discretización de la pantalla tiene 6 elementos de 1.50 m. de longitud y 11 nodos. En el segundo supuesto, mayor valor de la frecuencia implica una discretización más refinada. Así, el tamaño máximo teórico del elemento será 0.34 m y la discretización tendrá 19 elementos de 0.33 m. y 39 nodos. Con todo, y si bien deben entenderse estas cuestiones relacionadas con la discretización, se trata aspectos que el programa gestiona de forma autónoma.

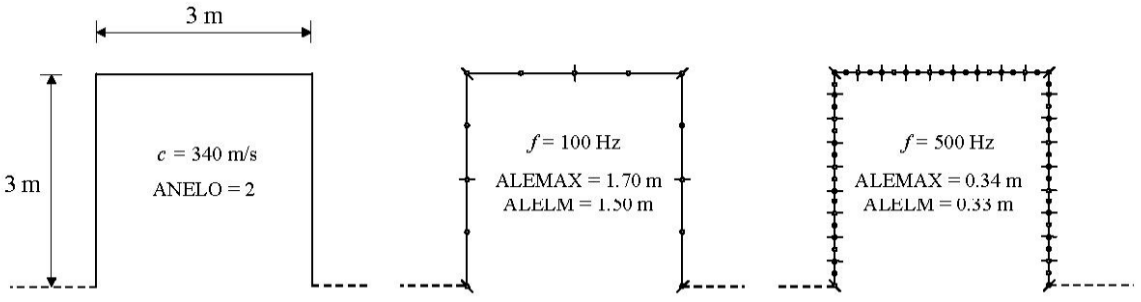



Figura 4.3. Preproceso. Discretizaciones obstáculo con elementos parabólicos ($f$ = 100 y 500 Hz ).

Las variables principales a la entrada de la rutina serán la frecuencia (FR), la velocidad de propagación de onda (CW) y la razón entre la longitud de onda y el tamaño máximo del elemento (ANELO). Las variables principales a la salida serán N (número de nodos) y los vectores X e Y (coordenadas de los mismos).

El Listado de esta rutina aparece en la página que sigue.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
* ----------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE PREPROCES(NCONT,FR,CW,ANELO,XI,YI,XF,YF,N,X,Y,NI,NF)
*
* -----     Preprocesador     -----
*
* Salida: Número de nodos,número de elementos,coordenadas de los nodos,
* nodo inicial y nodo final por contorno.
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      DIMENSION X(1),Y(1),XI(1),YI(1),XF(1),YF(1),NEL(40)
      DIMENSION NI(1),NF(1)
*
      NE=0
      N=0
*
*  Longitud de Onda asociada
*
      ALANDA=CW/FR
      ALELMAX=ALANDA/ANELO
*
      DO 20 I=1,NCONT
      D=DSQRT((XF(I)-XI(I))**2+(YF(I)-YI(I))**2)
      ANEL=D/ALELMAX
      NEL(I)=INT(ANEL)+1
      ALELM=D/NEL(I)
      NI(I)=N+1
      DO 30 J=1,NEL(I)
      X(2*NE+(I-1)+2*J-1)=XI(I)+(XF(I)-XI(I))/D*ALELM*(J-1)
      Y(2*NE+(I-1)+2*J-1)=YI(I)+(YF(I)-YI(I))/D*ALELM*(J-1)
      X(2*NE+(I-1)+2*J)=X(2*NE+(I-1)+2*J-1)+(XF(I)-XI(I))/D*ALELM*0.5
      Y(2*NE+(I-1)+2*J)=Y(2*NE+(I-1)+2*J-1)+(YF(I)-YI(I))/D*ALELM*0.5
      N=N+2
      IF(J.EQ.NEL(I))THEN
      X(2*NE+(I-1)+2*J+1)=XF(I)
      Y(2*NE+(I-1)+2*J+1)=YF(I)
      N=N+1
      END IF
   30 CONTINUE
      NE=NE+NEL(I)
      NF(I)=N
   20 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ----------------------------------------------------------------------
```

**Ensamblaje del sistema de ecuaciones. Rutina SISTEM.**

En esta rutina se construye el sistema de ecuaciones del problema. Variables a tener en cuenta: **H**(NX,NX) es la matriz de coeficientes del problema y **F**(NX) el vector del lado derecho. Veremos en lo que sigue cómo se construyen ambos. En Figura 4.4 se muestra el diagrama de flujo de esta rutina. Como se observa en este diagrama, desde SISTEM se invoca a las rutinas GHMAT donde se calculan los núcleos de integración de la solución fundamental y ASSEMBLE que construye la matriz de coeficientes en función de las condiciones de contorno del problema.

En SISTEM se establece el ciclo que permite utilizar como punto de colocación todos los nodos de la discretización. Para cada nodo de colocación (I1), se determinan los núcleos de integración de la solución fundamental en presiones, que se almacenan en el vector complejo **G**(NX), y los correspondientes al flujo, que se almacenan en la fila I1 de la propia matriz **H.** Posteriormente, en la rutina ASSEMBLE se recolocan los términos de la fila I1 de **H** y se asigna valor a F(I1) según las condiciones de contorno.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

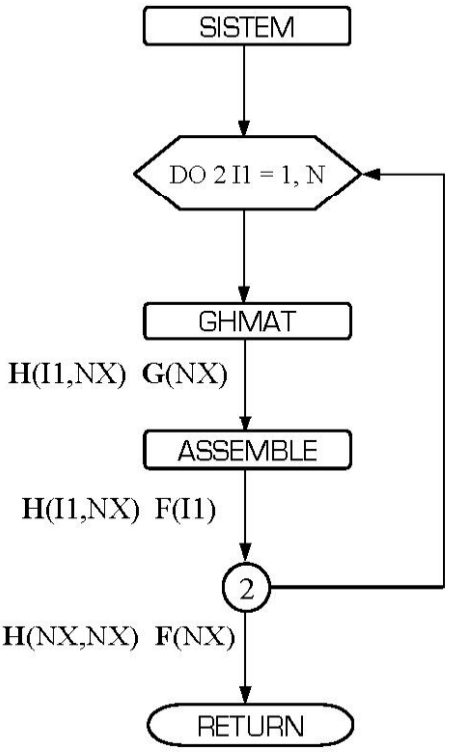



Figura 4.4. Diagrama de flujo de la rutina SISTEM.

El listado de SISTEM es el siguiente:

```
* ----------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE SISTEM(CW,N,X,Y,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,BETA,FR,H,F
     @,NMC,NMNC,XFONT,YFONT,BETSEMI)
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina constituye el módulo fundamental de cálculo. En
*  ella se evalúan los nucleos de integración y se realiza el montaje
*  del sistema de ecuaciones a resolver.
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION X(1),Y(1),NI(1),NF(1),KODE(1)
      COMPLEX*16 P(1),DP(1),BETA(1)
      COMPLEX*16 BETSEMI
*
      COMPLEX*16 H(NMNC*NMC,NMNC*NMC),G(NMNC*NMC)
      COMPLEX*16 DFUE,DIMG,DCOM
      COMPLEX*16 F(NMC*NMNC)
*
*  Calculo de las submatrices G y H correspondientes.
*
      DO 2 I1=1,N
      CALL GHMAT(CW,N,X,Y,NCONT,NI,NF,I1,FR,H,G,NMC,NMNC,XFONT,YFONT
     @,DFUE,DIMG,DCOM,BETSEMI)
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
*   Imposición de las condiciones de contorno
*   Confección de la matriz global del sistema a resolver.
*
       CALL ASSEMBLE(CW,I1,N,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,BETA,H,G,F,FR,NMC
      @,NMNC,DFUE,DIMG,DCOM)
*
     2 CONTINUE
*
       RETURN
       END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

## Integrales de la solución fundamental. Rutina GHMAT.

Como ya hemos comentado, en esta rutina se calculan los núcleos de integración de la solución fundamental sobre todos los elementos del contorno para un nodo de colocación dado (I1). Puede seguirse el diagrama de flujo en la Figura 4.5.

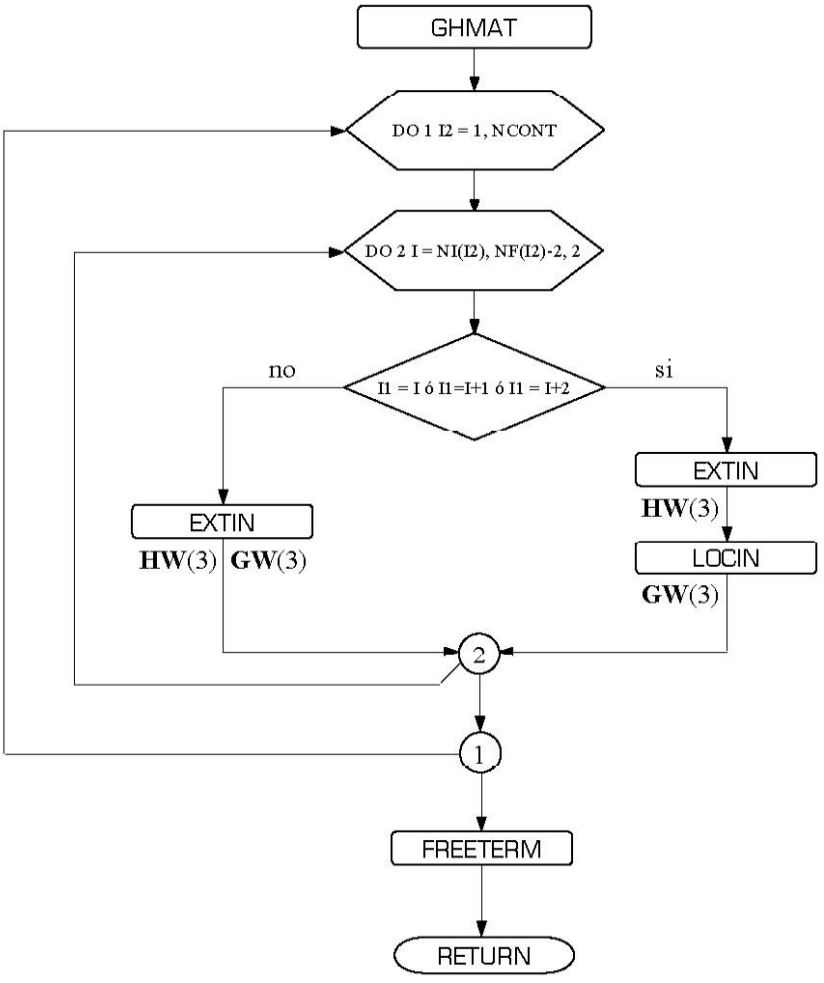



Figura 4.5. Diagrama de flujo de la rutina GHMAT.

Comienza el proceso con dos bucles que permiten recorrer todos los elementos del contorno. En cada uno de ellos se evaluarán numéricamente las integrales de la solución

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

fundamental que se almacenarán en los vectores complejos **HW** y **GW**. Para un elemento genérico $\Gamma_j$ (Fig. 4.6) dichas integrales adoptan la expresión:

$$HW(k) = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial n} \phi_k \, d\Gamma_j \quad ; \quad GW(k) = \int_{\Gamma_j} p^* \phi_k \, d\Gamma_j \quad (k = 1, 2, 3) \qquad (4.1)$$

siendo $p^*$ y $\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}}$ las expresiones de la solución fundamental del semiespacio y $\phi_k$ las funciones de forma para un elemento parabólico (Fig. 3.12). Una vez calculadas **HW** y **GW** se almacenan en la posición correspondiente (según sea la numeración de cada nodo) de **H** y **G** (Fig. 4.6).

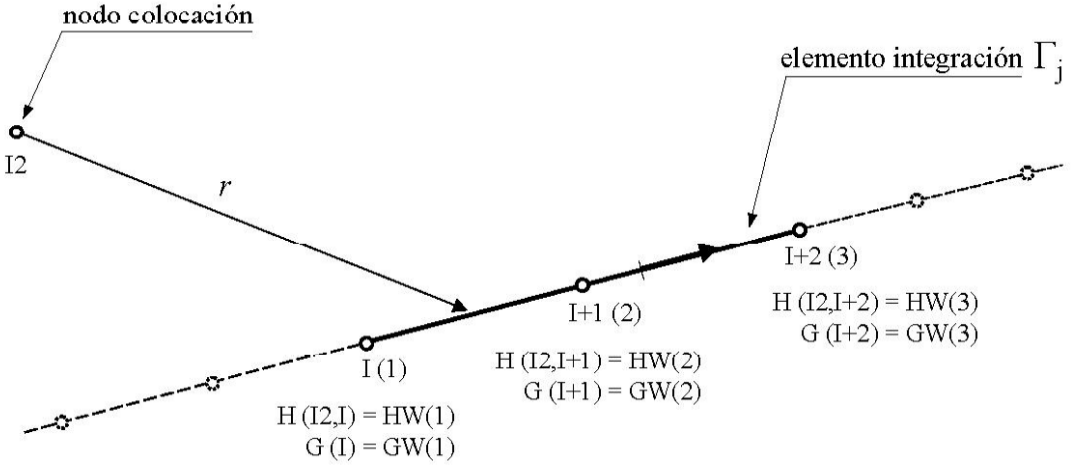



Figura 4.6. Integración sobre elemento genérico en el contorno.

El procedimiento numérico que permite obtener las integrales en el contorno depende de la situación del nodo de colocación (I2) en relación con los nodos del elemento que se integra (I, I+1, I+2). Si el nodo I2 no coincide con ninguno de los nodos del elemento integrado, el cálculo de los vectores **HW** y **GW** se realiza en la rutina EXTIN (EXTernal INtegration). Por el contrario, si I2 es alguno de los nodos de $\Gamma_j$ los términos de **HW** se obtienen en la rutina EXTIN ya referida, mientras que las componentes de **GW** se calculan en otra rutina denominada LOCIN (LOCal INtegration). Veremos ambas rutinas con detenimiento más adelante.

Recuérdese, según lo visto en el capítulo anterior relativo al tipo de solución fundamental utilizada, que la colocación se realiza, además de en cada nodo de la discretización, en su correspondiente imagen al otro lado del semiespacio. Así las rutinas que evalúan numéricamente las integrales, son invocadas desde GHMAT dos veces consecutivas. Una para realizar las integrales con colocación en el nodo correspondiente de la discretización (fuente) y otra para realizar la misma operación desde la imagen de este nodo (Fig.4.7). Los resultados correspondientes se almacenan en dos vectores complejos **HWF** y **GWF** cuando se integra desde la fuente y en **HWI** y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**GWI** cuando se hace desde la imagen. Lo habitual es que ésta última siempre sea una integración con colocación exterior al elemento (**HWI** y **GWI** se calculan en EXTIN). Sólo existe una excepción: cuando la colocación se realiza en un nodo que además pertenece al semiespacio.

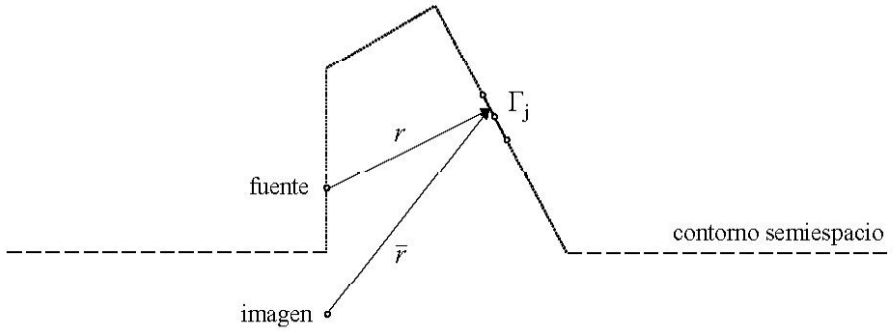



Figura 4.7. Colocación fuente-imagen. Integración sobre elemento genérico.

La última operación que se realiza en GHMAT es la suma del término libre en la diagonal principal de **H**, fila I2. El valor del término libre, según la expresión (3.28), se determina en la rutina FREETERM para los nodos iniciales o finales de cada contorno (esquinas). En el resto de nodos (interiores a cada contorno) el valor del término libre se asigna en GHMAT. Teniendo en cuenta que los contornos son rectilíneos, en estos nodos $c = 0.5$.

Por último, mostramos el listado de la rutina GHMAT:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE GHMAT(CW,N,X,Y,NCONT,NI,NF,I1,FR,H,G,NMC,NMNC,XFONT
     @,YFONT,DFUE,DIMG,DCOM,BETSEMI)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  En esta rutina se evalúa, para un punto de colocación dado, las
*  integrales de la solución fundamental en todos los elementos del
*  contorno. La integral de la solución fundamental en flujo se
*  almacena por filas en la matriz H. La correspondiente a las
*  presiones en el vector G.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION X(1),Y(1),NI(1),NF(1)
*
      COMPLEX*16 HWF(3),GWF(3),HWI(3),GWI(3),HW(3),GW(3)
      COMPLEX*16 H(NMNC*NMC,NMNC*NMC),G(NMNC*NMC)
      COMPLEX*16 DFUE,DIMG,DCOM
      COMPLEX*16 BETSEMI,BETCERO
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
*
*  Término adicional solo para Punto Imagen
*
      BETCERO=(0.0D0,0.0D0)
*
      DO 10 I=1,N
      G(I)=(0.0D0,0.0D0)
   10 CONTINUE
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
*   -- Coordenadas punto de colocación --
*
      XFUE=X(I1)
      YFUE=Y(I1)
      XIMG=X(I1)
      YIMG=-Y(I1)
*
      DO 1 I2=1,NCONT
*
      NODO=0
      DO 2 I=NI(I2),NF(I2)-2,2
*
*   Integración para Punto Fuente
*
       IF((DABS((XFUE-X(I))*(XFUE-X(I+1))*(XFUE-X(I+2))).LT.1.E-08)
     &.AND.(DABS((YFUE-Y(I))*(YFUE-Y(I+1))*(YFUE-Y(I+2))).LT.1.E-08)
     &)GO TO 21
       GO TO 22
   21 IF((DABS(XFUE-X(I)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YFUE-Y(I))
     &.LT.1.0E-08))NODO=1
       IF((DABS(XFUE-X(I+1)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YFUE-Y(I+1))
     &.LT.1.0E-08))NODO=2
       IF((DABS(XFUE-X(I+2)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YFUE-Y(I+2))
     &.LT.1.0E-08))NODO=3
       CALL EXTIN(XFUE,YFUE,X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2)
     *,HWF,GWF,CW,FR,BETCERO)
       CALL LOCIN(X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2),GWF,NODO,CW
     *,FR,BETCERO)
       GO TO 24
   22 CALL EXTIN(XFUE,YFUE,X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2)
     *,HWF,GWF,CW,FR,BETCERO)
*
*   Integración para Punto Imagen
*
   24 IF((DABS((XIMG-X(I))*(XIMG-X(I+1))*(XIMG-X(I+2))).LT.1.E-08)
     &.AND.(DABS((YIMG-Y(I))*(YIMG-Y(I+1))*(YIMG-Y(I+2))).LT.1.E-08)
     &)GO TO 25
       GO TO 26
   25 IF((DABS(XIMG-X(I)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YIMG-Y(I))
     &.LT.1.0E-08))NODO=1
       IF((DABS(XIMG-X(I+1)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YIMG-Y(I+1))
     &.LT.1.0E-08))NODO=2
       IF((DABS(XIMG-X(I+2)).LT.1.0E-08).AND.(DABS(YIMG-Y(I+2))
     &.LT.1.0E-08))NODO=3
       CALL EXTIN(XIMG,YIMG,X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2)
     *,HWI,GWI,CW,FR,BETSEMI)
       CALL LOCIN(X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2),GWI,NODO,CW
     *,FR,BETSEMI)
       GO TO 34
   26 CALL EXTIN(XIMG,YIMG,X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2)
     *,HWI,GWI,CW,FR,BETSEMI)
*
*   Suma de las matrices GW, HW en las matrices generales GP AND HP
*
   34 DO 48 J=1,3
*
*   Suma de las matrices GW
*
      GW(J)=GWF(J)+GWI(J)
      G(I+J-1)=G(I+J-1)+GW(J)
*
*   Suma de las matrices HW
*
      HW(J)=HWF(J)+HWI(J)
      H(I1,I+J-1)=H(I1,I+J-1)+HW(J)
*
   48 CONTINUE
    2 CONTINUE
    1 CONTINUE
*
*   El Elemento pertenece a la diagonal. Suma El Término Libre
*
      DO 5 I2=1,NCONT
      IF((I1.EQ.NI(I2)).OR.(I1.EQ.NF(I2)))THEN
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      CALL COORD(X,Y,NCONT,NI,NF,I1,I2,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5)
      CALL FREETERM(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5,C)
      GO TO 6
      END IF
      IF((I1.GT.NI(I2)).AND.(I1.LT.NF(I2)))THEN
      C=0.50D0
      GO TO 6
      END IF
    5 CONTINUE
*
    6 IF(YFUE.EQ.0.)C=2.*C
      H(I1,I1)=H(I1,I1)+C
*
*  Cálculo de la Solución Fundamental para la carga aplicada en el
*  punto del contorno en estudio, en el punto del dominio donde se
*  considera aplicada la fuente de ruido exterior.
*
      CALL FUNSOL(XFUE,YFUE,XFONT,YFONT,DFUE,CW,FR)
      CALL FUNSOL(XIMG,YIMG,XFONT,YFONT,DIMG,CW,FR)
      IF(CDABS(BETSEMI).EQ.0.)GO TO 50
      CALL PREKAW(XIMG,YIMG,XFONT,YFONT,BETSEMI,FR,CW,DCOM)
      DCOM=DCOM/(2.*PI)
      GO TO 52
   50 DCOM=(0.0D0,0.0D0)
*
   52 RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

**Imposición de las condiciones de contorno. Montaje. Rutina ASSEMBLE.**

En este módulo se combinan los coeficientes la ecuación (4.1) (escrita para cada punto de colocación I2):

$$\sum_{I=1}^{N} H(I2,I)\,P(I) = \sum_{I=1}^{N} G(I)\,DP(I) \tag{4.2}$$

según sean las condiciones de contorno del problema, para obtener la ecuación correspondiente del sistema último a resolver que se almacena en la propia matriz **H:**

$$\mathbf{H\,X = F} \tag{4.3}$$

donde **X** es el vector de incógnitas del problema (no definido en el programa). Si el flujo es incógnita y la presión dato en el nodo I, KODE(I1) = 0 (contorno radiante), el término correspondiente del vector **G**, $G(I)$, debe transferirse a la columna correspondiente de **H** con cambio de signo, mientras el producto $H(I2,I)\,P(I)$ se almacena en $F(I2)$, también con signo '-'. Por otra parte, si presión y flujo son incógnita, KODE(I1) = 1, ambos relacionados a través de la admitancia BETA(I1) del contorno, los términos correspondientes de **H** y **G** se combinan como sigue [ver (3.55)]:

$$H(I2,I) = H(I2,I) + \mathrm{i}\,k\,\mathrm{BETA(I1)}\,G(I) \tag{4.4}$$

y $F(I2)$ no se altera. En este caso la presión es la incógnita elegida en el nodo.

Independientemente de las condiciones de contorno, si existen fuentes internas de presión localizada en el punto $\mathbf{x_o}$, entonces $F(I2) = p_o^*$, donde $p_o^*$ es el valor de la solución fundamental en $\mathbf{x_o}$ para una fuente situada en el nodo de colocación I2. Como

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

puede verse de forma sencilla, $p_o^*$ se obtiene en las últimas líneas de GHMAT y se traslada a ASSEMBLE donde se incorpora al sistema como hemos indicado.

Un apunte que a estas alturas puede haber suscitado dudas en el lector a la vista de lo comentado hasta aquí. En la confección del sistema de ecuaciones del problema se ha seguido la estrategia de duplicar los nodos en las esquinas entre contornos rectilíneos. En estas esquinas existen, por tanto, dos incógnitas explícitas en presión asociadas a los nodos final e inicial de los contornos que confluyen en ellas. El lector debe entender que esta duplicación es completamente artificial y es sólo una estrategia que permite confeccionar una rutina de montaje más sencilla y general. Como es lógico, el resultado de la resolución del problema devolverá idénticos valores de la presión para ambos nodos duplicados. Se puede profundizar en las características de este procedimiento consultando Medina (1989) donde se explica de forma muy clara para problemas dinámicos 2-D. Por las características de los problemas a modelar, no se contempla en el programa la posibilidad del llamado 'problema de esquina', que es la existencia de dos incógnitas en flujo distintas asociadas al nodo de la esquina. El tratamiento numérico de este problema ha sido tratado por muchos autores y el lector interesado puede consultarlo por ejemplo en Alarcón et al. (1979).

Ya, por último, el listado de la rutina ASSEMBLE se escribe a continuación:

```
* ------------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE ASSEMBLE(CW,I1,N,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,BETA,H,G,F,FR
     @,NMC,NMNC,DFUE,DIMG,DCOM)
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
*  Este Modulo realiza el montaje de las matrices H y G calculadas
*  para cada colocación. El resultado será el sistema último a resolver.
*                  ----    [H]*[X]=[F]    ----
* ------------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION NI(1),NF(1),KODE(1)
      COMPLEX*16 P(1),DP(1),BETA(1)
*
      COMPLEX*16 H(NMC*NMNC,NMC*NMNC),G(NMC*NMNC)
      COMPLEX*16 DFUE,DIMG,DCOM
      COMPLEX*16 F(NMC*NMNC),DAT(NMC*NMNC)
      COMPLEX*16 CH,IMG
      REAL*8 NONDA
*
      IMG=DCMPLX(0.,1.)
      NONDA=FR/CW
*
      DO 1 I=1,NCONT
*
*  Si la presión es incógnita. Relacionada con el flujo a traves de
*  ALFA.
*
      IF(KODE(I).EQ.1)THEN
      DO 10 K=NI(I),NF(I)
      H(I1,K)=H(I1,K)+IMG*NONDA*BETA(I)*G(K)
      G(K)=0.0D0
   10 CONTINUE
      END IF
*
*  Si la presión es dato. Flujo incógnita. Superficie radiante.
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      IF(KODE(I).EQ.0)THEN
      DO 30 K=NI(I),NF(I)
      CH=H(I1,K)
      H(I1,K)=-G(K)
      G(K)=-CH
   30 CONTINUE
      END IF
*
    1 CONTINUE
*
*  Formación del vector DAT(J)
*
      DO 50 I=1,NCONT
      DO 60 J=NI(I),NF(I)
      DAT(J)=P(I)
   60 CONTINUE
   50 CONTINUE
*
*  Cálculo del vector de coeficientes
*
      DO 90 J=1,N
      F(I1)=F(I1)+G(J)*DAT(J)
   90 CONTINUE
*
*  Incorporación de la Solución Fundamental en el punto de aplicación
*  de la solicitación externa
*
      F(I1)=F(I1)+DFUE+DIMG+DCOM
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

**Integración exterior. Rutina EXTIN.**

En esta rutina se calculan numéricamente los núcleos de integración $HW(3)$ y $GW(3)$ (4.1) cuando el punto de colocación no es nodo del elemento en que se integra (ver Fig. 4.5). Los integrandos son regulares y la integración se realiza directamente sin operaciones previas sobre las expresiones de estos integrandos mediante una cuadratura gaussiana estándar con diez puntos. Para el tipo de elementos utilizado (parabólicos) el número de puntos propuesto es suficiente para obtener una precisión adecuada en estos coeficientes.

Como puede verse en la Figura 4.5, también se acude a esta rutina cuando se integran los núcleos $HW(3)$ desde el propio elemento. Ello es debido a que la expresión del flujo en la solución fundamental es regular incluso cuando el punto de colocación es uno de los nodos del elemento. No ocurre lo mismo con la presión. Veamos esto con algún detenimiento desde la expresión de la solución fundamental más general vista en el capítulo anterior:

$$p^*(k,r) = \frac{1}{2\pi}\left[K_o(\mathrm{i}kr) + K_o(\mathrm{i}k\bar{r}) + \Phi(\mathrm{i}k\bar{r})\right] \tag{4.5a}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\left[K_1(\mathrm{i}kr)\frac{\partial r}{\partial n} + K_1(\mathrm{i}k\bar{r})\frac{\partial \bar{r}}{\partial n}\right] + \frac{\partial \Phi(\mathrm{i}k\bar{r})}{\partial \bar{r}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial n} \tag{4.5b}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

que son las expresiones de la solución fundamental en presión y flujo para semiespacio absorbente. Teniendo en cuenta que:

$$K_o(\mathrm{i}kr) = O(\ln r) \tag{4.6a}$$

$$K_1(\mathrm{i}kr) = O(1/r) \tag{4.6b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = O(r) \tag{4.6c}$$

se concluye, tal como habíamos adelantado, que:

$$p^* = O(\ln r) \quad \text{y} \quad \frac{\partial p^*}{\partial n} = O(r^o) \tag{4.7}$$

Por último comentar las rutina invocadas desde EXTIN, éstas son BESSEL, PREKAW y FLUKAW. En estas rutinas se calcula, para argumento complejo, las funciones modificadas de Bessel, el término complementario $\Phi$ y la derivada de éste respectivamente para cada punto de integración. Cada una de estas rutinas las analizaremos más adelante. El listado de la rutina EXTIN se escribe a continuación:

```
*---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE EXTIN(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,HW,GW,CW,FR,BETA)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina calcula las matrices HW y GW. Tales matrices
*  representan la integración de la solución fundamental para un prob.
*  de Potencial a través de una cuadratura gaussiana. HW se obtiene
*  para cualquier localización del punto de colocación. GW para puntos
*  de colocación que no formen parte del elemento analizado.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O Z)
*
      COMPLEX*16 BETA,PHI,DNPHI
      COMPLEX*16 GW(3),HW(3),Z,F0C,F1C,F2C
      DIMENSION GI(10),OME(10)

*
      DATA GI/0.973906528517172,-0.973906528517172,0.865063366688985
     @       ,-0.865063366688985,0.679409568299024,-0.679409568299024
     @       ,0.433395394129247,-0.433395394129247,0.148874338981631
     @       ,-0.148874338981631/
      DATA OME/0.066671344308688,0.066671344308688,0.149451349150581
     @       ,0.149451349150581,0.219086362515982,0.219086362515982
     @       ,0.269266719309996,0.269266719309996,0.295524224714753
     @       ,0.295524224714753/
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
*
      DO 20 J=1,3
      HW(J)=(0.0D0,0.0D0)
   20 GW(J)=(0.0D0,0.0D0)
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
*
      A=X3-2*X2+X1
      B=(X3-X1)/2
      C=Y3-2*Y2+Y1
      D=(Y3-Y1)/2
*
      DO 40 I=1,10
*
*  Valores de las funciones de forma en los puntos de integración
*
      F1=GI(I)*(GI(I)-1)*0.5
      F2=1.-GI(I)**2
      F3=GI(I)*(GI(I)+1)*0.5
*
*  Parámetros geométricos en los puntos de integración
*
      XCO=X1*F1+X2*F2+X3*F3
      YCO=Y1*F1+Y2*F2+Y3*F3
      XJA=DSQRT((GI(I)*A+B)**2+(GI(I)*C+D)**2)
      ETA1=(GI(I)*C+D)/XJA
      ETA2=-(GI(I)*A+B)/XJA
      RA=DSQRT((XP-XCO)**2+(YP-YCO)**2)
      RD1=(XCO-XP)/RA
      RD2=(YCO-YP)/RA
      RDN=RD1*ETA1+RD2*ETA2
*
*  Obtención del término adicional (contorno semiesp.absorbente)
*
      IF(CDABS(BETA).EQ.0.)GO TO 10
      CALL PREKAW(XP,YP,XCO,YCO,BETA,FR,CW,PHI)
      CALL FLUKAW(XP,YP,XCO,YCO,BETA,FR,CW,ETA1,ETA2,RDN,DNPHI)
      GO TO 12
   10 PHI=(0.0D0,0.0D0)
      DNPHI=(0.0D0,0.0D0)
*
*  Cálculo de los vectores GW, HW, y HS
*
   12 ZR=FR*RA/CW
      Z=DCMPLX(0.0D0,ZR)
      CALL BESSEL(Z,F0C,F1C,F2C)
*
*   Solución Fundamental dinámica (presión) (u*)=1/2pi*Ko(z)
*
      GW(1)=GW(1)+(F0C+PHI)*OME(I)*XJA*F1
      GW(2)=GW(2)+(F0C+PHI)*OME(I)*XJA*F2
      GW(3)=GW(3)+(F0C+PHI)*OME(I)*XJA*F3
*
*   Solución Fundamental dinámica (gradiente) (p*)=[(p*)-(ps)]+(ps)
*
      HW(1)=HW(1)-(Z/RA*(F1C*RDN)-DNPHI)*OME(I)*XJA*F1
      HW(2)=HW(2)-(Z/RA*(F1C*RDN)-DNPHI)*OME(I)*XJA*F2
      HW(3)=HW(3)-(Z/RA*(F1C*RDN)-DNPHI)*OME(I)*XJA*F3
*
   40 CONTINUE
*
      DO 80 I=1,3
      HW(I)=HW(I)/(2.0D0*PI)
      GW(I)=GW(I)/(2.0D0*PI)
   80 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**Integración en el propio elemento. Rutina LOCIN.**

En esta rutina se calcula numéricamente **GW** (4.1) de un elemento cuando el nodo de colocación es uno de los tres nodos de este elemento.

El procedimiento a seguir depende de la posición del nodo de colocación dentro del elemento, es decir, si se trata del nodo 1, 2 ó 3 (Fig 4.6). En cualquier caso, y de forma genérica, después de algunas operaciones previas será posible expresar el integrando como suma de dos términos: uno completamente regular y evaluable mediante una cuadratura gaussiana estándar y otro de $O(\ln r)$ que puede obtenerse numéricamente mediante una cuadratura especial. Los detalles de este procedimiento pueden consultarse en Domínguez, (1993).

El listado de LOCIN se escribe a continuación:

```
* ------------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE LOCIN(XG1,YG1,XG2,YG2,XG3,YG3,GW,NODO,CW,FR,BETA)
*
* ========================================================================
*
*  Esta Rutina calcula la matriz GW cuando el punto de colocación
*  forma parte del elemento analizado.
*  La parte no-singular es evaluada utilizando una cuadratura gaussiana
*  estándar.
*  La parte logarítmica es evaluada utilizando una cuadratura específica
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION GI(10),OME(10),GIL(10),OMEL(10)
      COMPLEX*16 GW(3),Z,F0C,F1C,F2C,TERNS,S1,S2,S3
      COMPLEX*16 BETA,PHI
*
*  Coeficientes Cuadratura Gaussiana Estándar
*
      DATA GI/0.973906528517172,-0.973906528517172,0.865063366688985
     @       ,-0.865063366688985,0.679409568299024,-0.679409568299024
     @       ,0.433395394129247,-0.433395394129247,0.148874338981631
     @       ,-0.148874338981631/
      DATA OME/0.066671344308688,0.066671344308688,0.149451349150581
     @       ,0.149451349150581,0.219086362515982,0.219086362515982
     @       ,0.269266719309996,0.269266719309996,0.295524224714753
     @       ,0.295524224714753/
*
*  Coeficientes Cuadratura Logarítmica
*
      DATA GIL/0.009042630962200,0.053971266222501,0.135311824639251
     @        ,0.247052416287160,0.380212539609332,0.523792317971843
     @        ,0.665775205516425,0.794190416011966,0.898161091219004
     @        ,0.968847988718634/
      DATA OMEL/0.120955131954571,0.186363542564072,0.195660873277760
     @         ,0.173577142182907,0.135695672995484,0.093646758538111
     @         ,0.055787727351416,0.027159810899233,0.009515182602849
     @         ,0.001638157633598/
*
      PI=3.14159265358979323846264338D0
*
*  Sistema Local de Coordenadas
*
      GOTO(1,2,3),NODO
    1 X3=XG3-XG1
      Y3=YG3-YG1
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      X2=XG2-XG1
      Y2=YG2-YG1
      A1=(X3-2*X2)*0.5
      B1=X2
      A2=(Y3-2*Y2)*0.5
      B2=Y2
      GO TO 4
    2 X3=XG3-XG2
      Y3=YG3-YG2
      X1=XG1-XG2
      Y1=YG1-YG2
      A1=X1+X3
      B1=X3-X1
      A2=Y1+Y3
      B2=Y3-Y1
      GO TO 4
    3 X2=XG2-XG3
      Y2=YG2-YG3
      X1=XG1-XG3
      Y1=YG1-YG3
      A1=(X1-2*X2)*0.5
      B1=-X2
      A2=(Y1-2*Y2)*0.5
      B2=-Y2
    4 CONTINUE
*
      DO 10 J=1,3
   10 GW(J)=(0.,0.)
*
      DO 250 I=1,10
*
*  Funciones de Forma en los puntos de integración
*
      F3=0.5*GI(I)*(GI(I)+1.)
      F2=1.-GI(I)**2
      F1=0.5*GI(I)*(GI(I)-1.)
      FL3=GIL(I)*(2.*GIL(I)-1.)
      FL2=4.*GIL(I)*(1.-GIL(I))
      FL1=(GIL(I)-1.)*(2.*GIL(I)-1.)
      FLN3=0.5*GIL(I)*(GIL(I)+1.)
      FLN2=1.-GIL(I)**2
      FLN1=0.5*CIL(I)*(CIL(I)-1.)
*
*  Cálculo del vector GW
*
      RANS=DSQRT((GI(I)*A1+B1)**2+(GI(I)*A2+B2)**2)
*
*  Término adicional PHI
*
      IF(CDABS(BETA).EQ.0.)GO TO 20
      X=XG1*F1+XG2*F2+XG3*F3
      Y=YG1*F1+YG2*F2+YG3*F3
      IF(NODO.EQ.1)CALL PREKAW(XG1,YG1,X,Y,BETA,FR,CW,PHI)
      IF(NODO.EQ.2)CALL PREKAW(XG2,YG2,X,Y,BETA,FR,CW,PHI)
      IF(NODO.EQ.3)CALL PREKAW(XG3,YG3,X,Y,BETA,FR,CW,PHI)
      GO TO 21
   20 PHI=(0.0D0,0.0D0)
*
   21 GO TO(50,60,70) NODO
*
   50 XJA1=DSQRT((4*A1*GIL(I)-2*A1+0.5*X3)**2+(4*A2*GIL(I)-2*A2+0.5*Y3)
     @**2)*2
      XJA2=DSQRT((A1*GI(I)*2+0.5*X3)**2+(A2*GI(I)*2+0.5*Y3)**2)
      RA=RANS*DABS(1.+GI(I))
      ZR=FR*RA/CW
      Z=DCMPLX(0.0D0,ZR)
      CALL BESSEL(Z,F0C,F1C,F2C)
      TERNS=F0C+DLOG(DABS(1.+GI(I))/2.)
      S3=FL3*XJA1*OMEL(I)+F3*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S2=FL2*XJA1*OMEL(I)+F2*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S1=FL1*XJA1*OMEL(I)+F1*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      GO TO 200
*
   60 XJA1=DSQRT((0.5*B1-A1*GIL(I))**2+(0.5*B2-A2*GIL(I))**2)
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      XJA11=DSQRT((0.5*B1+A1*GIL(I))**2+(0.5*B2+A2*GIL(I))**2)
      XJA2=DSQRT((0.5*B1+A1*GI(I))**2+(0.5*B2+A2*GI(I))**2)
      RA=RANS*DABS(GI(I))/2.
      ZR=FR*RA/CW
      Z=DCMPLX(0.0D0,ZR)
      CALL BESSEL(Z,F0C,F1C,F2C)
      TERNS=F0C+DLOG(DABS(GI(I)))
      S3=(FLN1*XJA1+FLN3*XJA11)*OMEL(I)+F3*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S2=FLN2*(XJA1+XJA11)*OMEL(I)+F2*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S1=(FLN3*XJA1+FLN1*XJA11)*OMEL(I)+F1*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      GO TO 200
*
   70 XJA1=DSQRT((2*A1-4*A1*GIL(I)-0.5*X1)**2+(2*A2-4*A2*GIL(I)-0.5*Y1)
     @**2)**2
      XJA2=DSQRT((2*A1*GI(I)-0.5*X1)**2+(2*A2*GI(I)-0.5*Y1)**2)
      RA=RANS*DABS(GI(I)-1.)
      ZR=FR*RA/CW
      Z=DCMPLX(0.0D0,ZR)
      CALL BESSEL(Z,F0C,F1C,F2C)
      TERNS=F0C+DLOG(DABS(GI(I)-1.)/2.)
      S3=FL1*XJA1*OMEL(I)+F3*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S2=FL2*XJA1*OMEL(I)+F2*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
      S1=FL3*XJA1*OMEL(I)+F1*XJA2*(TERNS+PHI)*OME(I)
*
  200 GW(3)= GW(3)+S3
      GW(2)= GW(2)+S2
      GW(1)= GW(1)+S1
*
  250 CONTINUE
*
      DO 300 I=1,3
      GW(I)=GW(I)/(2.0D0*PI)
  300 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* -------------------------------------------------------------------------------
```

**Cálculo del término libre. Rutina FREETERM.**

Esta rutina calcula el valor del término libre $c_i$ cuando el nodo de colocación se encuentra en una esquina. En nuestro caso, esto ocurre en los nodos que forman parte de dos contornos o en aquellos que son inicial o final de un contorno y tienen coordenada $y$=0 (forman parte del semiespacio). La expresión del término libre es (escribimos de nuevo (3.28)):

$$c_i = \frac{\theta}{2\pi} \tag{4.8}$$

donde θ es el ángulo interno de la esquina en radianes. Teniendo en cuenta las limitaciones de nuestro preprocesador (contornos rectilíneos), si los nodos son interiores a un contorno se ve claramente que $c_i = 0.5$, ya que en este caso $\theta = 2\pi$.

Así, todo se reduce a determinar el ángulo interno θ y ello puede realizarse sin dificultad a partir del ángulo que forman con el eje $x$ los contornos que confluyen en la esquina en cuestión. Hacer notar que la rutina FREETERM que aportamos se ha programado para determinar $c_i$ en elementos curvilíneos en general, por lo que θ se calcula a partir de los ángulos que forman las tangentes de los elementos contiguos. Debe enfatizarse que, si efectivamente los contornos fueran curvos, el término libre habría de ser evaluado en todos aquellos nodos que comparten elementos contiguos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

aunque pueda pensarse que se trata de "puntos suaves" de la geometría. Es correcto el valor $c_i = 0.5$ si la geometría puede reproducirse de forma exacta con funciones de segundo grado. Si no es así, el resultado final con esta suposición sería incorrecto.

Escribimos a continuación el listado de esta rutina:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE FREETERM(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5,C)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Esta rutina evalúa el Término Libre a añadir a los coeficientes de la
*  diagonal principal. Su cálculo se realiza en base al ángulo interno
*  formado por el contorno en ese punto.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
*  -- Constantes de la rutina --
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
*
      ALFA=DATAN2(-0.5*Y1+2.*Y2-1.5*Y3,-0.5*X1+2.*X2-1.5*X3)
      BETA=DATAN2(-0.5*Y5+2.*Y4-1.5*Y3,-0.5*X5+2.*X4-1.5*X3)
*
      IF(ALFA.GT.BETA)THEN
      THETA=ALFA-BETA
      ELSE
      THETA=2.0D0*PI-(BETA-ALFA)
      END IF
*
      C=THETA/(2.0D0*PI)
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

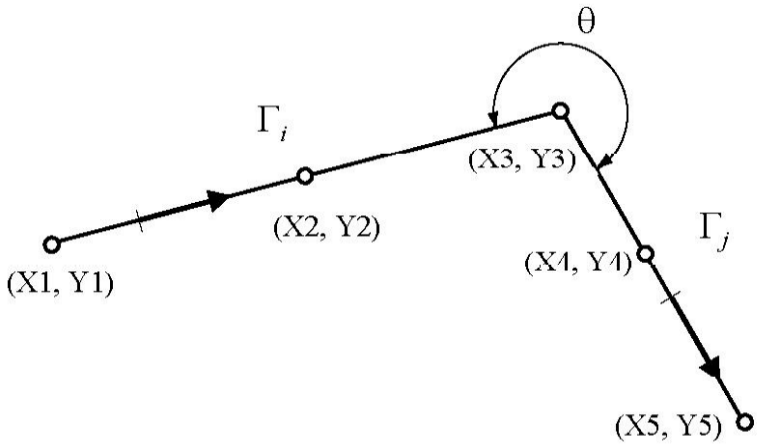



Figura 4.8. Cálculo del término libre. Nodo esquina entre contornos rectilíneos.

Los datos que necesita FREETERM para evaluar el término libre son las coordenadas de los nodos de los elementos que forman la esquina (Fig. 4.8). Para mayor simplicidad en la lectura del código, estos datos son suministrados de forma ordenada por la rutina COORD, cuyo listado se escribe en la página que sigue.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
*-----------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE COORD(X,Y,NCONT,NI,NF,I1,I2,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4
     @,X5,Y5)
*
*-----------------------------------------------------------------------
*
*  Con esta rutina se pretende obtener las coordenadas de los nodos
*  limite entre contornos a partir de los cuales se obtendrá el ángulo
*  interno utilizado para determinar el Término Libre.
*
*-----------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION X(1),Y(1),NI(1),NF(1)
*
      IF(I1.EQ.NI(I2))THEN
      X1=X(I1)-2.0D0
      Y1=Y(I1)
      X2=X(I1)-1.0D0
      Y2=Y(I1)
      X3=X(I1)
      Y3=Y(I1)
      X4=X(I1+1)
      Y4=Y(I1+1)
      X5=X(I1+2)
      Y5=Y(I1+2)
      DO 1 II=1,NCONT
      IF((X(I1).EQ.X(NF(II))).AND.(Y(I1).EQ.Y(NF(II))))THEN
      X1=X(NF(II)-2)
      Y1=Y(NF(II)-2)
      X2=X(NF(II)-1)
      Y2=Y(NF(II)-1)
      X3=X(I1)
      Y3=Y(I1)
      X4=X(I1+1)
      Y4=Y(I1+1)
      X5=X(I1+2)
      Y5=Y(I1+2)
      END IF
    1 CONTINUE
      END IF
*
      IF(I1.EQ.NF(I2))THEN
      X1=X(I1-2)
      Y1=Y(I1-2)
      X2=X(I1-1)
      Y2=Y(I1-1)
      X3=X(I1)
      Y3=Y(I1)
      X4=X(I1)+1.0D0
      Y4=Y(I1)
      X5=X(I1)+2.0D0
      Y5=Y(I1)
      DO 2 II=1,NCONT
      IF((X(I1).EQ.X(NI(II))).AND.(Y(I1).EQ.Y(NI(II))))THEN
      X1=X(I1-2)
      Y1=Y(I1-2)
      X2=X(I1-1)
      Y2=Y(I1-1)
      X3=X(I1)
      Y3=Y(I1)
      X4=X(NI(II)+1)
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      Y4=Y(NI(II)+1)
       X5=X(NI(II)+2)
       Y5=Y(NI(II)+2)
       END IF
    2 CONTINUE
       END IF
*
       RETURN
        END
*
* ---------------------------------------------------------------
```

**Salida de resultados en el contorno. Rutina SOLCON.**

En esta rutina se dará salida por el canal (7) a los resultados en presión y flujo en cada nodo del contorno. En dicho fichero se escribe la frecuencia analizada, el número del contorno, las coordenadas de cada uno de los nodos de ese contorno y los valores (módulo) de la presión y flujo normal en dicho nodo solución del problema. Como se verá en los ejemplos que se estudiarán, el número de nodos en cada contorno cambia con la frecuencia tal y como ya hemos justificado en apartados anteriores.

Es interesante comentar que en esta rutina, previo a la salida, se construye para cada frecuencia analizada, los vectores **P1** y **DP1** que almacenan la solución en presión y flujo respectivamente en cada nodo de la discretización. Estos vectores, a los que ya habíamos hecho referencia al comienzo del capítulo, facilitan operaciones posteriores con la solución en el contorno.

El listado de la rutina SOLCON se muestra a continuación:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE SOLCON(IWR7,CW,X,Y,NCONT,NI,NF,KODE,P,DP,P1,DP1,BETA
     @,FR,F,NMC,NMNC)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  En esta rutina se construyen los vectores P1 y DP1 donde se almacenan
*  la solución en presión y flujo en nodos y se imprime en canal 7
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION X(1),Y(1),NI(1),NF(1),KODE(1)
      COMPLEX*16 P(1),DP(1),BETA(1)
*
      COMPLEX*16 F(1)
      COMPLEX*16 IMG
      REAL*8 NONDA
*
*  -- Presión acústica y gradiente en puntos de la discretización --
*
      COMPLEX*16 P1(NMC*NMNC),DP1(NMC*NMNC)
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
      IMG=DCMPLX(0.,1.)
      NONDA=FR/CW
      FR1=FR/(2.*PI)          ! frecuencia en Hz
*
      DO 1 I=1,NCONT
      DO 2 J=NI(I),NF(I)
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      IF(KODE(I).EQ.1)THEN  ! Presión y flujo incógnitas (relac.con ALFA)
      P1(J)=F(J)
      DP1(J)=-IMG*NONDA*BETA(I)*P1(J)
      END IF
*
      IF(KODE(I).EQ.0)THEN  ! Presión dato y flujo incógnita (sup.radiante)
      P1(J)=P(I)
      DP1(J)=F(J)
      END IF
*
   2  CONTINUE
   1  CONTINUE
*
*  Escritura de valores de presión y flujo en cada nodo del contorno.
*
      WRITE(IWR7,5)FR1
   5  FORMAT(//,'FRECUENCIA TERCIO OCTAVA =',F7.1,1X,'Hz',/)
      WRITE(IWR7,20)
  20  FORMAT(1X'Nodo',3X,'Coor.X',4X,'Coor.Y',6X,'Mod(P)',8X
     @,'Mod(dP)',/)
      DO 3 I=1,NCONT
      DO 4 J=NI(I),NF(I)
      WRITE(IWR7,6)J,X(J),Y(J),CDABS(P1(J)),CDABS(DP1(J))
   6  FORMAT(1X,I3,2X,F8.3,2X,F8.3,2X,E12.5,2X,E12.5)
   4  CONTINUE
   3  CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ----------------------------------------------------------------------
```

**Valores de la presión en puntos internos. Rutina INTER.**

En la rutina INTER, a partir de los vectores **P1** y **DP1** en el contorno para cada frecuencia, se determinan los valores de la presión acústica en los puntos internos haciendo uso de la expresión (3.19). En este caso todas las integrales de la solución fundamental se realizan desde colocaciones exteriores al elemento y por tanto haciendo uso de la rutina EXTIN exclusivamente. El valor obtenido de la presión acústica en puntos internos se almacena en el vector complejo **PINTSOL**.

Posteriormente, con estos valores de la presión acústica se calcularán parámetros relacionados con la eficacia de apantallamiento acústico de la geometría estudiada (*IL*, *EA*). Estos coeficientes se calculan en la rutina INSERT que toma estos valores de presión acústica en puntos internos y devuelve, para cada punto interno, los coeficientes *EA*, almacenado en el vector **EA**, e *IL* en el vector **AIL**.

Por último se dará salida por el canal (6) a todos los resultados en puntos internos. Se escriben la frecuencia analizada, las coordenadas de cada punto interno, el valor del módulo de la presión acústica, el valor del módulo de la presión para la solución fundamental en ese punto (presión acústica propagación libre sin barrera) y los valores de los coeficientes *EA* e *IL*. Veremos algunos ficheros de salida en el apartado 4.3 de este capítulo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

El listado del código fuente de la rutina INTER es el que sigue:

```
* ----------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE INTER(IWR6,X,Y,NCONT,NI,NF,P1,DP1,NMPI,NPINT,XPINT
     @,YPINT,CW,FR,XFONT,YFONT,BETSEMI)
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina calculará los valores de la presión acústica en puntos
*  internos del dominio en estudio y llamará a la rutina INSERT para
*  obtener el EA e IL creando un fichero de salida para cada frecuencia
*  analizada con estos resultados.
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 P1(1),DP1(1)
      DIMENSION X(1),Y(1),NI(1),NF(1),XPINT(1),YPINT(1)
      COMPLEX*16 BETSEMI,BETCERO
*
      COMPLEX*16 PINTSOL(NMPI)
      COMPLEX*16 HWPINTF(3),GWPINTF(3),HWPINTI(3),GWPINTI(3)
      COMPLEX*16 GFUE,GIMG,GCOM,GSOLPI(NMPI)
      DIMENSION EA(NMPI),AIL(NMPI)
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
      BETCERO=(0.0D0,0.0D0)
      DO 1 I=1,NPINT
      PINTSOL(I)=(0.0D0,0.0D0)
   1  CONTINUE
*
      DO 2 I=1,NPINT
      XPINTF=XPINT(I)
      YPINTF=YPINT(I)
      XPINTI=XPINT(I)
      YPINTI=-YPINT(I)
      DO 3 J=1,NCONT
      DO 4 K=NI(J),NF(J)-2,2
      CALL EXTIN(XPINTF,YPINTF,X(K),Y(K),X(K+1),Y(K+1),X(K+2)
     @,Y(K+2),HWPINTF,GWPINTF,CW,FR,BETCERO)
      CALL EXTIN(XPINTI,YPINTI,X(K),Y(K),X(K+1),Y(K+1),X(K+2)
     @,Y(K+2),HWPINTI,GWPINTI,CW,FR,BETSEMI)
      DO 5 M=1,3
      PINTSOL(I)=PINTSOL(I)+(GWPINTF(M)+GWPINTI(M))*DP1(K+M-1)
     @-(HWPINTF(M)+HWPINTI(M))*P1(K+M-1)
   5  CONTINUE
   4  CONTINUE
   3  CONTINUE
*
*  Solución fundamental en el punto donde se localiza la fuente
*
      CALL FUNSOL(XPINTF,YPINTF,XFONT,YFONT,GFUE,CW,FR)
      CALL FUNSOL(XPINTI,YPINTI,XFONT,YFONT,GIMG,CW,FR)
      IF(CDABS(BETSEMI).EQ.0.)GO TO 20
      CALL PREKAW(XPINTI,YPINTI,XFONT,YFONT,BETSEMI,FR,CW,GCOM)
      GCOM=GCOM/(2.0D0*PI)
      GO TO 30
  20  GCOM=(0.0D0,0.0D0)
  30  PINTSOL(I)=PINTSOL(I)+GFUE+GIMG+GCOM
*
   2  CONTINUE
*
*  Cálculo de EA, IL
*
      CALL INSERT(NMPI,NPINT,XPINT,YPINT,PINTSOL,XFONT,YFONT,EA,AIL,CW
     @,FR,BETSEMI,GSOLPI)
      FR1=1.0D0/(2.0D0*PI)*FR          ! frecuencia en Hz
      IF(DABS(FR1-25.).LT.1.E-5)THEN   ! Salida de result. (sólo p.internos)
      WRITE(IWR6,50)
  50  FORMAT(//,3X,'frec.',2X,'Coor.X',2X,'Coor.Y',4X,'Mod(P)',5X
     @,'Mod(S.F.)',6X,'EA',10X,'IL',/)
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      END IF
      DO 11 I=1,NPINT
      WRITE(IWR6,12)FR1,XPINT(I),YPINT(I),CDABS(PINTSOL(I))
     @,CDABS(GSOLPI(I)),EA(I),AIL(I)
   12 FORMAT(1X,F7.1,2(2X,F5.1),2X,E11.4,2X,E11.4,2X,F9.5,2X,F9.5)
   11 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

**Eficacia de pantallas acústicas. Rutina INSERT.**

El programa que analizamos, si bien completamente general, ha sido utilizado básicamente para determinar parámetros de eficacia de apantallamientos acústicos. Como ya se ha comentado en varias ocasiones a lo largo de este libro, el parámetro utilizado en este cometido, y el más clarificador para lo que se pretende, es el coeficiente de pérdida por inserción del obstáculo (*IL*) (ec. (2.42)). Este parámetro, junto con el *EA* (*Excess Attenuation*) (ver p.e. Rasmussen, 1982), son calculados en esta rutina.

Para el *IL* la situación de referencia es la fuente pulsando en el semiespacio, mientras que para la obtención del *EA* la referencia es la misma fuente pulsando en el espacio completo. Por tanto, para la obtención de ambos parámetros es necesario el cálculo de la solución fundamental del problema, para ello se invoca a las rutinas FUNSOL y PREKAW. Se escribe a continuación el listado de esta rutina:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE INSERT(NMPI,NPINT,XPINT,YPINT,PINTSOL,XFONT,YFONT,EA
     @,AIL,CW,FR,BETSEMI,GSOLPI)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina evalúa el valor de IL (insertion loss) para cada frecuencia
*  Perdida por inserción de un obstáculo.
*  También se calcula el coeficiente EA (excess attenuation) que tiene
*  en cuenta la presencia del obstáculo y del semiespacio.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      DIMENSION XPINT(1),YPINT(1)
      COMPLEX*16 PINTSOL(1)
      COMPLEX*16 BETSEMI,GSOLPI(1)
      COMPLEX*16 GFUEPI(NMPI),GIMGPI(NMPI),GCOMPI(NMPI)
      DIMENSION EA(1),AIL(1)
*
      PI=3.14159265358979323846264338D0
*
      DO 1 I=1,NPINT
      CALL FUNSOL(XFONT,YFONT,XPINT(I),YPINT(I),GFUEPI(I),CW,FR)
      CALL FUNSOL(XFONT,-YFONT,XPINT(I),YPINT(I),GIMGPI(I),CW,FR)
      IF(CDABS(BETSEMI).EQ.0.)GO TO 10
      CALL PREKAW(XFONT,-YFONT,XPINT(I),YPINT(I),BETSEMI,FR,CW
     @,GCOMPI(I))
      GCOMPI(I)=GCOMPI(I)/(2.0D0*PI)
      GO TO 11
  10  GCOMPI(I)=(0.0D0,0.0D0)
  11  GSOLPI(I)=GFUEPI(I)+GIMGPI(I)+GCOMPI(I)
      EA(I)=-20.0D0*DLOG10(CDABS(PINTSOL(I)/GFUEPI(I)))
      AIL(I)=-20.0D0*DLOG10(CDABS(PINTSOL(I)/GSOLPI(I)))
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
   1  CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ----------------------------------------------------------------------
```

**Cálculo de β en los contornos. Rutinas MORSE y DELANYBAZLEY.**

La rutina MORSE se invoca desde el Programa Principal después de INPUT y antes de comenzar el bucle de frecuencias. En esta rutina se calcula el valor de la admitancia (BETA) para cada contorno. Esta admitancia es un valor real obtenido a partir del coeficiente de absorción estadístico ($\alpha_{st}$) de Morse y Bolt (1944) (ec. (2.71)) que a su vez es calculado a partir de la admitancia compleja obtenida del modelo empírico de Delany y Bazley (1970) (ec. (2.68) a (2.70)). Esta admitancia compleja se calcula en la rutina denominada DELANYBAZLEY a partir de la resistividad al flujo de aire (SIGMA) del material que recubre el contorno y el espesor del mismo (T).

La variable admitancia (BETA) se define compleja y se utiliza en dos sentidos en esta rutina. En primer lugar, en ella se almacena el valor de la admitancia compleja de Delany y Bazley. Posteriormente, a la salida de la rutina MORSE, su valor tiene sólo parte real distinta de cero y se corresponde con la admitancia obtenida a partir del coeficiente de absorción estadístico de Morse y Bolt aplicando la ecuación (2.72). A continuación se escribe el listado de la rutina MORSE:

```
* ----------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE MORSE(FR,CW,SIGMA,T,BETA)
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
*  Con esta rutina se determina la admitancia BETA en cada contorno
*  a partir del coeficiente de absorción estadístico (Morse&Bolt 1944)
*
* ----------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 BETA0,ZETA0,GAMMA0,Z,ZETA,BETA
*
      CALL DELANYBAZLEY(FR,CW,SIGMA,BETA0,ZETA0,GAMMA0)
*
*  Caso de Contornos Infinitos (Delany y Bazley)
*
      IF(T.EQ.0.)GO TO 10
*
*  Caso de contornos de espesor finito (Delany y Bazley)
*
      Z=GAMMA0*T
      ZETA=(CDEXP(Z)+CDEXP(-Z))/(CDEXP(Z)-CDEXP(-Z))
      ZETA=ZETA*ZETA0
      GO TO 11
   10 ZETA=ZETA0
*
*  Obtención del Coeficiente de Absorción Estadístico de acuerdo a
*  la expresión de Morse y Bolt (1944) recogida en Bies y Hansen
*  expresión (A4.6) pag.370. Variable ALFAST
*
   11 CHI=CDABS(ZETA)
      THETA=DATAN((DIMAG(ZETA))/(DREAL(ZETA)))
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      CLARA=1.-(DCOS(THETA)/CHI)*DLOG(1.+2.*CHI*DCOS(THETA)+CHI*CHI)
      ALFAST=8.0*DCOS(THETA)/CHI
      AUX1=1.0+(CHI*DCOS(THETA))
      AUX=(CHI*DSIN(THETA))/AUX1
      AUX=DATAN(AUX)
      AUX=AUX*(DCOS(2.D0*THETA))/(CHI*DSIN(THETA))
      AUX=AUX+CLARA
      ALFAST=ALFAST*AUX
*
*  En base al Alfa Estadístico, el valor de la admitancia BETA será:
*
      AUX2=DSQRT(1.-ALFAST)
      AUX3=DSQRT(1.+ALFAST)
      BETARE=(1.-AUX2)/(1.+AUX3)
      BETA=DCMPLX(BETARE,0.)
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

Como hemos comentado, en la rutina DELANYBAZLEY se calcula la admitancia compleja de cada contorno de acuerdo a las fórmulas (2.68) a (2.70). El listado de esta rutina es muy simple y se escribe a continuación:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE DELANYBAZLEY (FR,CW,SIGMA,BETA,ZETA,GAMMA)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Con esta Rutina calcularemos la admitancia compleja de cualquier
*  superficie según la fórmula empírica de Delany & Bazley (1970)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 BETA,ZETA,GAMMA
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
      FR1=FR*2.*PI
*
      R=1.+9.08*((1000.*FR/SIGMA)**(-0.75))
      X=-11.9*((1000.*FR/SIGMA)**(-0.73))
*
      ZETA=DCMPLX(R,X)
      BETA=1.D0/ZETA
*
      ALFA1=10.3*((1000.*FR/SIGMA)**(-0.59))
      ALFA2=1.+10.8*((1000.*FR/SIGMA)**(-0.7))
*
      GAMMA=(FR1/CW)*(DCMPLX(ALFA1,ALFA2))
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**Resolución del sistema de ecuaciones resultante. Rutina CSOLVER.**

Esta rutina permite la resolución del sistema de ecuaciones resultante para cada frecuencia. Se trata de un sistema lineal de ecuaciones con coeficientes complejos de la forma **A x = B**. Los argumentos a la entrada son: la matriz del sistema **A**, el vector de coeficientes **B**, la dimensión del sistema N y la dimensión máxima establecida en el programa NX. La rutina devuelve el vector solución escrito en **B**. Esta rutina invoca a la función compleja CDOT que calcula el producto escalar de dos vectores.

La rutina CSOLVER (tomada de Domínguez, 1993) es una rutina estándar de resolución por factorización. El lector aquí, si lo desea, puede utilizar cualquiera de las rutinas, de este u otro tipo, que aporta la librería matemática que acompaña al compilador fortran que utilice. El código fuente de la rutina CSOLVER y la función compleja CDOT se escriben a continuación:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE CSOLVER(A,B,N,NX)
*
*  Modulo de resolución del sistema de ecuaciones resultante
*  ---- Eliminación gaussiana ----
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 A(NX,NX),B(NX),X,CDOT
*
      DO 30 K=1,N
      K1=K-1
      DO 10 I=K,N
      A(I,K)=A(I,K)-CDOT(K1,A(I,1),NX,A(1,K),1)
   10 CONTINUE
      X=A(K,K)
      IF(DABS(DREAL(X))+DABS(DIMAG(X)).EQ.0.0D0) THEN
      WRITE(6,*) ' RESOLUCION . SINGULARIDAD EN FILA ',K
      STOP ' CSOLVER : STOP SINGULARIDAD '
      END IF
      X=(1.0D0,0.0D0)/X
      DO 20 J=K+1,N
      A(K,J)=X*(A(K,J)-CDOT(K1,A(K,1),NX,A(1,J),1))
   20 CONTINUE
   30 CONTINUE
*
      DO 40 I=1,N
      B(I)=-(CDOT((I-1),A(I,1),NX,B,1)+B(I))/A(I,I)
   40 CONTINUE
*
      DO 50 I=N,1,-1
      B(I)=-(CDOT((N-I),A(I,I+1),NX,B(I+1),1)+B(I))
   50 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      COMPLEX*16 FUNCTION CDOT(N,U,IUX,V,IVX)
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 U(1),V(1)
*
      CDOT=(0.0D0,0.0D0)
      IF(N.LE.0) RETURN
      IU=1
      IV=1
      IF(IUX.LT.0) IU=1-(N-1)*IUX
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      IF(IVX.LT.0) IV=1-(N-1)*IVX
      DO 10 I=1,N
      CDOT=CDOT+U(IU)*V(IV)
      IU=IU+IUX
      IV=IV+IVX
   10 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

**Rutinas complementarias relacionadas con el cálculo de la solución fundamental.**

## PREKAW:

En esta rutina se calcula el término complementario Φ de la solución fundamental del semiespacio (Kawai et al., 1982), ecuación (3.50) del capítulo anterior. Los argumentos de entrada son: coordenadas del punto imagen al nodo de colocación, coordenadas del punto en que se evalúa la solución fundamental, admitancia del semiespacio, frecuencia y velocidad de propagación. La rutina devuelve el resultado en la variable compleja PHI. En lo que sigue se muestra el listado de esta rutina.

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE PREKAW(XI,YI,X,Y,BETA,FR,CW,PHI)
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina evalúa el término complementario de la solución funda-
*  mental de acuerdo a la formulación de Kawai et al (1982) para grandes
*  argumentos.
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      REAL*8 K
      COMPLEX*16 S1,WS,ZI,PHI,IMG,BETA,V,ABG
*
      PI=3.14159265358979323846D0     ! constantes del problema
      R2=1.41421356237309504880D0
      K=FR/CW
      IMG=DCMPLX(0.0D0,1.0D0)
*
      RI=DSQRT((XI-X)**2+(YI-Y)**2)
      SENO=(X-XI)/RI
      GAMMA=DSQRT(DABS(1.-SENO**2))
      V=(GAMMA-BETA)/(GAMMA+BETA)
      ABG=1.+BETA*GAMMA-DSQRT(1.-GAMMA**2)*(1.-BETA**2)**(0.5)
      S1=IMG*(IMG*K*RI*ABG)**0.5
      CALL FUNERROR(S1,WS)
      ZRI=K*RI
      ZI=DCMPLX(0.0D0,ZRI)
      PHI=(ABG)**(0.5)*WS*(V-1.)*CDEXP(-ZI)
      PHI=PHI*PI/R2
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**FLUKAW:**

En esta rutina se obtiene el valor numérico de la derivada respecto de la normal al contorno del término complementario ($\frac{\partial \Phi}{\partial n}$) (4.5b). En este caso, en los argumentos a la entrada, además de los vistos anteriormente, son necesarias las componentes de la normal (ETA1, ETA2) y el valor de $\frac{\partial \bar{r}}{\partial n}$ (RDN). La rutina devuelve el resultado en la variable compleja DNPHI. A continuación se muestra el listado de esta rutina:

```
* ------------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE FLUKAW(XI,YI,X,Y,BETA,FR,CW,ETA1,ETA2,RDN,DNPHI)
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina evalúa el termino complementario de la solución fundamental
*  de acuerdo a la formulación de Kawai et al para grandes argumentos.
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      REAL*8 K
      COMPLEX*16 IMG,BETA,V,ABG,RABG,DAN,DVN,S1,WS,RIKABG
      COMPLEX*16 ZI,DPHIA,DPHIV,DPHIRI,DNPHI
*
      PI=3.14159265358979323846D0     ! constantes del problema
      R2=1.41421356237309504880D0
      RPI=1.77245385090551602729D0
      K=FR/CW
      IMG=DCMPLX(0.0D0,1.0D0)
      RI=DSQRT((XI-X)**2+(YI-Y)**2)
      SENO=(X-XI)/RI
      GAMMA=DSQRT(DABS(1.-SENO**2))
*
      V=(GAMMA-BETA)/(GAMMA+BETA)
      ABG=1.+BETA*GAMMA-DSQRT(1.-GAMMA**2)*(1.-BETA**2)**(0.5)
      RABG=(ABG)**(0.5)
      RIKABG=(IMG*K*ABG)**(0.5)
      ZRI=K*RI
      ZI=DCMPLX(0.,ZRI)
      S1=IMG*(IMG*K*RI*ABG)**0.5
      CALL FUNERROR(S1,WS)
      DPHIA=WS*(0.5*1./RABG+ZI*RABG) 1./RPI*(ZI)**(0.5)
      DPHIA=DPHIA*(V-1.)*PI/R2*CDEXP(-ZI)
      DPHIV=RABG*WS*CDEXP(-ZI)
      DPHIV=DPHIV*PI/R2
      DPHIRI=IMG*K*WS*(ABG-1.)-RIKABG/(RPI*DSQRT(RI))
      DPHIRI=PI*RABG*1./R2*(V-1.)*DPHIRI*CDEXP(-ZI)
*
      DAN=BETA*DSQRT(1.-GAMMA**2)+GAMMA*(1.-BETA**2)**(0.5)
      IF(X.GE.XI)THEN
      DAN=DAN*(-GAMMA*ETA1+DSQRT(1.-GAMMA**2)*ETA2)
      END IF
      IF(X.LT.XI)THEN
      DAN=DAN*(GAMMA*ETA1+DSQRT(1.-GAMMA**2)*ETA2)
      END IF
      DAN=DAN*1./RI
      DVN=2.*BETA/(GAMMA+BETA)**2
      IF(X.GE.XI)THEN
      DGAMMAN=DSQRT(1.-GAMMA**2)*(-GAMMA*ETA1+DSQRT(1.-GAMMA**2)
     @*ETA2)
      END IF
      IF(X.LT.XI)THEN
      DGAMMAN=DSQRT(1.-GAMMA**2)*(GAMMA*ETA1+DSQRT(1.-GAMMA**2)
     @*ETA2)
      END IF
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      DVN=DVN*DGAMMAN/RI
*
      DNPHI=DPHIA*DAN+DPHIV*DVN+DPHIRI*RDN
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

**FUNERROR:**

Cálculo de la función complementaria de error con argumento complejo *erfc(z)*. Esta función aparece en las expresiones del término complementario Φ y su derivada y será invocada por las rutinas anteriores PREKAW y FLUKAW. En la llamada a esta rutina, el argumento es la variable compleja Z y el resultado (función complementaria de error) se almacena en W1, también variable compleja.

Las expresiones que permiten la evaluación numérica de esta función pueden consultarse en Abramowitz y Stegun, (1970). Así, con la numeración que aparece en esa publicación, se utilizarán las fórmulas explícitas (7.1.26) y (7.1.29) para valores del argumento $z$ inferiores a 3.9 y 3.0 en su parte real e imaginaria respectivamente, recurriendo a la aproximación asintótica (Tabla 7.9) para valores superiores.

Son aplicables aquí los comentarios realizados cuando hablamos de la rutina que resuelve el sistema de ecuaciones, en el sentido de que esta función se encuentra implementada en cualquiera de las librería matemáticas utilizadas por los compiladores fortran. Así, el lector puede sustituir con facilidad esta rutina por la sentencia correspondiente que invoque a esta función. Para ello debe consultar el manual de usuario del compilador que utiliza. En cualquier caso, escribimos el listado de la rutina que hemos elaborado al respecto:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE FUNERROR(Z,W1)
*
*  Calculo de la función complementaria de error.Salida "w1"
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      REAL*8 N
      COMPLEX*16 IMG
      COMPLEX*16 Z,ZI,ERFCOM1,ERFCOM2,ERFCOM2N,ERFCOM,ERFC
      COMPLEX*16 D1,D2,D3,D4,D5
      COMPLEX*16 Z2,WP,WPC,W1
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
      IMG=(0.0D0,1.0D0)
*
      X1=DREAL(Z)
      Y1=IMAG(Z)
      X2=DABS(X1)
      Y2=DABS(Y1)
      IF((X2.GT.3.9).OR.(Y2.GT.3.0))GO TO 30
*
*  Serie de expansión
*
      P=0.3275911
      A1=0.254829592
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
      A2=-0.284496736
      A3=1.421413741
      A4=-1.453152027
      A5=1.061405429
      ZI=-IMG*Z
      X=DREAL(ZI)
      Y=DIMAG(ZI)
      XA=DABS(X)
      T=1./(1.+P*XA)
      ERF=1.-(A1*T+A2*T**2+A3*T**3+A4*T**4+A5*T**5)*DEXP(-XA**2)
*
      IF(X.LT.0)ERF=-ERF
*
      ERFCOM1=((1.-DCOS(2.*X*Y))+IMG*DSIN(2.*X*Y))
     .          *DEXP(X**2)/(2.*PI*X)
      IF(X.EQ.0.)ERFCOM1=DCMPLX(0.,Y/PI)
      ERFCOM2=(0.0D0,0.0D0)
      N=0.
      DO 10 L=1,200
      N=N+1.
      FN=2.*X-2.*X*DCOSH(N*Y)*DCOS(2.*X*Y)+N*DSINH(N*Y)*DSIN(2.*X*Y)
      GN=2.*X*DCOSH(N*Y)*DSIN(2.*X*Y)+N*DSINH(N*Y)*DCOS(2.*X*Y)
      ERFCOM2N=DEXP(-0.250D0*N**2)/(N**2+4.*X**2)*(FN+IMG*GN)
      ERFCOM2=ERFCOM2+ERFCOM2N
      ERR=CDABS(ERFCOM2N)
      IF(ERR.LT.0.000001)GO TO 11
  10  CONTINUE
  11  ERFCOM2=2./PI*DEXP(-X**2)*ERFCOM2
      ERFCOM=ERF+ERFCOM1+ERFCOM2
      ERFC=1.-ERFCOM
      W1=CDEXP(-Z**2)*ERFC
      GO TO 200
*
*  Aproximación asintótica
*
  30  Z2=DCMPLX(X2,Y2)
      IF((X2.GT.6.).OR.(Y2.GT.6.))GO TO 40
      D1=0.4613135/(-0.1901635+Z2**2)
      D2=0.09999216/(-1.7844927+Z2**2)
      D3=0.002883894/(-5.5253437+Z2**2)
      WP=IMG*Z2*(D1+D2+D3)
      GO TO 100
  40  D4=0.5124242/(-0.2752551+Z2**2)
      D5=0.05176536/(-2.724745+Z2**2)
      WP=IMG*Z2*(D4+D5)
*
 100  W1=WP
      WPR=DREAL(WP)
      WPI=DIMAG(WP)
      WPC=DCMPLX(WPR,-WPI)
      IF((X1.LT.0.).AND.(Y1.LT.0.))THEN
      W1=2.*DEXP(Y2**2-X2**2)*(DCOS(2.*X2*Y2)-IMG*DSIN(2.*X2*Y2))-WP
      END IF
      IF((X1.GT.0.).AND.(Y1.LT.0.))THEN
      W1=2.*DEXP(Y2**2-X2**2)*(DCOS(2.*X2*Y2)+IMG*DSIN(2.*X2*Y2))-WPC
      END IF
      IF((X1.LT.0.).AND.(Y1.GT.0.))THEN
      W1=WPC
      END IF
*
 200  RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**BESSEL:**

Esta rutina calcula las funciones modificadas de Bessel de primera especie y órdenes cero, uno y dos, $K_o(z)$, $K_1(z)$ y $K_2(z)$, para argumento complejo. Estas funciones se calculan haciendo uso de series de expansión de argumento $z$. Se utilizan dos series de expansión diferentes según el valor del argumento. Una para $|z| \leq 5$ y otra diferente para $|z| \geq 5$ (ver Abramowitz y Stegun, 1970).

Esta rutina, para argumento complejo $z$ (Z) a la entrada, devuelve a la salida $K_o(z)$ en FKO, $K_1(z)$ en FK1 y $K_2(z)$ en FK2. También en este caso el lector podrá emplear las funciones de Bessel que aporta la librerías matemáticas que utilice sin necesidad de recurrir a esta rutina. El listado de le rutina BESSEL y de la función auxiliar SER (para calculo de series de expansión) se escriben a continuación:

```
* ------------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE BESSEL(Z,FK0,FK1,FK2)
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
*  Esta Rutina calcula los valores de las Funciones Modificadas de
*  Bessel de Segunda Especie y Orden Cero, Uno y Dos (FK0,FK1,FK2)
*  para argumento complejo Z.
*
* ------------------------------------------------------------------------
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
      COMPLEX*16 Z,FK0,FK1,FK2,ZZ,SER,FI0M,FI1M
      DIMENSION CI0P(15),CI1P(15),CK0P(15),CK0G(12),CK1P(15),CK1G(12)
      REAL*4 RRR1,RRR2
*
      DATA CI0P/ 1.00000000E+00, 0.62500000E+01, 0.97656250E+01,
     &           0.67816840E+01, 0.26490953E+01, 0.66227383E+00,
     &           0.11497810E+00, 0.14665573E-01, 0.14321849E-02,
     &           0.11050809E-03, 0.69067559E-05, 0.35675392E-06,
     &           0.15484111E-07, 0.57263725E-09, 0.18260116E-10/
      DATA CI1P/ 0.50000000E+00, 0.15625000E+01, 0.16276042E+01,
     &           0.84771050E+00, 0.26490953E+00, 0.55189486E-01,
     &           0.82127211E-02, 0.91659834E-03, 0.79565828E-04,
     &           0.55254047E-05, 0.31394345E-06, 0.14864747E-07,
     &           0.59554274E-09, 0.20451330E-10, 0.60867054E-12/
      DATA CK0P/-0.57721566E+00, 0.26424021E+01, 0.90115658E+01,
     &           0.85185931E+01, 0.39898493E+01, 0.11299171E+01,
     &           0.21532918E+00, 0.29560538E-01, 0.30657944E-02,
     &           0.24883689E-03, 0.16242981E-04, 0.87142913E-06,
     &           0.39112788E-07, 0.14905278E-08, 0.48833881E-10/
      DATA CK1P/ 1.00000000E+00, 0.96519581E+00,-0.26280638E+02,
     &          -0.44329875E+02,-0.29269699E+02,-0.10636897E+02,
     &          -0.24689720E+01,-0.39918196E+00,-0.47620526E-01,
     &          -0.43685559E-02,-0.31795287E-03,-0.18814687E-04,
     &          -0.92322279E-06,-0.38181087E-07,-0.13490886E-08/
      DATA CK0G/ 0.12533141E+01,-0.31332853E-01, 0.35249460E-02,
     &          -0.73436375E-03, 0.22489890E-03,-0.91084054E-04,
     &           0.45921544E-04,-0.27716932E-04, 0.19488468E-04,
     &          -0.15644909E-04, 0.14119530E-04,-0.14151620E-04/
      DATA CK1G/ 0.12533141E+01, 0.93998560E 01, 0.58749100E 02,
     &           0.10281093E-02,-0.28915573E-03, 0.11132496E-03,
     &          -0.54270916E-04, 0.31981075E-04,-0.22086930E-04,
     &           0.17485486E-04,-0.15605797E-04, 0.15499393E-04/
*
      R=CDABS(Z)
      RR=5.0D0
*
      IF(R-RR) 10,20,20
*
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
   10 ZZ=Z/DCMPLX(RR,0.0D0)
      ZZ=ZZ*ZZ
*
      RRR1=24.177/DLOG(RR/R)      ¡ nº términos para pequeños argumentos
      N=MAX0(2,MIN1(15.,RRR1))
*
      FI0M=SER(CI0P,ZZ,2,N)
      FI1M=Z*SER(CI1P,ZZ,2,N)
*
*  Cálculo de K0(Z)
*
      FK0=-FI0M*CDLOG(Z/(2.,0.))+SER(CK0P,ZZ,2,N)
      FK0=FK0-CDLOG(Z/(2.,0.))+DCMPLX(CK0P(1),0.0D0)
*
*  Cálculo de K1(Z)
*
      FK1=(FI1M*Z*CDLOG(Z/(2.,0.))+SER(CK1P,ZZ,2,N))/Z
     &+DCMPLX(CK0P(1)+0.50D0,0.0D0)*Z/(2.,0.)
      FK1=FK1+(1.,0.)/Z+Z*(CDLOG(Z/(2.,0.))-DCMPLX(CK0P(1)+0.50D0
     &,0.0D0))/2
*
*  Cálculo de K2(Z)
*
      FK2=FK0+FK1*(2.,0.)/Z
      GO TO 30
*
   20 ZZ=DCMPLX(RR,0.0D0)/Z
*
      RRR2=12.088/DLOG(R/RR)      ¡ nº términos para grandes argumentos
      N=MAX0(2,MIN1(12.,RRR2))
*
*  Cálculo de K0(Z)
*
      FK0=(DCMPLX(CK0G(1),0.0D0)+SER(CK0G,ZZ,2,N))*CDEXP(-Z)/CDSQRT(Z)
*
*  Cálculo de K1(Z)
*
      FK1=(DCMPLX(CK1G(1),0.0D0)+SER(CK1G,ZZ,2,N))*CDEXP(-Z)/CDSQRT(Z)
*
*  Cálculo de K2(Z)
*
      FK2=FK0+FK1*(2.,0.)/Z
*
   30 RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
*
      COMPLEX*16 FUNCTION SER(S,ZZ,N1,N2)
*
*  --- Asociada a la rutina BESSEL ---
*
      COMPLEX*16 ZZ,ZZZ
      REAL*8 S(N2)
*
      SER=(0.,0.)
      ZZZ=(1.,0.)
      DO 10 I=N1,N2
      ZZZ=ZZZ*ZZ
      SER=SER+DCMPLX(S(I),0.0D0)*ZZZ
   10 CONTINUE
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

**FUNSOL:**

Esta rutina calcula la solución fundamental en el punto de coordenadas (XP, YP) para el problema de propagación en el campo completo provocado por una fuente pulsando en el punto de coordenadas (X1, Y1). Es una operación muy simple que se ha individualizado en un subprograma por razones de comodidad en la confección del código, ya que es realizada en diferentes momentos por módulos diferentes del programa y con objetivos diferentes. Su listado se escribe a continuación:

```
* ---------------------------------------------------------------------
*
      SUBROUTINE FUNSOL(XP,YP,X1,Y1,G,CW,FR)
*
*  ---------------------------------------------------------------------
-
*
*  Esta rutina permite calcular la Sol. Fundamental en (XP,YP) para
*  fuente situada en (X1,Y1).
*
*  ---------------------------------------------------------------------
-
*
      IMPLICIT REAL*8 (A-H)
      IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
*
      COMPLEX*16 G,Z,F0C,F1C,F2C
*
      PI=3.14159265358979323846264 3D0
*
*  RA: Radio vector (colocación - observación )
*
      RA=DSQRT((XP-X1)**2+(YP-Y1)**2)
*
      ZR=FR*RA/CW
      Z=DCMPLX(0.0D0,ZR)
      CALL BESSEL(Z,F0C,F1C,F2C)
*
*  Solución Fundamental dinámica (presión) (u*)=1/2pi*Ko(z)
*
      G=F0C*1./(2.0D0*PI)
*
      RETURN
      END
*
* ---------------------------------------------------------------------
```

## 4.3 - ALGUNOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado intentaremos mostrar al lector como hacer uso el programa descrito a través de una serie de ejemplos sencillos. Se trata de tres obstáculos de geometría y condiciones de contorno diferentes con una fuente pulsante a un lado de los mismos. Con el uso del programa mostraremos los valores de la presión y de coeficientes de inserción en receptores situados al otro lado del obstáculo. En cada caso, luego de describir el modelo, escribiremos los ficheros de entrada y representaremos gráficamente algunos resultados de los ficheros de salida.

Antes de comenzar con el desarrollo de los ejemplos escogidos, describir los pasos que permitan la adecuada ejecución del programa.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

1.- Abrir un directorio en el PC (p.e. 'obstáculos') donde se instale la versión ejecutable del programa (posamec.exe) y los ficheros de entrada realizados (fichero.d). Si la ejecución del programa se realiza desde ese directorio los ficheros de salida (fichero.s) se almacenarán en el mismo directorio por defecto.

2.- Escribir el fichero de entrada y guardar asignando nombre y extensión '.d'.

3.- En la pantalla MsDos ('símbolo del sistema') teclear la sentencia de ejecución siguiente (el guión bajo representa un espacio):

C:\obstáculos> *posamec_<_fichero.d_>_internos.s_contorno.s*

En esta sentencia, además del programa, se identifican el fichero de entrada 'fichero.d' (canal 5) y los ficheros donde deseamos se vuelquen los resultados del proceso: 'internos.s' (canal 6) y 'contorno.s' (canal 7). Los nombres de estas entradas y salidas ('fichero', 'interno' y 'contorno') serán establecidas por el usuario con total libertad haciendo uso de cualquier carácter alfanumérico. Debe tenerse precaución en no repetir nombres de ficheros de salida en aplicaciones posteriores ya que estos se escribirían sobre los existentes con el mismo nombre perdiéndose toda la información de éstos.

En el fichero que hemos llamado 'internos' (6) se escriben los resultados en los puntos internos especificados en la entrada, mientras en el que llamamos 'contorno' (7) se escriben los valores de la presión y flujo en los nodos de la discretización

Los ficheros de salida de resultados, con el formato establecido por el código, pueden luego procesarse a criterio del usuario en aras a representar gráficamente cualquiera de las variables del problema. Pasamos ahora a la descripción de los ejemplos resueltos.

**Ejemplo N° 1**

**Obstáculo cuadrado sobre semiespacio reflejante.**

Se trata de un obstáculo cuadrado de 5m × 5m en un semiespacio reflejante ($\beta_S = 0$). Todas las superficies del obstáculo son también reflejantes ($\beta = 0$). En la figura 4.9 se representa la geometría del problema.

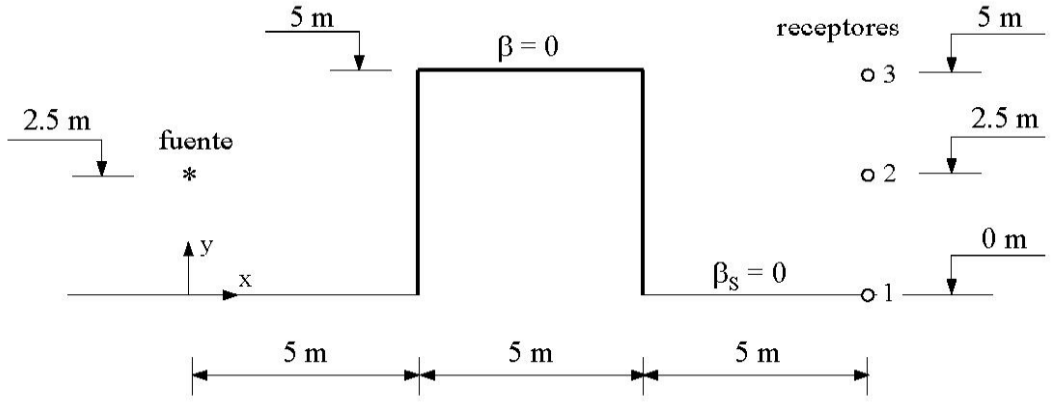



Figura 4.9. Ejemplo N° 1: Obstáculo cuadrado sobre semiespacio reflejante.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

A la izquierda de dicho obstáculo pulsa una fuente puntual (*) situada a 2.5 m del contorno del semiespacio. Los resultados serán obtenidos para tres receptores (o) localizados 5 m. a la derecha del obstáculo (1, 2 y 3) en cotas de 0, 2.5 y 5 m respectivamente. La velocidad de propagación de las ondas en el aire (única propiedad del medio necesaria para caracterizarlo) es $c$ = 343 m/s (correspondiente a una temperatura del aire de 20°C, ver capítulo 2). Una cuestión importante, el sistema de referencia que permite describir la geometría del problema debe situarse sobre el contorno del semiespacio. En este ejemplo, además lo hemos colocado de forma tal que la coordenada $x$ de la fuente es nula (aclarar que esto último no es prescriptivo).

Para acercar al lector el fichero de datos de este primer ejemplo, nos apoyaremos en la figura 4.10. En ella aparece el número de contornos del problema (NCONT = 3, recuérdese no debe tenerse en cuenta el contorno del semiespacio) y el recorrido que debe imaginarse para determinar las coordenadas de los puntos inicial y final de cada uno de estos contorno. Por último, el número de elementos por longitud de onda adoptado para este ejemplo ANELO = 2 es el mínimo para la tipología de elementos utilizada.

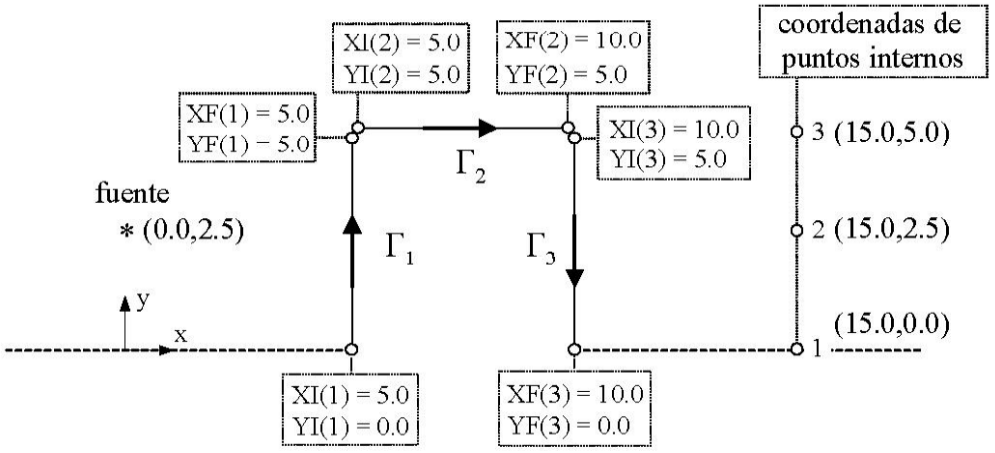



Figura 4.10. Ejemplo Nº 1: Datos necesarios para el fichero de entrada.

Se obtendrán resultados para las 21 primeras frecuencias centrales de tercio de octava (desde 25 Hz a 2500 Hz). El fichero de entrada 'cuadrado.d' se muestra a continuación:

```
343.0
21
2.0
0.0 2.5
0.0 0.0
3
5.0  0.0  5.0  5.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
5.0  5.0 10.0  5.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
10.0 5.0 10.0  0.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
3
15.0 0.0
15.0 2.5
15.0 5.0
```

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La sentencia para ejecutar el programa en este caso será:

C:\obstáculos> *posamec < cuadrado.d > cuadpuin.s cuadcont.s*

De acuerdo a esta sentencia, los resultados en puntos internos se almacenan en el fichero 'cuadpuin.s' y los resultados en nodos del contorno en el fichero 'cuadcont.s'. Este último puede ser un fichero muy extenso y lo es para el ejemplo estudiado. Como ya se ha aclarado a lo largo de este capítulo, en este fichero, para cada frecuencia, se vuelcan los valores del módulo de la presión acústica y flujo en cada nodo del contorno. El número de nodos de la discretización depende del valor de la frecuencia ($f$) y va desde los 9 nodos para $f$ = 25 Hz a 441 nodos para $f$ = 2500 Hz. En lo que sigue se muestra el listado de este fichero para $f$ = 200 Hz.

FRECUENCIA TERCIO OCTAVA = 200.0 Hz

| Nodo | Coor.X | Coor.Y | Mod(P) | Mod(dP) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.000 | .000 | .16142E+00 | .00000E+00 |
| 2 | 5.000 | .417 | .13628E+00 | .00000E+00 |
| 3 | 5.000 | .833 | .54009E-01 | .00000E+00 |
| 4 | 5.000 | 1.250 | .73300E-01 | .00000E+00 |
| 5 | 5.000 | 1.667 | .17013E+00 | .00000E+00 |
| 6 | 5.000 | 2.083 | .17619E+00 | .00000E+00 |
| 7 | 5.000 | 2.500 | .13162E+00 | .00000E+00 |
| 8 | 5.000 | 2.917 | .68622E-01 | .00000E+00 |
| 9 | 5.000 | 3.333 | .38783E-01 | .00000E+00 |
| 10 | 5.000 | 3.750 | .88773E-01 | .00000E+00 |
| 11 | 5.000 | 4.167 | .11968E+00 | .00000E+00 |
| 12 | 5.000 | 4.583 | .16568E+00 | .00000E+00 |
| 13 | 5.000 | 5.000 | .10052E+00 | .00000E+00 |
| 14 | 5.000 | 5.000 | .10052E+00 | .00000E+00 |
| 15 | 5.417 | 5.000 | .61453E-01 | .00000E+00 |
| 16 | 5.833 | 5.000 | .46521E-01 | .00000E+00 |
| 17 | 6.250 | 5.000 | .36267E-01 | .00000E+00 |
| 18 | 6.667 | 5.000 | .39882E-01 | .00000E+00 |
| 19 | 7.083 | 5.000 | .37262E-01 | .00000E+00 |
| 20 | 7.500 | 5.000 | .32856E-01 | .00000E+00 |
| 21 | 7.917 | 5.000 | .33530E-01 | .00000E+00 |
| 22 | 8.333 | 5.000 | .28924E-01 | .00000E+00 |
| 23 | 8.750 | 5.000 | .22341E-01 | .00000E+00 |
| 24 | 9.167 | 5.000 | .29600E-01 | .00000E+00 |
| 25 | 9.583 | 5.000 | .28531E-01 | .00000E+00 |
| 26 | 10.000 | 5.000 | .20097E-01 | .00000E+00 |
| 27 | 10.000 | 5.000 | .20097E-01 | .00000E+00 |
| 28 | 10.000 | 4.583 | .60582E-02 | .00000E+00 |
| 29 | 10.000 | 4.167 | .11881E-01 | .00000E+00 |
| 30 | 10.000 | 3.750 | .53060E-02 | .00000E+00 |
| 31 | 10.000 | 3.333 | .11546E-01 | .00000E+00 |
| 32 | 10.000 | 2.917 | .32638E-02 | .00000E+00 |
| 33 | 10.000 | 2.500 | .10947E-01 | .00000E+00 |
| 34 | 10.000 | 2.083 | .17110E-02 | .00000E+00 |
| 35 | 10.000 | 1.667 | .10073E-01 | .00000E+00 |
| 36 | 10.000 | 1.250 | .35982E-02 | .00000E+00 |
| 37 | 10.000 | .833 | .98547E-02 | .00000E+00 |
| 38 | 10.000 | .417 | .22961E-02 | .00000E+00 |
| 39 | 10.000 | .000 | .10815E-01 | .00000E+00 |

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Para este primer ejemplo se muestra también el listado íntegro del fichero de salida de resultados para puntos internos ('cuadpuin.s'):

| frec. | Coor.X | Coor.Y | Mod(P) | Mod(S.F.) | EA | IL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25.0 | 15.0 | .0 | .4548E-01 | .1510E+00 | -4.40073 | -10.42133 |
| 25.0 | 15.0 | 2.5 | .3088E-01 | .1475E+00 | -7.82366 | -13.57966 |
| 25.0 | 15.0 | 5.0 | .1836E-01 | .1380E+00 | -12.28085 | -17.52113 |
| 31.5 | 15.0 | .0 | .2770E-01 | .1346E+00 | -7.70939 | -13.72999 |
| 31.5 | 15.0 | 2.5 | .1450E-01 | .1301E+00 | -13.39250 | -19.05889 |
| 31.5 | 15.0 | 5.0 | .1687E-01 | .1182E+00 | -12.01764 | -16.91121 |
| 40.0 | 15.0 | .0 | .1414E-01 | .1195E+00 | -12.51650 | -18.53710 |
| 40.0 | 15.0 | 2.5 | .4573E-02 | .1135E+00 | -22.37918 | -27.89610 |
| 40.0 | 15.0 | 5.0 | .1529E-01 | .9797E-01 | -11.83251 | -16.13103 |
| 50.0 | 15.0 | .0 | .8843E-02 | .1069E+00 | -15.62388 | -21.64448 |
| 50.0 | 15.0 | 2.5 | .2639E-02 | .9894E-01 | -26.18738 | -31.47984 |
| 50.0 | 15.0 | 5.0 | .1200E-01 | .7868E-01 | -12.97312 | -16.33483 |
| 63.0 | 15.0 | .0 | .1504E-01 | .9521E-01 | -10.00873 | -16.02933 |
| 63.0 | 15.0 | 2.5 | .6389E-02 | .8443E-01 | -17.50392 | -22.42139 |
| 63.0 | 15.0 | 5.0 | .1945E-01 | .5761E-01 | -7.77683 | -9.43395 |
| 80.0 | 15.0 | .0 | .1739E-01 | .8450E-01 | -7.70964 | -13.73024 |
| 80.0 | 15.0 | 2.5 | .1612E-01 | .6956E-01 | -8.42872 | -12.70015 |
| 80.0 | 15.0 | 5.0 | .1547E-01 | .3405E-01 | -8.72914 | -6.85405 |
| 100.0 | 15.0 | .0 | .1374E-01 | .7558E-01 | -8.78729 | -14.80789 |
| 100.0 | 15.0 | 2.5 | .1540E-01 | .5530E-01 | -7.85739 | -11.10556 |
| 100.0 | 15.0 | 5.0 | .1980E-01 | .1034E-01 | -5.61445 | 5.64450 |
| 125.0 | 15.0 | .0 | .7221E-02 | .6760E-01 | -13.40647 | -19.42707 |
| 125.0 | 15.0 | 2.5 | .5934E-02 | .4022E-01 | -15.17102 | -16.62204 |
| 125.0 | 15.0 | 5.0 | .8103E-02 | .1446E-01 | -12.40624 | -5.02894 |
| 160.0 | 15.0 | .0 | .3813E-02 | .5975E-01 | -17.88151 | -23.90211 |
| 160.0 | 15.0 | 2.5 | .2278E-02 | .2213E-01 | -22.41572 | -19.74903 |
| 160.0 | 15.0 | 5.0 | .5888E-02 | .3851E-01 | -14.10688 | -16.31106 |
| 200.0 | 15.0 | .0 | .3198E-02 | .5345E-01 | -18.44008 | -24.46068 |
| 200.0 | 15.0 | 2.5 | .6803E-02 | .4532E-02 | -11.94332 | 3.52815 |
| 200.0 | 15.0 | 5.0 | .7366E-02 | .5018E-01 | -11.19286 | -16.66561 |
| 250.0 | 15.0 | .0 | .1012E-02 | .4780E-01 | -27.46316 | -33.48376 |
| 250.0 | 15.0 | 2.5 | .1212E-02 | .1347E-01 | -25.95609 | -20.91444 |
| 250.0 | 15.0 | 5.0 | .2256E-02 | .4224E-01 | -20.50075 | -25.44743 |
| 315.0 | 15.0 | .0 | .7841E-02 | .4259E-01 | -8.67791 | -14.69851 |
| 315.0 | 15.0 | 2.5 | .8166E-02 | .2947E-01 | -8.38492 | -11.14841 |
| 315.0 | 15.0 | 5.0 | .7993E-02 | .8364E-02 | -8.51073 | -.39369 |
| 400.0 | 15.0 | .0 | .6467E-02 | .3779E-01 | -9.31386 | -15.33446 |
| 400.0 | 15.0 | 2.5 | .8604E-02 | .3702E-01 | -6.89278 | -12.67526 |
| 400.0 | 15.0 | 5.0 | .9123E-02 | .3136E-01 | -6.32484 | -10.72595 |
| 500.0 | 15.0 | .0 | .2579E-02 | .3380E-01 | -16.33060 | -22.35120 |
| 500.0 | 15.0 | 2.5 | .3179E-02 | .2821E-01 | -14.57155 | -18.96028 |
| 500.0 | 15.0 | 5.0 | .4618E-02 | .2110E-01 | -11.27042 | -13.19585 |
| 630.0 | 15.0 | .0 | .1223E-02 | .3011E-01 | -21.80361 | -27.82421 |
| 630.0 | 15.0 | 2.5 | .1890E-03 | .9924E-03 | -38.08357 | -14.40256 |
| 630.0 | 15.0 | 5.0 | .2245E-02 | .2705E-01 | -16.53027 | -21.61860 |
| 800.0 | 15.0 | .0 | .4810E-02 | .2672E-01 | -8.87427 | -14.89487 |
| 800.0 | 15.0 | 2.5 | .5893E-03 | .2506E-01 | -27.17065 | -32.57223 |
| 800.0 | 15.0 | 5.0 | .1832E-02 | .1163E-01 | -17.25708 | -16.05097 |
| 1000.0 | 15.0 | .0 | .4786E-03 | .2390E-01 | -27.94881 | -33.96941 |
| 1000.0 | 15.0 | 2.5 | .1117E-02 | .9741E-02 | -20.64912 | -18.81314 |
| 1000.0 | 15.0 | 5.0 | .3330E-02 | .4309E-02 | -11.09825 | -2.23759 |
| 1250.0 | 15.0 | .0 | .2729E-02 | .2138E-01 | -11.86002 | -17.88062 |
| 1250.0 | 15.0 | 2.5 | .1883E-02 | .2105E-01 | -15.14283 | -20.97015 |
| 1250.0 | 15.0 | 5.0 | .1953E-02 | .1218E-01 | -14.76664 | -15.90133 |
| 1600.0 | 15.0 | .0 | .2492E-02 | .1890E-01 | -11.57702 | -17.59762 |
| 1600.0 | 15.0 | 2.5 | .2541E-02 | .1465E-01 | -11.46514 | -15.21717 |
| 1600.0 | 15.0 | 5.0 | .2359E-02 | .1114E-01 | -12.05211 | -13.48053 |
| 2000.0 | 15.0 | .0 | .1360E-02 | .1690E-01 | -15.86680 | -21.88740 |
| 2000.0 | 15.0 | 2.5 | .1487E-02 | .1115E-01 | -15.15201 | -17.50287 |
| 2000.0 | 15.0 | 5.0 | .1059E-02 | .1539E-01 | -18.05207 | -23.26030 |
| 2500.0 | 15.0 | .0 | .6833E-03 | .1512E-01 | -20.87733 | -26.89793 |
| 2500.0 | 15.0 | 2.5 | .3488E-03 | .1448E-01 | -26.77677 | -32.36216 |
| 2500.0 | 15.0 | 5.0 | .4314E-03 | .4725E-02 | -24.87144 | -20.79074 |

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Si bien el significado de cada columna de este fichero ya fue aclarado con anterioridad, podemos recordarlo ahora. Por columnas: (1) frecuencia, (2) coordenada $x$ punto interno, (3) coordenada $y$ punto interno, (4) módulo de la presión acústica en el punto, (5) módulo de la presión acústica en el punto interno para un problema de propagación libre sin obstáculo, (6) $EA$ y (7) $IL$.

El usuario del programa puede procesar los datos de estos ficheros y representarlos gráficamente haciendo uso de software complementario. A modo de ejemplo, con los resultados de 'cuadcont.s' hemos representado la distribución de presión acústica en el entorno del obstáculo para frecuencias $f$ = 125 Hz (fig.4.11a) y $f$ = 500 Hz (fig.4.11b).

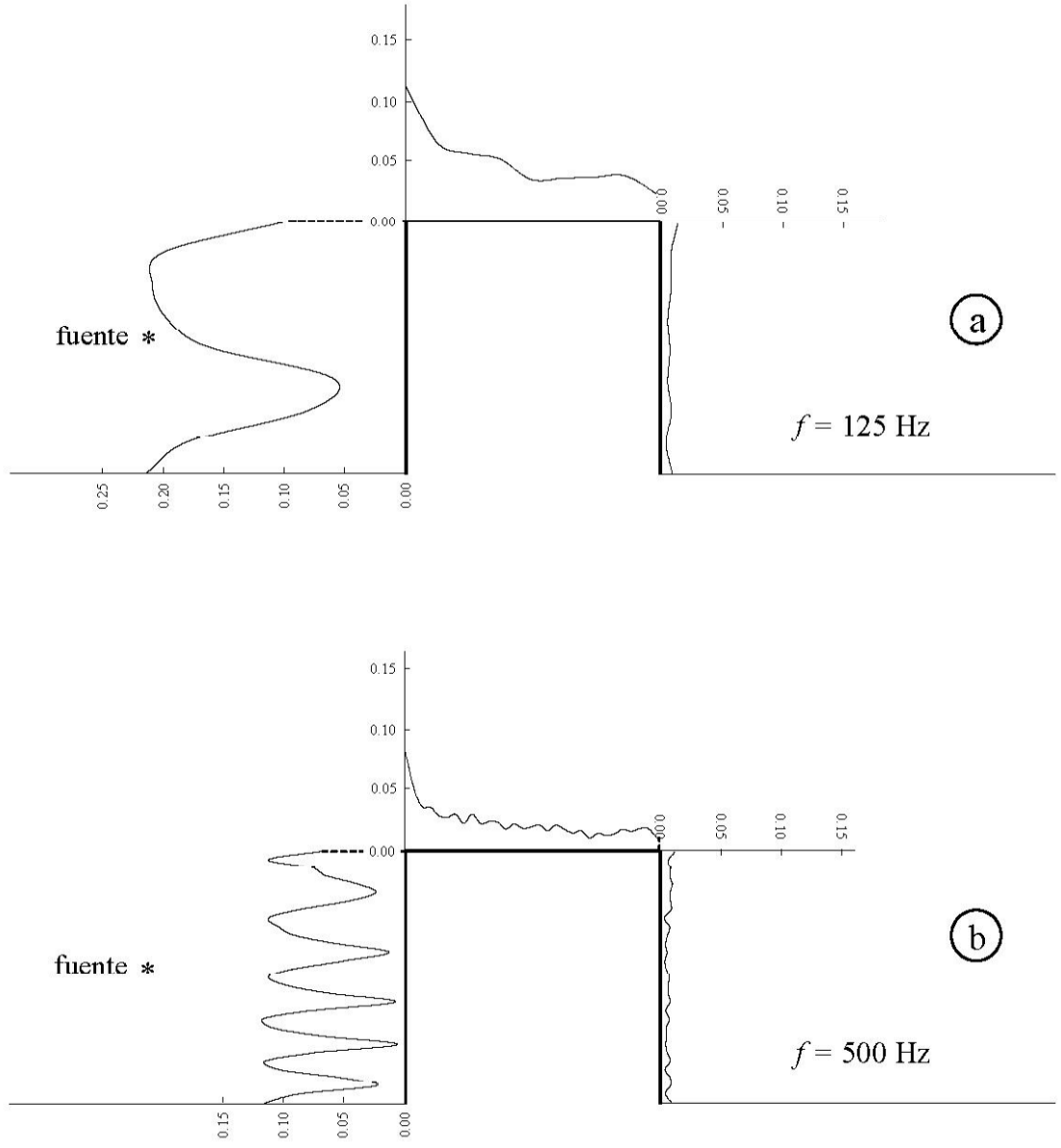



Figura 4.11a y b. Ejemplo Nº 1: Distribución de presión acústica en entorno obstáculo (125 Hz y 500 Hz).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Ahora, en la figura 4.12 representamos, en escala logarítmica, el espectro de pérdida por inserción del obstáculo para las tres posiciones (1,2 y 3) del receptor. Estamos representando gráficamente la séptima columna del fichero 'cuadpuin.s'.

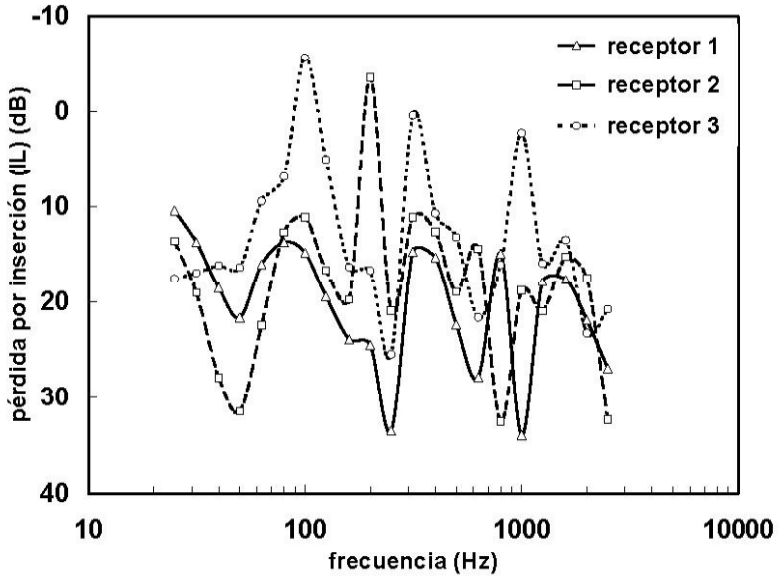



Figura 4.12. Ejemplo N° 1: Espectro de pérdida por inserción del obstáculo para las posiciones 1,2 y 3 del receptor.

Podemos completar la descripción del ejemplo haciendo notar al lector algunas conclusiones relacionadas con estos resultados. De la figura 4.11: (1) en ambos casos, la cara del obstáculo de frente a la fuente presenta mayores valores de la presión, (2) oscilaciones crecientes de la solución con la frecuencia y (3) el efecto pantalla es mayor a mayor frecuencia, esto se observa en los valores de la presión en las caras superior y en sombra del obstáculo. De la figura 4.12, y a pesar de las fuertes oscilaciones asociadas a las posiciones de la fuente y receptores, la pérdida por inserción es creciente, en términos generales, a medida que se reduce la cota del receptor.

### Ejemplo N$^o$ 2

### Obstáculo triangular absorbente sobre semiespacio reflejante.

Introducimos en este problema la posibilidad de considerar superficies parcialmente absorbentes en el modelo. Se trata de un obstáculo de forma triangular (fig. 4.13) en el que sus contornos tienen admitancia $\beta \neq 0$. Como en el ejemplo anterior, el semiespacio es completamente reflejante ($\beta_S = 0$) y tanto la fuente de ruido como el receptor, donde se mide la respuesta, se encuentran a cota cero sobre el contorno del semiespacio.

La admitancia $\beta$ de los contornos del obstáculo se determina a partir de la resistividad ($\sigma$) del recubrimiento absorbente, su espesor ($e$) y la frecuencia ($f$) a través de la relación empírica de Delany y Bazley de la que ya hemos hablado ampliamente. Se consideran en este ejemplo tres recubrimientos absorbentes diferenciados que permitirán representar comparativamente la respuesta ($\sigma_1 = 300000$ Nsm$^{-4}$ (superficie con cubierta vegetal), $\sigma_2 = 100000$ Nsm$^{-4}$, $\sigma_3 = 10000$ Nsm$^{-4}$ y $e_1 = e_2 = e_3 = 0.2$ m.).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

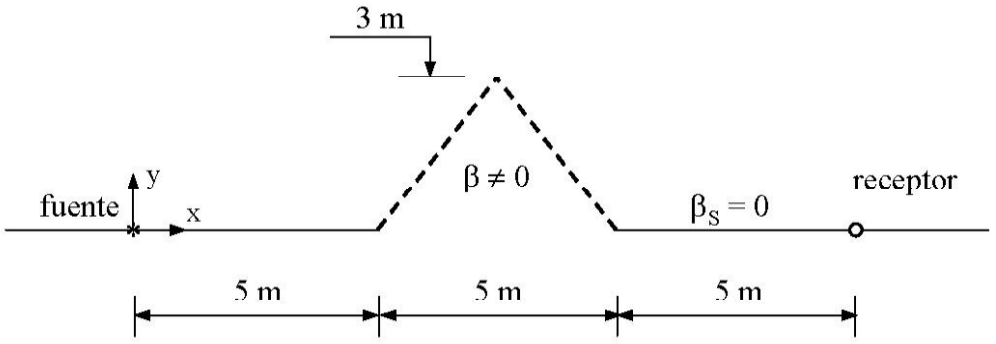



Figura 4.13. Ejemplo N° 2: Obstáculo triangular con contornos absorbentes sobre semiespacio reflejante.

Se obtendrán resultados para las 23 primeras frecuencias centrales de tercios de octava (entre 25 Hz y 4000 Hz). Como en el ejemplo descrito anteriormente $c$ = 343 m/s. El programa discretizará considerando la razón entre la longitud de onda a cada frecuencia y el tamaño máximo del elemento ANELO = 4 (como mínimo 4 elementos por longitud de onda). Este valor es distinto del adoptado para esta variable en el ejemplo anterior y ha sido elegido sin criterio previo. Al respecto, sería un ejercicio muy interesante para el lector realizar algunas pruebas cambiando este parámetro en este mismo ejemplo y estudiar la influencia del tamaño de la discretización en los resultados obtenidos. A partir de ahí podría determinarse un valor de ANELO que represente un compromiso entre 'buenos' resultados y un número de grados de libertad aceptable.

Presentamos el listado del fichero de datos de este ejemplo para el recubrimiento (1). En el fichero de datos para los recubrimientos del obstáculo (2) y (3) sólo se modifica el valor de $\sigma$ (dentro del recuadro).

```
343.0
23
4
0.0 0.0
0.0 0.0
2
5.0   0.0    7.5   3.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 300000 0.2
7.5   3.0   10.0   0.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 300000 0.2
1
15.0 0.0
```

En este punto, podemos visualizar como se modifica el comportamiento absorbente del contorno del obstáculo con la frecuencia y acercarnos a la comprensión del modelo empleado. Para ello representaremos el coeficiente de absorción ($\alpha_{st}$) con la frecuencia (fig. 4.14). Este coeficiente, que representa la fracción de energía absorbida por el contorno, es fuertemente dependiente de la frecuencia para los tres recubrimientos propuestos aunque su comportamiento con ésta es diferente según sea el valor de $\sigma$. En la versión listada del programa, esta variable no se escribe en los ficheros de salida si bien puede ser extraída sin dificultad introduciendo una sentencia de escritura en el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

lugar correspondiente de la rutina MORSE. Proponemos esto como ejercicio para el lector.

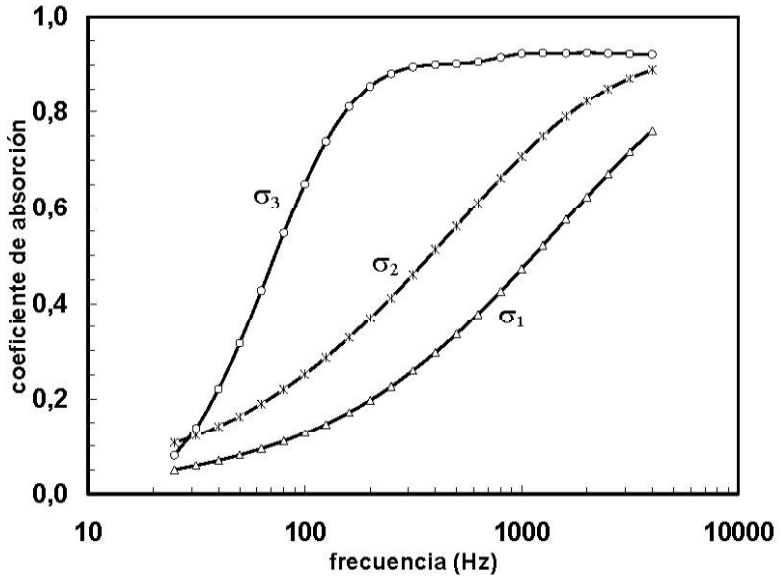



Figura 4.14. Ejemplo Nº 2: Coeficiente de absorción estadístico ($\alpha_{st}$) en función de la frecuencia para los tres tratamientos absorbentes de los contornos del obstáculo.

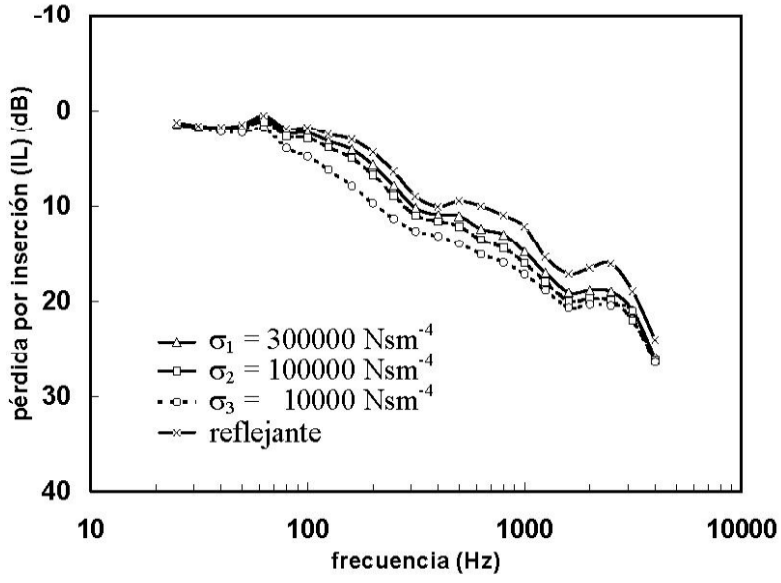



Figura 4.15. Ejemplo Nº 2: Espectro de pérdida por inserción del obstáculo.

En la figura 4.15 representamos el espectro de pérdida por inserción (*IL*) en el receptor para los tres tratamientos del contorno propuestos. Se incluye también el caso de un obstáculo completamente reflejante. A la luz de ambas figuras y para un valor dado de la frecuencia, la interpretación de los resultados es evidente: según se reduce el valor de $\sigma$, aumenta el coeficiente de absorción del contorno y con ello el *IL*. La evolución de los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

resultados con la frecuencia en la figura 4.15 necesita una explicación más detenida. En primer lugar y a la vista de la figura 4.14, para este tipo de recubrimientos porosos según aumenta el valor de la frecuencia de la onda incidente se incrementa el coeficiente de absorción del material. Este incremento es gradual para $\sigma_1$ y $\sigma_2$, mientras que para $\sigma_3$ el aumento del coeficiente de absorción es súbito y ya para frecuencias por encima de 200 Hz su valor supera 0.9. Con esto, en la figura 4.15 cabría esperar que el efecto del tratamiento absorbente del obstáculo fuese más evidente a frecuencias crecientes y las curvas de *IL* se separasen progresivamente según aumenta aquella. Sin embargo esto no ocurre. A medida que aumenta la frecuencia se reduce el efecto de difracción y con ello el efecto reflexión supera a la absorción. Sólo para el tratamiento $\sigma_3$ se observa un incremento singular de la eficacia del obstáculo en el rango de frecuencia medias. En este rango de frecuencias este material presenta un coeficiente de absorción elevado. Por el momento lo dejamos aquí. En el capítulo próximo profundizaremos en estos principios ligados al funcionamiento (eficacia) de una pantalla anti-ruido.

**Ejemplo N° 3**

**Pantalla simple vertical sobre semiespacio absorbente.**

Concluimos esta relación de ejemplos con el supuesto de una pantalla simple de 3 m. de altura y 20 cm. A diferencia de los ejemplos anteriores en los que se ha considerado que el terreno circundante era completamente reflejante, en este ejemplo consideraremos que el semiespacio tiene cierta capacidad absorbente ($\sigma_S$ = 300000 Nsm$^{-4}$ y espesor *e* infinito). Como en el ejemplo anterior, estas propiedades son utilizadas habitualmente para caracterizar terrenos provistos de cubierta vegetal. En este problema también el espectro abarca las primeras 23 frecuencias, ANELO = 4 y *c* = 343 m/s. La geometría de la barrera y la localización de la fuente y el receptor se muestran en la figura 4.16.

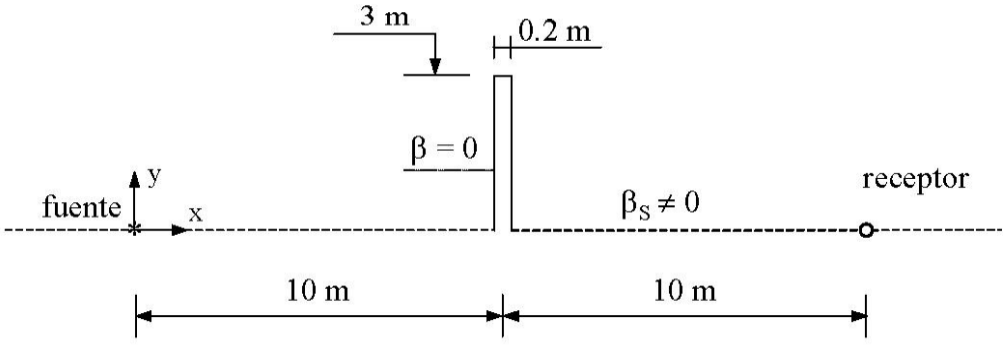



Figura 4.16. Ejemplo N° 3: pantalla simple vertical reflejante sobre semiespacio absorbente.

A continuación escribimos el listado del fichero de datos de este problema. El interés fundamental está en cómo introducir las propiedades de un semiespacio absorbente (5ª línea del fichero e indicada con una flecha).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

```
343.0
23
4
0.0 0.0
300000  0.0   ⇦
3
9.9    0.0    9.9   3.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
9.9    3.0   10.1   3.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
10.1   3.0   10.1   0.0
1 (0.0,0.0) (0.0,0.0) 0.0 0.0
1
20.0 0.0
```

Se representará ahora (figura 4.17) el espectro de pérdida por inserción (*IL*) de la pantalla para este caso y se compararán estos resultados con los correspondientes a la misma pantalla sobre semiespacio completamente reflejante ($\beta_S = 0$).

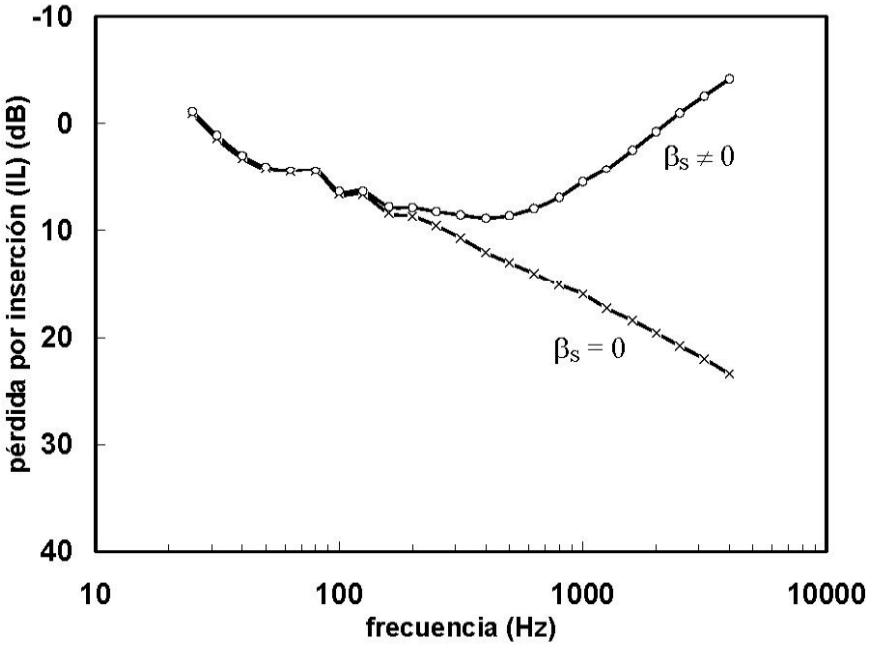



Figura 4.17. Ejemplo N° 3: Espectro de pérdida por inserción de la pantalla. Influencia de la absorción del semiespacio.

Sólo hacer notar al lector la paradoja que se muestra en estos resultados para $\beta_S \neq 0$ (valores muy bajos de *IL*, incluso negativos a altas frecuencias). Este asunto será comentado con profundidad en el apartado 5.3.4 del próximo capítulo, cuando se trate la influencia de la absorción del terreno en la efectividad de pantallas anti-ruido.

Como comentario final sólo decir que los ejemplos descritos representan un buen entrenamiento para el lector en el uso del programa. Hemos abarcado muchas posibilidades sin bien de un solo tipo de problemas (obstáculos y medición de su efectividad). Sin embargo, ya el lector se ha percatado que la posibilidades del código son muy amplias y sólo pequeñas modificaciones, que no afectan al sustrato del mismo,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

permitirían ampliar su uso al análisis de otros problemas de acústica bidimensional. Esperamos que para estas u otras aplicaciones el programa sea de utilidad.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 5
# RESULTADOS DEL MODELO NUMÉRICO. ESTUDIO DE LA EFICACIA DE PANTALLAS ACÚSTICAS

## 5.1 - INTRODUCCIÓN

Es posible atenuar el ruido producido por la circulación vial construyendo pantallas anti-ruido entre la calzada y las zonas que la bordean, interfiriendo de esta forma en la propagación de las onda sonoras entre la fuente del ruido y el receptor. Estas ondas se difractan sobre la zona superior de la pantalla creando una zona de sombra por detrás de la misma donde los niveles sonoros habrán disminuido. Algunas pantallas pueden reducir los niveles de ruido de 10 a 25 dB(A). Una reducción de 10 decibelios corresponde a una reducción de ruido vial a la mitad.

En el proceso de diseño de una pantalla acústica es necesario aplicar los conceptos físicos elementales subyacentes a la reducción del ruido (si se quiere que ésta sea acústicamente eficaz), pero también es necesario tener en cuenta la importancia de otras características no acústicas como son el mantenimiento, la seguridad, la estética, la construcción, el coste, etc. Igualmente es muy importante asegurar la participación de la comunidad en las decisiones finales relativas al diseño y a la construcción de las pantallas. Aun siendo así, el ámbito de este trabajo tan sólo toma en consideración los aspectos puramente físicos, sin que ello signifique que los restantes sean despreciables en absoluto para una situación real. Del mismo modo tampoco abordaremos otras problemáticas asociadas como son la pérdida de eficacia de las pantallas en el caso de edificios cuya altura sea sensiblemente superior a la barrera, o discontinuidades de ésta por accesos adyacentes o cruces de otras calles, etc.

Según su forma, la pantallas anti-ruido pueden ser:

- Pantallas (barreras) naturales, como los montículos o diques de tierras.
- Pantallas artificiales, como los muros (Fig.5.1, 5.3 y 5.4)(OCDE, 1995).
- La combinación de las dos, como los biomuros o las pantallas sobre taludes (Fig.5.2).

Hay que destacar que la vegetación no proporciona en general nada más que un efecto psicológico ya que solo aporta una débil reducción a los niveles de ruido de la circulación. La figura 5.5 presentan los principios acústicos claves ligados al diseño de una pantalla anti-ruido y su emplazamiento. Como ya hemos comentado en capítulos anteriores, la eficacia de la barrera (o en general de la solución adoptada) se expresa por medio de la variable denominada "pérdida por inserción", que no es otra cosa que la reducción del nivel de ruido en el receptor por la inserción de la pantalla, o de otro modo, el diferencial del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

nivel de ruido en la situación con barrera en relación al que habría en la situación sin barrera (ec. 2.42). La pérdida por inserción *IL*, será la variable empleada para presentar los resultados.

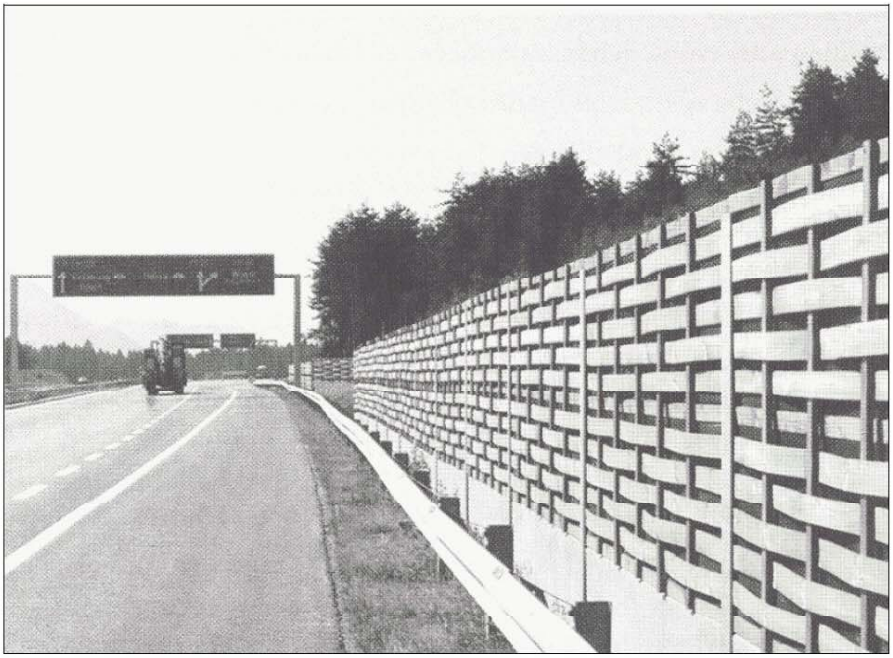


Figura 5.1. Pantalla en madera absorbente (Austria).

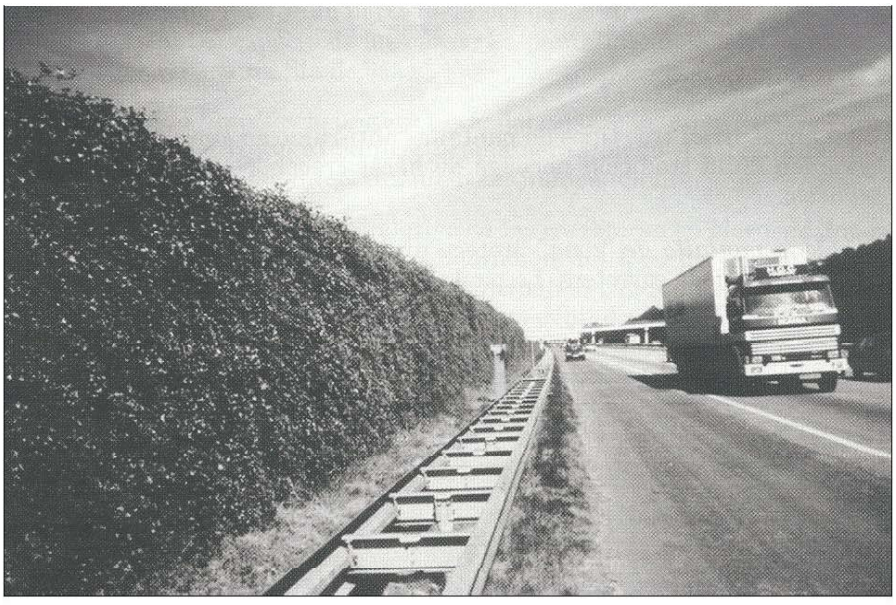


Figura 5.2. Pantalla con vegetación (biomuro) (Países Bajos).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

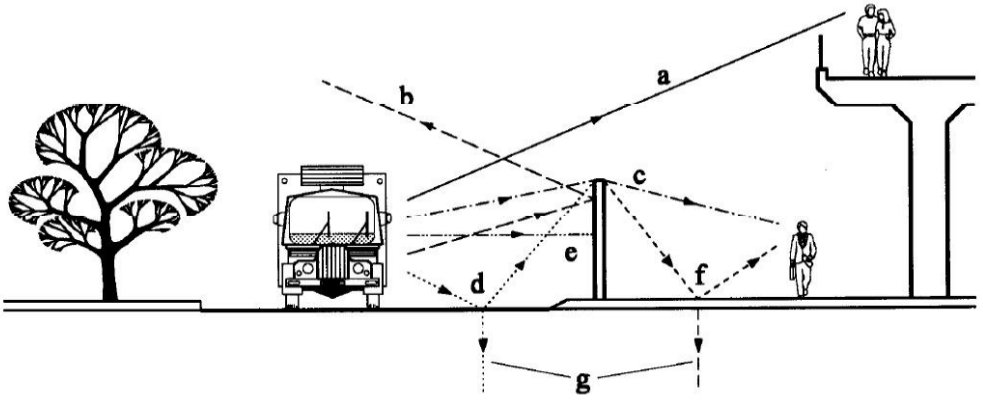
Figura 5.3. Pantalla discontinua en aluminio absorbente (Italia)

Figura 5.4. Pantalla con base de hormigón absorbente y elementos transparentes en la parte superior. Circunvalación de Las Palmas de G.C. (España).

En la figura se aprecian los distintos recorridos de la propagación del sonido entre fuente y receptor. No se ha representado la parte transmitida a través de la pantalla porque esta contribución (que para el problema estudiado no es muy importante) no está recogida en el modelo empleado. En general, para optimizar la eficacia de la pantalla hay que minimizar

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

cada una de las contribuciones, excepto el efecto "**b**","**e**" y "**g**" que conviene maximizar. Conviene finalmente decir que mas que definir el perfil de la pantalla "óptima", se trata de buscar la mejor adaptada a cada caso en particular. Ello requiere una definición clara del objetivo concreto a satisfacer (cuál es la zona en sombra de interés y rango de frecuencias más sensible), lo cual no es siempre fácil.




Leyenda:

**a** onda que incide directamente. Afecta a los receptores más elevados.
**b** onda reflejada por la pantalla.
**c** onda difractada por la pantalla.
**d** onda reflejada por el suelo y después difractada.
**e** onda absorbida por la pantalla.
**f** onda difractada y luego reflejada.
**g** onda absorbida por el terreno.

Fig. 5.5 Propagación del ruido de tráfico en presencia de una pantalla acústica.

## 5.2 - VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Para probar la buena aptitud del modelo numérico de elementos de contorno para el estudio del problema de acústica exterior, se han contrastado sus predicciones con algunas evidencias experimentales. Así, en la figura 5.6b se muestran los resultados de las medidas experimentales de Rasmussen (1982) usando una fuente puntual de sonido. Se trata de medir la situación en niveles de intensidad en un receptor situado tras un obstáculo con forma cuadrada, todo ello sobre un contorno plano con cierta capacidad absorbente. En la figura 5.6a se indican la situación exacta de fuente y receptor, así como la geometría del obstáculo. Las medidas corresponden a bandas de tercios de octava, y la variable escogida como representativa es el Excess Attenuation ($EA$) que se define matemáticamente como:

$$EA = -20\log\left|\frac{p}{p_f}\right| \tag{5.1}$$

donde $p$ es la presión acústica en el receptor en la situación de la figura 5.6a, y $p_f$ es la que habría en un caso de propagación libre entre fuente y receptor (esto es, en ausencia de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

semiespacio y de obstáculo). Puede entenderse el *EA* como una medida de la pérdida por la presencia conjunta del suelo y del obstáculo. En la figura se muestran también los resultados numéricos del MEC para la misma geometría y características de las superficies, correspondientes a las frecuencias centrales de las bandas de tercios de octava. Los puntos corresponden a los resultdos obtenidos utilizando la solución fundamental del espacio completo (caso en el que hay que discretizar los contorno correspondientes al suelo), y las aspas a los resultados del programa con la solución fundamental del semiespacio (caso en que no es preciso discretizar tales contornos) Las ventajas computacionales que se derivan de la segunda opción quedan reflejadas en el hecho de que discretizando con elementos de longitud $\lambda/4$, (siendo $\lambda$ la longitud de onda), para la frecuencia de 4000 Hz son fueron precisos 1800 nodos en el primer caso, frente a sólo 140 en el segundo. Se aprecia un buen ajuste con los resultados experimentales en ambos casos. La conclusión es doble: por un lado se deduce que el modelo bidimensional de una fuente lineal infinita puede ser comparado con los resultados de una fuente puntual cuando estamos interesados en la solución dentro del plano. Esto ya había sido predicho por otros autores (ver por ejemplo Watts 1996). Asimismo se deduce que los resultados numéricos para las frecuencias centrales de cada tercio de octava dan una buena indicación de las medidas experimentales de cada banda. Dicho acuerdo sería menos fiable si la variable sufriera grandes cambios a lo largo de la banda.

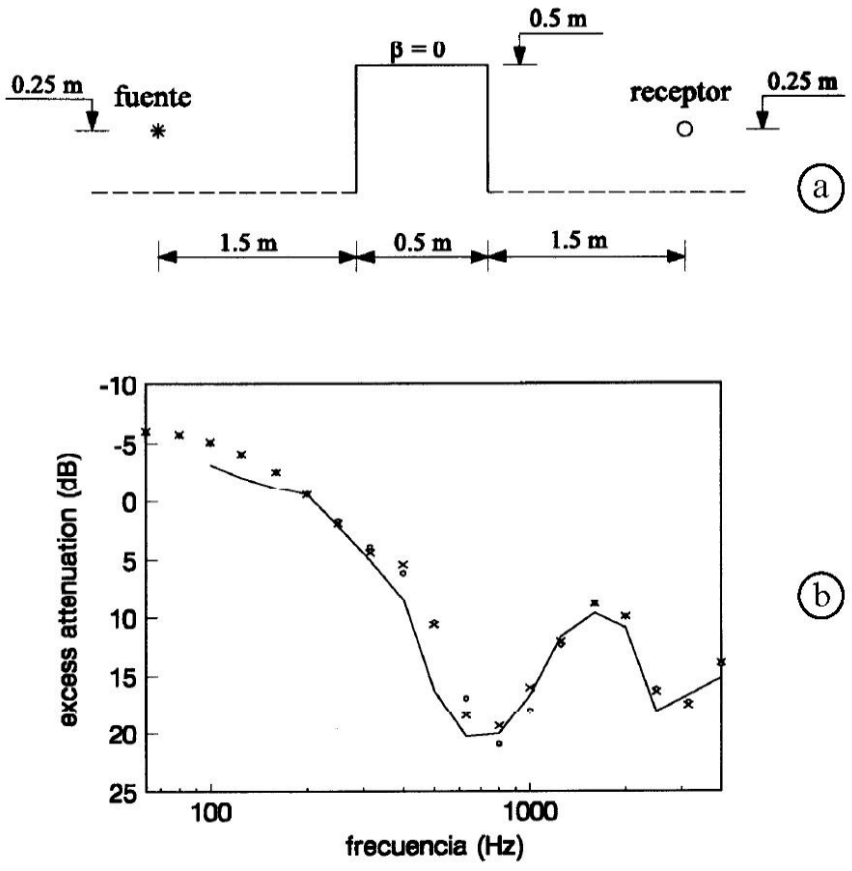



Figura 5.6a y b. Validación experimental del modelo. Obstáculo reflejante. Suelo absorbente ($\sigma$ = 250.000 $Nsm^{-4}$)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.3 - ESPECTROS DE PÉRDIDA POR INSERCIÓN. ESTUDIO PARAMÉTRICO.

El modelo numérico se ha empleado para estudiar diversos tipos de pantallas anti-ruido, en diversas situaciones de funcionamiento. La variable representativa de la eficacia de cada pantalla será la pérdida por inserción (*IL*) que ya se ha definido. Como los resultados están fuertemente influenciados, no sólo por la geometría de la pantalla, sino también por la localización de la fuente y del receptor, así como por la situación relativa de ambos frente a la barrera, se ha escogido una situación de referencia en que las distancias horizontales entre fuente y punto central de la barrera, así como entre éste y el receptor se mantienen constantes. En la figura 5.7a se muestra un esquema de la configuración escogida, con la fuente distanciada 10 m de una barrera de altura H = 3m. Si la fuente se sitúa por encima del suelo se producen fenómenos bien conocidos de interferencia entre la onda incidente y la onda reflejada por éste. A cada monofrecuencia, ello derivaría en complicados campos de presión en la zona de recepción tras la pantalla, que se ha visto dependen de los patrones de interferencia en la zona por encima de la barrera. Puede decirse que los niveles acústicos en el receptor son muy sensibles a la altura de la fuente y de la barrera. Para evitar estos inconvenientes y simplificar los resultados la fuente se ha colocado al nivel del suelo.

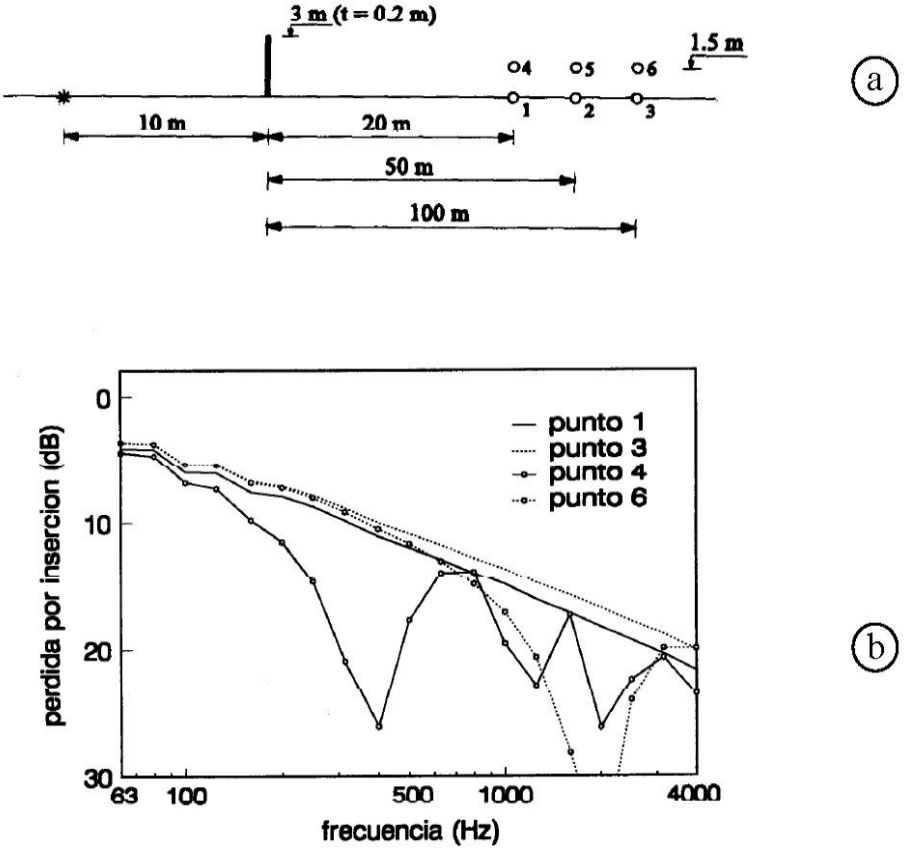



Figura 5.7a y b. Espectro de pérdida por inserción para una pantalla vertical (H = 3m). Diferentes situaciones del receptor. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Se han calculado los niveles de presión acústica en las seis posiciones de recepción indicadas en la figura 5.7a, para las frecuencia centrales de las bandas de tercios de octava en el rango entre 63 y 4 KHz. En la figura 5.7b se aprecia que mientras fuente y receptor se mantengan al nivel del suelo no se producen fenómenos de interferencia debido a las reflexiones con éste. Se obtiene entonces un espectro de respuesta en el que sólo está recogido el efecto de la difracción. En cambio para receptores situados por encima del suelo se producen a cada monofrecuencia fenómenos de interferencia que complican considerablemente la interpretación de la respuesta.

En los ejemplos sucesivos, y siguiendo la pauta adoptada por otros investigadores (p.e. referencias Seznec, 1980 y Hothersall et al, 1991)-, la fuente y el receptor se posicionarán al nivel del suelo. Se ha escogido el punto 2, situado a una distancia horizontal de 50 m desde la barrera, como punto donde calcular la pérdida por inserción, y esta configuración geométrica se mantendrá constante durante los experimentos que se presentan hasta el final del capítulo.

Fijadas las posiciones de fuente, receptor y barrera, los principales factores que afectan al nivel de inserción son:

- altura de la pantalla.
- capacidad absorbente del suelo (tipo de suelo).
- perfil de la pantalla.
- capacidad absorbente de la pantalla (tipo y tratamiento de sus superficies).

Aunque existe una interdependencia entre todos ellos, a continuación se va a estudiar la influencia de cada uno de ellos individualmente.

### 5.3.1- INFLUENCIA DE LA ALTURA DE LA PANTALLA

En la figura 5.8b se muestran los espectros de pérdida por inserción para varias pantallas simples de 20 cm de espesor y altura H variable (2,3,4 y 5 m), obtenidos con el modelo numérico para las frecuencias centrales de las bandas de tercio de octava. Fuente y receptor están situados tal como se muestra en la figura 5.7a (el receptor es el punto 2), ambos en la superficie de un suelo completamente reflejante. Se aprecia que para frecuencias a partir de 125 ó 200 Hz la pérdida por inserción aumenta con la frecuencia a un ritmo aproximado de 3 dB/octava que se mantiene constante independientemente de la altura de la pantalla. Esto se debe a una menor capacidad de difracción tras la barrera a frecuencias elevadas. También se observa que la pérdida es mayor, como es lógico, cuanto más alto sea el obstáculo, puesto que aumenta la cantidad de onda reflejada. La mejora por elevar la altura de 2 a 3 m casi el doble que por elevar la barrera 1 metro más (a 4 m), y aproximadamente igual a la obtenida por elevarla 2 m (a 5 m). Nótese cómo, en estas condiciones de absorción nulas, una barrera de 4 m es capaz de conseguir pérdidas del orden de 20 dB para frecuencias altas (las más molestas), y de mas de 10 dB para frecuencias en el entorno de 500 Hz (que suele tomarse de referencia para caracterizar el ruido de tráfico).

Es la pantalla simple un perfil de barrera que actúa fundamentalmente por reflexión de la onda incidente. Se busca en este caso mayor altura para reflejar un mayor ángulo de haces de rayos incidentes. Por ello es habitual en la bibliografía emplear el parámetro "altura efectiva" ($h_{ef}$) de la pantalla, que no es mas que la altura del punto de confluencia de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

vertical desde la base de la barrera con el haz incidente de mayor pendiente que la barrera es capaz de interceptar. En la figura 5.9a se representan distintas pantallas simples con diferente inclinación, teniendo todas ellas la misma altura efectiva que la de una pantalla vertical de 3 m, que a partir de ahora y en adelante se tomará como referencia. En la figura 5.9b se aprecia que los resultados de pérdida por inserción de las tres pantallas definidas en la figura 5.9a son prácticamente iguales, lo que confirma la aptitud del parámetro $h_{ef}$ en el rango de inclinaciones considerado. Un experimento similar se llevó a cabo para una pantalla curva cuya geometría se presenta en la figura 5.10a (el centro de curvatura coincide con la posición de la fuente y el radio es constante). La efectividad de esta pantalla aparece en la figura 5.10b comparada con la de la pantalla simple vertical de la misma altura efectiva, y de nuevo se aprecia un sensible acuerdo de los resultados. Se deduce que la eficacia del mecanismo de reflexión de una pantalla está fundamentalmente gobernada por su altura efectiva.

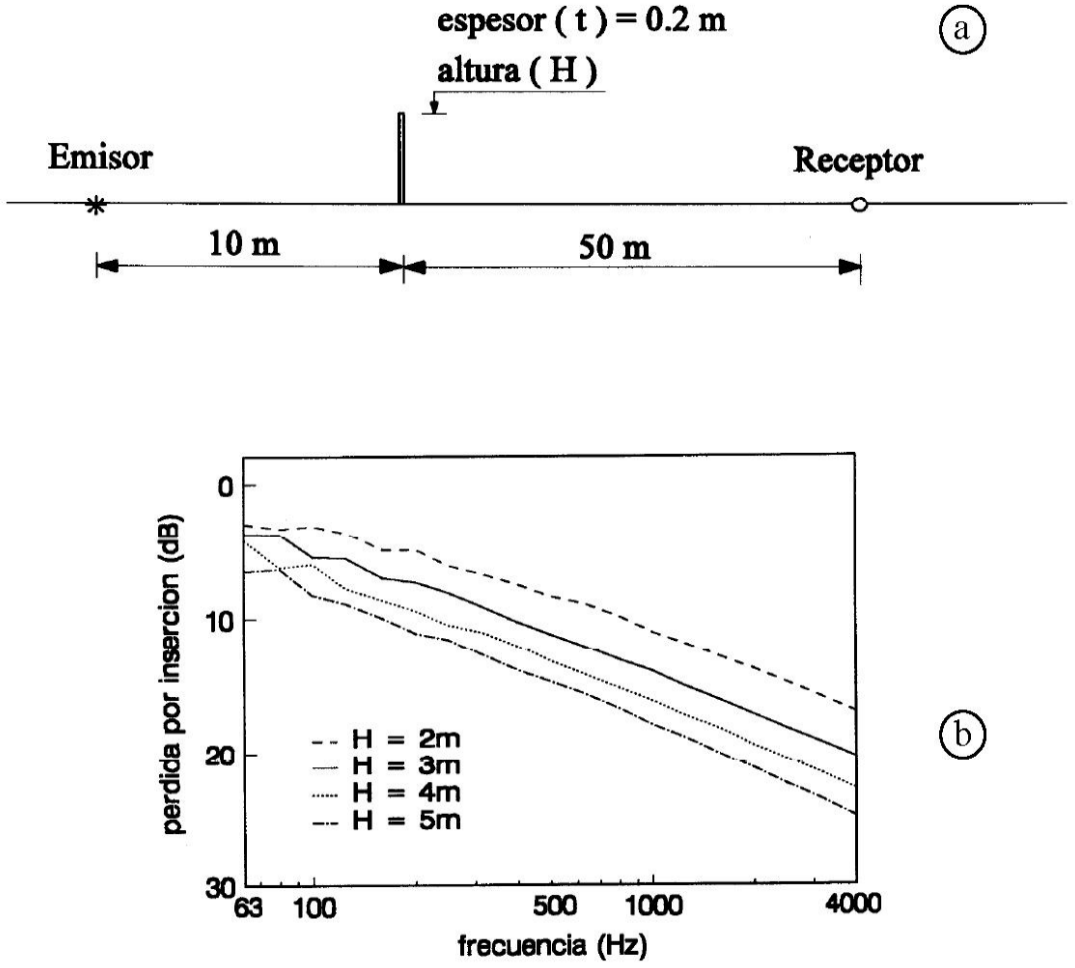



Figura 5.8a y b. Espectro de pérdida por inserción. Influencia de la altura de la pantalla. Superficies reflejantes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

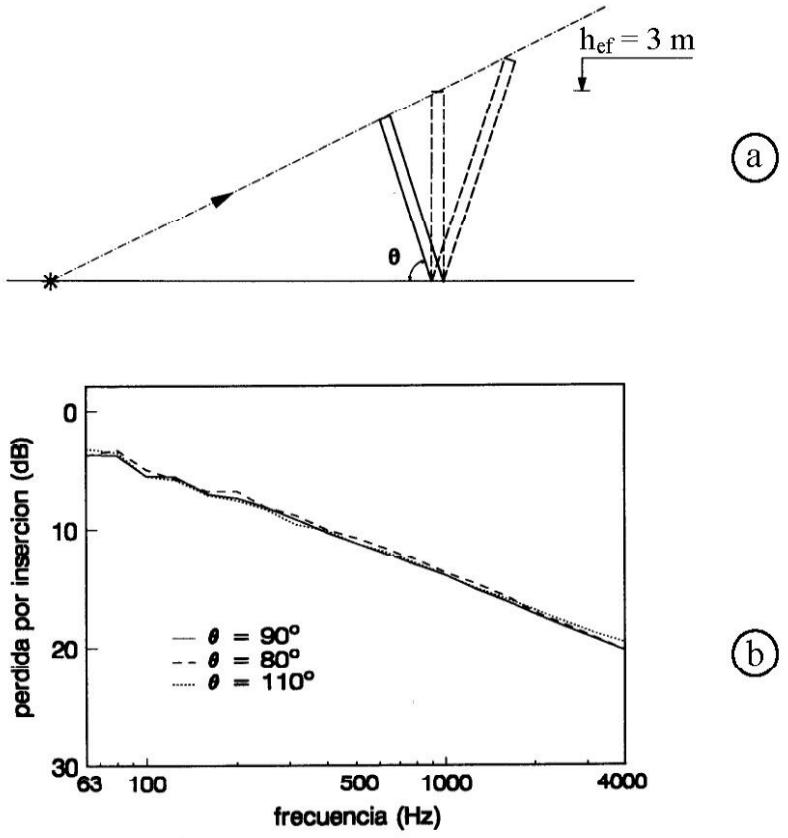



Figura 5.9a y b. Espectro de pérdida por inserción de una pantalla inclinada. Superficies reflejantes.

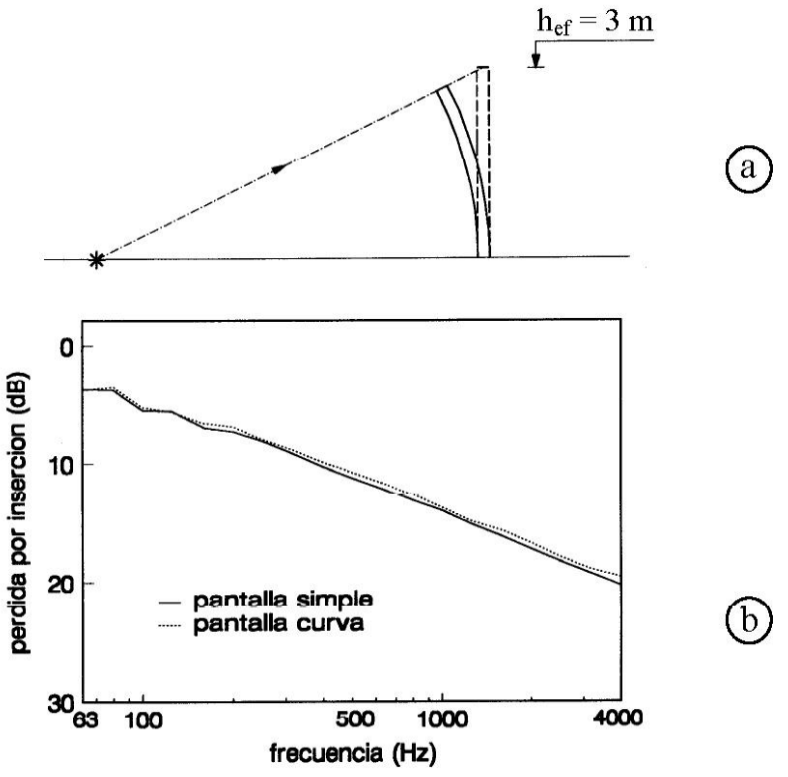



Figura 5.10a y b. Espectro de pérdida por inserción de pantallas curvas. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.3.2- INFLUENCIA DEL PERFIL DE LA PANTALLA

Asumiendo que la sección transversal de la barrera es constante a lo largo de su longitud, calcularemos los espectros de pérdida por inserción (*IL*) para diferentes perfiles de pantalla. En todos los casos tanto el suelo como las superficies de la propia barrera son completamente reflejantes, para desacoplar estos factores de factor *forma* de la barrera. Asimismo la altura efectiva de los diferentes tipos de barrera se mantendrá constante e igual a tres metros, lo que permitirá comparaciones entre ellas.

### 5.3.2.1- SECCIÓN TRANSVERSAL EN CUÑA

Se trata de barreras usuales en nuestras carreteras formadas por montículos de tierra o piedras, que en este estudio se han generalizado adoptando sus taludes diferentes valores de pendiente. La geometría de presenta en la figura 5.11a. Fuente y receptor se encuentran situados a una distancia horizontal de 10 y 50 m respectivamente del centro de la cuña (punto más alto), y al nivel del suelo, lo que hace que esta configuración pueda ser comparada con la ya empleada para estimar la eficacia de la pantalla simple de 3 m. Los resultados para las diferentes inclinaciones se muestran en la figura 5.11b apreciándose que la eficacia de las barrera en cuña es inferior a la de la pantalla simple de la misma altura. Además se deduce que la eficacia disminuye de forma significativa conforme disminuye la pendiente de sus taludes, lo cual puede atribuirse a que menores inclinaciones favorecen la difracción por detrás del obstáculo.

Desde el punto de vista numérico hay que decir también que este problema se ha manifestado muy sensible a la finura de la discretización. Ha sido preciso adoptar un tamaño de elemento del orden de $\lambda/8$ (especialmente en las frecuencias altas) para garantizar la convergencia de los resultados. Esto, que conlleva un costo computacional importante, contrasta con la experiencia en otros tipos de perfiles, en los que se ha comprobado que la convergencia se garantiza con discretizaciones del orden de $\lambda/4$. Los autores de este trabajo no tienen hasta el momento una explicación clara del motivo de esta discrepancia.

### 5.3.2.2- SECCIÓN TRANSVERSAL EN DIQUE

También habitual en nuestras carreteras, se trata de barreras del tipo de las representadas en la figura 5.12a. Se han considerado diferentes inclinaciones de taludes pero la altura efectiva se ha mantenido constante de valor 3 m. Los resultados correspondientes se muestran en la figura 5.12b, comparados con la pantalla simple. Las conclusiones son semejantes a las del caso de barrera en cuña, si bien se aprecia que la eficacia de la barrera en dique es algo superior. Esto se aprecia mejor en las figuras 5.13a, b y c, que recogen un comparativo entre los perfiles en dique y en cuña para diferentes ángulos de pendiente. La mejor eficacia de la barrera en dique es más acusada para las frecuencias altas. Así por ejemplo, para $\theta=60^{o}$ y 4 Khz la mejora es del orden 5 dB.

Los comentarios sobre los aspectos numéricos de las discretizaciones comentados en el apartado anterior son extrapolables al caso de la barrera en dique.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

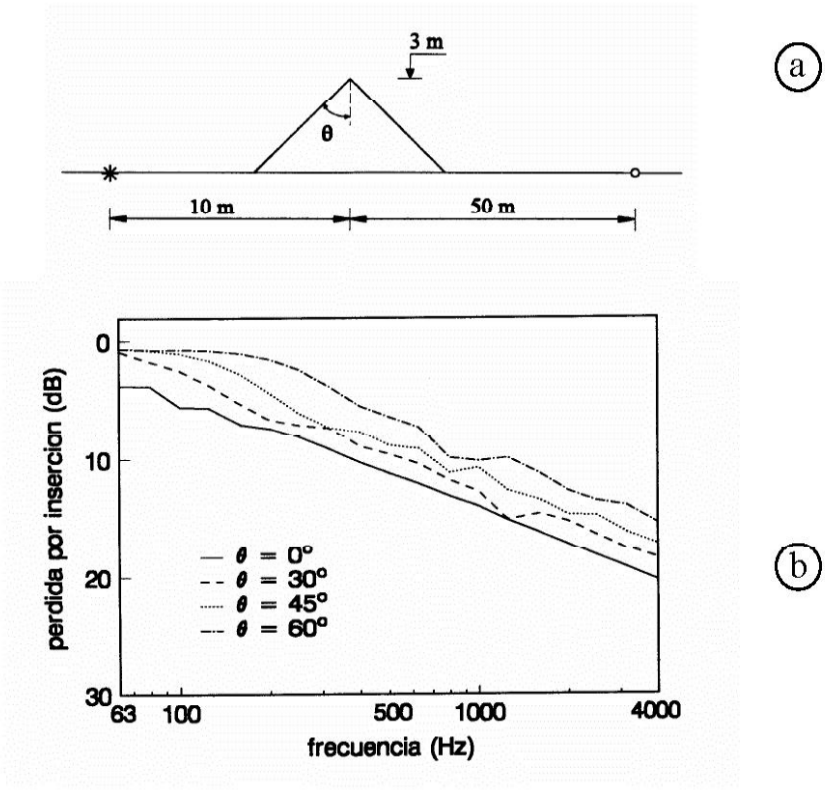



Figura 5.11a y b. Espectros de pérdida por inserción. Sección transversal en cuña. Superficies reflejantes.

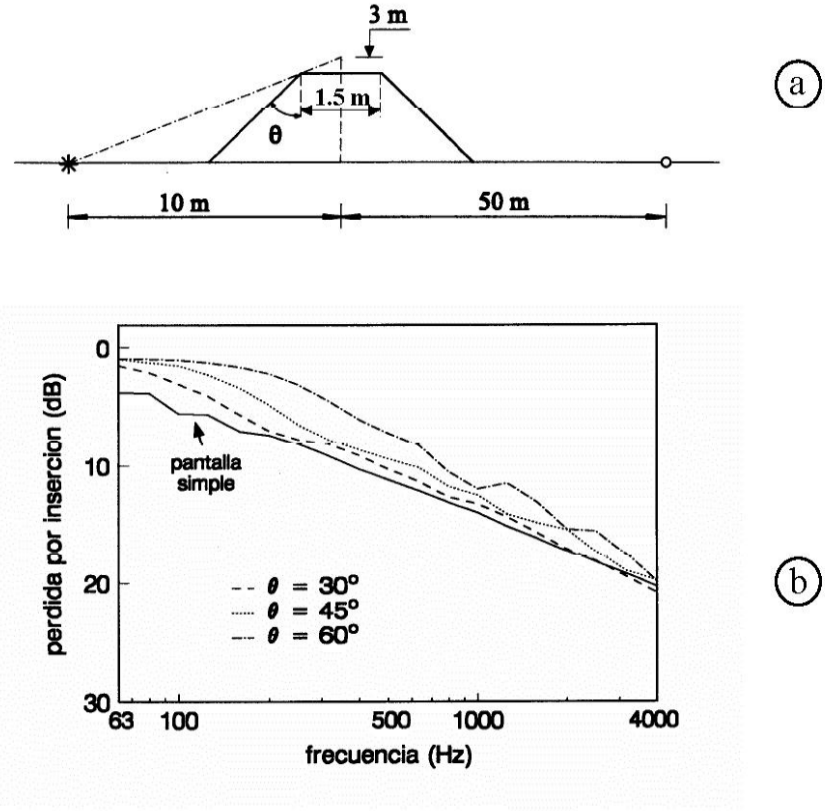



Figura 5.12a y b. Espectros de pérdida por inserción. Sección transversal en dique. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

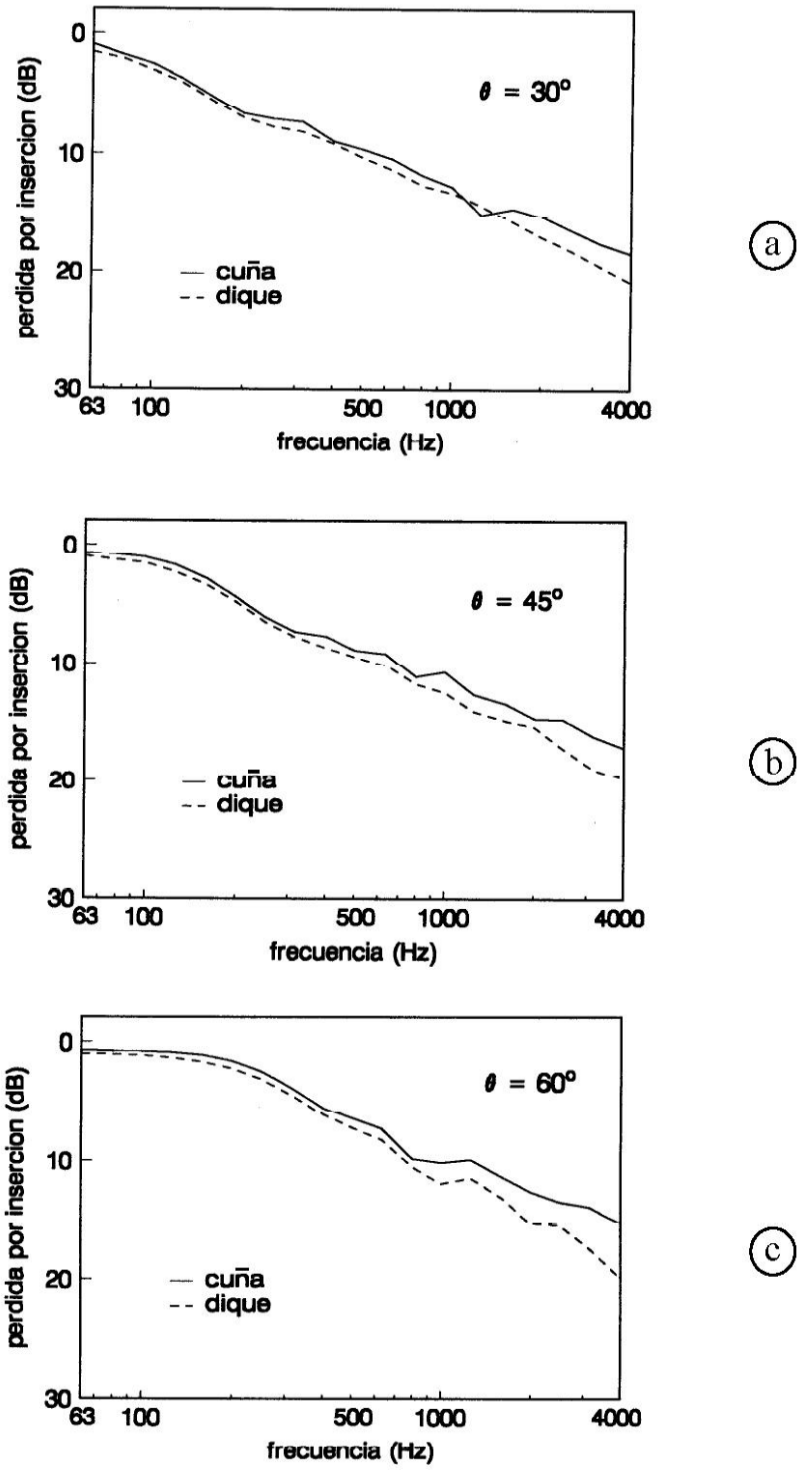



Figura 5.13a y b. Espectros de pérdida por inserción. Comparativo entre sección en cuña y sección en dique. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

### 5.3.2.3- SECCIÓN TRANSVERSAL ACODADA

Se trata de pantallas cuya geometría se ajusta al tipo de las representadas en la figura 5.14a, con un tramo vertical de 2 m y un tramo acodado de longitud e inclinación variables, de tal modo que la altura efectiva sea siempre de 3 m. El espesor es constante de 20 cm. Los resultados se muestran en la figura 5.14b comparados con la pantalla simple. Se aprecia que los casos $\theta=90^o$ (pantalla simple) y $\theta=0^o$, corresponden a pantallas de mayor eficacia que en el caso de ángulos intermedios. La eficacia es especialmente menor en el caso de $\theta=30^o$ en el rango de frecuencias altas. Se deduce que en este tipo de pantallas la importancia de la parte de onda difractada depende de la geometría local.

Visto que el parámetro *altura efectiva* no es el único que define la eficacia en este caso, puede ser interesante estudiar la eficacia de pantallas acodadas del mismo tipo, pero de la misma longitud en sección transversal que la pantalla simple de 3 m (mismo peso y por lo tanto mismo precio). La geometría ahora corresponde a la indicada en la figura 5.15a. Dependiendo del valor de $\theta$ las diferentes pantallas tienen diferentes valores de altura efectiva. Así, para el caso estudiado, $h_{ef}(0^o)<h_{ef}(30^o)<h_{ef}(30^o)<h_{ef}(90^o)$. El único sentido de la comparación ahora es la de contrastar la eficacia de diferentes opciones del mismo coste económico. Esta comparación se recoge en la figura 5.15b. Así por ejemplo se aprecia que la eficacia de la solución $\theta=0^o$ es superior a la de $\theta=30^o$, aun cuando ésta tiene mayor $h_{ef}$. Sin embargo la tónica entre $\theta=30^o$, $60^o$ y $90^o$ es la esperada desde el punto de vista del parámetro $h_{ef}$ (mayor eficacia a mayor $h_{ef}$). De nuevo la pantalla simple vertical es la más efectiva prácticamente en todo el rango de frecuencias.

### 5.3.2.4- SECCIÓN TRANSVERSAL EN **Y** ó **T**

La experiencia de las pantallas acodadas aconseja probar con geometrías que dificulten la difracción de la onda por detrás de la barrera. Para ello probamos pantallas en forma de **Y** ó **T** como las indicadas en la figura 5.16a. El tramo vertical es de 2 m y los brazos son de inclinación y longitud variables de modo que la altura efectiva total de la barrera sea de 3 m. El espesor sigue siendo de 20 cm. Los resultados para este caso se muestran en la figura 5.16b. Se aprecia que la eficacia de estas pantallas es superior a la de la pantalla simple vertical en los casos de $\theta=30^o$ y $\theta=60^o$, siendo semejante cuando $\theta=0^o$. La mejora con respecto a la pantalla acodada (figura 5.14a y b) se aprecia mucho mejor en las figuras 5.17a, b y c, para los diferentes valores de $\theta$. Las curvas en trazo continuo corresponden a pantallas acodadas, y las del trazo discontinuo a las **Y** ó **T**. Esta mejora se debe, lógicamente, a que la onda difractada por el "brazo" inclinado hacia la fuente, es reflejada ahora por el brazo inclinado hacia atrás. El efecto es particularmente importante en el caso de $\theta=30^o$, y sobre todo a frecuencias altas (las que más difícilmente se difractan), siendo del orden de 3 dB para frecuencia en el entorno de 500 Hz y llegando a incrementos de pérdida del orden de 7 dB para la frecuencia de 3150 Hz.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

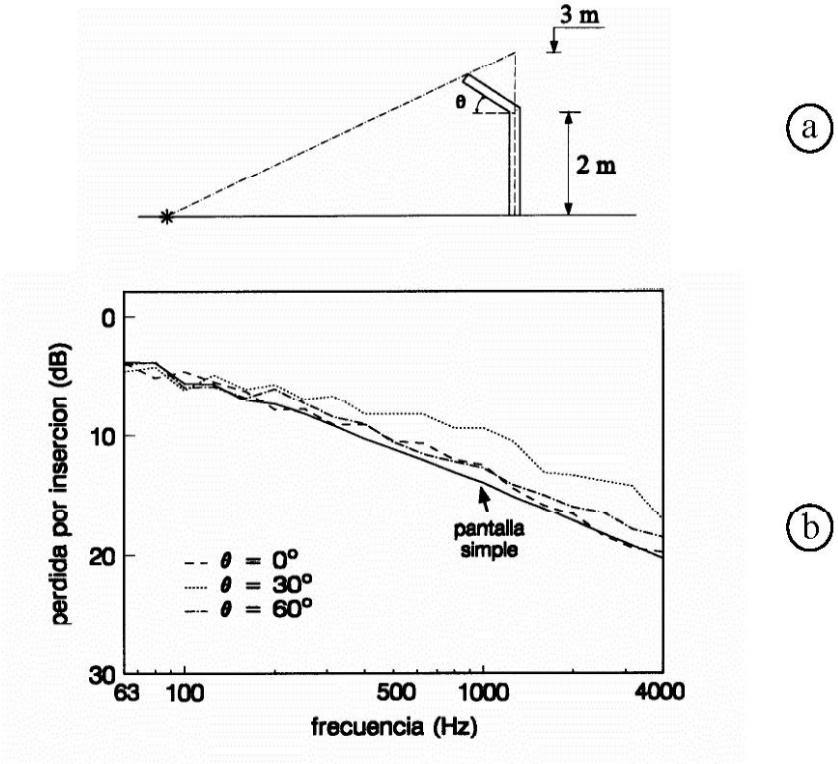



Figura 5.14a y b. Espectros de pérdida por inserción. Pantalla acodada. Superficies reflejantes.

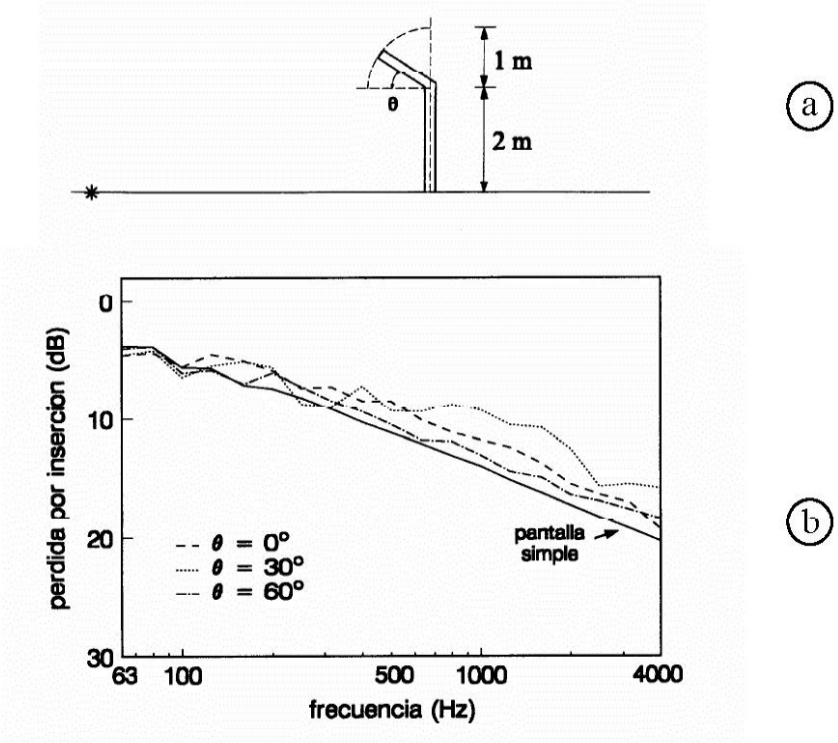



Figura 5.15a y b. Espectros de pérdida por inserción. Pantalla acodada ($h_{ef}$ variable). Superficies reflejantes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

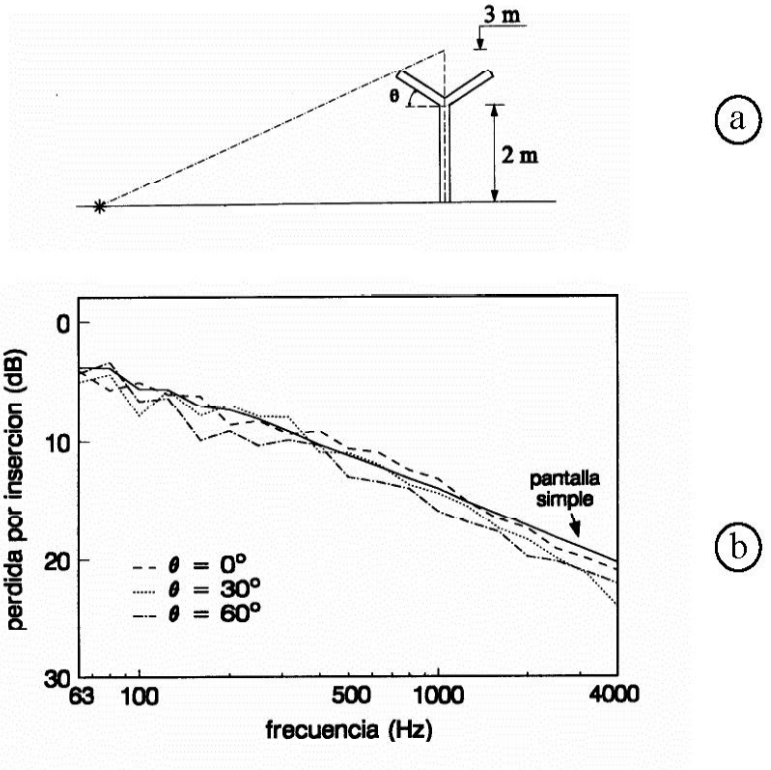



Figura 5.16a y b. Espectros de pérdida por inserción. Pantalla en **Y**. Superficies reflejantes.

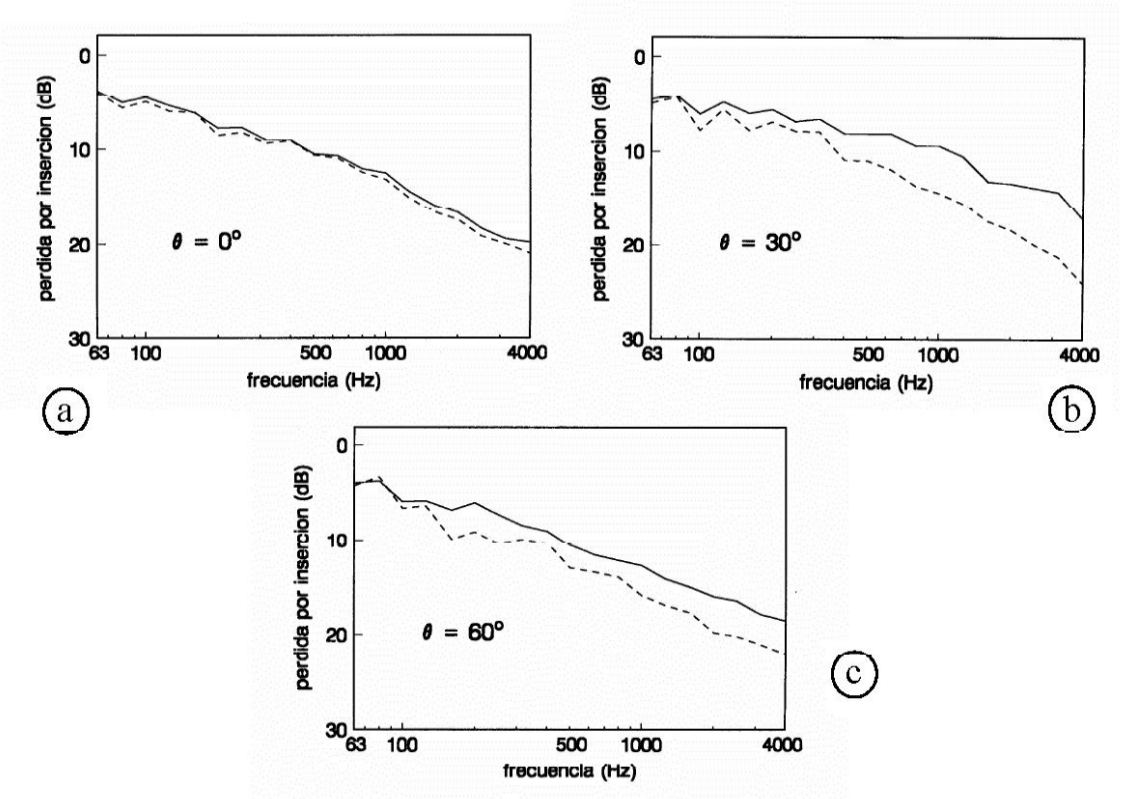



Figura 5.17a,b y c. Espectros de pérdida por inserción. Comparativo entre la pantalla en **Y** y la pantalla acodada. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.3.2.5- VARIANTES DESDE LA PANTALLA SIMPLE Y LA PANTALLA EN **Y**

La experiencia de los dos últimos apartados anima a buscar nuevas soluciones geométricas que mejoren la relación eficacia/economía, es decir, conseguir mayores niveles de pérdida por inserción, manteniendo acotada la longitud total de la sección transversal (y por tanto el peso) de la barrera. La idea seguida ha sido tomar como base la pantalla simple vertical y añadirle "brazos" (bien por el lado de la fuente, bien por el lado opuesto o bien por ambos), de manera que se maximice la cantidad de onda reflejada y se minimice la cantidad de onda difractada. Las soluciones son múltiples y la búsqueda del óptimo no es tarea sencilla. A continuación se presentan los resultados de algunos experimentos en este sentido.

La primera prueba consiste en añadir un "brazo" o "rama" a la pantalla simple, por el lado de la fuente, de manera que intercepte la onda incidente, pero sin elevar la altura efectiva total. La idea se presenta en la figura 5.18a, y los resultados se presentan en función de la inclinación θ, y comparados con la pantalla simple, en la figura 5.18b. Se observa que cualquier añadido a la pantalla simple mejora la pérdida por inserción, si bien la mejora no es constante para las diferentes frecuencias. Entre las soluciones ensayadas (θ=30° y θ=60°) no puede decirse cuál es en términos netos mejor. La búsqueda de la pendiente óptima de la ramificación requeriría ensayar una batería más completa de casos.

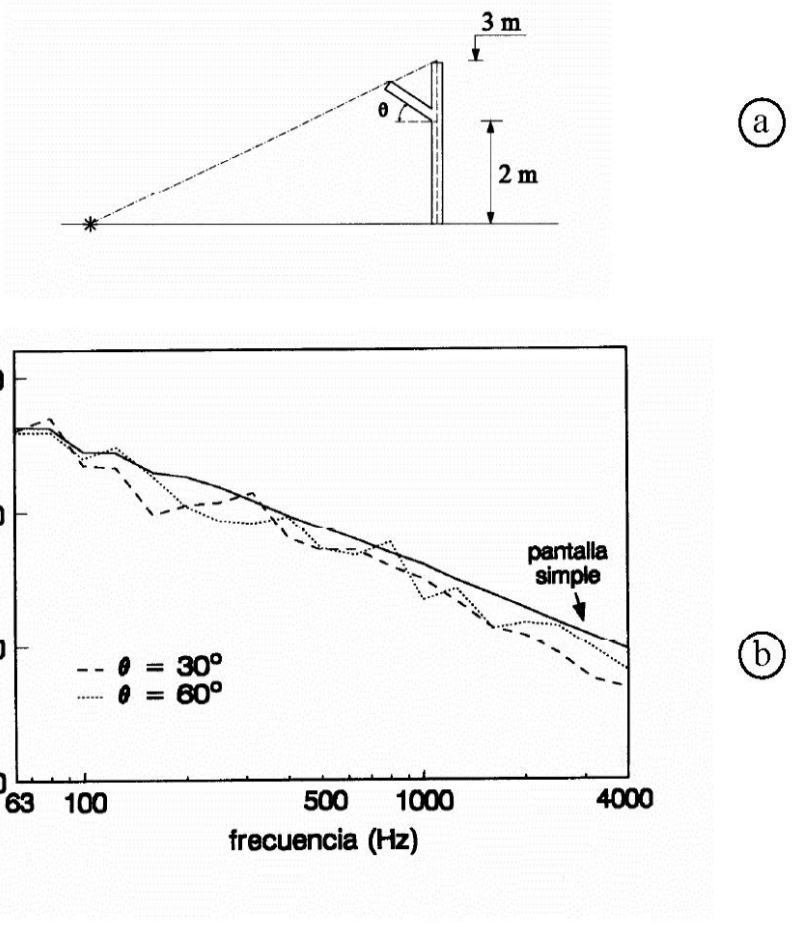



Figura 5.18a y b. Geometría de la sección y espectros de pérdida por inserción. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La segunda prueba consiste en comparar la eficacia de las "ramas" hacia uno u otro lado de la pantalla. La ramificación hacia el lado de la fuente tiende a interceptar la onda incidente (y por tanto a reflejarla), mientras que la ramificación hacia atrás tiende a reflejar la onda difractada. Las geometrías ensayadas se presentan en la figura 5.19a, y las soluciones a cada caso se muestran en las figuras 5.19b (θ=30°) y 5.19c (θ=60°). También se han probado otras configuraciones semejantes, pero con las "ramificaciones" acodadas. Se trata de los tres casos de la figura 5.20a (pantallas en forma de "cactus"), cuyos valores de pérdida por inserción se muestran en la figura 5.20b. Los comentarios de las figuras 5.19b, 5.19c y 5.20b son comunes. En cada una de ellas se observa, como se esperaba, que todos los añadidos mejoran la eficacia con respecto a la pantalla simple. Entre los tres, el Caso 2 (que se ha elegido como el inverso al caso 1 con el mismo peso) es siempre el de menor eficacia, lo que indica que el ramal vertical de los Casos 1 es más capaz de disminuir difracción que el pequeño ramal de los Casos 2. También se observa que las soluciones correspondientes a los Casos 3 son las que consiguen mayores valores de pérdida, lo cual es lógico puesto que son las que más obstáculos presentan a la difracción. Esto se ve más claro en el rango de frecuencias pequeñas, que son las que más fácilmente se difractan.

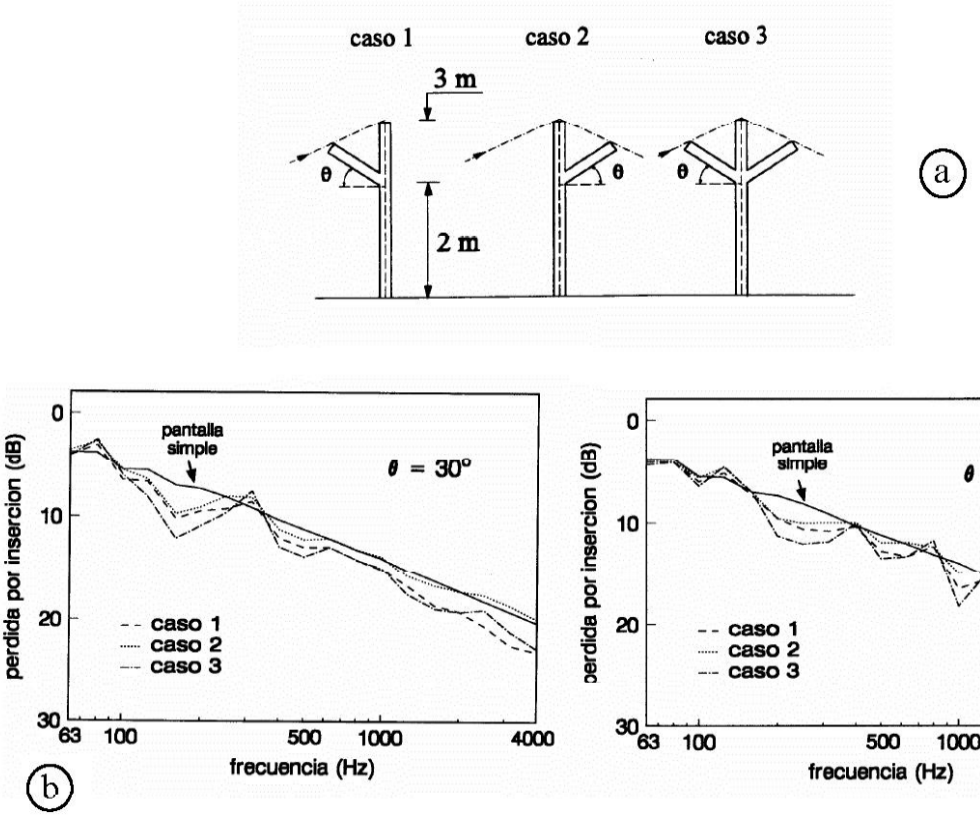



Figura 5.19a,b y c. Geometría sección transversal y espectros de pérdida por inserción. Superficies reflejantes.

Un paso más en el intento de comprender el efecto de las ramificaciones según la forma de éstas es el estudio de las configuraciones de las figuras 5.21a y 5.22a. Nótese que los Casos 2 ya se han ensayado. Los Casos 1 surgen de la idea de alterar las respectivas configuraciones 2, de manera que se disminuya el peso sin alterar la altura efectiva. Los Casos 3 están inspirados en la idea de incrementar la eficacia de las configuraciones con

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

brazos opuestos a la fuente que hasta ahora se habían ensayado y que habían ofrecido los resultados más pobres. Los niveles esperados de pérdida por inserción para todos ellos se recogen respectivamente en las figuras 5.21b, 5.21c y 5.22b. Se aprecia que las soluciones correspondientes a los Casos 3 son las que predicen mayores niveles de eficacia, si bien el efecto es menos acusado cuando el ramal está inclinado 60º. Más curioso resulta el hecho de que no queda claro que el Caso 2 sea más eficiciente que el Caso 1 (cosa que sólo parece ocurrir para $\theta$=30º). Para ramales con $\theta$=60º, y especialmente para las barreras "cactus", las configuración 1 (más económica) consigue mayores pérdidas por inserción en diversos rangos de frecuencias. Así, nótese por ejemplo como en la mayor parte del rango a partir de 500 Hz, el Caso 1 de la solución acodada predice del orden de 2 dB menos que la geometría tipo 2 (más cara). Este efecto inesperado seguramente está relacionado con fenómenos de reflexiones en la zona entre los ramales, que se intuyen son más importantes en el caso de las geometrías tipo 2.

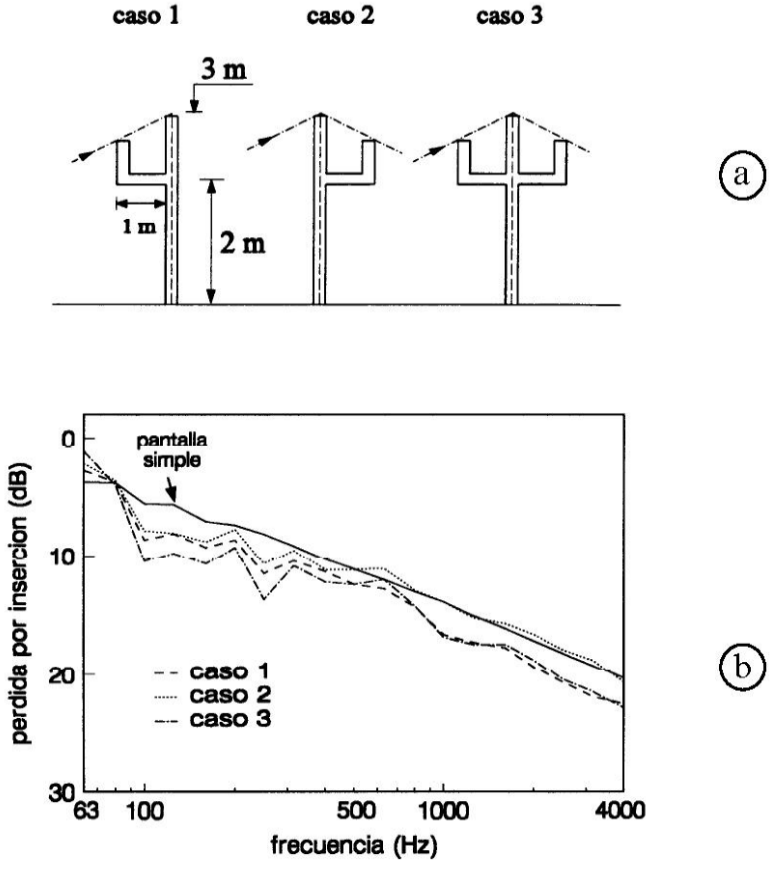



Figura 5.20a y b. Geometrías de la sección transversal y espectros de pérdida por inserción. Superficies reflejantes.

La conclusión más importante quizás sea que la búsqueda de soluciones óptimas para la geometría de la pantalla requiere un estudio pormenorizado mucho más extenso de los efectos locales en las diversas ramas del perfil. Ello por sí sólo supone un amplio campo de trabajo futuro, que necesitará del empleo de estrategias de optimización, y la definición correcta de los criterios de búsqueda.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

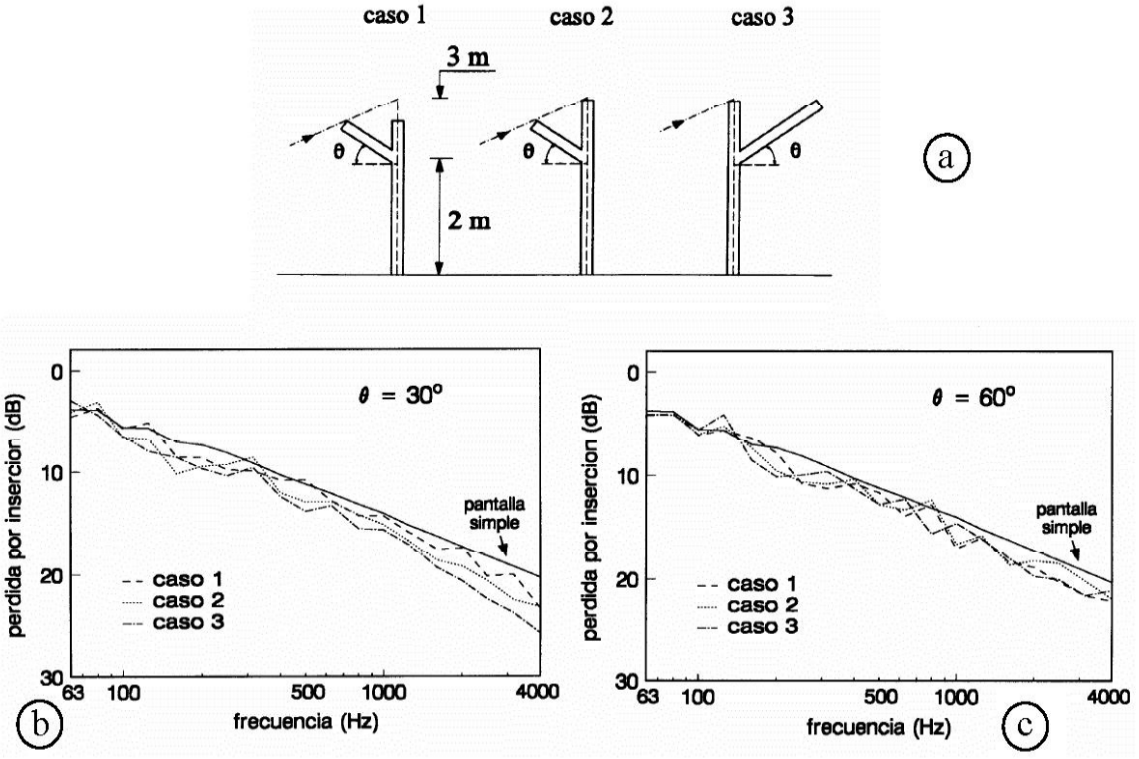



Figura 5.21a,b y c. Geometrías de la sección transversal y espectros de pérdida por inserción. Superficies reflejantes

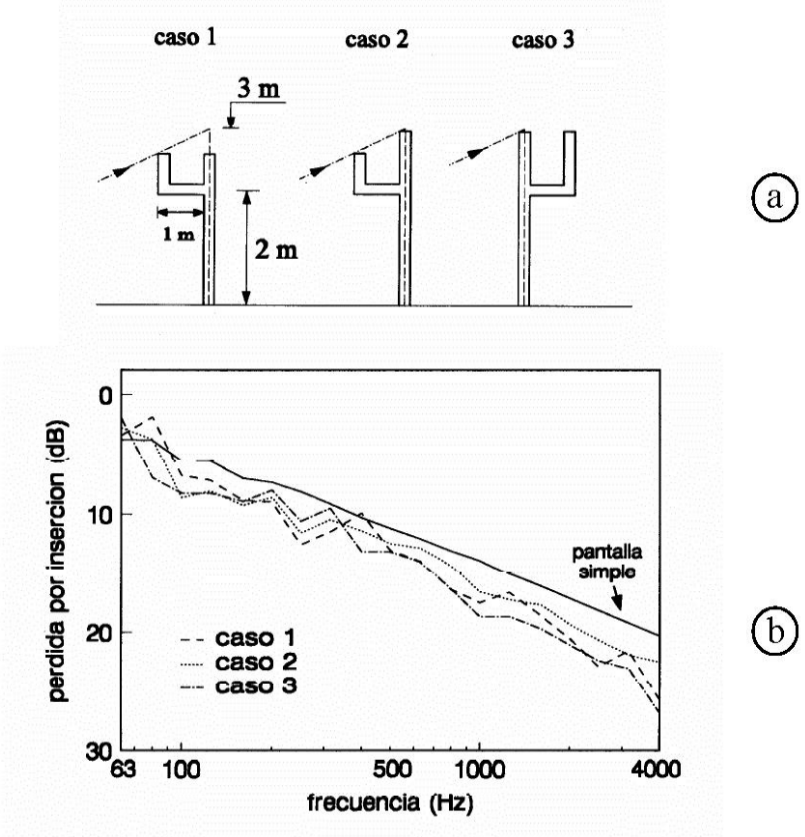



Figura 5.22a y b. Geometrías de la sección transversal y espectros de pérdida por inserción. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.3.3- INFLUENCIA DEL TRATAMIENTO ABSORBENTE DE LA BARRERA

El objetivo de este apartado es evaluar la influencia que pueda tener la capacidad absorbente de la superficie de la pantalla en su eficacia, con respecto al caso de pantallas completamente reflejantes. Para aislar este efecto, en los ejemplos que se presentan a continuación el suelo se considera acústicamente rígido (admitancia nula), todas las pantallas tienen una altura efectiva de 3 m y la posición de la fuente y el receptor respecto a la barrera sigue siendo la misma que en los apartados anteriores.

### 5.3.3.1- PANTALLA SIMPLE VERTICAL.

Se trata de comparar la pérdida por inserción de la barrera simple vertical de 3 m cuando su superficie enfrentada con la fuente y su extremo superior tienen algún recubrimiento absorbente, con el caso de la misma barrera cuando es completamente reflejante. La situación corresponde a las barreras de la figura 5.23a, donde la línea de puntos indica una capacidad de absorción definidas por $\sigma = 20.000\ Nsm^{-4}$ (esto podría corresponder a una fibra de vidrio de $35\ Kg/m^3$ de densidad) y un espesor de 10 cm. La comparación aparece en la figura 5.23b, donde se aprecia que el tratamiento absorbente no aporta una pérdida significativa respecto del caso reflejante. La mejora a frecuencias más altas se explica porque el coeficiente estadístico de absorción es más elevado precisamente en ese rango de frecuencias. Se confirma, así pues, que el funcionamiento de este tipo de pantallas obedece fundamentalmente a la reflexión de las ondas incidentes.

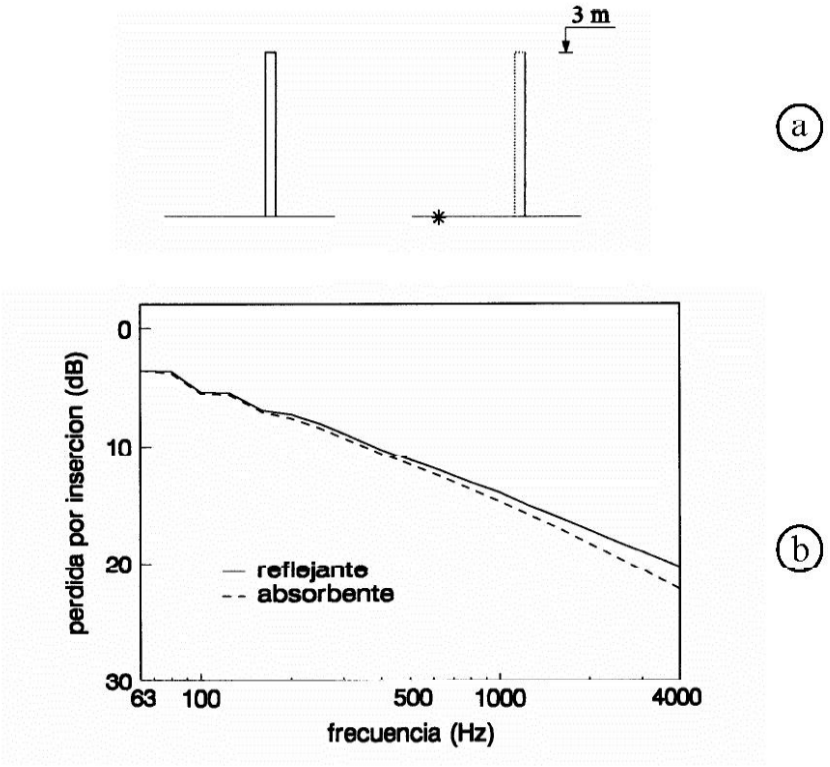



Figura 5.23a y b. Espectro de pérdida por inserción. Pantalla vertical. Influencia del tratamiento absorbente de sus superficies (····· $\sigma = 20.000\ Nsm^{-4}$, e = 0.1m).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.3.3.2- SECCIÓN TRANSVERSAL EN CUÑA.

La figura 5.24a muestra las configuraciones elegidas en este caso. Se trata del montículo en forma de cuña ya estudiado, con una altura de 3 m y taludes con pendientes de 30°. Este tipo de barreras tiene en la práctica a menudo superficies acústicamente rígidas, pero en otras ocasiones se trata de desmontes de tierra más o menos "blandas" con una capacidad absorbente no despreciable. Se han estudiado las configuraciones representadas de la figura 5.24a, donde el trazo discontinuo representa una superficie parcialmente absorbente y el trazo continuo las superficies reflejantes. Los resultados de pérdida por inserción de los cuatro casos se muestran en la figura 5.24b. Se aprecia que el caso 2 es el más eficiente, con una mejora con respecto a la barrera reflejante del orden de 5 dB para las frecuencias más altas. La absorción en el talud enfrentado a la fuente es en este caso más interesante que la absorción en el talud hacia atrás (que absorbe fundamentalmente la parte difractada), como se recoge en la comparación entre los casos 3 y 4. En todos los casos la mejora con respecto al caso 1 se incrementa al aumentar la frecuencia, lo que se debe a la mayor capacidad absorbente con las frecuencias altas.

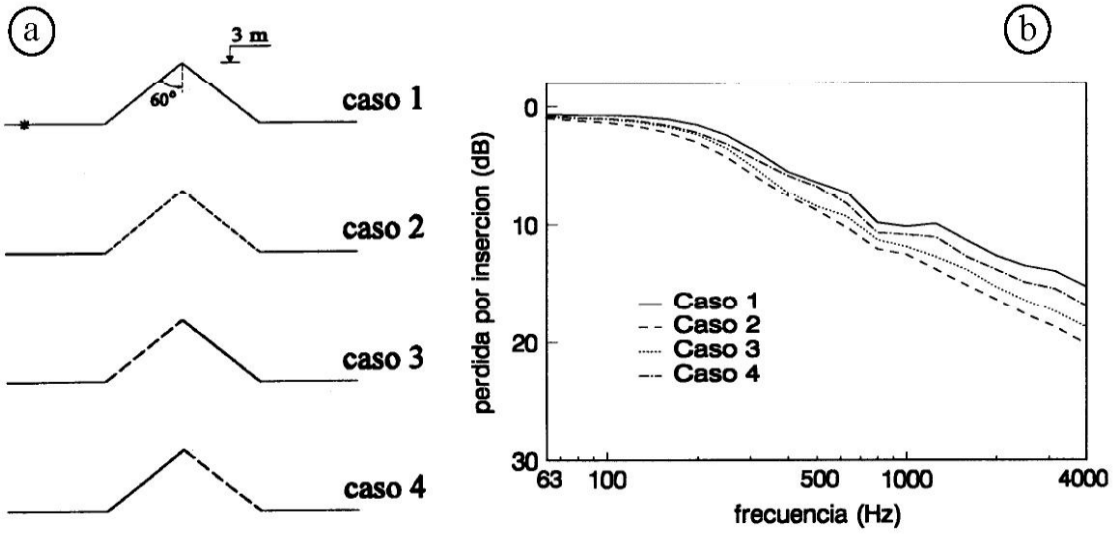



Figura 5.24a y b. Espectro de pérdida por inserción. Sección en cuña. Influencia del tratamiento absorbente (------- $\sigma = 300.000\ Nsm^{-4}$).

Si se comparan estos resultados con los del apartado anterior (figura 5.23b) se aprecia que en los taludes ($\theta$=60°) el hecho de que las superficies sean absorbentes tiene más repercusión que en la pantalla vertical (siempre con respecto a la misma barrera completamente reflejante). Aunque no se presentan en este documento, se ha comprobado que la influencia de la absorción es progresivamente menor a medida que la pendiente de los taludes crece. El caso límite es una pendiente vertical ($\theta$=0°), que corresponde a la pantalla vertical. Se deduce que en los obstáculos con un mecanismo de apantallamiento fundamentalmente reflejante ($\theta$ pequeño) el uso de recubrimientos absorbentes no introduce mejoras significativas con respecto al uso de superficies reflejantes (generalmente más baratas y de más fácil mantenimiento). Parece que esta

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

conclusión está generalmente aceptada, estando actualmente en desuso el recubrimiento absorbente en pantallas tipo muro.

### 5.3.3.3- SECCIÓN TRANSVERSAL EN DIQUE

El experimento se ha repetido para la barrera en forma de dique, con taludes de 30° de pendiente. De nuevo se han obtenido resultados para diferentes combinaciones posibles en cuanto a qué superficies son absorbentes o no. Los diferentes casos se muestran en la figura 5.25a, y los resultados en la figura 5.25b. Las conclusiones son parecidas a las del apartado anterior. Cuanto mayor sea la superficie absorbente mayor es la eficacia, como es lógico. Se aprecia sin embargo que no hay diferencia significativa de eficacia entre los casos 2 y 3. También es interesante notar que las eficacias de los casos 4 y 5 son muy semejantes. La explicación es que en ellos la influencia de la absorción se está manifestando sobre la onda difractada, por lo que la absorción en la meseta es lo dominante.

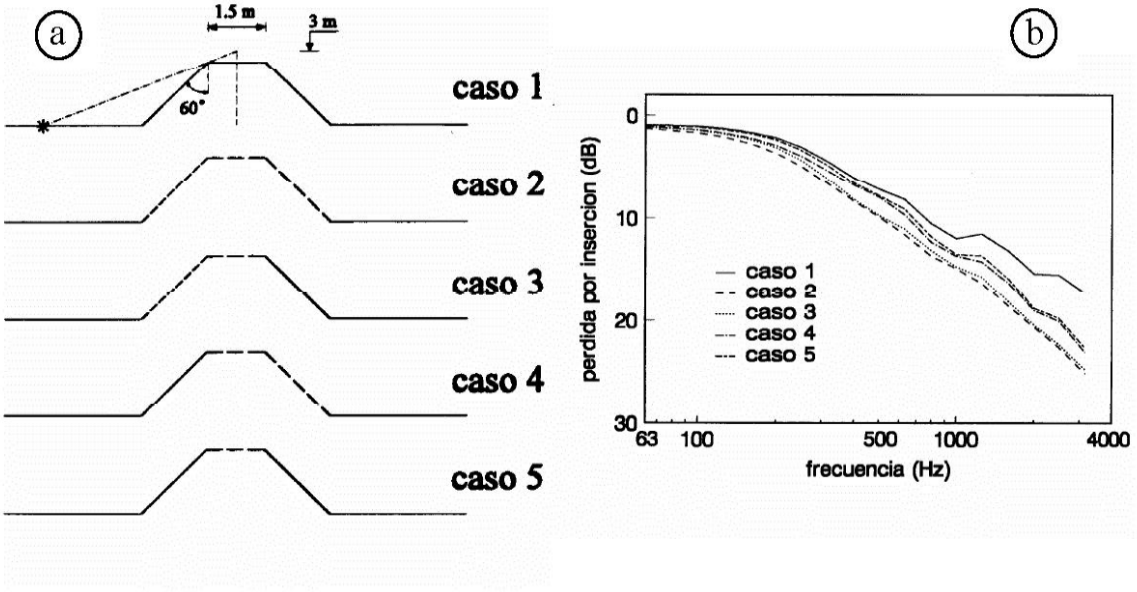



Figura 5.25a y b. Espectro de pérdida por inserción. Sección en cuña. Influencia del tratamiento absorbente (------- $\sigma$ = 300.000 $Nsm^{-4}$).

### 5.3.3.4- SECCIÓN TRANSVERSAL EN **Y** ó **T**

El mismo tipo de pruebas se ha realizado para pantallas tipo **Y** o **T**. En primer lugar comparamos la eficacia de las distintas combinaciones recogidas en la figura 5.26a. Los resultados para $\theta$=30°se recogen en la figura 5.26b. Apenas hay diferencias entre los casos 1 y 2, lo que vuelve a confirmar que la absorción de las superficies fundamentalmente reflejantes es poco importante. Es más adecuado incorporar tratamientos absorbentes en aquellas superficies de la barrera que obstaculizan la onda difractada. Así, se aprecia que la solución del caso 3 es mejor que la 2, y que la del caso 4 es aun mejor.

Para el caso de "brazos" con $\theta$=60° los resultados se presentan en la figura 5.26c. Ahora las diferencias son casi despreciables, lo que se explica porque la gran pendiente de los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

ramales hace que las superficies absorbentes de los casos 3 y 4 apenas puedan interceptar onda difractada (hay un gran efecto *sombra* entre los ramales).

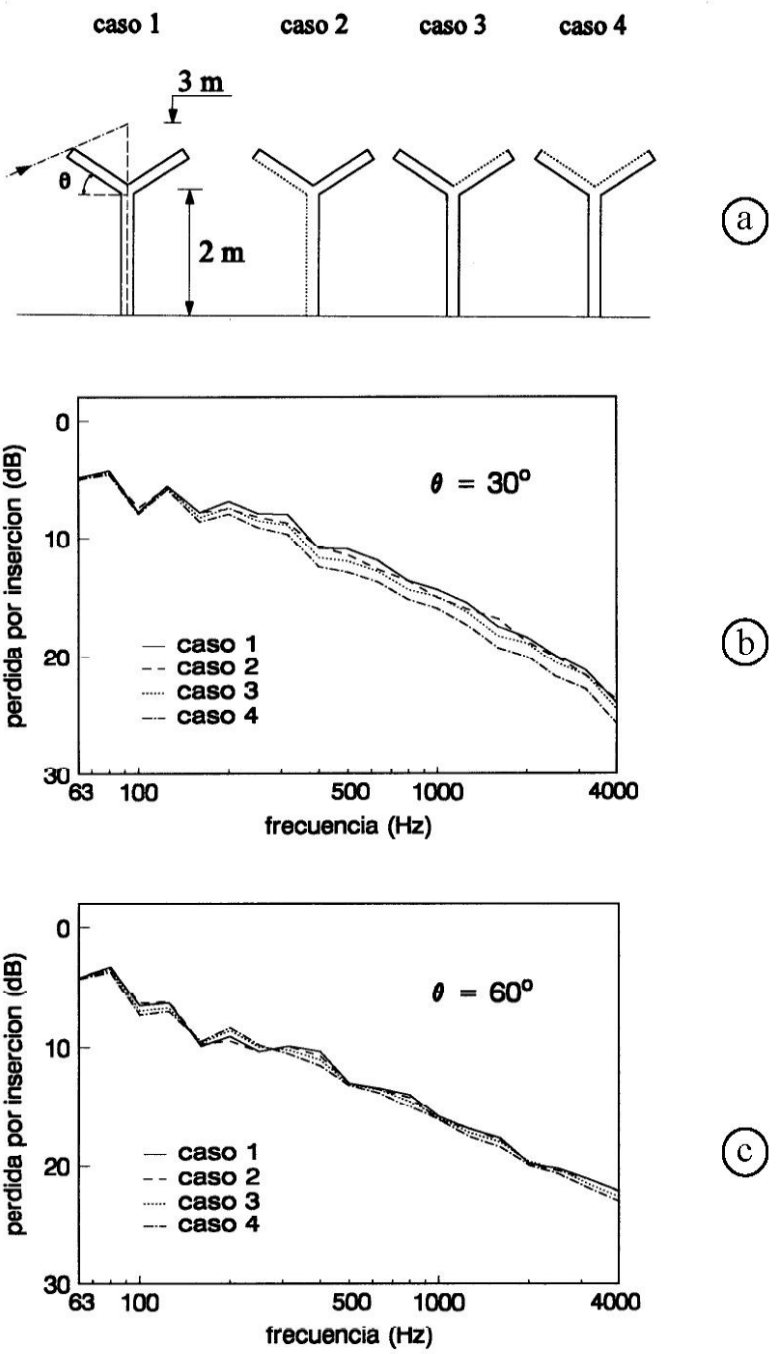



Figura 5.26a,b y c. Espectro de pérdida por inserción. Pantalla en **Y**. Influencia del tratamiento absorbente (····· $\sigma = 20.000\ Nsm^{-4}$, e = 0.1m).

Las conclusiones para las barreras en **T** son del mismo tipo, si bien mucho más acusadas. En la figura 5.27a se presentan las configuraciones probadas, y en la 5.27b los resultados. Se confirma que no hay diferencias entre los casos 1 y 2. Sin embargo cuando el tratamiento absorbente se aplica a la parte superior de la **T** (caso 3), se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

produce un espectacular aumento de eficacia. Estos resultados están en consonancia con los presentados por otros autores (Hothersall et al, 1991a y 1991b), y se deben al efecto ya mencionado de absorción de la onda que difracta por encima de la barrera. La mejora es particularmente acusada a altas frecuencias. Así por ejemplo, para el caso estudiado, la pérdida por inserción para frecuencias en el entorno de 2000 Hz es superior a 30 dB.

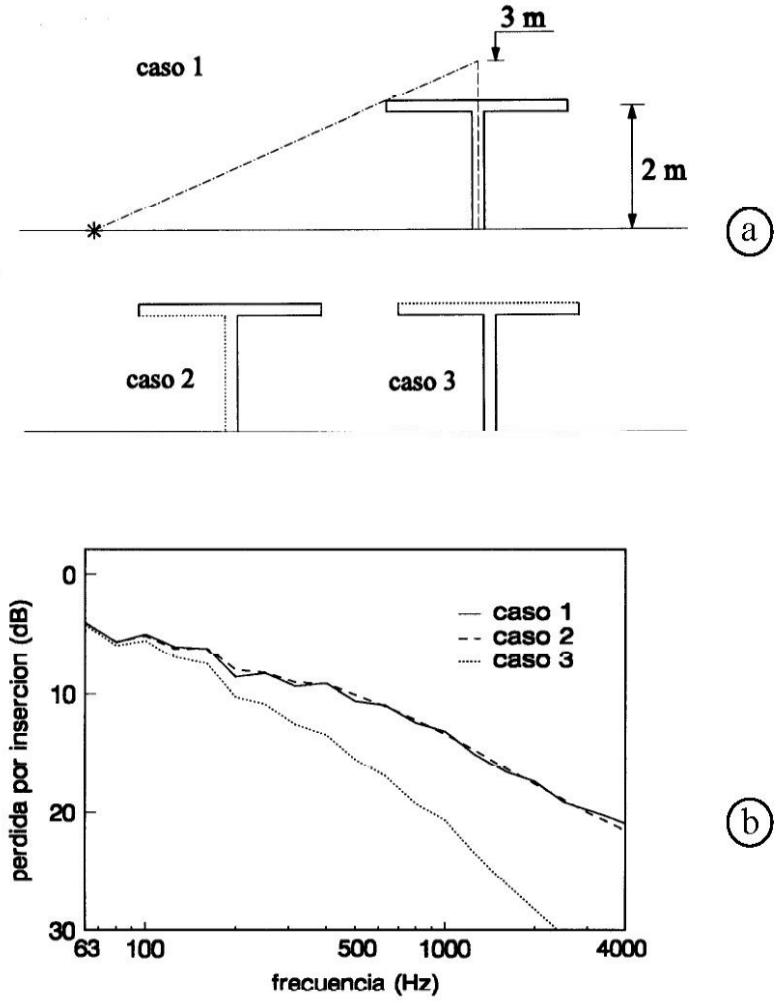
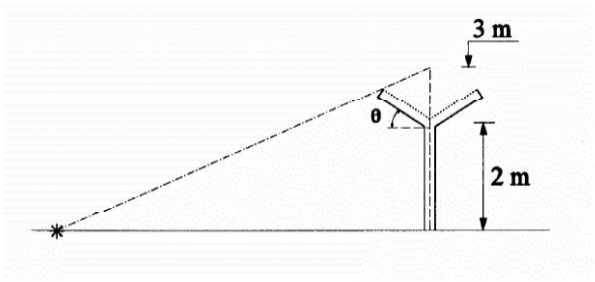


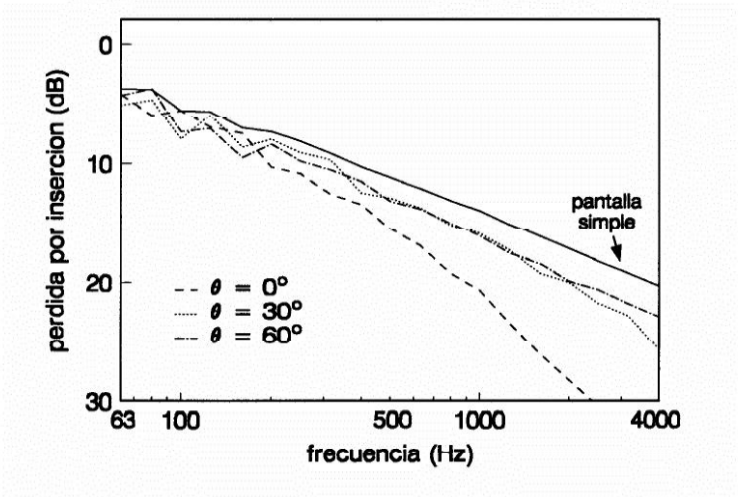

Figura 5.27a y b. Espectros de pérdida por inserción. Pantallas en **T**. Influencia del tratamiento absorbente (····· $\sigma$ = 20.000 Nsm $^{-4}$, e = 0.1m).

A la luz de estos resultados, se comparan a continuación los casos de la figura 5.28a. En la figura 5.28b se contrastan los valores de pérdida por inserción en cada caso, y se comparan con los correspondientes a la pantalla simple de igual altura efectiva. La solución con $\theta$=0° ofrece mucho mejor eficacia que las demás. Sin embargo las diferencias son casi despreciables entre las soluciones $\theta$=30° y $\theta$=60°. La explicación quizás se debe a que la geometría con $\theta$=30° es más capaz de absorber onda difractada, pero la de $\theta$=60° es más capaz de reflejar onda incidente. De este modo los efectos se compensan y ambas resultan de una efectividad semejante.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005




(a)




(b)

Figura 5.28a y b. Espectros de pérdida por inserción. Pantallas en **Y**. Tratamiento absorbente en la superficie superior (····· $\sigma = 20.000$ Nsm$^{-4}$, c = 0.1m).

## 5.3.4- Influencia de la capacidad absorbente del terreno

En los modelos estudiados en apartados anteriores se ha considerado que el terreno circundante a la pantalla es acústicamente rígido (completamente reflejante). En este apartado nos plantearemos en que medida se ve afectada la pérdida por inserción de la pantalla cuando el semiespacio tiene cierta capacidad absorbente.

La primera cuestión que debemos plantearnos es de forma afecta la colocación de una pantalla entre fuente y receptor al nivel de absorción de energía acústica por parte del terreno circundante. Para ello, estudiemos en primer lugar el efecto de absorción del terreno en presencia de tres tipologías de pantalla con alturas efectivas de 3 y 5 metros respectivamente. Las geometrías propuestas son la pantalla simple vertical, la barrera en forma de cuña ($\theta=60^{o}$) (fig.5.11) y otra en forma de dique ($\theta=60^{o}$) (fig.5.29), todas ellas con sus superficies completamente reflejantes. Esta última morfología es muy similar a la ya analizada anteriormente (fig.5.12) si bien la plataforma superior tiene dimensiones más reducidas. Definamos ahora un coeficiente que permita cuantificar este efecto. Lo denominaremos *coeficiente de pérdida por absorción del terreno* (*AL*) que matemáticamente puede expresarse como sigue:

$$AL = -20 \log \left| \frac{p_{SA}}{p_{SR}} \right| \qquad (5.2)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

donde $p_{SA}$ representa la presión acústica en el receptor en presencia de un semiespacio absorbente y $p_{SR}$ la presión acústica, para el mismo problema, pero en presencia de un semiespacio completamente reflejante.

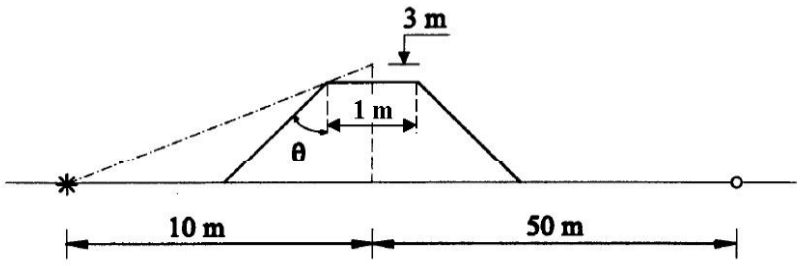



Figura 5.29. Pantalla en forma de dique. Tercer perfil propuesto para estudio de AL.

Los resultados de *AL* para las tres pantallas propuestas se presentan en la figura 5.30. Para el problema con semiespacio absorbente se considera una resistividad al flujo de aire $\sigma$ = 300.000 $Nsm^{-4}$ (Delany y Bazley, 1970) que se corresponde con un terreno provisto de cubierta vegetal y bien aireado. Fuente y receptor se localizan a ambos lados de la barrera como hasta ahora. En esta figura se incluye también el espectro de *AL* para la situación en que no exista obstáculo (pantalla) entre fuente y receptor (en fig 5.30: "semiespacio") y que se un parámetro que tiene expresión analítica (diferencia en dB entre las soluciones fundamentales sobre semiespacio absorbente y reflejante).

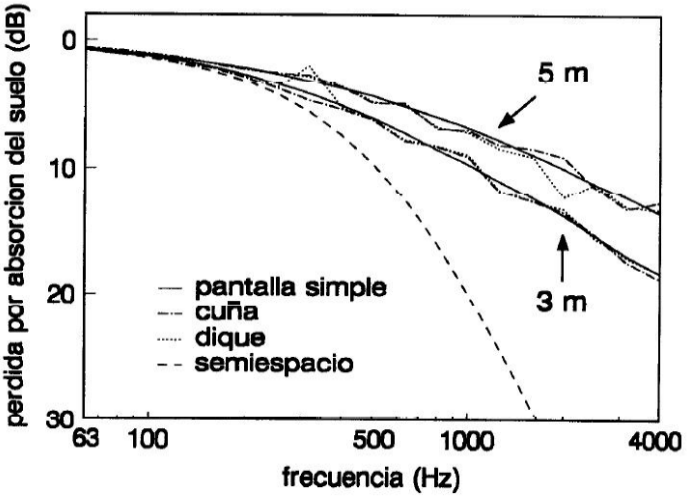



Figura 5.30. Espectros de pérdida por absorción del terreno.

De la figura 5.30 se concluye que el nivel de absorción del terreno no es independiente de la presencia o no de una pantalla y se observa cómo los resultados se agrupan según sea la altura efectiva del obstáculo independientemente de su morfología. Deducimos, por tanto, que el *AL* depende fundamentalmente de la altura efectiva de la pantalla y de las características absorbentes del terreno. Experimentos semejantes se han realizado con barreras provistas de tratamiento absorbente en sus superficies. El comportamiento del *AL* es idéntico en estos casos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La conclusión anterior permite proponer un procedimiento muy simple para la obtención del coeficiente de pérdida por inserción ($IL$) de una pantalla de tipología cualquiera sobre terreno con capacidad absorbente ($IL_{SA}$) sin más que conocer el $IL$ de la misma sobre terreno completamente reflejante ($IL_{SR}$), el $AL$ para el mismo terreno sin barrera (semiespacio) ($AL_S$) y el mismo coeficiente ($AL$) para una barrera de igual altura efectiva que la que analizamos. Para este último coeficiente puede adoptarse el correspondiente a una pantalla simple vertical. Matemáticamente esta superposición puede escribirse como sigue:

$$IL_{SA} = IL_{SR} - AL_S + AL_{P.simple} \tag{5.3}$$

Las operaciones matemáticas que permiten llegar a (5.3) pueden ser obtenidas por el lector de forma sencilla a partir de lo que ya conoce.

La figura 5.31 ratifica la validez de la aproximación propuesta para la barrera en forma de dique de la figura 5.29. En la misma puede apreciarse el buen acuerdo existente entre los resultados de $IL$ obtenidos con el MEC para la pantalla en forma de dique sobre terreno absorbente y los obtenidos con la aproximación (5.3).

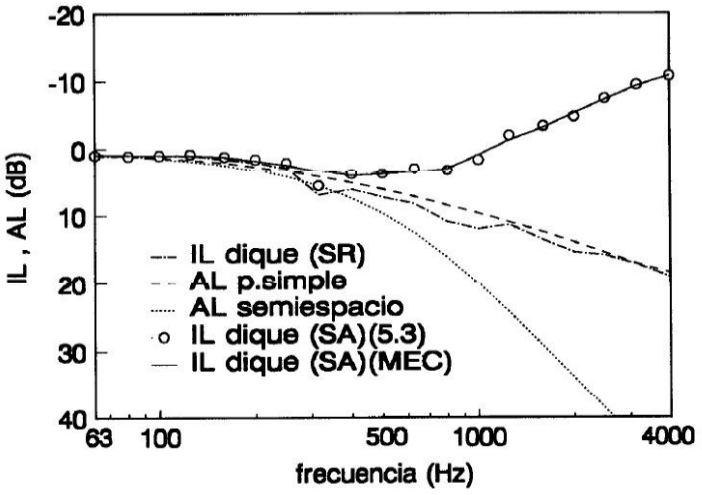



Figura 5.31. Espectro de pérdida por inserción. Sección transversal en dique sobre semiespacio absorbente. Validación del procedimiento aproximado.

Es interesante observar cómo en este caso la inclusión de la pantalla apenas supone reducción de la potencia acústica en el receptor para frecuencias inferiores a 500 Hz. Es más, para frecuencias superiores a este valor, el módulo de la presión acústica es mayor en presencia de la pantalla. Así, para 4000 Hz el receptor percibe 10 dB más en presencia de la pantalla en relación con la situación de propagación libre sin obstáculos. Esta aparente paradoja (teniendo en cuenta las conclusiones de apartados anteriores) puede explicarse si se considera que en la zona de sombra que introduce la pantalla la extracción de energía del modelo es menor. Esta situación se compensa con la energía reflejada por la pantalla para frecuencias bajas y medias con lo que el $IL$ se mantiene en el entorno de cero. Cuando la frecuencia aumenta, disminuye la difracción entorno al

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

obstáculo, aumenta la zona de sombra tras la barrera y se acentúa este efecto superando el efecto reductor provocado por la reflexión del obstáculo.

Las conclusiones expresadas en este apartado justifican el estudio de la eficacia de pantallas sobre terreno reflejante tal y como hemos realizado a lo largo de este capítulo. La obtención de este parámetro para pantallas sobre terreno absorbente es sencilla a partir de (5.3) si se conoce el correspondiente sobre terreno reflejante. Hay que pensar que el análisis de pantallas sobre terreno reflejante puede realizarse con facilidad a partir de un código estándar de elementos de contorno con ligeras modificaciones de la solución fundamental.

Por último, animamos al lector a obtener espectros de pérdida por inserción sobre semiespacio absorbente para alguna de las pantallas tratadas en los apartados anteriores. Dispone, para ello, de los espectros de *IL* sobre semiespacio reflejante. Los coeficientes adicionales necesarios para la aplicación de (5.3) se presentan en la tabla 5.1 para frecuencias centrales de tercio de octava (terreno vegetal, fuente y receptor a 10 m. y 50 m. respectivamente a ambos lados de la barrera). Con el programa suministrado, de forma muy sencilla, puede comprobar la exactitud de la aproximación propuesta. Estudie comparativamente la respuesta de diferentes tipologías.

| Frecuencia (Hz) | $AL_{P.simple}$ (3 m) (dB) | $AL_{P.simple}$ (5 m) (dB) | $AL_S$ (dB) |
|---|---|---|---|
| 63 | 0.742 | 0.654 | 0.771 |
| 80 | 1.050 | 0.894 | 1.035 |
| 100 | 1.247 | 1.110 | 1.361 |
| 125 | 1.592 | 1.425 | 1.790 |
| 160 | 2.074 | 1.797 | 2.425 |
| 200 | 2.687 | 2.120 | 3.188 |
| 250 | 3.369 | 2.598 | 4.187 |
| 315 | 4.172 | 3.153 | 5.543 |
| 400 | 5.099 | 3.741 | 7.381 |
| 500 | 6.082 | 4.380 | 9.589 |
| 630 | 7.196 | 5.140 | 12.456 |
| 800 | 8.479 | 6.010 | 16.072 |
| 1000 | 9.648 | 6.783 | 19.993 |
| 1250 | 10.962 | 7.761 | 24.316 |
| 1600 | 12.382 | 8.887 | 29.307 |
| 2000 | 13.813 | 9.953 | 33.906 |
| 2500 | 15.383 | 11.168 | 38.672 |
| 3150 | 16.968 | 12.286 | 43.496 |
| 4000 | 18.322 | 13.597 | 47.948 |

Tabla 5.1. Coeficientes de pérdida por absorción del terreno.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

## 5.4- PÉRDIDA POR INSERCIÓN ESPECTRAL

En este apartado estudiaremos el coeficiente de pérdida por inserción de algunas pantallas para un espectro representativo de ruido de tráfico (Hothersall et al, 1991a). Para obtener este coeficiente de pérdida global partimos de los espectros de *IL* para la geometría en cuestión y los combinaremos tal y como se describe en el Capítulo 2 (apartado 2.3.7)

En la figura 5.32 se representa, en forma de mapa de colores, el coeficiente de pérdida por inserción en las inmediaciones de una pantalla simple de 3 metros de altura. Las distancias en abscisas y ordenadas están en metros. Las superficies de la pantalla y el contorno del semiespacio son acústicamente rígidos. La fuente se sitúa, como hasta ahora, a 10 metros de la barrera en el origen de la gráfica. En la base de la figura aparece la escala de color en dB.

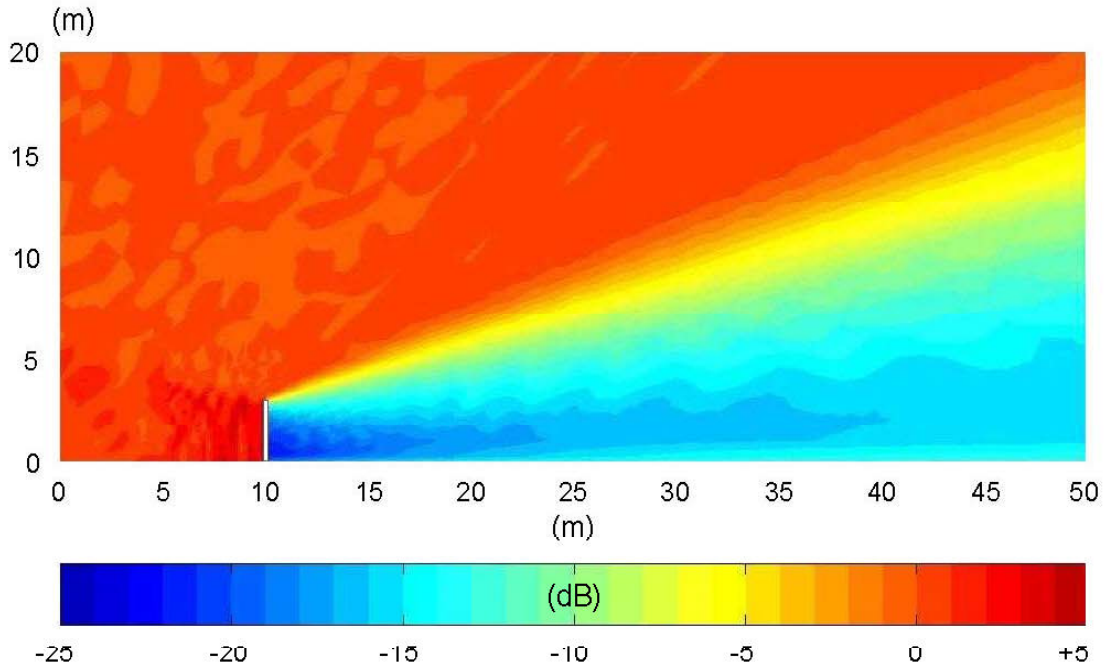



Figura 5.32. Mapa de reducción de impacto provocado por una barrera simple de 3 metros. Superficies reflejantes

En esta figura, en aras a su interpretación inmediata, niveles inferiores de potencia acústica en relación con el problema de propagación libre en el semiespacio (sin pantalla) aparecen con signo negativo. Los colores fríos representan niveles acústicos inferiores provocados por el apantallamiento del obstáculo. Se aprecia claramente la zona de sombra situada tras la barrera y el mecanismo de eficacia de este tipo de pantallas.

Los resultados para la barrera con sección en forma de cuña se presentan en la figura 5.33. Para la barrera en forma de dique según la geometría de la figura 5.29, la reducción de impacto se representa en la figura 5.34. Ambas barreras tienen una

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

inclinación de 45° y 3 metros de altura efectiva. Asimismo, en ambos problemas todas las superficies son completamente reflejantes y la fuente se sitúa en el origen de coordenadas.

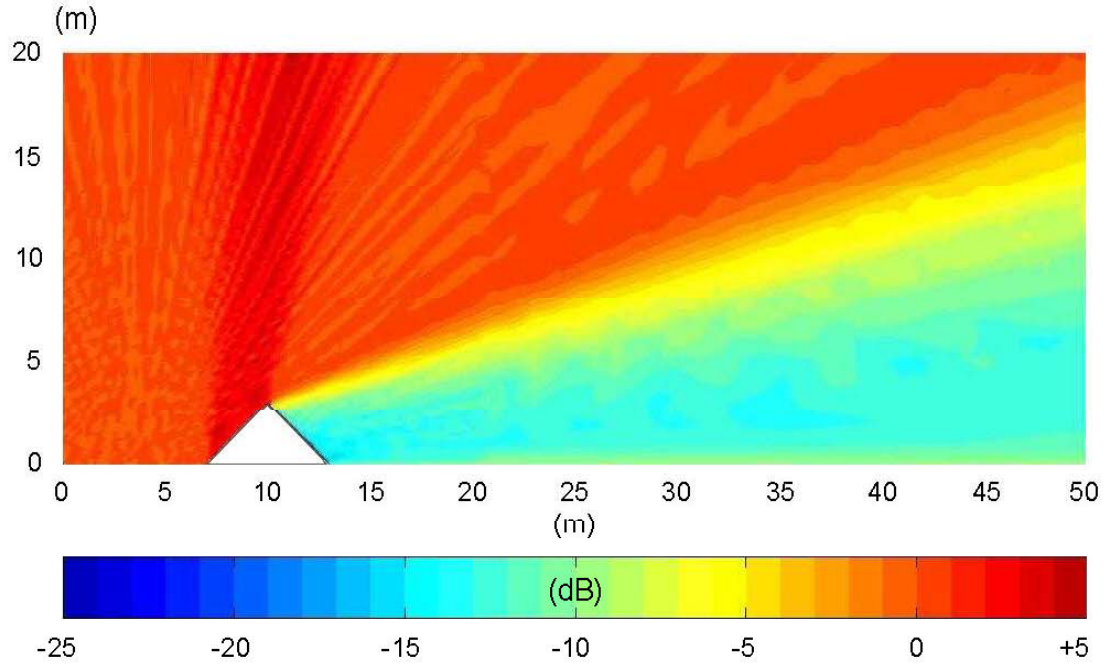



Figura 5.33. Mapa de reducción de impacto. Sección transversal en cuña (3 metros). Superficies reflejantes

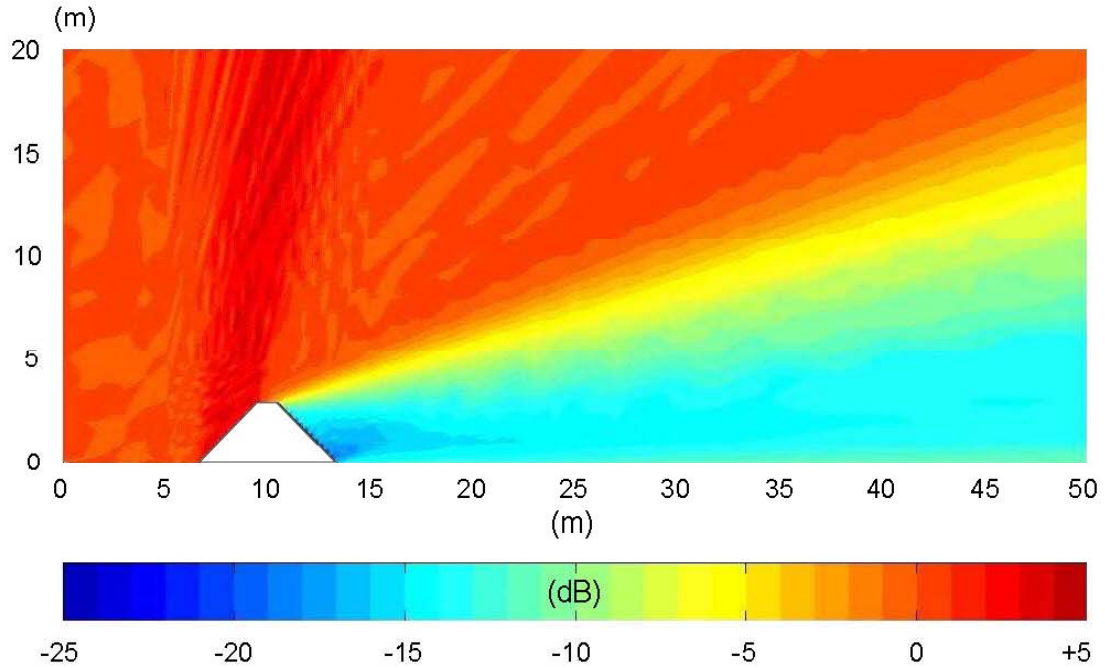



Figura 5.34. Mapa de reducción de impacto. Sección transversal en dique (3 metros). Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En ambos casos y en relación con la pantalla simple de igual altura efectiva (fig.5.32), se aprecia que el límite de la zona de sombra está algo menos definido. Como ya hemos comentado anteriormente, estas geometrías son más permisivas con la difracción de la potencia acústica. Asimismo, estas secciones favorecen la proyección vertical de la energía acústica, un efecto éste muy deseable cuando se apantallan ambos lados de la vía. Sobre este aspecto incidiremos en el próximo apartado.

Comparar ambos perfiles (cuña y dique) haciendo uso de estos mapas de color, resulta algo más complicado, si bien se observa que en las pantallas en forma de dique aparecen valores algo más acusados de reducción de impacto tras la barrera. Esto último está de acuerdo con las conclusiones extraídas de la figura 5.13b.

En las figuras 5.35 y 5.36 puede visualizarse la influencia que el tratamiento absorbente de las superficies de la barrera tiene en los resultados de pérdida para el espectro completo. Estas figuras se corresponden con las geometrías en forma de cuña y dique estudiadas en este mismo apartado. Para el análisis, consideraremos una resistividad $\sigma$=300.000 Nsm$^{-4}$. Esto representaría, como sabemos, la realización de los montículos con tierra y dotarles de cubierta vegetal.

Comparando 5.35 y 5.33 se aprecia una reducción de los valores de la presión acústica en la zona de sombra de la barrera debido a la absorción en los contornos del obstáculo. Idéntica conclusión se extrae del análisis comparativo de estas figuras para la barrera con sección transversal en forma de dique.

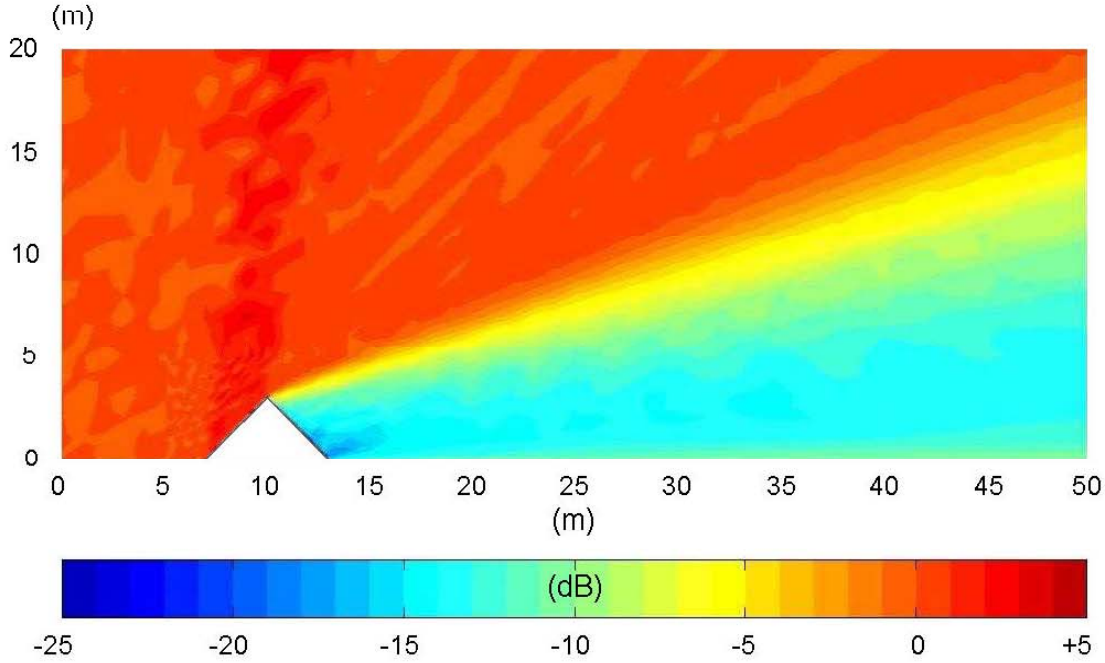



Figura 5.35. Mapa de reducción de impacto. Sección transversal en cuña (3 metros). Superficies absorbentes ($\sigma$ = 300.000 Nsm$^{-4}$).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

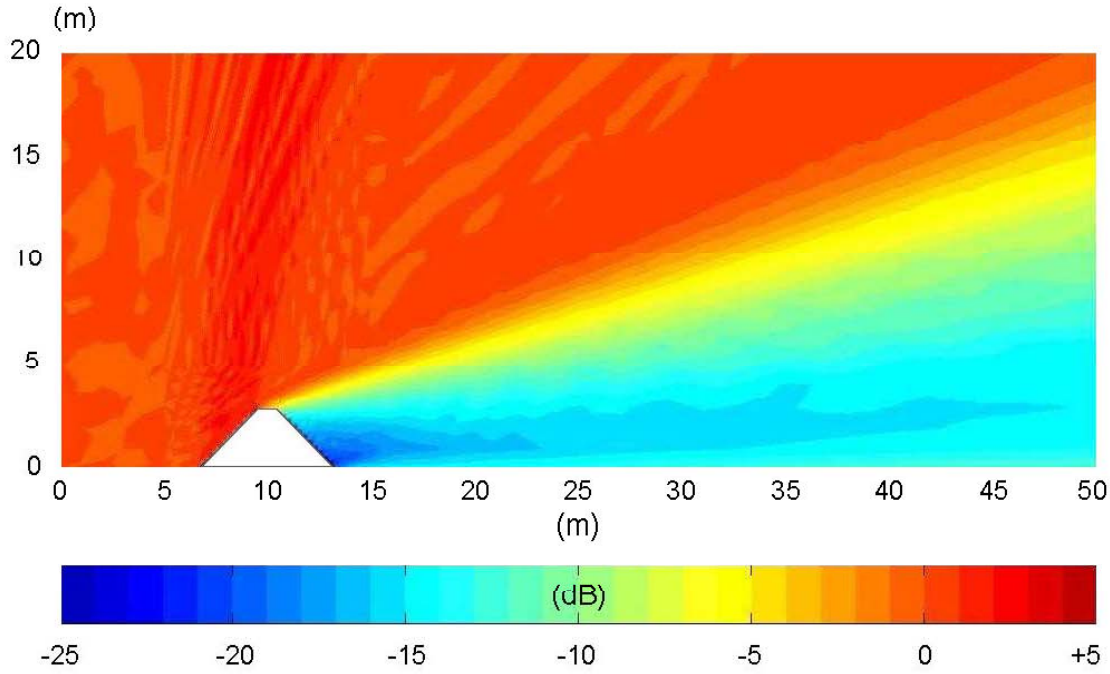



Figura 5.36. Mapa de reducción de impacto. Sección transversal en cuña (3 metros). Superficies absorbentes ($\sigma = 300.000$ Nsm$^{-4}$).

## 5.5- PANTALLAS A AMBOS LADOS DE LA FUENTE

La situación más frecuente en la práctica es la existencia de núcleos urbanos que hay que proteger a ambos lados de la vía de tráfico. En estos casos es frecuente adoptar como solución disponer pantallas en los dos lados de la carretera. Esta solución sin embargo requiere un análisis más detenido. En la figura 5.37 se presenta un esquema del problema asociado a esta disposición. Si pensamos por ejemplo en un receptor situado a la derecha de la calzada, vemos que el nivel de ruido que recibe puede alterarse debido a las reflexiones producidas por la pantalla que se encuentra al lado izquierdo de la fuente.

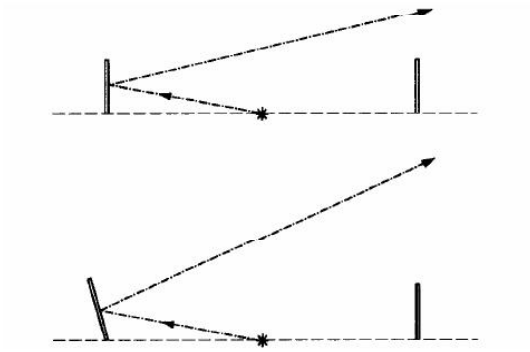


Figura 5.37. Doble apantallamiento de la fuente.

En el estudio del espectro para las monofrecuencias centrales de tercios de octava, se producen en la zona entre pantallas complicados efectos de resonancia que tienen que ver con la distancia que las separa y la altura de las mismas. Así, en este primer análisis,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

y para eliminar en parte este problema, se ha considerado un suelo con una cierta capacidad absorbente que permite que el modelo se comporte de una forma más amortiguada. El tipo de terreno utilizado se caracteriza por $\sigma$=300.000 Nsm$^{-4}$ (suelo blando con manto vegetal).

Las configuraciones estudiadas en principio se presentan en la figura 5.38a. Se trata de comparar el nivel de ruido que recibe un receptor situado a la derecha de la fuente, a 60 m de ella y a nivel del suelo, en el caso de doble apantallamiento, con respecto al nivel que se recibiría si sólo existiese la pantalla entre fuente y receptor. Es lo que en la figura 5.38b se ha denominado *pérdida por la inserción de la segunda pantalla.* Las superficies de ambas pantallas son completamente reflejantes. Para los casos 1 y 3 el código MEC tiene impuestas las condiciones de simetría tal y como se describe en el Capítulo 3, con lo que sólo es necesario discretizar una mitad del modelo.

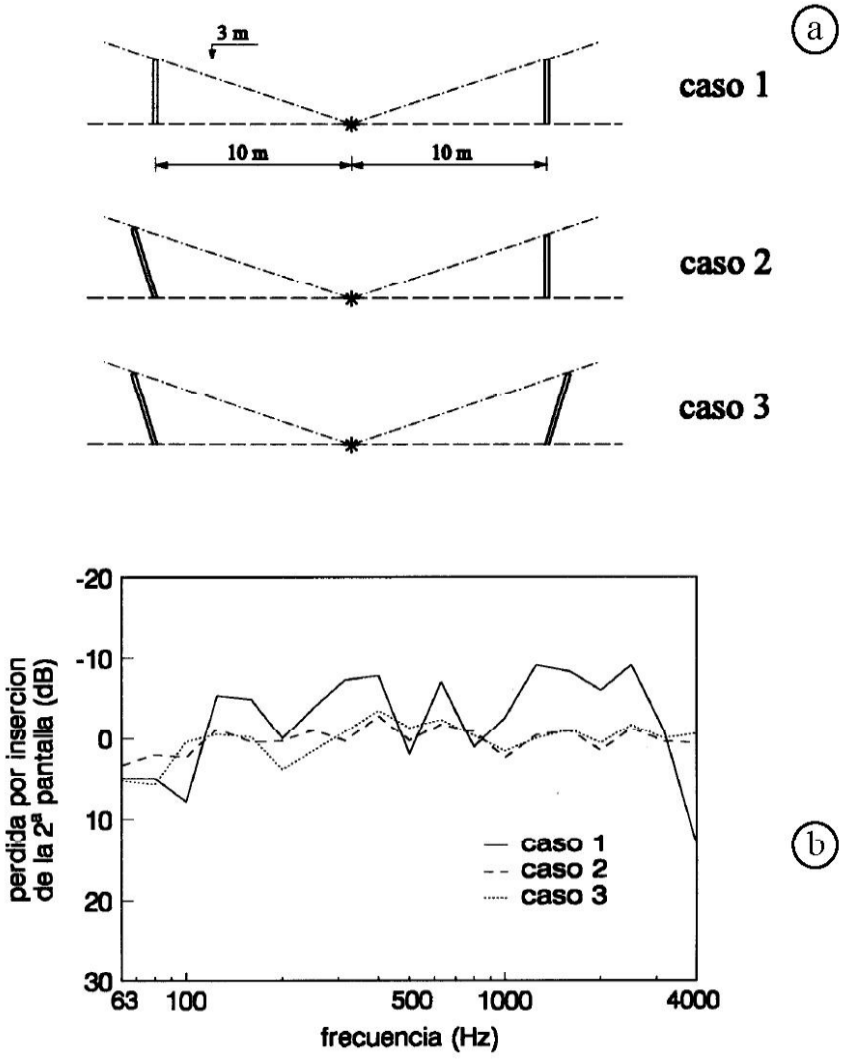



Figura 5.38a y b. Doble apantallamiento. Espectros de pérdida por inserción de la segunda pantalla. Suelo absorbente (------- $\sigma$ = 300.000 Nsm$^{-4}$)

En la curva correspondiente al caso 1 se observa claramente los efectos de interferencia que antes comentábamos. Se aprecia claramente que en este caso aumenta por término

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

medio el nivel de ruido en el receptor, (la inclusión de la segunda barrera ha empeorado la situación en esta zona). En las curvas de los casos 2 y 3 se observan menores efectos de interferencia, lo que es lógico porque la disposición de las barreras permite ahora que escape más energía entre ellas. No existen diferencias muy significativas entre los resultados de los casos 2 y 3 con los que habría si no existiese la segunda barrera. La solución de inclinar la barrera izquierda es por tanto una buena estrategia para disminuir el ruido a la derecha de la calzada, lo que se debe sin duda a que la barrera inclinada refleja las ondas más lejos de nuestra zona de interés. Una segunda conclusión es que, evidentemente, si se quiere proteger núcleos de población a ambos lados de la carretera, es preferible adoptar soluciones con dos barreras inclinadas, como las correspondientes al caso 3.

En la figura 5.39 presentamos el mapa de reducción de impacto para el caso de doble apantallamiento vertical. El espectro de ruido es el utilizado en el apartado anterior. Los contornos de las barreras y el semiespacio son completamente reflejantes en este problema. La fuente se sitúa en el origen de coordenadas y al tratarse de un problema con simetría, sólo representaremos la mitad situada a la derecha del emisor. Comparando estos resultados con los correspondientes al apantallamiento a un lado de la fuente (fig.5.32) se observa una reducción en la altura de la zona de sombra tras la barrera lo cual representa un claro perjuicio para los receptores situados en altura. Asimismo, a distancias medias, es evidente el aumento de los niveles de impacto tras el obstáculo provocadas por el doble apantallamiento. Se aprecia, por otra parte, un encajonamiento de la energía acústica entre las barreras, con zonas que superan los 5 dB en relación con la situación sin apantallamiento. Un efecto similar, aunque más acusado, se presenta en las calles de nuestras ciudades debido a la presencia de edificios a ambos lados de la calzada. Este efecto de "cañón acústico" puede reducirse con tratamientos absorbentes en las fachadas o realizando un diseño escalonado de los edificios en altura.

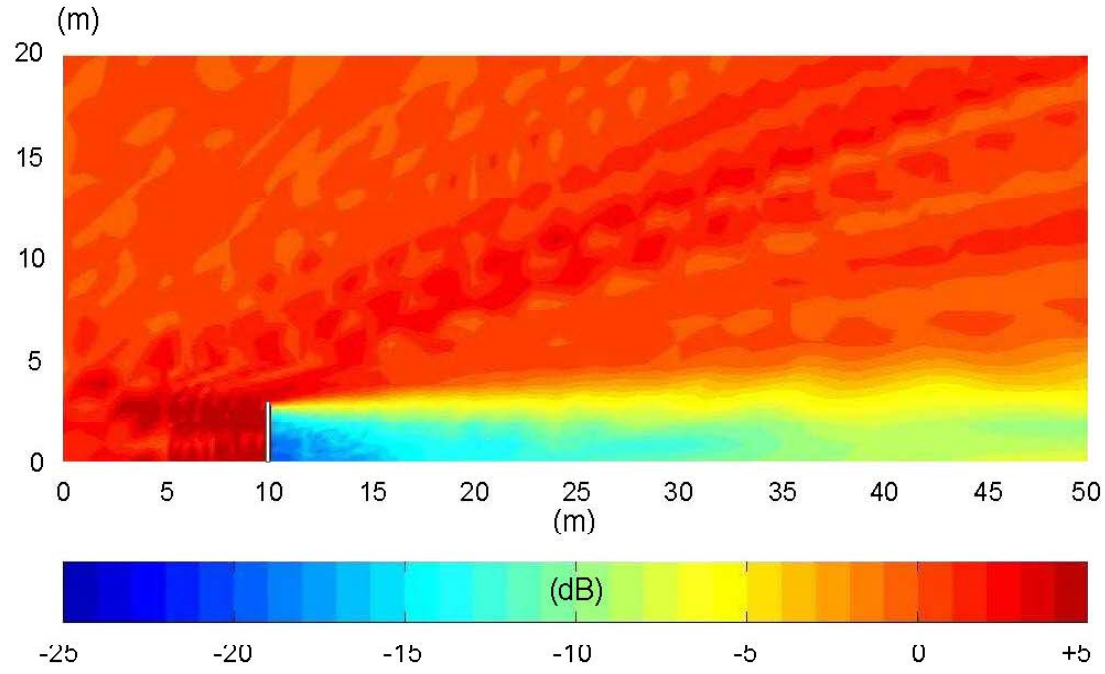



Figura 5.39 Mapa de reducción de impacto para doble apantallamiento vertical. Superficies reflejantes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

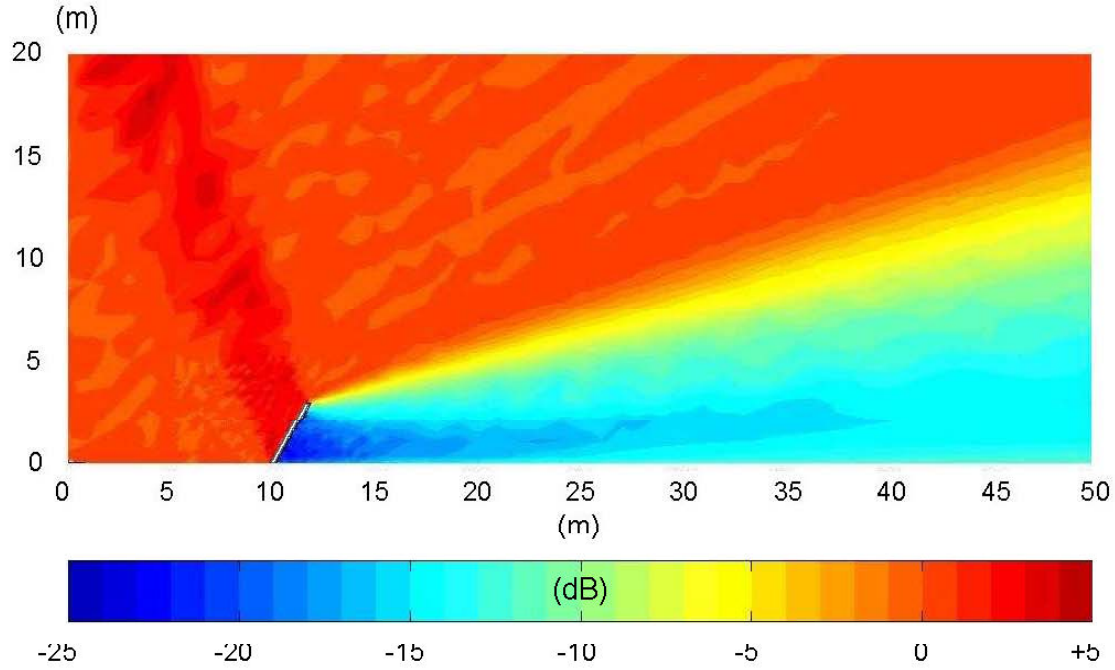



Figura 5.40. Mapa de reducción de impacto con doble apantallamiento inclinado (60°). Superficies reflejantes.

Comparando las figuras 5.39 y 5.40 se observa claramente la mejora que supone el dotar a las pantallas de cierto grado de inclinación (hacia el receptor) cuando se intentan proteger ambos lados de la vía. Esto ya se presentó en forma de espectro de pérdida al inicio de este apartado. En la figura 5.40 se aprecia de forma clara la proyección vertical de la potencia acústica. En este caso, regiones entre las barreras por encima de 15 metros presentan incrementos de impacto superiores a 5 dB respecto de la situación sin barrera. Como es lógico, en puntos cercanos a la calzada el nivel acústico es inferior respecto al supuesto de doble apantallamiento vertical estudiado antes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# 6
# MODELIZACIÓN DE OTRAS ACTUACIONES PARA LA REDUCCIÓN DEL IMPACTO ACÚSTICO

## 6.1 - Introducción

Estudiaremos en este capítulo algunas otras actuaciones que permiten reducir el impacto acústico en el entorno de la vía. Así, analizaremos el comportamiento acústico de medidas como elevar o deprimir la carretera respecto del terreno circundante. Es conocido que ambas soluciones consiguen niveles inferiores de ruido al nivel del suelo que el caso de carreteras a la misma cota que el receptor. A diferencia de las pantallas acústicas, este tipo de actuaciones afecta de forma importante al diseño de la vía y su entorno, si bien los fundamentos acústicos ligados a la efectividad de estas medidas son semejantes a los comentados, a la vista de los resultados, en el capítulo 5.

Existen bastantes estudios en la literatura sobre las ventajas de la carretera en trinchera (vía deprimida respecto del terreno circundante). Sin embargo existen menos datos sobre la eficacia anti-ruido de las carreteras elevadas (terraplenes y viaductos). El uso de los viaductos, por ejemplo, no es frecuente como estrategia de disminución de ruido sino más bien como solución a problemas de accesos en la confluencia de muchas vías. Aun así se trata de una solución que ha sido empleada con éxito en países como Japón o Italia como estrategia de disminución de ruido ambiente. Asimismo, los estudios realizados en estos países demuestran que el apantallamiento de este tipo de vías resulta más efectivo que el que se realiza al nivel del suelo, siendo más fácilmente integrable, desde el punto de vista estético, en el diseño del viaducto. En el siguiente apartado veremos resultados de nuestro modelo que avalan la afirmación relacionada con la eficacia del apantallamiento de vías elevadas. Sin embargo, los coeficientes de pérdida obtenidos no muestran una disminución espectacular de los niveles de impacto en relación con el apantallamiento de la misma vía a nivel del suelo.

## 6.2 - CALZADAS ELEVADAS. VIADUCTOS Y TERRAPLENES

Desde el punto de vista del MEC, el estudio de configuraciones con calzadas elevadas no presenta diferencias importantes en relación con el realizado hasta ahora. Si en el capítulo anterior debíamos discretizar sólo el obstáculo (la solución fundamental que se está empleando verifica la condición de contorno del semiespacio), en este problema

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

sólo exige discretizar los contornos que definen la calzada (viaducto) o calzada y talud (vías en terraplén), no siendo necesario discretizar la superficie del suelo.

El primer modelo que se estudia es el correspondiente a una carretera en viaducto. Se ha diseñado un problema simplificado consistente en una vía recta y de sección constante de 10 m de ancho, que se encuentra a una altura H variable. La idea se ilustra en la figura 6.1a. La fuente se ha situado en el centro de la calzada, 10 cm por encima de la misma, y el receptor se encuentra al nivel del suelo y a una distancia horizontal de 60 m desde la fuente. Con el programa desarrollado no existe ningún inconveniente en colocar la fuente al nivel de la calzada siempre que no coincida con un nodo de la discretización. El lector a estas alturas comprende el motivo. Para aislar el efecto de la altura de la calzada de cualquier otro factor, en los casos estudiados de viaductos se consideran todas las superficies completamente reflejantes.

La figura 6.1b recoge los resultados de la pérdida por elevación de la calzada, esto es, la diferencia de ruido en dB entre el caso de una vía elevada (H=5, 10 ó 15 m) y el caso de la vía a nivel de suelo (H=0m). Se aprecia que el ruido en el receptor disminuye conforme aumenta la altura del viaducto. Ello se debe a la conjunción de dos factores: por un lado la distancia entre fuente y receptor crece con H. Por otro, el aumento de H va ligado a que la propia calzada apantalla cada vez más la propagación de la onda incidente. Este efecto es más acusado a frecuencias altas, puesto que en las ondas de baja frecuencia la difracción es mayor.

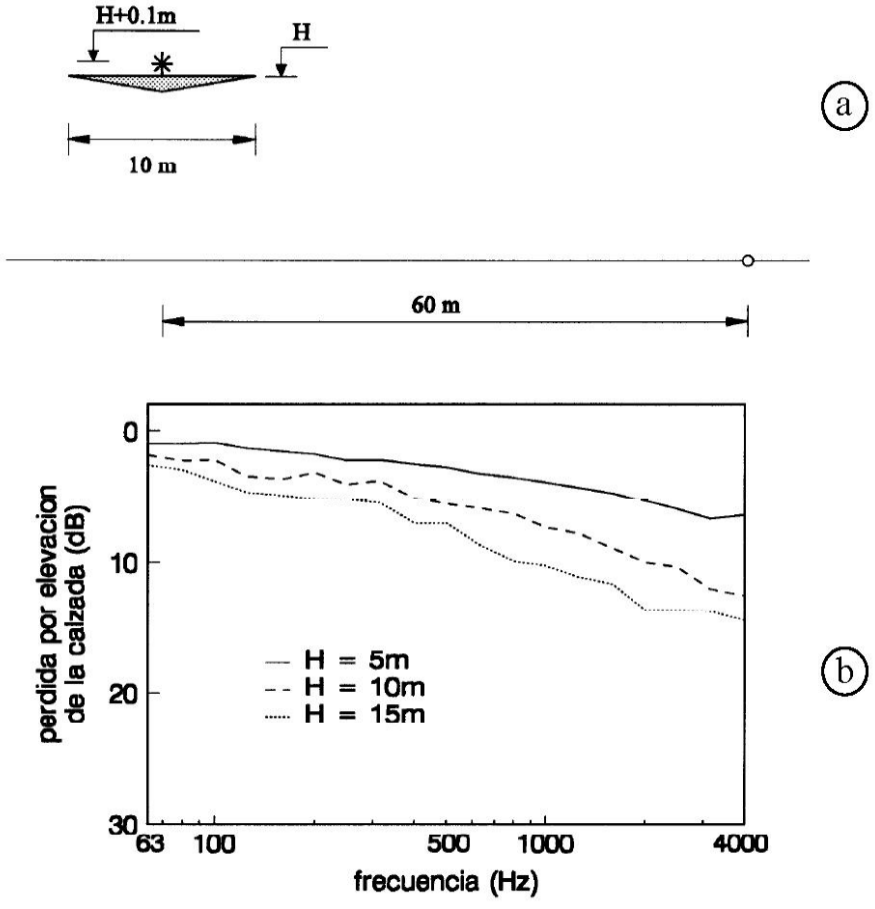



Figura 6.1a y b. Espectros de pérdida por elevación de la calzada. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Ahora queremos estudiar el caso de un viaducto con una pantalla en el lado del receptor. Se trata de la configuración de la figura 6.2a, que es idéntica a la correspondiente de la figura 6.1a pero añadiendo una pantalla simple vertical de 2 m de altura y 20 cm de espesor. El resultado conjunto de elevar la vía y de interponer la pantalla supone, con respecto de la situación de calzada a nivel de suelo y sin pantalla, una mejora notable, como se recoge en la figura 6.2b donde también aparecen los resultados para una vía apantallada a nivel del suelo (H=0m). Sin embargo, lo más interesante de estos resultados es notar que la mejora es pequeña a medida que la altura H aumenta. Como comentamos en la introducción de este capítulo, el apantallamiento de una vía elevada es más efectivo que si esta vía se encuentra a nivel de suelo. Si obviamos el entorno del pico de la gráfica, los resultados no son espectaculares y el aumento del coeficiente de pérdida está del orden de 2 dB en el mejor de los casos, para un viaducto de 10 metros de altura.

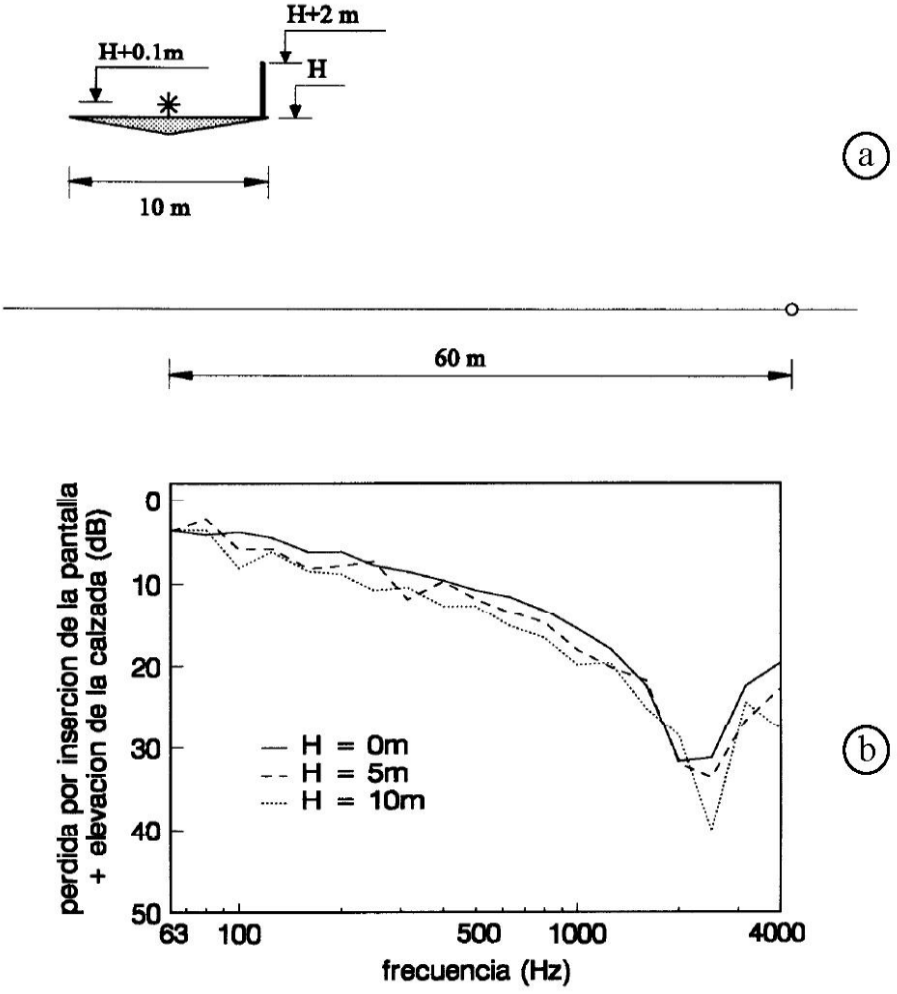



Figura 6.2a y b. Espectro de pérdida por el efecto conjunto de elevación de la calzada e inserción de una pantalla. Superficies reflejantes.

Con esta disposición, el lector puede realizar algunos experimentos numéricos e interpretar sus resultados. Proponemos, por ejemplo, el doble apantallamiento de la vía elevada para luego dotar a las superficies de estas pantallas de cierta capacidad absorbente. Como es de esperar, en el problema con doble apantallamiento reflejante los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

niveles de impacto en el entorno del receptor aumentan a todas las frecuencias. Podrá comprobarlo fácilmente a la vista del espectro obtenido. Esta situación, mejora sensiblemente cuando las pantallas absorben parte de la energía acústica que incide en ellas.

En la figura 6.3 se presenta la configuración estudiada para una carretera en terraplén. El ancho de la plataforma es 20 metros (no todos ocupados por la calzada) y se eleva 3 metros por encima del nivel del terreno. La fuente de ruido se sitúa a nivel de dicha plataforma y en el centro de la misma. Se trata de un problema con simetría, por lo que sólo será necesario discretizar la mitad del modelo.

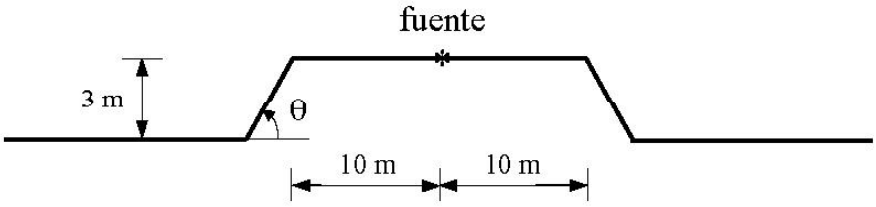



Figura 6.3. Geometría vía elevada en terraplén.

En la figura 6.4 se presenta el mapa de reducción de impacto provocado por esta medida para una inclinación del talud $\theta=60^{o}$. La emisión en la fuente está caracterizada por el espectro de ruido de tráfico que conocemos. La situación de referencia para determinar la reducción de impacto representada es aquella en la que la que no existe terraplén y la fuente se encuentra situada a nivel del terreno circundante. En este primer modelo, tanto la plataforma, como los taludes y el terreno circundante se han considerado contornos completamente reflejantes.

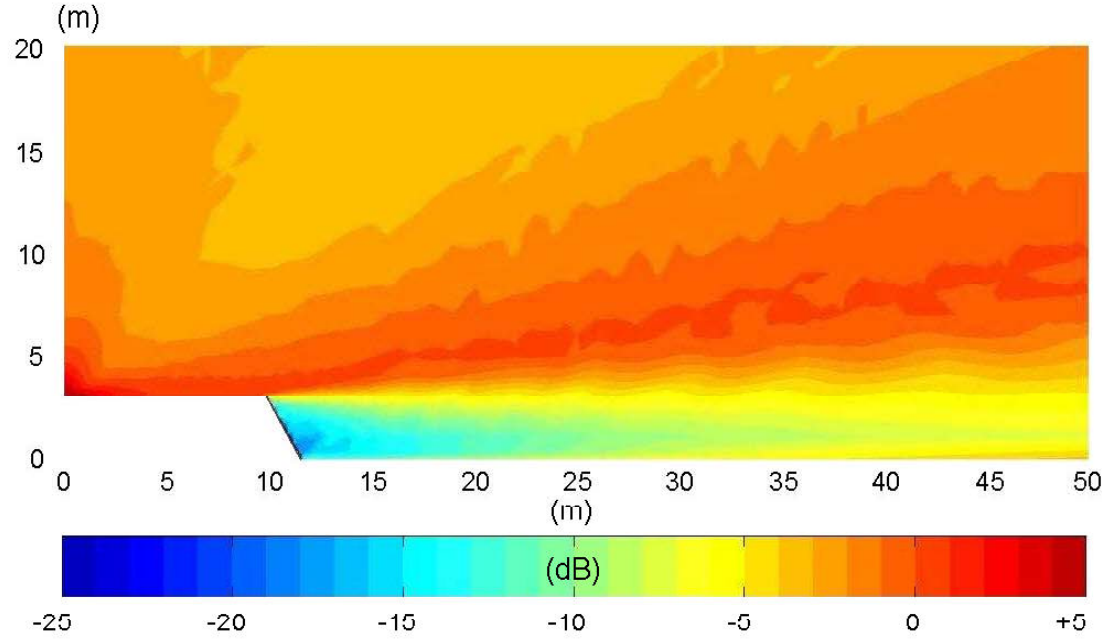



Figura 6.4. Mapa de reducción de impacto para una vía en terraplén. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

Puede observarse en esta figura la importante reducción del impacto acústico en la franja de 0 a 3 metros desde el nivel del suelo. En este espacio, que se extiende más allá de la distancia horizontal representada (50m), se reduce en más de 6 dB el nivel de contaminación acústica en relación con la que habría si la vía se situara a nivel del terreno circundante.

Cuantitativamente, la figura 6.5 se expresa con más claridad al respecto. En ella se representan las variaciones de *IL* en puntos situados en una recta a 1.5 metros del nivel del suelo. Se presentan cuatro curvas correspondientes a diferentes inclinaciones de los taludes del terraplén, $\theta=0^o$ (taludes verticales), $30^o$, $60^o$ y $90^o$. La distancia horizontal abarcada por esta gráfica se extiende hasta 110 m. de la fuente de ruido.

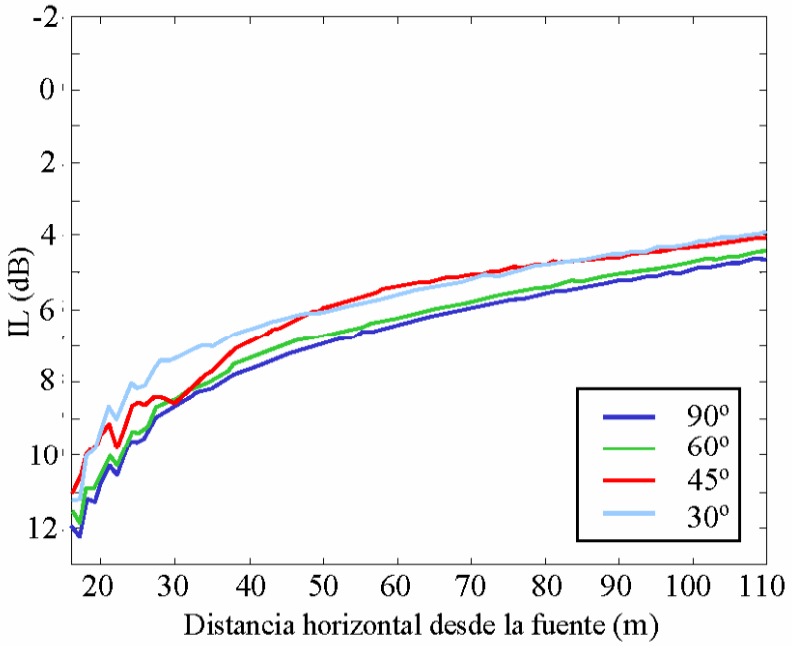



Figura 6.5. Pérdida por elevación de la vía en terraplén. Superficies reflejantes.

De la figura 6.5 se extrae como conclusión que la efectividad mayor, en términos generales, la presenta el terraplén con paredes verticales. En este sentido, esta geometría es del orden de 1 dB más eficiente que la correspondiente a $\theta=30^o$ a distancias inferiores a 70 metros de la fuente. La curva para $\theta=45^o$, luego de un comportamiento inicial oscilante, adopta valores muy cercanos a la correspondiente a $\theta=30^o$.

Introducimos ahora cierta capacidad absorbente a los taludes del terraplén. Como era de esperar, la reducción del impacto acústico por este motivo es considerable. Así, la figura 6.6 representa la reducción de ruido para un terraplén con $\theta=60^o$ y taludes realizados con tierra y provistos de cubierta vegetal. Este modelo representa más adecuadamente la realidad de este tipo de medidas. La situación de referencia continua siendo la representada por la fuente a nivel del terreno circundante y los contornos completamente reflejantes.

La simple observación de esta gráfica y su comparación con la correspondiente a contornos reflejantes (fig.6.4) nos confirma lo que esperábamos. En este caso la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

reducción en la franja de 0 a 3m. del nivel del suelo supera los 10 dB. Ésta es una reducción de impacto considerable.

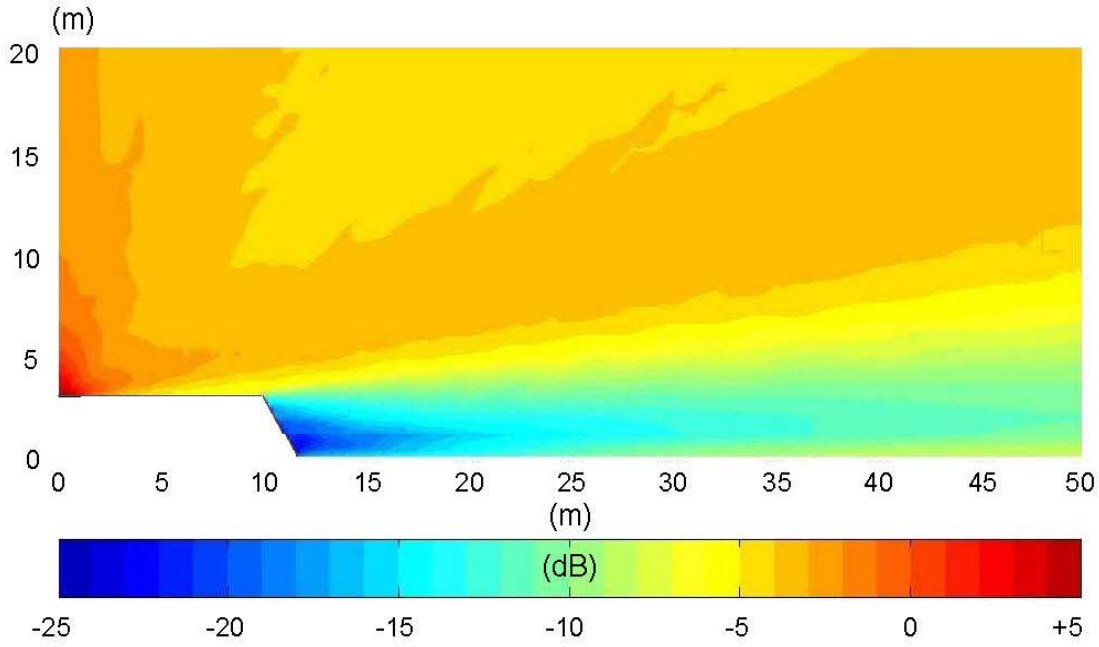



Figura 6.6. Mapa de reducción de impacto para una vía en terraplén.
Taludes absorbentes ($\sigma = 300.000$ Nsm$^{-4}$).

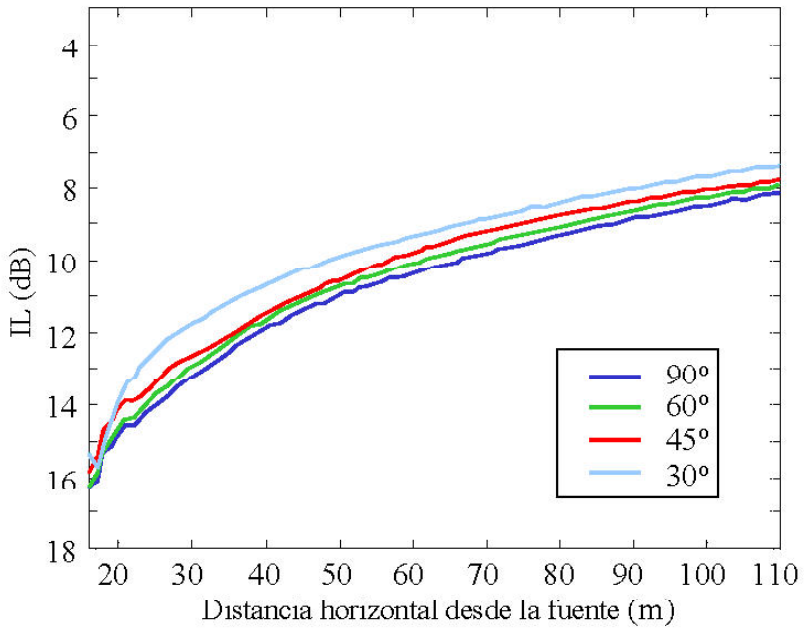



Figura 6.7. Pérdida por elevación de la vía en terraplén. Taludes absorbentes ($\sigma = 300.000$ Nsm$^{-4}$).

En la figura 6.7 hacemos una representación análoga a la correspondiente a la figura 6.5. Como antes, la medición se realiza en puntos a 1.5 metros del nivel del terreno. Las

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

conclusiones no varían en lo que al comportamiento relativo de estas geometrías se refiere (la curva para $\theta=45^{o}$ es menos oscilante en su tramo inicial y se aparta de la correspondiente a $\theta=30^{o}$). En este caso, la disminución del impacto supera los 7 dB para todas las geometrías a 110 metros de la fuente.

## 6.3 - DEPRESIÓN DE LA VÍA. CARRETERAS EN TRINCHERA

Este tipo de soluciones pretenden, al igual que las pantallas, interponer un obstáculo entre la fuente de ruido y el receptor. Como en el caso anterior, son más eficientes si se dota a los taludes de cierta capacidad para absorber energía acústica. Estos aspectos los analizaremos cuantitativamente en lo que sigue.

Desde el punto de vista del MEC, el modelado de este tipo de problemas presenta algunos inconvenientes (ligeros, por otra parte) si se pretende evitar la discretización del contorno del semiespacio (terreno circundante). En este sentido, los autores han desarrollado una estrategia numérica que permite resolver el problema discretizando únicamente los contornos de la depresión. En el siguiente apartado se dan los detalles de este procedimiento.

### 6.3.1- MODELO NUMÉRICO

Cuando el contorno del semiespacio presenta una depresión genérica, la aplicación del MEC en los términos expuestos presenta algunos problemas. Así, si pretendemos hacer uso de la solución fundamental que verifica la condición de contorno en el semiespacio, la aplicación de la igualdad integral en nodos de la depresión (fuentes) involucra puntos internos simétricos respecto del contorno de semiespacio (imágenes) (fig.6.8). La presión acústica en estos puntos (desconocida) se suma en el sistema de ecuaciones a las incógnitas correspondientes al contorno. Aplicando la igualdad integral a todos los nodos de la discretización, el sistema de ecuaciones resultantes tiene mayor número de incógnitas que ecuaciones. Ya el lector entiende que no pueden plantearse ecuaciones adicionales aplicando la fuente en los puntos internos. Esto no ocurre si la solución fundamental empleada es la correspondiente al dominio infinito, si bien en este caso será necesario discretizar el contorno del semiespacio con el costo computacional que esto supone.

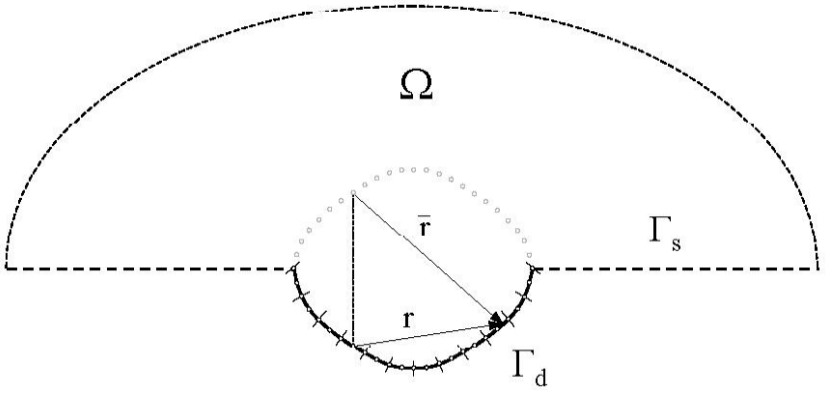



Figura 6.8. Solución fundamental fuente-imagen sobre geometría con depresión en el semiespacio.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

El procedimiento que se propone para modelar con el MEC este tipo de geometrías se esquematiza en la figura 6.9. En primera instancia consideraremos el dominio de partida $\Omega$ dividido en dos regiones diferentes $\Omega_s$ y $\Omega_d$. El subdominio $\Omega_s$ está delimitado por el contorno del semiespacio ($\Gamma_s$) y un contorno interfase con $\Omega_d$ al que llamamos $\Gamma_i$. El subdominio correspondiente a la depresión ($\Omega_d$) está delimitado por el contorno de la misma ($\Gamma_d$) y el contorno interfase ($\Gamma_i$). En cada uno de estas regiones puede aplicarse la igualdad integral en los términos conocidos. Así, para $\Omega_s$ puede evitarse la discretización del contorno del semiespacio con la utilización de la solución fundamental fuente-imagen que verifica la condición de contorno en este plano. Para $\Omega_d$ puede aplicarse cualquiera de las soluciones fundamentales conocidas.

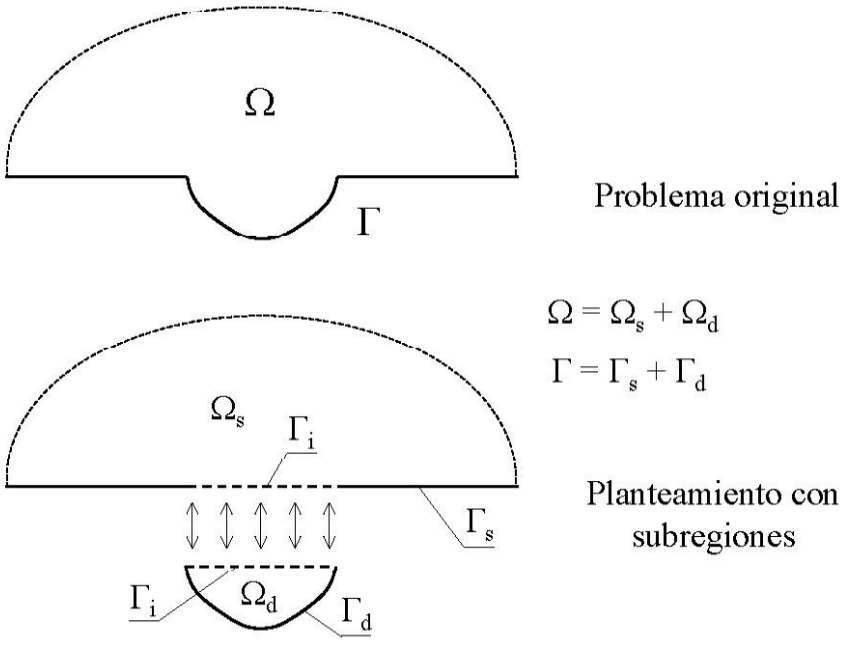



Figura 6.9. Procedimiento de resolución mediante subregiones para la geometría con depresión en el semiespacio.

La aplicación del MEC a ambas subregiones implica a las variables acústicas en el contorno interfase ($\Gamma_i$) que aparecen como incógnitas en el sistema de ecuaciones resultante. En este contorno son incógnitas la presión, iguales desde ambos subdominios (equilibrio), y el flujo de presión, iguales en valor absoluto y signo contrario (compatibilidad). Así, en $\Gamma_i$:

$$\begin{aligned} p_{\Omega_s} &= p_{\Omega_d} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\Omega_s} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\Omega_d} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Las ecuaciones del MEC en ambas subregiones junto con las relaciones adicionales de compatibilidad y equilibrio en la interfase ($\Gamma_i$) expresadas en (6.1), permite construir la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones cuya resolución nos permite obtener el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

valor de las variables en los contornos discretizados. Para un problema con una fuente puntual de presión en $\Omega_d$ y cierto valor de la impedancia en $\Gamma_d$ ($\beta_d$), la estructura de esta matriz se muestra en la figura 6.10.

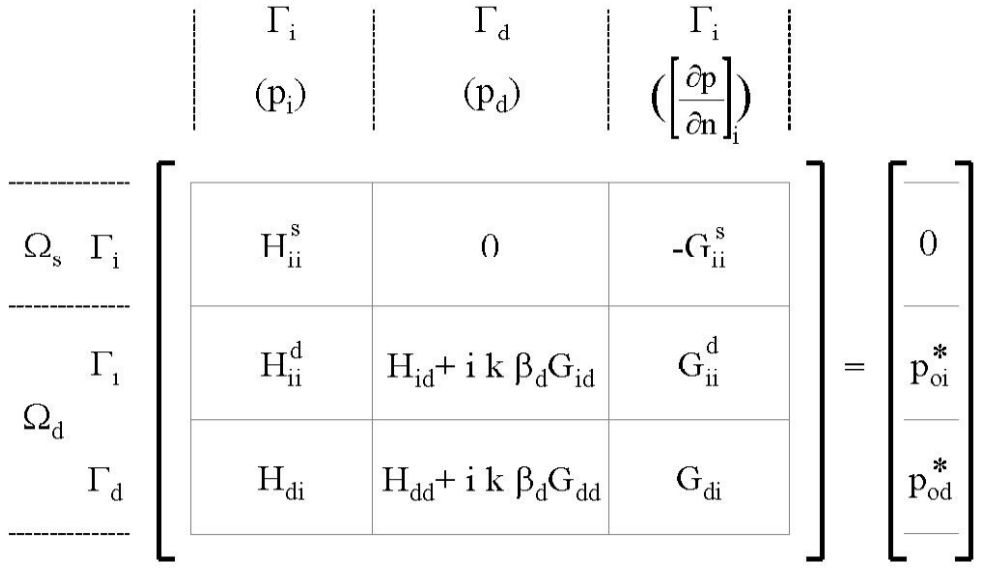



Figura 6.10. Procedimiento de resolución mediante subregiones. Ensamblaje matriz resultante.

Donde cada una de las submatrices tiene el siguiente significado:

$H_{ii}^{s}$: núcleos de integración de flujos fundamentales desde $\Omega_s$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$G_{ii}^{s}$: núcleos de integración de presiones fundamentales desde $\Omega_s$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$H_{ii}^{d}$: núcleos de integración de flujos fundamentales desde $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$G_{ii}^{d}$: núcleos de integración de presiones fundamentales desde $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$H_{id}$: núcleos de integración de flujos fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$).

$G_{id}$: núcleos de integración de presiones fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno interfase ($\Gamma_i$). Integración sobre elementos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

$H_{di}$: núcleos de integración de flujos fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$G_{di}$: núcleos de integración de presiones fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$). Integración sobre elementos del contorno interfase ($\Gamma_i$).

$H_{dd}$: núcleos de integración de flujos fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$). Integración sobre elementos del mismo contorno ($\Gamma_d$).

$G_{dd}$: núcleos de integración de presiones fundamentales en $\Omega_d$. Colocación en nodos del contorno de la depresión ($\Gamma_d$). Integración sobre elementos de $\Gamma_d$.

A pesar de la aparente complejidad de este procedimiento presenta indudables ventajas computacionales en relación con la formulación estándar del Método (solución fundamental para espacio infinito) para este tipo de problemas. Aunque el procedimiento con subregiones incorpora incógnitas vinculadas a los nodos del contorno interfase (dos por nodo, presión acústica y flujo de presión), representa una reducción importante del número de grados de libertad del problema ya que permite evitar la disdretización del semiespacio. A partir de un código estándar del MEC para problemas escalares en el dominio de la frecuencia, las modificaciones a realizar para incorporar el análisis de estas geometrías con este procedimiento son sencillas. Animamos al lector en este sentido tomando como base el código que suministramos.

### 6.3.2- RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aplicando el algoritmo desarrollado siguiendo este procedimiento, se analiza la geometría de la figura 6.11. Se trata de una vía atrincherada con 20 metros de plataforma y 3 metros de profundidad. La inclinación de los taludes ($\theta$) es, en general, variable. La fuente se sitúa en el centro geométrico de la plataforma y su emisión se caracteriza por el espectro de ruido de tráfico utilizado hasta el momento.

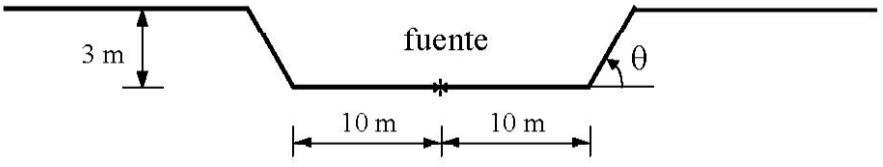



Figura 6.11. Geometría vía en trinchera.

Teniendo en cuenta las características de esta geometría, podemos adoptar como solución fundamental del MEC para la subregión constituida por la depresión, la correspondiente a un semiespacio absorbente. En este caso, la plataforma de la trinchera representará el semiespacio virtual. Con ello, no será necesario discretizar este contorno con el ahorro computacional adicional que esto supone.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

En la figura 6.12 aparece una discretización genérica del modelo. Al tratarse de un problema con simetría, sólo es necesario definir al programa la mitad de la geometría del problema. Se pretende con esta figura representar los contornos (talud e interfase) que han de tenerse en cuenta a la hora de realizar dicha discretización de acuerdo con lo comentado hasta el momento. Como sabemos del capítulo 4, el número de elementos necesarios en cada contorno, para una aproximación adecuada de la variable, depende de la frecuencia de la excitación. En el código desarrollado, el número y tamaño de los elementos será establecido internamente de acuerdo al valor de esta variable.

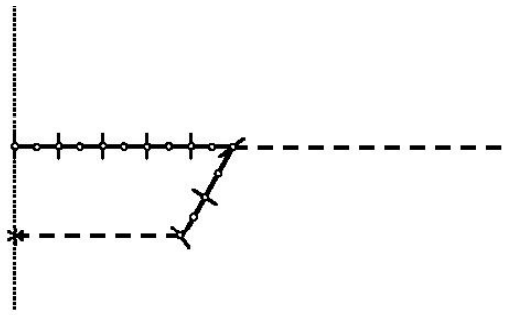


Figura 6.12. Discretización genérica. Vía en trinchera.

Los resultados de reducción de impacto debidos a esta medida se muestran en el mapa de color de la figura 6.13 para una inclinación de los taludes $\theta=60^{o}$. La fuente de ruido se sitúa en el punto de coordenadas (0,-3). En este primer caso todos los contornos del modelo son completamente reflejantes.

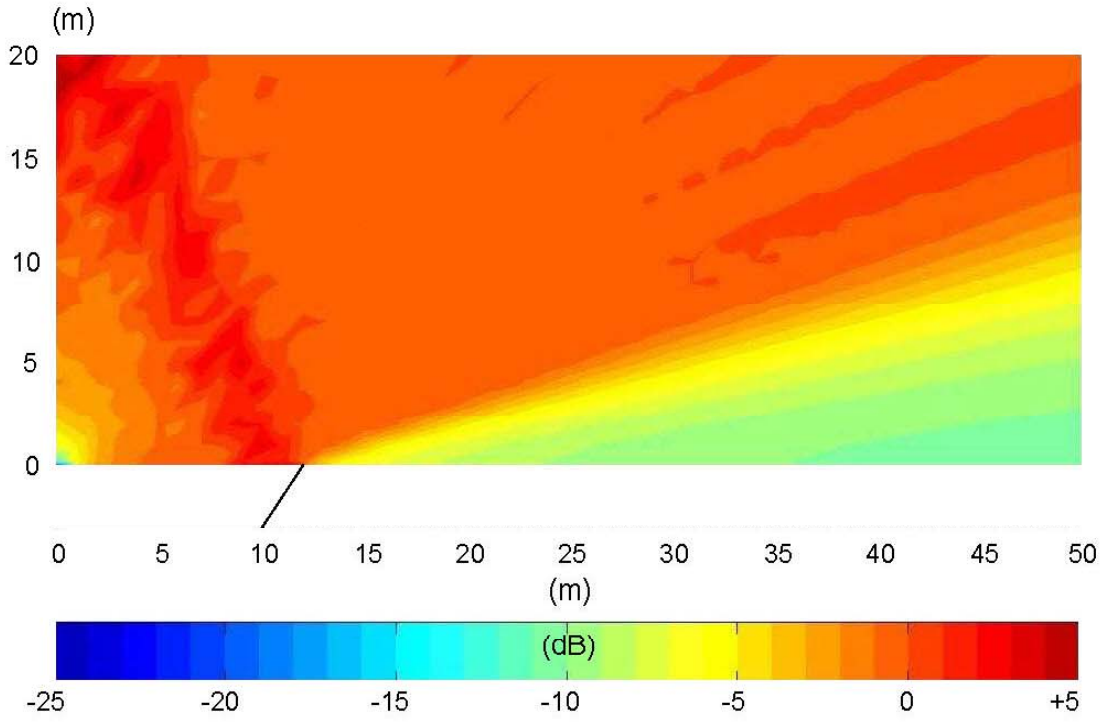



Figura 6.13. Mapa de reducción de impacto para una vía en trinchera. Superficies reflejantes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

La situación de referencia para determinar la reducción de impacto representada, es la correspondiente a un semiespacio a cota cero con una fuente pulsando en el origen de coordenadas. Es por ello que no existen valores representables en puntos de la subregión correspondiente a la depresión. Analizando cualitativamente la respuesta de esta medida, son indudables las analogías con la correspondiente a un doble apantallamiento con la misma inclinación.

La figura 6.14 representa de forma cualitativa la pérdida debida al atrincheramiento de la fuente para puntos situados a cota 1.5 metros desde el nivel del suelo. Se han estudiado geometrías con inclinaciones del talud de $30^o$, $45^o$, $60^o$ y $90^o$.

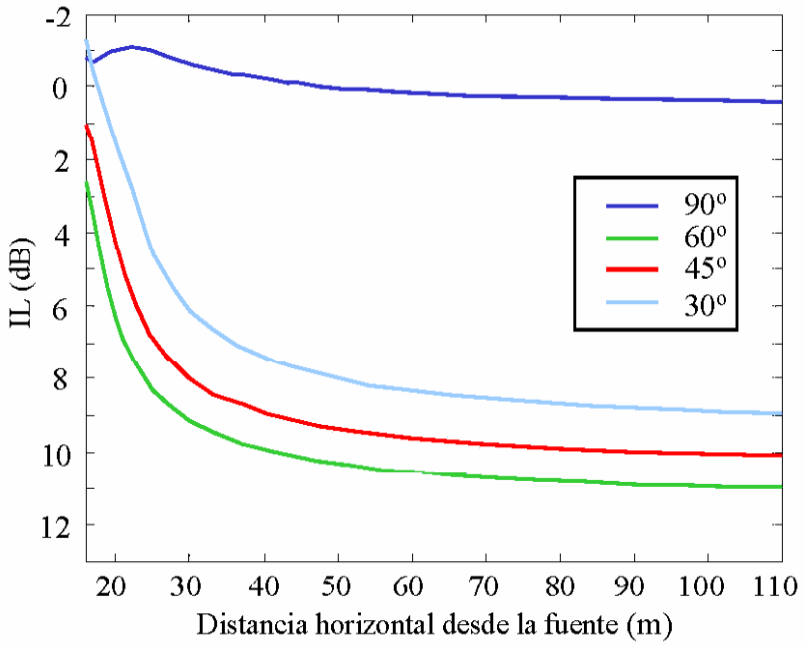



Figura 6.14. Pérdida por depresión de la vía. Superficies reflejantes.

A la vista de esta figura puede concluirse que el aumento de la pendiente del talud de la trinchera mejora su comportamiento acústico. Ocurre algo similar a lo comentado en el capítulo anterior cuando analizamos la eficacia de pantallas en forma de cuña o dique. Una menor pendiente favorece la difracción del sonido y su salida de la trinchera. Este análisis ha de ser revisado, sin embargo, cuando nos enfrentamos a la trinchera con paredes verticales. En este caso, la reducción del impacto acústico apenas es perceptible (inferior a 1 dB). Aquí, las reflexiones en la pared de la trinchera que se encuentra al otro lado de la fuente aumentan el nivel de ruido percibido en esta zona.

Esta situación para trincheras con $\theta=90^o$, puede mejorar de forma sensible si sus paredes tienen cierta capacidad absorbente. En este sentido, la figura 6.15 presenta los resultados obtenidos para las cuatro geometrías analizadas anteriormente, también en puntos situados a 1.5 metros del nivel de terreno. Se adopta para los contornos que representan los taludes, una resistividad $\sigma$ = 300.000 Nsm $^{-4}$ (terreno vegetal).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

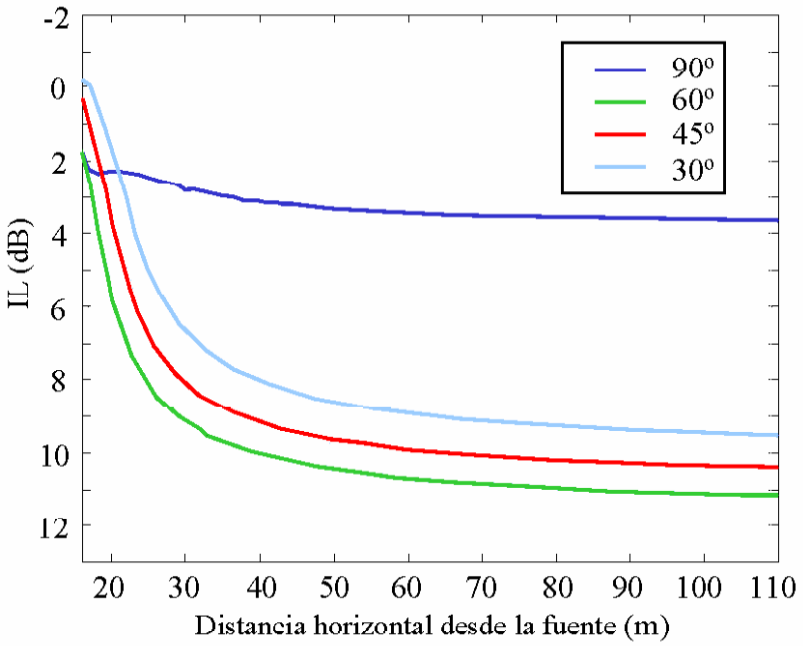



Figura 6.15. Pérdida por depresión de la vía. Taludes absorbentes ($\sigma$ = 300.000 Nsm$^{-4}$).

Comparando las figuras 6.14 y 6.15, puede observarse que la inclusión de tratamiento absorbente en los taludes, mejora el comportamiento del modelo de forma más acusada cuanto menos inclinada sea la pendiente del talud. De cualquier forma, la reducción del nivel de ruido por este motivo no supera 1 dB en el mejor de los casos ($\theta$=30º). Por el contrario, y como ya esperábamos, para $\theta$=90º la reducción de impacto por este motivo es más acusada y alzanza 3 dB a 40 metros de la fuente.

De lo expuesto se deduce que este tipo de medidas es eficaz para reducir el nivel de ruido en comparación con vías que se encuentran al mismo nivel del terreno. Como es lógico pensar, la eficacia de estas medidas será mayor cuanto mayor sea la profundidad de la vía en relación con el terreno circundante. En cualquier caso, habrán de diseñarse taludes con pendiente elevada (sin llegar a la verticalidad) realizados con terreno blando provisto de cubierta vegetal. En nuestro estudio, la disposición más eficaz garantiza una reducción del nivel de ruido próxima a 6 dB a tan sólo 20 metros de la fuente.

Por último, recomendar la lectura de la monografía realizada por un comité de expertos de la OCDE (OCDE, 1995) ya referida en otros capítulos de este libro. En este Informe se analizan los aspectos más destacados del problema, cualitativamente se estudian algunas de estas medidas y se establecen orientaciones para su diseño. En los capítulos de esta libro, hemos puesto números a algunas de las conclusiones más destacadas recogidas en esa publicación.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

# REFERENCIAS


[1] Abramowitz, M. y Stegun, I.A., "Handbook of mathematical functions", Dover Publications, N.Y. (1970).

[2] Alarcón, E., Martín, A. y París, F., "Boundary Elements in potential and elasticity theory", *Computer&Structures*, 10, pp. 351-362 (1979).

[3] Antes H., "Applications in environmental noise", *Boundary Elements Methods in Acoustics*, Ciskowski & Brebbia Ed., CMP Elsevier (1995).

[4] Ballesteros, R., Ramos, C. y Parrondo, J.L., "Modelización del campo de presión sonora en la proximidad de una pantalla de aislamiento acústico", *Proc. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 96* (1996).

[5] Banaugh, R.P. y Goldsmith, W., "Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape", *J. Appl. Mech., ASME*, 30, pp.589-597 (1963).

[6] Barti, R. y Servera, J., "Estudio acústico de barreras", *Proc. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 95* (1995).

[7] Bies, D.A. y Hansen, C.H., "Engineering noise control, Urwin Hyman (1988).

[8] Brebbia, C.A. y Domínguez, J., "Boundary elements. An introductory course", C.M.P. McGraw-Hill (1989).

[9] Brebbia, C.A. y Walker, S., "Boundary Element techniques in engineering", Newnes-Butterworths (1980).

[10] Carter, N.L., Ingham, P., Tran, K. y Hunyor, S.N., "Field study of the effects of traffic noise on heat rate and cardiac arrhythmia during sleep", *J. Sound and Vibration*, 169(2), pp. 211-227 (1994).

[11] Chandler-Wilde, S.N., "Ground effects in environmental sound propagation", Ph.D.Thesis. University of Bradford (1988).

[12] Chandler-Wilde, S.N. y Hothersall, D.C., "Sound propagation above an inhomogeneous impedance plane", *J. Sound and Vibration*, 98(4), pp.475-491 (1985).

[13] Chirino, F., Aznárez, J.J. y Maeso, O., "Un modelo numérico para la estimación de la eficiencia de pantallas acústicas", *Anales de Ingeniería Mecánica*, 4, pp.33-39 (1998).


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

[14] Ciskowski, R.D. y Brebbia, C.A., "Boundary Elements Methods in acoustics", CMP Elsevier (1995).

[15] Crombie, D.H. y Hothersall, D.C., "The performance of multiple noise barriers", *J. Sound and Vibration*, 176(4), pp.459-473 (1994).

[16] Daumas, A., "Etude de la diffraction par un ecran mince dispose sur le sol", *Acoustica*, 40, pp.213-222 (1978).

[17] Delany, M.E. y Bazley, E.N., "Acoustical properties of fibrous absorbent materials", *Applied Acoustics*, 3, pp.105-116 (1970).

[18] Domínguez, J., "Boundary elements in dynamics", CMP Elsevier (1993).

[19] Elmore, W.C. y Heald, M.A., "Physics of waves", Dover Publications, N.Y. (1985).

[20] Embleton, T.F.W., "Line integral theory of barrier attenuation", *J. Acoust. Soc. Amer.*, 67, pp.42-45 (1980).

[21] Eringen, A.C. y Suhubi, E.S., "Elastodynamics, Linear theory, II", Academic Press (1975).

[22] Estellés, H., Cervera, F. y Rubio, C., "Análisis de una barrera acústica absorbente", *Proc. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 96* (1996).

[23] Friedman, M.B. y Shaw, R.P., "Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section", *J. Appl. Mech., ASME*, 29, pp.40-46 (1962).

[24] Groenenboom, P.H.L., "Wave propagation phenomena", in *Progress in Boundary Element Methods*, Brebbia, C.A. Ed., 2, Springer Verlag (1983).

[25] Hacar, M.A. y Alarcón, E., "Elementos de dinámica aplicada a las estructuras", Madrid (1971).

[26] Hartman, F., "Elastostatics", in *Progress in Boundary Element Methods*, Brebbia, C.A. Ed., 1, Pentech Press, London (1981).

[27] Hothersall, D.C., Chandler-Wilde, S.N. y Hajmirzae, M.N., "Efficiency of single noise barriers", *J. Sound and Vibration*, 146(2), pp.303-322 (1991a).

[28] Hothersall, D.C., Crombie, D.H. y Chandler-Wilde, S.N., "The performance of T-profile and associated noise barriers", *Applied Acoustics*, 32, pp.269-287 (1991b).

[29] Hutchins, D.A., Jones, H.W. y Russell, L.T., "Model studies of barrier performance in the presence of ground surfaces. Part II – Different shapes", *J.Acoust. Soc. Amer.*, 75, pp.1807-1816 (1984).

[30] Isei, T., "Absorptive noise barrier on finite impedance ground", *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 1 (1980).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

[31] Isei, T., Embleton, T.F. y Piercy, J.E., "Noise reduction by barriers on finite impedance ground", *J. Acoust. Soc. Amer.*, 67, pp.46-58 (1980).

[32] Jawson, M.A., "Integral equation methods in potential theory. I", *Proc. Roy. Soc.*, Ser.A, 275, pp.23-32 (1963).

[33] Kawai, T., Hidaka, T. *y* Nakajima, T., "Sound propagation above an impedance boundary", *J. Sound and Vibration*, 83, pp.125-138 (1982).

[34] Keller, J.B., "Geometrical theory of diffraction", *J. Opt. Soc. Amer.*, 52, pp.116-130 (1962).

[35] Kinsler, L., Frey, A., Coppens, A. y Sanders, J., "Foundamentals of acoustics", John Wiley & Sons, N.Y. (1982).

[36] Kurze, U.J. y Anderson, G.S., "Sound attenuation by barriers", *Applied Acoustics*, 4, pp.35-53 (1971).

[37] Maekawa, Z., "Noise reduction by screens", *Applied Acoustics*, 1, pp.157-173 (1986).

[38] Mansur, W.J. y Brebbia, C.A., "Numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional transient scalar wave propagation problems", *Appl. Math. Modelling*, 6, pp.229-306 (1982a).

[39] Mansur, W.J. y Brebbia, C.A., "Formulation of the boundary element method for transient problems governed by scalar wave equation", *Appl. Math. Modelling*, 6, pp.307-311 (1982b).

[40] May, D.N. y Osman, M.N., "Highway noise barriers: New shapes", *J. Sound and Vibration*, 71, pp.73-101 (1980).

[41] Medina, F., "Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-fluido-estructura", *Tesis Doctoral*, Universidad de Sevilla (1987).

[42] Morse, P.M. y Bolt, R.H., "Sound Waves in Rooms", *Reviews of Modern Physics*, 16, pp.65-150 (1944).

[43] Perdomo, F., Aznárez, J.J. y Maeso, O., "Aplicación del MEC en la evaluación de medidas para reducir el impacto acústico en el entorno de carreteras", *Revista de Acústica*, 23 (1,2), pp. 13-19 (2002).

[44] Pfretzschner, J., Simón, F., Moreno A. y De la Colina, C., "Índice de pérdidas por inserción en barreras con reflexiones en el terreno", *Proc. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 95* (1995).

[45] Pfretzschner, J., Simón, F., De la Colina, C. y Moreno A., "A rating index for estimating insertion loss of noise barriers under traffic noise conditions", *Acta Acústica*, 32(3), pp.504-508 (1996).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

[46] Pfretzschner, J. y Simón, F., "Aplicación de las barreras acústicas provistas de una cumbrera cilíndrica en el apantallamiento del tráfico rodado", *Revista de Acústica*, Núm.extr., pp.255-258 (1996).

[47] Pfretzschner, J. y Simón, F., "Barreras acústicas y ruido de tráfico", *Revista de Acústica*, 28(3-4) (1997).

[48] Rapin, J.M., "Etudes des modes de protection phoniques aux abords des voies rapides urbaines", CSTB, Vol.1A, París (1969).

[49] Rasmussen, K.B., "Sound propagation over grass covered ground", *J. Sound and Vibration*, 78, pp.247-255 (1981).

[50] Rasmussen, K.B., "Sound propagation over non-flat terrain", Danish Acoustical Laboratory Report No.35, The Danish Academy of Technical Sciences (1982).

[51] Recuero, M., "Acústica", Sección de Publicaciones ETSII, UPM (1980).

[52] Ringheim, M., "Traffic noise attenuation by screens, a preliminary investigation of model-test-techniques", Rep. No. LBA 335, NTH: Trondheim, Norway (1971).

[53] Sanchís, A., Giménez, A., Marín, A. y Solana, P.E., "Aplicación del Método de los Elementos de Contorno para la determinación del campo acústico en la zona de sombra de una barrera", *Proc. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica96* (1996).

[54] Sanchís A., Giménez, A., Marín, A. y Solana, P.E., "Aplicación del Método de los Elementos de Contorno para la determinación de la atenuación de ruido producido por barreras", *Revista de Acústica*, 28 (1997).

[55] Scholes, W.E. y Sargent, J.W., "Designing against noise from road traffic", *Applied Acoustics*, 4, pp.203-234 (1971).

[56] Seznec, R., "Diffraction of sound around a barrier: Use of the boundary elements technique", *J. Sound and Vibration*, 73, pp.195-209 (1980).

[57] Simón, F., Pfretzschner, J., De la Colina C. y Moreno A., "Ground influence on the definition of single rating index for noise barrier protection", *J. Acoust. Soc. Amer.*, 104(1), pp.232-236 (1998).

[58] Shaw, R.P., "A brief history of 'Boundary Integral Equation/Element Methods' in acoustics", *Boundary Elements Methods in Acoustics*, Ciskowski & Brebbia Ed., CMP Elsevier (1995).

[59] Symm, G.T., "Integral Equation Methods in potential theory. II", *Proc. Roy. Soc.*, Ser.A, 275, pp.33-46 (1963).

[60] Taylor, S.M. y Wilkins, P.A., "Transportation noise-health effects", Butterworths (1987).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005

[61] Thomasson, S.L., "Theory and experiments on sound propagation above an impedance boundary", Rep.75, Division of Building Technology, Lund Inst. Technology, Sweden (1977).

[62] Varios, "Reducción del ruido en el entorno de las carreteras", OCDE, Ministerio de Obras Públicas, Transpone y Medio Ambiente (1995).

[63] Watts, G.R., "Acoustic performance of parallel traffic noise barriers", *Applied Acoustics*, 47(2), pp.95-119 (1996).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2005