

## METODO ANALITICO PARA LA PREDICCIÓN DE MAREAS EN CANALES

JOSÉ L. PELEGRÍ Y PÁNFILO MASCIANGIOLI  
*Departamento de Tecnología de Producción*  
 INTEVEP, S.A.

**RESUMEN:** Se formula una nueva metodología para la resolución de las ecuaciones unidimensionales de continuidad y lineal no forzada de momento, de la marea. La misma consiste en establecer una ecuación única para la elevación (o la velocidad), la cual se resuelve por separación de variables. La dependencia temporal de la solución se determina en forma inmediata. La ecuación que contiene la dependencia espacial se resuelve en forma exacta, cuando el ancho y la profundidad del canal se representan mediante funciones simples de la distancia. Se presentan las soluciones para los casos de canales de ancho constante, lineal y exponencialmente variables. Se discuten algunas ventajas e inconvenientes de la utilización del método. Se incluye una aplicación al Estrecho de Maracaibo, donde la profundidad es aproximadamente constante con la distancia y el ancho puede ser simulado mediante una función exponencial o la combinación de una función lineal y un valor constante. Utilizando valores conocidos de la elevación de la marea como condiciones de borde, se obtienen soluciones explícitas de la elevación y corriente de la marea para todo el Estrecho, las cuales se comparan favorablemente con las observaciones de la zona.

**ABSTRACT:** A new methodology for the solution of the unidimensional continuity and linear unforced momentum equations for the tide, is formulated. It consists in obtaining a single equation for the elevation (or velocity) and solving it by separation of variables. The temporal dependence of the solution is immediately obtained. The equation containing the spatial dependence can be solved exactly when the width and depth of the channel are expressed as simple functions of distance. Solutions for the cases when the width is constant, linearly variable and exponentially variable are presented. Some advantages and disadvantages of the method are discussed. The method is employed for the Maracaibo Straits, where the water depth is approximately constant with distance, and the width can be simulated either with an exponential function or by combination of a linear function plus a constant value. Using known values for the tidal elevation as boundary conditions, explicit solutions are obtained for the tidal elevation and currents which compare well with field observations.

### INTRODUCCION

Las mareas en canales cerrados se pueden considerar, esencialmente, como ondas estacionarias cuyo período es el de la marea en el mar exterior, y su amplitud es función tanto de la amplitud de la marea en los extremos del canal, como de su morfología. Esta onda estacionaria o cooscilante se puede considerar como la resultante de la superposición de una onda incidente proveniente del exterior y su reflexión en el extremo interior del canal. Ella corresponde al caso en que las pérdidas por fricción son pequeñas y el canal es lo suficientemente regular para que otras reflexiones en su interior sean despreciables. Bajo estas condiciones, y como los términos inerciales son normalmente despreciables, las ecuaciones que rigen el problema resultan lineales. Sin embargo, si las pérdidas de energía son grandes, las amplitudes de las ondas incidente y reflejada varían con la distancia y consecuentemen-

te, ocurre una considerable distorsión en la cooscilación.

Para el caso en que la sección del canal sea constante y se desprecien los términos de fricción, el problema lineal tiene una solución analítica exacta. Si se trata de un canal natural, de sección variable, con o sin fricción, las ecuaciones son normalmente resueltas mediante métodos numéricos que requieren la especificación detallada de la variación de la sección del canal con la distancia, además del conocimiento de las condiciones de borde, tanto para la elevación como para la corriente de marea [1-4].

Un método analítico basado en la conservación de la energía de la onda, en el caso en que la longitud de la onda de marea es mucho menor que la longitud del canal, fue desarrollado por Perroud [5] y es estudiado por Ippen y Harleman [4]. Esto equivale a suponer que los cambios en la sección del canal son despreciables dentro de la distancia correspondiente a la longitud de onda. Esta aproximación, sin embargo, no se satisface en la mayoría de los casos debido a que la longitud de onda de la marea es

muy grande, del orden de varios cientos de kilómetros.

En este trabajo se presenta un método analítico general desarrollado para determinar la variación de las mareas (elevación y corriente) en canales cuyo ancho y profundidad pueden ser representados por funciones simples, para condiciones en que los términos de fricción son despreciables. Esta metodología presenta como ventaja adicional, que requiere el conocimiento de las condiciones de borde de la elevación o la velocidad, pero no ambas. El método es aplicado al Estrecho de Maracaibo donde las corrientes de marea son dominantes [6]. Las predicciones obtenidas son más precisas que aquéllas que se obtienen con la solución clásica para canales de sección constante o mediante la aplicación hecha por Redfield [7] del método numérico de Defant [1].

## METODO ANALITICO

Para la descripción de las mareas en canales se utilizan las ecuaciones unidimensionales de momento (lineal no forzada donde los términos inercial y de fricción son despreciables) y continuidad.

Estas son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1)$$

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

donde  $x$  es la dirección a lo largo del canal,  $u = u(x,t)$  es la velocidad de la corriente en esa dirección,  $\eta = \eta(x,t)$  es la elevación de la superficie del agua sobre su nivel medio,  $A = A(x)$  es el área de la sección transversal del canal que puede ser expresada como el producto del ancho,  $b = b(x)$ , y la profundidad,  $h = h(x)$ , y  $g$  es la aceleración de gravedad. En la Fig. 1 se ilustra en forma esquemática el significado de algunas de estas variables.

La introducción del término inercial,  $u \partial u / \partial x$ , ocasionaría que el problema fuese no lineal, y careciese de solución analítica explícita. A partir del análisis dimensional de la ecuación de momento se puede determinar que el término inercial es despreciable si  $c = (gh)^{1/2} \gg u$ , lo cual es cierto para los casos de interés práctico. Otro tanto ocurriría si se incluye un término cuadrático de fricción. Por otra parte, si éste es linealizado, la ecuación que contiene la dependencia espacial permanece inalterada, mientras que aquélla que contiene la dependencia temporal es modificada de tal forma que no pueden satisfacerse sus condiciones de contorno (véase Apéndice).

Si el término de fricción es despreciable, entonces se

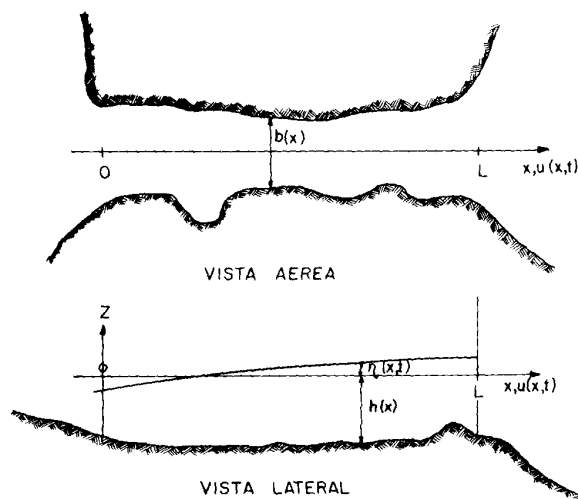


Fig. 1. Representación esquemática del significado de las variables y parámetros utilizados en el modelo.

puede suponer que la fase de cada una de las componentes de la onda de marea y de la resultante de éstas, no variará a lo largo del canal [2]. Esta suposición es aceptada en este trabajo y se encuentra implícita en las condiciones de borde, de tal forma que para especificarlas bastará con indicar el valor de la amplitud de la elevación (o de la corriente de marea). En el caso particular de que exista un nodo dentro del canal, el cambio de fase será de  $180^\circ$  y ocurrirá en una distancia pequeña; en este caso bastará con especificar los valores de la amplitud de la elevación con signo opuesto.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser combinadas para formar una ecuación única para la elevación (o la corriente). Si escogemos formar una ecuación para la elevación se obtiene:

$$b \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gA \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - g \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a condiciones de borde conocidas en ambos extremos del canal ( $x = 0$  y  $x = L$ ; véase Fig. 1). Para el caso en que el ancho y la profundidad son constantes la ecuación (3) se reduce a la conocida expresión:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (4)$$

donde  $c^2 = gh$ . Si la elevación en ambos extremos es conocida, es decir,  $\eta(x=0) = \eta_0$  y  $\eta(x=L) = \eta_1$ , se obtiene su solución exacta [1-3]:

$$\eta(x,t) = \left[ \frac{\eta_1 - \eta_0 \cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + \eta_0 \cos(kx) \right] \cos(\omega t) \quad (5)$$

$$u(x,t) = \frac{c}{h} \left[ \frac{\eta_1 - \eta_0 \cos(kL)}{\sin(kL)} \cos(kx) - \eta_0 \sin(kx) \right] \sin(\omega t) \quad (6)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega = 2\pi/T$  y  $c = \omega/k = \lambda/T$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda,  $T$  el período de la marea en la parte exterior del canal,  $k$  el número de onda y  $\omega$  la frecuencia.

En el caso de que tanto  $h$  como  $b$  se representen por funciones simples de  $x$ , la ecuación (3) puede ser resuelta como sigue. Utilizando el método de separación de variables, escribimos la elevación como:

$$\eta(x,t) = \eta_1(x) \eta_2(t) \quad (7)$$

y la ecuación (3) se descompone en dos ecuaciones equivalentes:

$$\eta_2'' + \omega^2 \eta_2 = 0 \quad (8)$$

$$\eta_1'' + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \eta_1' + \frac{\omega^2}{gh} \eta_1 = 0 \quad (9)$$

que se resuelven por separado; en estas ecuaciones  $\omega$  es una constante que surge del procedimiento analítico y tiene dimensiones  $T^{-1}$ . La solución general de la ecuación (8) es:

$$\eta_2(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (10)$$

La imposición de que las elevaciones deben variar sinusoidalmente con período  $T$  determina el valor de la constante  $\omega = 2\pi/T$ .

La solución de la ecuación (9) depende de la forma de  $b = b(x)$  y  $h = h(x)$ , y puede ser determinada exactamente para casos en que estas funciones sean simples (polinomios, exponenciales, logaritmos, etc.). En la siguiente subsección se presenta la solución para dos casos en los cuales el ancho varía en forma simple con la distancia.

Una vez conocida la elevación, puede obtenerse la velocidad de la corriente a partir de la ecuación (1):

$$u(t) = -g \int_{t_0}^t \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \quad (11)$$

donde se ha utilizado como tiempo inicial aquél correspondiente a un estado de reposo  $u(x,t=0) = 0$ .

#### Ancho exponencialmente variable

Supóngase que la profundidad es constante y el ancho puede representarse como una función de la forma:

$$b(x) = b_0 \exp\left(-\frac{\delta x}{L}\right) \quad (12)$$

donde  $b_0 = b(x=0)$ ,  $L$  es la longitud total del canal y  $\delta$  es un coeficiente que modula la variación de la exponencial. Entonces (9) se reduce a:

$$\eta_1'' - \frac{\delta}{L} \eta_1' + \frac{\omega^2}{gh} \eta_1 = 0 \quad (13)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes. Su solución depende de la raíz de la ecuación característica:

$$k^2 - \frac{\delta}{L} k + \frac{\omega^2}{gh} = 0 \quad (14)$$

donde  $k$  tiene unidades de  $L^{-1}$ . Si  $k$  tiene dos raíces reales ( $k_1, k_2$ ), entonces la solución de (13) es:

$$\eta_1(x) = D_1 \exp(k_1 x) + D_2 \exp(k_2 x) \quad (15a)$$

si la raíz es real doble ( $k = k_1 = k_2$ ) se obtiene:

$$\eta_1(x) = (D_1 + D_2 x) \exp(kx) \quad (15b)$$

si las raíces son complejas conjugadas ( $k_1 = p + iq, k_2 = p - iq$ ) la solución es:

$$\eta_1(x) = \exp(px) (D_1 \cos(qx) + D_2 \sin(qx)) \quad (15c)$$

Las constantes  $D_1$  y  $D_2$  se determinan a partir de las condiciones de borde. La parte imaginaria de las raíces puede ser interpretada como el número de onda modificado del canal. Nótese que si  $\delta = 0$ , entonces la raíz es doble y se verifica que  $k = \omega/(gh)^{1/2}$  es el número de onda.

#### Ancho linealmente variable

Alternativamente, considérese que la profundidad es constante y el ancho puede representarse como una función de la forma:

$$b = b_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (16)$$

donde  $b_0 = b(x=0)$  y  $l$  es la longitud a la cual el ancho del canal se haría cero ( $l$  puede ser mayor, menor o igual que  $L$ , la longitud real del canal). Entonces (9) se reduce a:

$$\eta_1'' + \frac{1}{x-1} \eta_1' + k^2 \eta_1 = 0 \quad (17)$$

donde  $k^2 = \omega^2/gh$  es constante. Mediante el cambio de variables:

$$\xi = k(x-1) \quad (18)$$

la ecuación (13) se reduce a:

$$\eta_1'' + \frac{1}{\xi} \eta_1' + \eta_1 = 0 \quad (19a)$$

donde  $\eta_1 = \eta_1(\xi)$ , o de otra manera:

$$\xi^2 \eta_1'' + \xi \eta_1' + (\xi^2 - \nu^2) \eta_1 = 0, \quad \nu = 0 \quad (19b)$$

que es la ecuación diferencial que caracteriza a las funciones Bessel. Su solución general es:

$$\eta_1(\xi) = D_1 J_0(\xi) + D_2 Y_0(\xi) \quad (20)$$

donde  $J_0(\xi)$  es la función Bessel de orden 0 del primer tipo y  $Y_0(\xi)$  es la función Bessel de orden 0 del segundo tipo [8]. Las constantes  $D_1$  y  $D_2$  se determinan a partir de las condiciones de borde. Nótese que esta expresión para la elevación es independiente del ancho del canal.

## APLICACION AL ESTRECHO DE MARACAIBO

El Estrecho de Maracaibo es el cuerpo de agua que une la Bahía El Tablazo con el Lago de Maracaibo. Su longitud es de aproximadamente 50 km y su ancho se incrementa desde unos 8 km en Punta de Palma hasta aproximadamente 21 km en La Salina. La batimetría indica la existencia de mayores profundidades en el centro del canal, aun cuando no muestra variaciones significativas en la dirección longitudinal (Fig. 2). El valor promedio de la profundidad es de unos 8 m. La onda estacionaria allí presente está formada por la interacción de una onda proveniente del Golfo de Venezuela y su reflexión en el extremo Sur del Lago. Tanto la onda incidente como la reflejada son el resultado de la combinación de multitud de componentes armónicas (semidiurnas, diurnas y de largo período), y la onda estacionaria total puede imaginarse como la suma de todas las ondas estacionarias simples, correspondientes a cada una de las componentes. A pesar de que en el Mar Caribe, adyacente al Golfo

de Venezuela la marea es diurna, la geomorfología del Golfo de Venezuela y el Sistema de Maracaibo ocasiona que en la mayor parte del Estrecho de Maracaibo las componentes semidiurnas sean amplificadas y se tornen dominantes.

Para las componentes semidiurnas, un antinodo (donde la elevación es máxima) se localiza aproximadamente en el centro de la Bahía El Tablazo, mientras que un nodo (elevación mínima) está situado en el extremo Sur del estrecho, aproximadamente a la altura de La Salina [7]. Para las componentes diurnas sólo se localiza un nodo en la región, aproximadamente frente a La Ensenada (véase la siguiente subsección). Las características de las ondas estacionarias permiten anticipar que al Sur del antinodo, la corriente de marea estará retrasada aproximadamente un cuarto de período en relación con la elevación de la marea, mientras que al Norte del antinodo ocurrirá la situación opuesta [6].

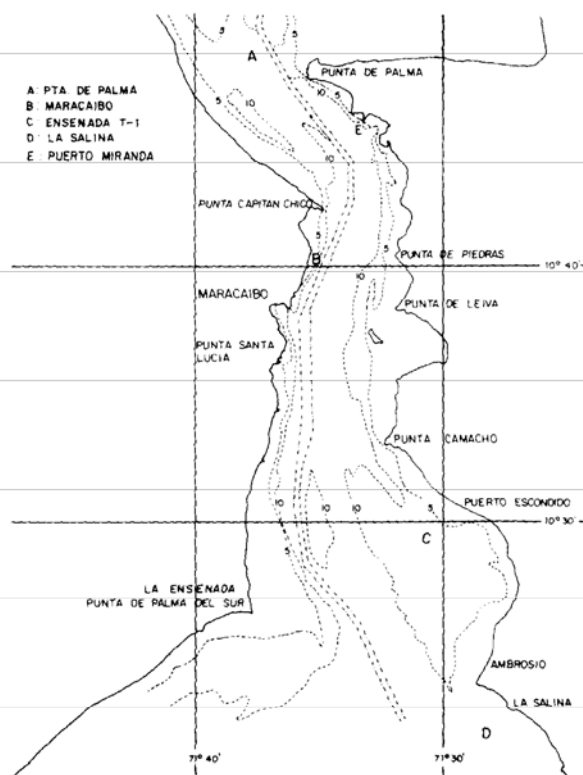


Fig. 2. Batimetría del Estrecho de Maracaibo (profundidades en metros) y ubicación de las estaciones para las cuales se dispone de las constantes armónicas de la elevación y corriente de marea.

La morfología del Estrecho de Maracaibo puede ser representada, con propiedad, mediante un valor constante de la profundidad y valores del ancho que disminuyan exponencialmente hacia el Norte, o que decrezcan linealmente hacia el Norte hasta la altura de Maracaibo, donde permanece constante (curvas b y c, Fig. 3). De esta forma, los resultados obtenidos en la sección anterior pueden ser aplicados directamente. Los valores empleados para el ancho de la costa se escogen de tal forma que el canal del modelo se asemeje lo máximo posible al canal real. El valor de la profundidad empleado en los cálculos, fue elegido con el criterio de que el volumen de agua contenido en el canal del modelo sea igual al volumen de agua contenido en el canal real (igual a la profundidad media del canal multiplicada por el área real del canal).



Fig. 3. Modelaje del ancho del Estrecho de Maracaibo. Curva a: ancho constante; curva b: ancho exponencialmente decreciente; curva c: combinación de ancho linealmente decreciente y ancho constante. Los valores asignados a los parámetros se indican en el texto.

Las condiciones de borde para la amplitud de la elevación son obtenidas a partir de las mediciones en la zona.

Redfield [7] modeló la componente M2 de la corriente de marea en el Estrecho y Lago de Maracaibo utilizando el método numérico de Defant [1]. Para ello requirió, como condición de borde en la cabeza del lago, que la elevación adquiriera los valores allí medidos y que la velocidad perpendicular a la costa fuese nula. Sin embargo, la considerable distancia entre la localización de las condiciones de borde y el estrecho de Maracaibo, puede provocar imprecisiones numéricas apreciables.

En el presente trabajo nos limitaremos a estudiar las principales componentes semidiurna, M2, y diurna, K1. La componente M2 es dominante en la mayor parte de la región y su estudio bastaría para ilustrar el método aquí expuesto. Sin embargo, se ha creído conveniente examinar también la componente K1, debido a los cambios que aparecen cuando el período de la onda es diferente y existe un nodo dentro de la región.

#### Mediciones disponibles en el área

Para determinar la amplitud y fase de las principales componentes diurnas y semidiurnas de la marea, se requiere realizar un análisis armónico sobre un mínimo de varios días de registros [9,10]. En el Estrecho de Maracaibo ha existido un número considerable de mareógrafos, en su mayor parte pertenecientes al Instituto Nacional de Canalizaciones [11]. En este trabajo utilizaremos las constantes armónicas de la elevación de la marea correspondientes a cuatro de estas localidades: Punta de Palma, Maracaibo, Ensenada T-1 y La Salina (Fig. 2), las tres primeras provenientes de [12] y la última de [8]. Las amplitudes (en centímetros) y las fases referidas a la longitud local y hora Greenwich (en grados) de las componentes M2 y K1 de la elevación de la marea en estas localidades se presentan en la Tabla 1. Las constantes correspondientes a las localidades ubicadas en los extremos del canal serán empleadas como condiciones de borde, mientras que aquéllas correspondientes a las localidades interiores servirán de comparación entre las observaciones y las predicciones.

Por otro lado, en el conocimiento de los autores, los únicos registros de corrientes en la zona, con extensión suficiente para que puedan determinarse las constantes de la corriente de marea, son los correspondientes a la estación que actualmente INTEVEP mantiene en Puerto Miranda (Fig. 2). Estas serán utilizadas solamente para comparación con las predicciones. Sus valores han sido obtenidos utilizando la metodología descrita por Pelegrí y Masciangioli [13] y se incluyen en la Tabla 2.

Localidad	M2		K1	
	Amp	Fase	Amp	Fase
Punta de Palma	0,250	287,6	0,041	228,9
Maracaibo	0,162	292,6	0,038	269,0
Ensenada T-1	0,054	290,7	0,023	300,4
La Salina	0,007	287,0	0,015	21,0

TABLA 1. Amplitudes (en metros) y fases referidas a la hora Greenwich (en grados) de las componentes M2 y K1 de la elevación de la marea en cuatro localidades ubicadas a lo largo del Estrecho de Maracaibo.

Localidad	Componente x				Componente y			
	M2		K1		M2		K1	
	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
Puerto Miranda	45,2	249	28,2	108	23,0	240	12,9	97

TABLA 2. Amplitudes (en cm/s) y fases referidas a la hora Greenwich (en grados) de las componentes M2 y K1 de la celeridad de la marea en la localidad de Puerto Miranda, ubicada en el Estrecho de Maracaibo.

De las constantes presentadas en la Tabla 1 es posible extraer varias conclusiones. Primero, la amplitud de la elevación para ambas componentes decrece en dirección hacia el lago, siendo esta disminución considerablemente mayor para la componente M2. Así pues, a pesar de que en casi todo el estrecho la marea es predominantemente semidiurna, cerca del lago ésta se convierte en diurna. Segundo, el cambio de fase a lo largo del estrecho para la componente M2 es prácticamente cero, lo que indica que las pérdidas de energía son pequeñas y, en particular, que el término de fricción en la ecuación de momento es despreciable [2]. Tercero, la fase de la componente K1 cambia  $152^\circ$  entre los extremos Norte y Sur del estrecho, con el gradiente máximo entre Ensenada T-1 y La Salina (a la altura de Puerto Escondido). Esto indica que el nodo de dicha componente se encuentra aproximadamente en esta posición.

#### Ancho constante

Con fines de comparación se han realizado las predicciones para el caso de profundidad y ancho constantes utilizando las ecuaciones (5) y (6). Los valores empleados para la longitud y profundidad del canal son  $L = 49500$  m y  $h = 7,7$  m (Fig. 3, curva a).

Para la componente M2 se tiene  $T = 12,42$  horas,  $\eta(x=0) = \eta_0 = 0,007$  m y  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,250$  m. Para la componente K1 se tiene  $T = 23,93$  horas,  $\eta(x=0) = \eta_0 =$

$-0,015$  m y  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,041$  m. Las predicciones para la amplitud de la elevación y de la velocidad de la corriente se muestran en las Figs. 4 y 5, curva a.

#### Ancho exponencialmente variable

La variación del ancho tal como se muestra en la Fig. 3, curva b, fue obtenida con la expresión (12) utilizando los siguientes valores:  $L = 49500$  m,  $b_0 = b(x=0) = 21000$  m,  $b(x=L) = 7150$  m (y por tanto  $\delta = 1,078$ ). El valor utilizado para la profundidad fue  $h = 7,7$  m.

Para la componente M2 las raíces de (14) son complejas conjugadas y vienen dadas por  $k_1 = p + iq$ ,  $k_2 = p - iq$ , donde  $p = 1,09 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$  y  $q = 1,20 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ . Las condiciones de contorno utilizadas son  $\eta(x=0) = \eta_0 = 0,007$  m =  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,250$  m. La solución final es:

$$\eta(x,t) = \left\{ \frac{\eta_L - \eta_0 \cos(qL)}{\sin(qL) \exp(pL)} \sin(qx) + \eta_0 \cos(qx) \right\} \exp(px) \sin(\omega t) \quad (21)$$

$$u(x,t) = \frac{g}{\omega} \left\{ \frac{\eta_L - \eta_0 \cos(qL)}{\sin(qL) \exp(pL)} (\psi \sin(qx) + q \cos(qx)) - \eta_0 (p \cos(qx) + q \sin(qx)) \right\} \exp(px) \cos(\omega t) \quad (22)$$

Para la componente K1 las raíces de (14) son reales, con valores de  $k_1 = 1,78 \times 10^{-5}$  y  $k_2 = 3,97 \times 10^{-6}$ . Las condiciones de contorno utilizadas son  $\eta(x=0) = \eta_0 = -0,015$  y  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,041$ . La solución final es:

$$\eta(x,t) = \left[ \frac{1}{\exp(k_2 L) - \exp(k_1 L)} \right] \left[ (\eta_L + \eta_0 \exp(k_2 L)) \exp(k_1 x) - (\eta_L + \eta_0 \exp(k_1 L)) \exp(k_2 x) \right] \sin(\omega t) \quad (23)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{1}{\exp(k_2 L) - \exp(k_1 L)} \right] \left[ (\eta_L + \eta_0 \exp(k_2 L)) k_1 \exp(k_1 x) - (\eta_L + \eta_0 \exp(k_1 L)) k_2 \exp(k_2 x) \right] \cos(\omega t) \quad (24)$$

Las predicciones así obtenidas se muestran en las Figs. 4 y 5, curva b.

#### Ancho linealmente variable

La variación del ancho tal como se muestra en la Fig. 3, curva c, fue obtenida con la expresión (16) para el tramo ubicado entre La Salina y Maracaibo, al Norte del cual se mantuvo su valor constante e igual al valor correspondiente a Maracaibo. El valor utilizado para l fue de 46800 m, mientras que para h se utilizó 7,7 m.

La solución para la elevación y velocidad de la corriente entre  $x = 0$  m y  $x = L = 30000$  m (a la altura de Maracaibo) viene dada por:

$$\eta(\xi,t) = [A_1 J_0(\xi) + A_2 Y_0(\xi)] \sin(\omega t) \quad (25)$$

$$u(\xi,t) = \frac{1}{\omega} [A_1 J_1(\xi) + A_2 Y_1(\xi)] \cos(\omega t) \quad (26)$$

$$\xi = k(x-l) = \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^{1/2} (x-l) \quad (27)$$

Para la componente M2 las condiciones de borde utilizadas para la elevación son  $\eta(x=0) = \eta_0 = 0,007$  m y  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,162$  m; mediante las ecuaciones (25) y (27) se obtienen valores de  $-0,020$  y  $-0,192$  para  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Para la componente K1, las condiciones de borde utilizadas para la elevación son  $\eta(x=0) = \eta_0 = -0,015$  m y  $\eta(x=L) = \eta_L = 0,038$  m; mediante las ecuacio-

nes (25) y (27),  $A_1$  y  $A_2$  toman valores de  $-0,063$  y  $-0,072$ , respectivamente.

Para las predicciones correspondientes al tramo entre Maracaibo y Punta de Palma se han empleado las ecuaciones (5) y (6), las cuales corresponden a un canal de ancho constante, con un valor de L y condiciones de borde correspondientes a esas posiciones. Las predicciones obtenidas mediante esta combinación de ancho linealmente creciente y constante se muestran en las Figs. 4 y 5, curva c.

## RESULTADOS

En las Figs. 4 y 5 se comparan las predicciones de la amplitud de la elevación y corriente de marea con las observaciones existentes para las dos componentes consideradas. Para la elevación de la marea se dispone de cuatro localidades con observaciones, mientras que para la corriente de marea sólo se dispone de una.

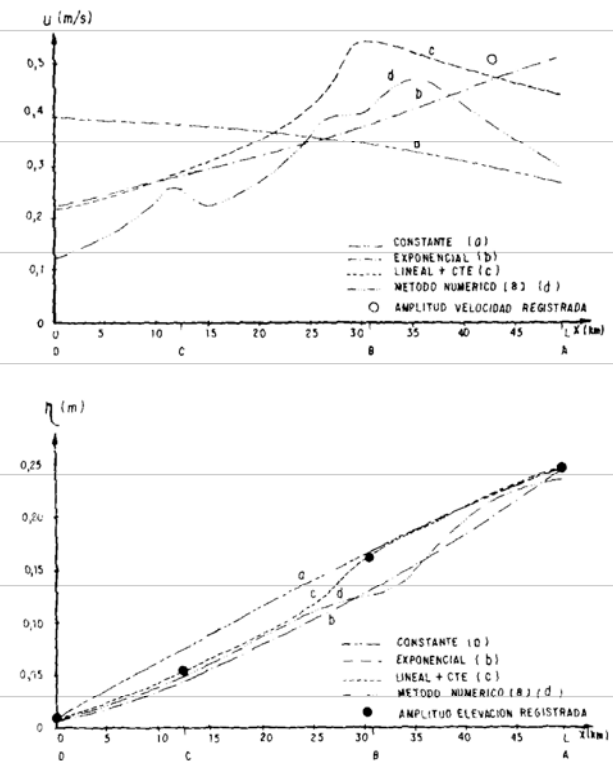


Fig. 4. Predicción de la elevación,  $\eta$ , y celeridad,  $u$ , de la componente M2 de la marea a lo largo del Estrecho de Maracaibo. Curva a: ancho constante; curva b: ancho exponencialmente decreciente; curva c: combinación de ancho linealmente decreciente y ancho constante; curva d: modelaje numérico por [7].

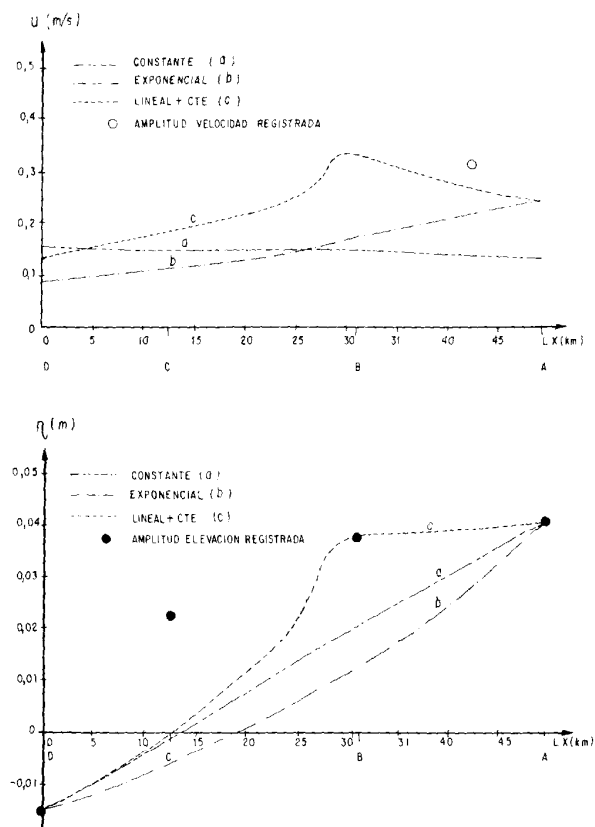


Fig. 5. Predicción de la elevación,  $\eta$ , y celeridad,  $u$ , de la componente K1 de la marea a lo largo del Estrecho de Maracaibo. Curva a: ancho constante; curva b: ancho exponencialmente decreciente; curva c: combinación de ancho linealmente decreciente y ancho constante.

Para la componente semidiurna M2 (Fig. 4) las observaciones de la elevación de la marea se ajustan muy bien a la curva c, mientras que el único dato disponible para la corriente de marea es apenas un 7% mayor que las predicciones de las curvas b y c. En estas predicciones de la corriente de marea la curva a difiere notablemente de las curvas b y c, y en particular del punto de observación existente. En esta figura también se han incluido las predicciones realizadas por Redfield [7] utilizando el modelo numérico de Defant [1] (para una descripción detallada de este modelo consúltese Pelegrí y Avila [14]). Puede apreciarse que el ajuste de la curva c a los datos es superior al obtenido con este modelo numérico.

Para la componente diurna K1 (Fig. 5) se repite el hecho de que el mejor ajuste corresponde a la curva c. La predicción de la corriente de marea con esta curva difiere en un 14% con respecto a la observación existente en

Puerto Miranda. En cuanto a la elevación de la marea en la localidad de Ensenada T-1, se registra una importante diferencia entre el valor observado y cualquiera de las predicciones. Sin embargo, esta discrepancia puede ser atribuible a la posible existencia de pequeñas inexactitudes en los datos (en este caso del orden de 2 cm), las cuales ocasionarían que la presencia de un nodo para las componentes diurnas cerca de Ensenada T-1 no sea fácilmente apreciable en el análisis armónico. Es necesario señalar que el excelente ajuste de la curva c para la elevación de la marea con los otros tres datos es forzado, por cuanto éstos han sido empleados como condiciones de borde (La Salina y Maracaibo para el tramo linealmente variable y Maracaibo y Punta de Palma para el tramo constante). Es por ello que este resultado no puede ser utilizado para respaldar la bondad de una u otra representación de la variación del ancho del canal.

En general, puede señalarse que el mejor ajuste entre las predicciones y observaciones de la elevación y corriente de marea corresponde al caso en que la variación del ancho del canal se describe como la combinación de un tramo constante y otro linealmente variable (curva c). Adicionalmente, el ajuste para la elevación de la marea es algo superior si el ancho del canal se mantiene constante (curva a) que si se representa con una variación exponencial (curva b), mientras que para la corriente de marea la situación es la opuesta.

En el análisis clásico de un canal constante es de esperarse que las corrientes máximas ocurran en el nodo (asociadas a las elevaciones mínimas). Sin embargo, para un ancho variable con la distancia, por razones de continuidad de flujo, los valores máximos de la corriente pueden presentarse en una zona alejada del nodo. Esta es la razón por la cual en el análisis del Estrecho de Maracaibo, para las componentes M2 y K1, las predicciones de la corriente de marea para un canal constante difieren considerablemente de los otros casos. En el caso particular del ancho del canal, representado por una combinación de una reducción lineal y un tramo constante, se observa que mientras el ancho disminuye la corriente aumenta, pero tan pronto como se torna constante la corriente vuelve a disminuir a medida que se aleja del nodo.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado la base teórica y la metodología analítica para la resolución de las ecuaciones lineales de la marea en canales, cuya sección varía con la distancia en forma simple, es decir, de manera tal que puede ser representada mediante una o la combinación de varias funciones. Esta consiste, básicamente, en formar una ecua-



ción para la elevación (o velocidad), sujeta a condiciones de borde, que se resuelve por separación de variables. La mayor dificultad del método radica en obtener la solución de la ecuación que contiene la dependencia espacial, para anchos y profundidades expresados por cualquier función. Una vez logrado esto y con el conocimiento de las condiciones de borde para la elevación (o velocidad), se obtienen expresiones explícitas para la elevación y la corriente de marea. En este trabajo se ha presentado la solución explícita para los casos en que la profundidad es constante y el ancho varía exponencial y linealmente.

El método permite la combinación de diferentes funciones que describan el ancho y la profundidad, con el único requisito de que la amplitud de la elevación (o velocidad de la corriente) sea conocida en los puntos donde la función que se habrá de utilizar cambie. Esto es de gran interés, pues si permitimos al eje principal del canal variar de dirección con la distancia, prácticamente cualquier canal de sección variable puede ser representado con una combinación de este tipo. No obstante, si sus cambios en dirección son bruscos, entonces deberían incluirse efectos de pérdida de energía por reflexiones internas, los cuales no se consideran en este trabajo. Una ventaja adicional del método radica en que no requiere de las constantes para la elevación y corriente en un punto del área, sino que basta con conocer las constantes de elevación correspondientes a dos localidades. Esta ventaja es de orden práctico por cuanto los registros extensos de las corrientes son normalmente más difíciles de obtener. Finalmente, la metodología aquí propuesta, además de conducir a la obtención de una expresión explícita, permite una mejor identificación de los parámetros importantes en la dinámica del sistema. Así, por ejemplo, cuando la profundidad es constante y el ancho varía exponencialmente con la distancia en el proceso de calcular la solución explícita, se pueden determinar las longitudes de onda modificadas para el sistema.

#### AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido realizado como parte de los proyectos "Estudio Hidrográfico de la Bahía El Tablazo" y "Patrones de Corrientes y Vientos en Puerto Miranda" que INTEVEP, S.A. adelanta para MARAVEN, S.A.

#### APENDICE

Si se incluye un término de fricción lineal en el fondo, el sistema de ecuaciones por resolver es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \alpha u \quad (3')$$

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \quad (2')$$

La ecuación única para la elevación ahora es:

$$b \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gA \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - g \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha b \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3'')$$

donde  $\alpha = 2\pi/\gamma$ , siendo  $\gamma$  un tiempo característico de decaimiento [1-4,7,14]. Mediante separación de variables esta ecuación puede descomponerse en dos ecuaciones equivalentes que dependen exclusivamente de la distancia y el tiempo respectivamente. La ecuación con la dependencia espacial no es modificada (ecuación 9), mientras que la de dependencia temporal ahora es:

$$\eta_2'' + \alpha \eta_2' + \mu^2 \eta_2 = 0 \quad (8')$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes. Su solución depende de las raíces de la ecuación característica

$$v^2 + \alpha v + \mu^2 = 0 \quad (28)$$

Si existen dos raíces reales ( $v_1, v_2$ ) entonces la solución es:

$$\eta_2(t) = C_1 \exp(v_1 t) + C_2 \exp(v_2 t); \quad (29a)$$

si la raíz es real doble ( $v = v_1 = v_2$ ) entonces se obtiene

$$\eta_2(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(vt); \quad (29b)$$

si las raíces son complejas conjugadas ( $v_1 = p + iq; v_2 = p - iq$ ) la solución es:

$$\eta_2(t) = \exp(pt)(C_1 \cos(qt) + C_2 \sin(qt)). \quad (29c)$$

Sin embargo, a menos que  $\alpha = 0$ , estas soluciones son incompatibles con las condiciones de borde en  $x = 0, L$ , que requieren:

$$\eta(x=0, t) = \eta_1(x=0) \eta_2(t) = \eta_0 \sin(\omega t) \quad (30a)$$

$$\eta(x=L, t) = \eta_1(x=L) \eta_2(t) = \eta_L \sin(\omega t + \phi_L) \quad (30b)$$

(esto es cierto incluso si existe un desfase a lo largo del canal,  $\phi_L$ , distinto de cero). En el caso en que  $\alpha = 0$  se recupera el problema sin fricción y la solución viene dada por (10). Esto sugiere que para la solución analítica del problema es inadecuado expresar el término de fricción en forma lineal.

## REFERENCIAS

1. DEFANT, A. Untersuchungen über die Gezeitenerscheinungen in Mittelund Randmeeren, in Buchten und Kanale. *Deukschr. Akad. Wiss. Wien*, 86: 57-174. 1919.
2. DEFANT, A. *Physical Oceanography*. Vol. 2, Oxford; Pergamon, viii + 598 p. 1961.
3. PROUDMAN, J. *Dynamical Oceanography*. London; Methuen, 409 p. 1953.
4. IPPEN, A. T.; HARLEMAN, D. R. F. Tidal Dynamics in Estuaries. En *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, Ippen, A.T. (Ed.) New York; McGraw-Hill, p. 493-545. 1966.
5. PERROUD, P. *The Propagation of Tidal Waves into Channels of Gradually Varying Cross Section*. Technical Memorandum No. 112, Beach Erosion Board, Washington, D.C., 1959.
6. PELEGRI, J. L.; FEBRES, G. *Modelaje de la trayectoria y esparcimiento de derrames en la Bahía El Tablazo y el Estrecho de Maracaibo*. Inf. Téc. INT-01336,85. INTEVEP, S.A. Los Teques. 1985.
7. REDFIELD, A.C. The Tidal System of Lake Maracaibo, Venezuela. *Limnol., and Ocean.*, 6(1): 1-12. 1961.
8. ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55. xiv + 1046 p. 1964.
9. SHUREMAN, P. *Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides*. U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 98, iv + 317 p. 1971.
10. PELEGRI, J. L. *Análisis armónico de registros de corriente de corta duración con el método de mínimos cuadrados*. Inf. Téc. (en preparación). INTEVEP, S.A. Los Teques, 1987.
11. PAZ CASTILLO, F. *Mareógrafos del Golfo de Venezuela y Lago de Maracaibo*. Publicación I.N.C. DI-7. 1972.
12. MOLINES, J.M.; FORNERINO, M. Predicción de Mareas en el Lago de Maracaibo. *V Jornadas Nacionales de Ingeniería Hidráulica*, Caracas, p. 127-146. 26-28 de junio, 1985.
13. PELEGRI, J. L.; MASCIANGIOLI, P. *Predicción de corrientes en Puerto Miranda - Tablas de corrientes para 1987*. Inf. Téc. INT-EPTP-0015. 87. INTEVEP, S.A. Los Teques, 1987.
14. PELEGRI, J. L.; AVILA, R.G. Las mareas como sistemas cooscilantes en los Golfos de Venezuela y Paria. *Rev. Téc. Intevep*, 6(1): 3-15. 1986.

Recibido: 25-04-86  
Aprobado: 24-02-87