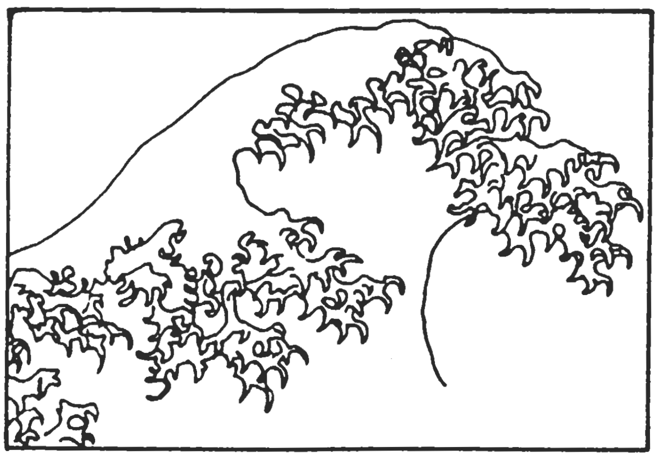
FRACTALES Y OCEANOGRAFIA

José M. Pacheco
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias del Mar
Universidad de las Palmas de Gran Canaria

1. INTRODUCCION

Bajo el nombre de estructuras oceánicas comprenderemos muchos aspectos macroscópicos del ambiente marino. A modo de ilustración, tenemos fenómenos de pequeña escala, tales como la ruptura de una ola (Fig. 1); otros a escala media, por ejemplo manchas de plancton o afloramientos de masas de agua; finalmente los de gran escala, como pueden ser las estelas y los anilos de Von Karman a sotavento de las islas, hasta llegar al orden de las ondas planetarias (Ref. 5).

FIGURA 1
Dibujo de Hokusai: Ola rompiendo



El estudio de tales estructuras se lleva a cabo según el método habitual en Física: Se propone algún modelo matemático, y se intenta la interpretación de los resultados y predicciones que provee. Los modelos más comunes están basados en la Mecánica de Fluidos; en ellos se aplican el Análisis Matemático y los refinamientos del Cálculo Numérico: el trabajo de los Oceanógrafos consiste en analizar la adecuación de tales modelos a los datos observados.

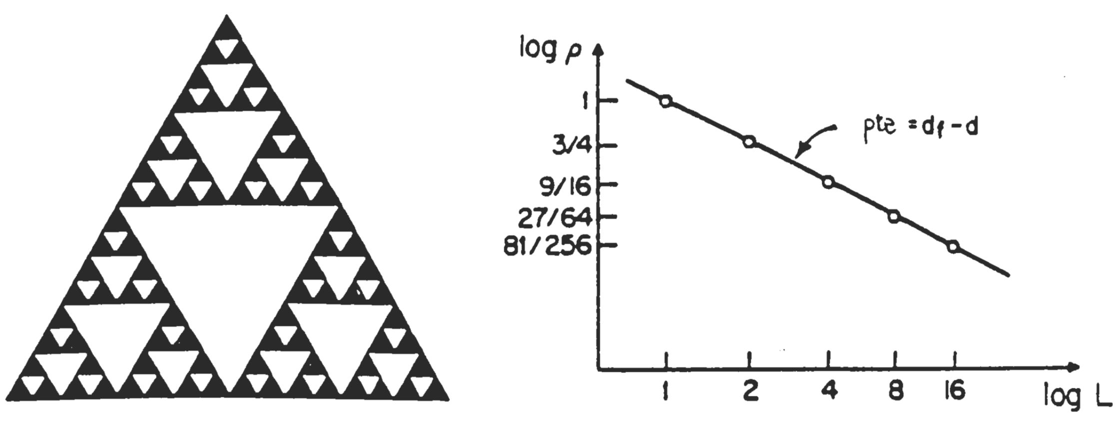
Sin embargo, esta modelización no suele tener en cuenta muchas características de tipo geométrico: Unicamente con el llamado *análisis de escala* se simplifican las ecuaciones de la Hidrodinámica eliminando términos no lineales, muchas veces más por incómodos que por irrelevantes.

Aquí vamos a explorar una vía geométrica, basada en la idea de escala, para modelizar algunas clases de observaciones oceanográficas: El análisis fractal de las estructuras oceánicas. Para lo que nos ocupa, una estructura oceánica será una figura bidimensional observable en la superficie del océano, que idealizaremos como un plano. Es evidente que dichas figuras, en las que se han despreciado características tridimensionales de pequeño tamaño, son el resultado de interacciones complejas tanto en el seno del mar como en las interfaces con la atmósfera y las costas.

Existen fenómenos cuya estructura aparece diferente según el grado de resolución de las observaciones, mientras que otros presentan la misma a cualquier escala (Fig. 2). De estos últimos se dice que presentan *estructura fractal,* y que son representados geométricamente por *figuras autosemejantes.* Esta definición es una idealización sólo realizable en el marco teórico del Análisis Matemático, pues los hechos físicos reales están restringidos a una gama de escalas de observación definida por las limitaciones habituales de los instrumentos de medida. Para este caso, al que pertenecen las estructuras oceánicas, se suele usar el nombre de *seudofractales* o *fractales aleatorios* (Ref. 2).

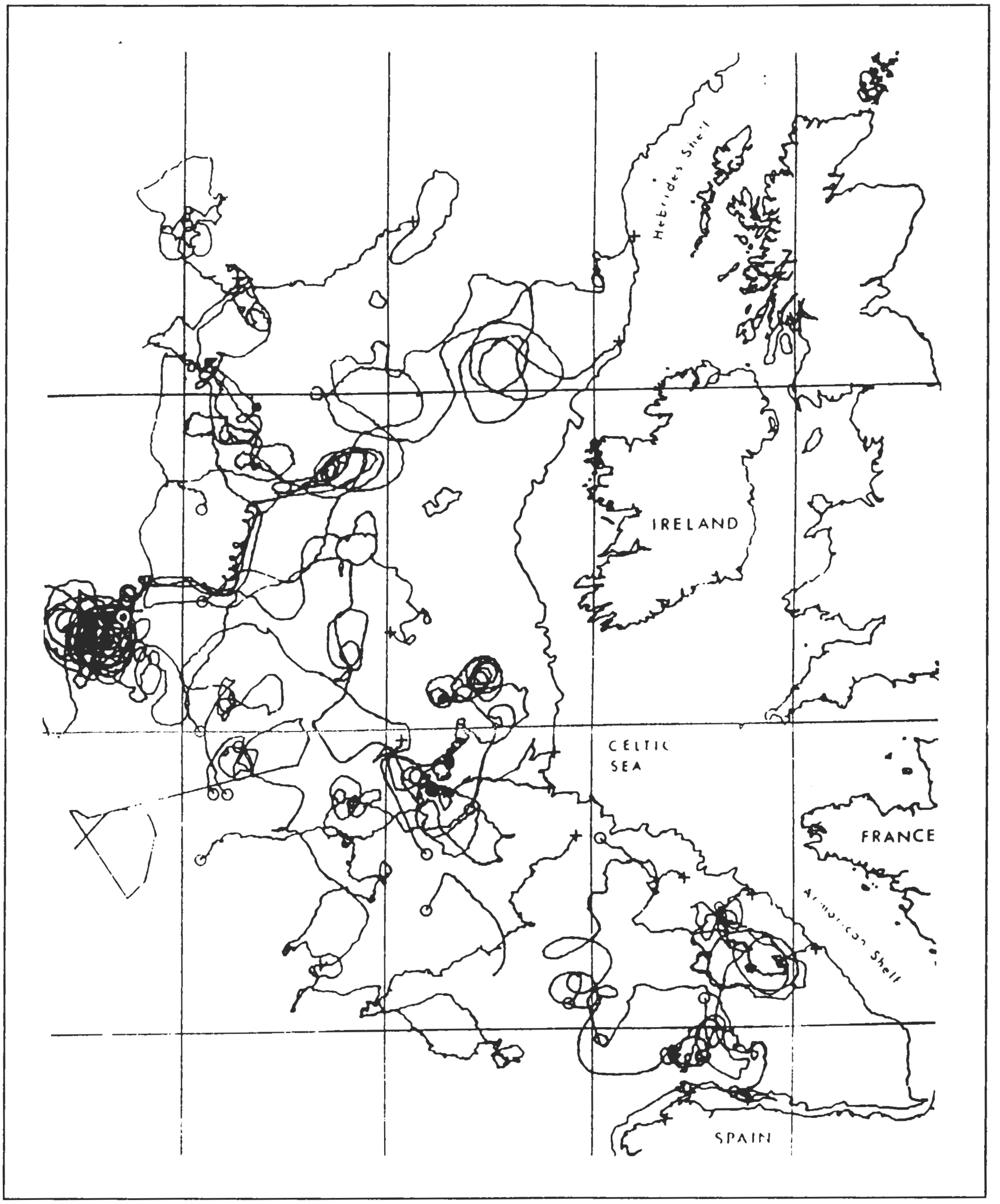
FIGURA 2

Un objeto fractal. Cálculo de la dimensión fractal



Lo interesante del análisis fractal es que ciertas características geométricas –de las que se supone reflejan hechos físicos importantes– se pueden describir de forma muy simple mediante las llamadas *dimensiones fractales,* que recogen diferentes clases de informaciones presentes en el fenómeno físico estudiado (Ref. 4). Además tales números son fácilmente calculables mediante algoritmos sencillos aplicados a los datos disponibles. Desde luego, la observación al final del párrafo anterior nos indicará que las dimensiones fractales calculadas en la realidad no son sino aproximaciones limitadas por las escalas reales de observación: Una estructura oceánica puede presentar características de autosemejanza en más de un rango de escalas, lo que debe interpretarse adecuadamente, como se verá más adelante (Fig. 3) (Ref.5).

FIGURA 3
Trayectorias de boyas a la deriva en el Océano Atlántico



2. GEOMETRIA FRACTAL PARA OCEANOGRAFOS

La Geometría Fractal es el estudio de algunas propiedades geométricas –de conjuntos de puntos– que se mantienen invariantes al considerar tanto el conjunto como sus partes. La principal propiedad analizada es la *conservación de la forma aparente*, que tiene lugar, intuitivamente, por aplicación de semejanzas. Pasar de un conjunto a sus partes implica métricamente la consideración de una reducción de tamaño: Por ello los conjuntos estudiados son acotados (no sólo eso, la teoría general abstracta toma como compactos tales conjuntos).

Supongamos una función real de variable real f(t), que representará una descripción o medida de algún fenómeno: El incremento de f, dado por la diferencia $f(t+\Delta t)-f(t)$, es una medida del *detalle* con que se realizan las observaciones con un instrumento que discrimine hasta una escala Δt. Cambiar de escala quiere decir utilizar otra, $\lambda\Delta t$, donde λ se llamará factor de escala. En este caso el detalle en la observación viene dado por $f(t+\lambda\Delta t)-f(t)$: Es de esperar que al variar la escala el detalle varíe también, y si se tiene una ley del tipo:

$$f(t+\lambda\Delta t) - f(t) = \lambda^k(f(t+\Delta t) - f(t)),$$

se dice que f es *autosemejante con exponente de escala k.* Este exponente satisface las acotaciones $0<k\leq 1$ y su valor es un primer ejemplo de *dimensión fractal.* Hay que señalar que, debido a los métodos de muestreo y a los errores experimentales, la interpretación correcta de f(t) sería la de valores de una variable aleatoria discreta, de modo que la expresión:

$$f(t+\lambda\Delta t) - f(t) =\cdot\lambda^k(f(t+\Delta t) - f(t)$$

hay que pensarla como igualdad de distribuciones estadísticas.

El conjunto de observaciones {f(t)} es un subconjunto de algún intervalo **I** de la recta real, y puede «llenarlo» completamente o no. Precisamente, k es una medida de «cuánto llena el conjunto {f(t)} el intervalo **I**". Cuando vale 1, los puntos f(t) están repartidos por todo el intervalo, densamente. La dimensión espacial de **I** es 1, luego la dimensión fractal mide algo diferente de la multiplicidad espacial: La organización dentro del conjunto. Por tanto las dimensiones fractales de estos conjuntos, números positivos menores que 1, indican cómo se hallan repartidas las observaciones en el rango de sus posibles valores, en función de la resolución utilizada. Parece, por tanto, razonable que diferentes mecanismos generadores den origen a dimensiones fractales distintas. Invirtiendo el razonamiento tendremos justamente el análisis fractal.

La dimensión fractal que acabamos de definir se puede tomar como medida de las *escalas temporales* en las que los fenómenos son autosemejantes; por regla general los datos unidimensionales f(t) se generan como series temporales de observaciones, tomando t a intervalos discretos (Ref. 8).

Muchas estructuras oceanográficas, tales como trayectorias de boyas, fronteras entre masas de agua de distinto tipo, límites de manchas *(patches)*, etc. presentan características lo bastante complejas para considerarlas como fractales autosemejantes en dimensión dos, pues se nos presentan como curvas trazadas en el plano. Existen varias formas de definir el concepto de dimensión fractal para una curva plana. Algunas de ellas nos darán información espacial, y otras, temporal. Ello se deducirá inmediatamente de su construcción.

La autosemejanza de un segmento de curva puede describirse mediante el modo en que varía su longitud calculada con la unidad de medida que se utilice. Es evidente que un paso pequeño permite detectar características de menor tamaño que uno grande, con lo que la longitud calculada aumentará al añadir cada vez más detalle, y si existe autosemejanza, ese aumento estará en proporción a la razón de la semejanza. En cualquier caso, el valor calculado es una función del paso usado. Si ε representa ese paso, o abertura de compás, utilizado en cada estimación, y Long(ε) el valor registrado, cuando se reconoce una evolución –para e cada vez menor– dependiente de un exponente κ en la forma:

$$\mathrm{Long}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-k}$$

se obtiene una dimensión fractal, que definimos como:

$$D_{long} = 1+k$$

Desde luego k es un número menor que 1, (para verlo basta con pensar las mediciones como observaciones unidimensionales, y además observar que al disminuir el paso aumenta por lo general la longitud calculada), con lo que la dimensión fractal obtenida es un número positivo entre 1 y 2. Ello concuerda con la idea intuitiva, ya expuesta antes, de «cuando llena la curva el plano». Tomando logaritmos en Long(ε) ~ ε^{-k}, y despejando k se tiene:

$$k = -\frac{\log(\mathrm{Long}(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}$$

de modo que k se interpreta como la pendiente de la recta que en papel doblemente logarítmico representa las mediciones efectuadas sobre el objeto bidimensional autosemejante. Esta es posiblemente la dimensión fractal más popular (Ref. 6).

Otro concepto de dimensión fractal (de interpretación espacial) se obtiene estadísticamente mediante la idea de correlación, y es adecuada para datos bidimensionales discretos: Supongamos que tenemos una serie de puntos (x(t), y(t)) muestreados en una trayectoria, donde ahora la variable t es discreta (p. ej., tal es el caso del seguimiento de boyas, u otros artefactos oceanográficos dejados a la deriva que emiten o graban su posición a intervalos discretos). En este caso estamos considerando simplemente una nube de puntos. Tomamos un valor positivo cualquiera ε, pequeño, y contamos el número **N**(ε) de pares de puntos cuya distancia mutua sea $\leq \varepsilon$. Si N es el número de puntos de la nube, definimos la cantidad:

$$C(\varepsilon) = \frac{N(\varepsilon)}{N(N-1)}$$

que representa una especie de correlación. Cuando C(ε) ~ ε^k si ε tiende a 0, tenemos definida una dimensión fractal llamada dimensión de correlación:

$$D_{corr} = k$$

para el conjunto de puntos representativo de la curva. Señalemos que al calcular esta dimensión se pierde la información relativa a la ordenación temporal de las observaciones; de este modo el conjunto de puntos puede haber sido generado por muchas trayectorias diferentes que desde este punto de vista tienen las mismas propiedades fractales (Ref. 1).

Continuando la idea del principio de este apartado, consideremos una curva plana complicada, dada por sus ecuaciones paramétricas (x(t), y(t)). Si cada una de las coordenadas resulta ser autosemejante, con parámetros de escala respectivos k_1 y k_2, ello sugiere tomar un valor promedio k de ambos valores como parámetro de escala de la curva. Físicamente equivale a suponer una cierta isotropía en el medio: Incluso podría llegarse a tomar el mismo valor k para ambas coordenadas. Luego otra manera de definir la dimensión fractal (interpretación temporal) de la curva será un número entre 1 y 2:

$$D_{frac} = \min\left(\frac{1}{k}, 2\right)$$

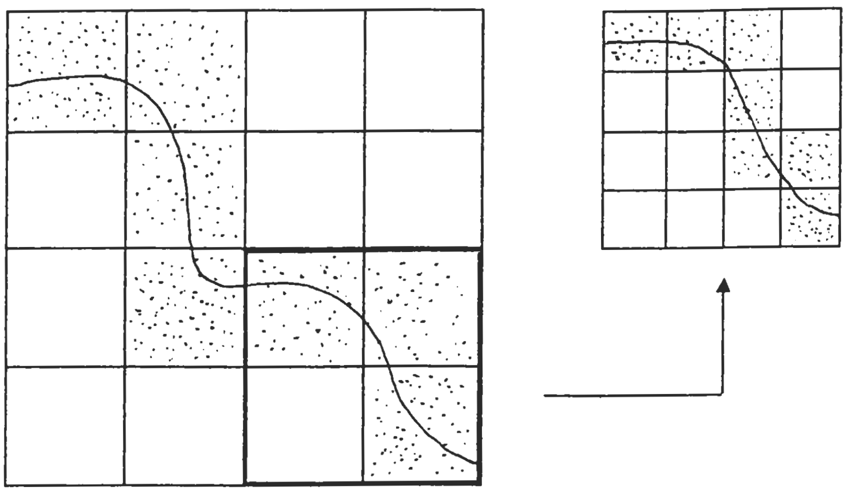
En observaciones experimentales, especialmente aquellas obtenidas a partir de satélites u otros sensores, es difícil distinguir con claridad las curvas cuyo análisis se quiere efectuar. Hay varias causas para esa «borrosidad», aunque la más importante es la finitud de la paleta de grises o de colores de la interfaz gráfica y el que los *pixels* no son puntos ideales, sino que representan areas finitas. Este hecho nos dice que los mecanismos anteriores de cálculo de dimensiones fractales pueden resultar inoperantes por la propia imposibilidad de definir correctamente el objeto que se va a estudiar. Aún así, es posible calcular dimensiones fractales.

Veamos el procedimiento denominado *box-counting*, inspirado directamente en la definición de curva continua –dada por Menger hacia 1930 (Refs. 3, 7)– como límite de enlosados del plano (Fig. 4). Este modo permite calcular a pesar de la indefinición de la frontera de las estructuras observadas: Supongamos la curva trazada en el plano, de tal modo que incluso aceptamos como definición de ella un conjunto de *pixels* con el mismo nivel de gris, por ejemplo. Enlosando el plano mediante N(ε) cuadrados de lado ε (en el caso ideal este valor se puede disminuir tanto como se quiera, pero en el trabajo real hay una limitación inferior dada por la resolución del pixel) y numerándolos, podemos calcular la probabilidad $P_j(\varepsilon)$ de que el cuadrado j-ésimo contenga algún fragmento de la curva. Considerando los sucesivos momentos de esas probabilidades se obtiene la siguiente ley de escala cuando ε disminuye:

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} (P_j(\varepsilon))^k \sim \varepsilon^{(k-1)D(k)}$$

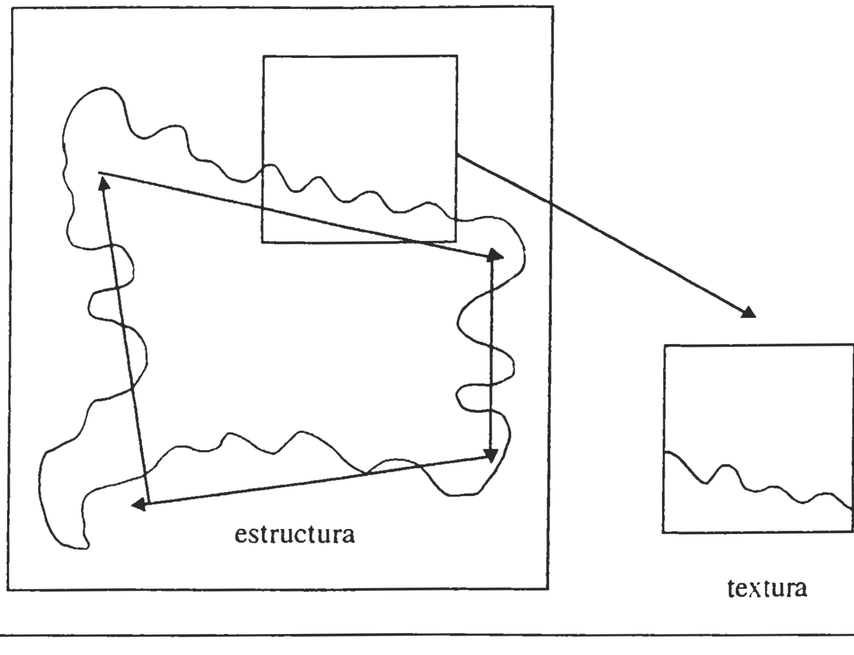
Al variar k los valores D(k) también variarán (por lo general, al crecer k, los D(k) decrecen, y para k=2 es precisamente D_{corr}=D(2)), lo que define una familia o escala de dimensiones fractales, todas ellas referidas al mismo conjunto de puntos. Ello indica la existencia de mecanismos físicos subyacentes de distintas clases que permiten dar explicaciones diferentes al fenómeno observado. Ene ste caso se dice que es un *multifractal*.

FIGURA 4
Definición de Menger de las curvas continuas



La última observación indica que en una misma estructura se pueden obtener, incluso definiendo sistemática y unívocamente la dimensión fractal, diferentes valores de ésta. Ya se indicó antes –para la definición mediante el compás– que es posible la existencia de diversos rangos de escalas donde se detecta autosemejanza. Esta es, por tanto, otra forma de definir un multifractal. En situaciones reales es muy corriente encontrar dos de tales rangos o extensiones. Uno de ellos corresponde a propiedades macroscópicas *estructurales*, se refiere a la geometría «en grande» mientras que el otro se refiere a propiedades más finas, o *texturales*, relativas a una visión «en pequeño» del objeto o estructura estudiado (Fig. 5).

FIGURA 5
Variantes en la interpretación de la dimensión fractal



3. SOBRE LA INTERPRETACION FISICA DE PROPIEDADES FRACTALES

La geometría fractal como modelo matemático de hechos físicos presenta tres características fundamentales (Ref. 9):

1) Es esencialmente un método de clasificación, o bien un mecanismo de diagnóstico; sus aplicaciones en la predicción son relativamente limitadas, salvo en el cálculo de dimensiones fractales de atractores reconstruidos a partir de series temporales.

2) Su importancia geométrica, de donde deberán salir las interpretaciones físicas, radica en la detección de rangos de valores específicos en los que se presente un comportamiento con carácter «de escala».

3) Es claro que la aplicación de las técnicas fractales en Oceanografía depende fuertemente de los desarrollos en Teledetección y en Informática.

Tras los comentarios anteriores se puede buscar la física de las dimensiones fractales. En la literatura oceanográfica actual es corriente encontrar artículos acerca de diversas situaciones consideradas fractalmente, pero pocas interpretaciones físicas. Es bastante probable que esta carencia se deba a la dificultad de formular la turbulencia y la difusión en situaciones tan complejas como las encontradas en Oceanografía, aunque también hay que señalar como aviso, la posibilidad de que esta modelización no sea la más adecuada mientras no se produzcan avances significativos en otras ciencias. El ejemplo, no muy lejano, de la aplicación y posterior olvido de la Teoría de Catástrofes en muchas ciencias, desde la Biología a la Sociología pasando por la Física o la Geología –sin resultados significativos– no debe dejarse de lado.

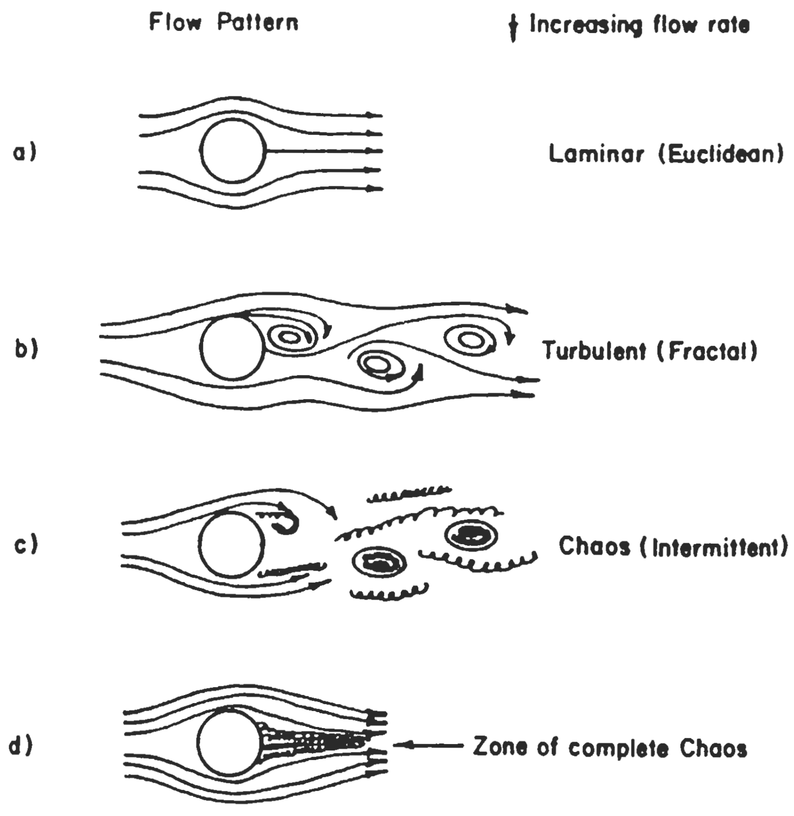
El mecanismo explicativo de transferencia de energía más aceptado en Oceanografía es la turbulencia, que intuitivamente se describe como la coexistencia de muy variadas escalas espaciales y temporales en una misma situación. Desde el punto de vista matemático el tratamiento de la turbulencia se hace estadísticamente, sustituyendo la señal u observación f(t) por un valor promedio más una fluctuación:

$$f(t) = f_m + f^*(t),$$

o más geométricamente, mediante cascadas de bifurcaciones que se interpretan como indicio de un comportamiento caótico (Fig. 6). Esta última interpretación conduce de forma directa a tener en cuenta los límites entre los que ocurre esa cascada, de donde parece inmediata la aplicación de los fractales. Cualquiera que sea el modo elegido, se pone de relieve la extremada complejidad de las pautas observadas, que aquí consideraremos como curvas en la superficie del océano.

En ambiente turbulento la trayectoria de una partícula se presenta como una curva de aspecto complicado (Fig. 3). Por tanto, es pensable que las características fractales de las trayectorias puedan tomarse como medidas de la turbulencia global, y ello quedará validado si se observa que la complejidad de la trayectoria –medida por la dimensión fractal– varía correlativamente con algunos parámetros más habituales, pudiendo seguirse también, mediante sucesivas oleadas de observaciones, la evolución temporal de situaciones turbulentas localizadas: He ahí un trabajo de investigación pendiente.

FIGURA 6
Transición a la turbulencia, anillos de Von Karman, etc.



La interfaz entre diferentes masas de agua –por ejemplo entre una masa contaminada por un vertido y su ambiente circundante– permite diferentes estudios fractales, tanto en dimensión 2 como en dimensión 1. A primera vista el límite entre ambas masas aparece como una curva más o menos complicada, que es el primer candidato al estudio fractal. Sin embargo, un análisis más fino revela una gradación –asimilable con curvas de nivel– entre el interior de la masa contaminada y su exterior, definiendo lo que podremos llamar «capa de mezcla». Dos posibles formas de considerar fractalmente esta situación nos aparecen de inmediato:

a) Seleccionar una familia de tales curvas de nivel y observar la evolución de la dimensión fractal de las mismas (análisis bidimensional). Este estudio ofrecerá resultados sobre el problema de cómo depende el coeficiente de difusión de la concentración.

b) Trazar un transecto –línea recta transversal– a través de la capa de mezcla y considerar la dimensión fractal de la serie unidimensional de observaciones a lo largo del mismo. Repitiendo esta operación sobre distintos transectos se tiene una descripción de la distribución espacial de los fenómenos responsables de la dispersión mutua de las diferentes masas, pudiéndose después proceder a su identificación.

Precisamente la forma b) recién expuesta provee un modo fractal de afrontar el problema de la turbulencia en estructuras vorticales, tales como los anillos de Von Karman en la estela de las islas. Trazando diferentes transectos se obtiene un espectro de dimensiones fractales para datos unidimensionales que resultará en una interpretación nueva de la turbulencia. Este análisis se ha empleado también al estudiar ondas viajeras como soluciones de la ecuación de Kortewegde Vries-Burgers, que permiten dar una formulación alternativa al problema de la turbulencia.

Como conclusión, el estudio fractal de las estructuras oceánicas debe considerarse como un complemento a las formas habituales de análisis, señalando la importancia de tener en cuenta varias características geométricas no contempladas en las modelizaciones clásicas.

4. REFERENCIAS

(1) ANDERSON B. et al. (1990): «The fractal dimension of relative Lagrangian motion», *Tellus, 42A*, 550-556.

(2) BUNDE, A.; HAVLIN, S. (eds.) (1991): *Fractals and disordered systems*, Springer-Verlag, Berlin.

(3) DETWILER, A. (1990): «Analysis of cloud imagery using box-counting», *Int. J. Remote Sensing, 11(5)*, 887-898.

(4) GUMIEL, P. et al. (1992): «El uso del análisis fractal como discriminación de sistemas filonianos auríferos en el área de La Codosera», Extremadura, *Geogaceta, 12*, 3-7.

(5) KAYE, B. (1990): *A randon walk through fractal dimensions*, VCH Verlag, Weinheim.

(6) KENNEDY, S.; LIN, W.H. (1986): «FRACT, a FORTMAN subroutine to calculate the variables necessary to determine the fractal dimension of closed forms», *Computers and Geosciences, 12(5)*, 705-712.

(7) MENGER, K. (1932): *Kurventheorie*, Springer-Verlag, Berlin.

(8) OSBORNE, A. et al. (1989): «Fractal drifters in the Kuroshio extension», *Tellus 41A*, 416-435.

(9) PACHECO, J. (1993): «Propiedades fractales de las estructuras oceáncias». *Seminario de Oceanografía Física de la Facultad de Ciencias del Mar*, Las Palmas.