AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2024) 26, 41-63 | aiem.es

seiem.es

Obstáculos y dificultades de los alumnos en la incorporación de los números enteros

Obstacles and Difficulties of Students in Incorporating Integer Numbers

Alberto Zapatera Llinares @ [1], Eduardo Quevedo Gutiérrez @ [2], Sofía González Gallego @ [3], Alejandro Santana Coll @ [3], Judit Álamo Rosales @ [4]

[1] Universidad CEU Cardenal Herrera (España)
[2] Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (España)
[3] Universidad de La Laguna (España)
[4] Colegio Claret Las Palmas (España)

Resumen ∞ La incorporación de los números enteros en la enseñanza de las matemáticas supone una ruptura con la representación de número construida a partir de los números naturales e implica un cambio profundo en el pensamiento matemático de los alumnos. En esta investigación se estudia la incorporación de los números enteros en la enseñanza, analizando las respuestas de 266 alumnos de 6.º de Primaria y de 1.º de Secundaria a un cuestionario en el que deben identificar e interpretar dos tipos de situaciones (estado y aditiva) expresadas en tres dimensiones (abstracta, recta y contextual) y las transferencias entre las dimensiones. A partir de los resultados se conjetura la persistencia del obstáculo epistemológico del número como expresión de cantidad, las dificultades para diferenciar los distintos significados del signo menos y los obstáculos didácticos de una enseñanza, con frecuencia, descontextualizada que prima el cálculo operacional y relega la recta numérica.

Palabras clave ∞ Números; Aprendizaje; Obstáculos epistemológicos; Obstáculos didácticos; Dificultades en el aprendizaje

Abstract ∞ The incorporation of wholes numbers in the teaching of mathematics supposes a break with the number representation built from natural numbers and implies a profound change in the students' mathematical thinking. This research studies the incorporation of wholes numbers in teaching, analyzing the responses of 266 students from 6th grade of Primary and 1st grade of Secondary to a questionnaire in which they must identify and interpret two types of situations (state and additive) expressed in three dimensions (abstract, straight and contextual) and transfers between dimensions. Based on the results, it is conjectured the persistence of the epistemological obstacle of the number as an expression of quantity, the difficulties to differentiate the different meanings of the minus sign and the didactic obstacles of a frequently decontextualized teaching that gives priority to operational calculus and relegates the straight line numeric.

Keywords ∞ Numbers; Learning; Epistemological obstacles; Didactic obstacles; Learning difficulties

Zapatera Llinares, A., Quevedo Gutiérrez, E., González Gallego, S., Santana Coll, Al. & Álamo Rosales, J. (2024). Obstáculos y dificultades de los alumnos en la incorporación de los números enteros. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 26*, 41-63. https://doi.org/10.35763/aiem26.4725

1. Introducción

Históricamente, la concepción de número como representación de la realidad ha dificultado la aceptación del número entero como objeto matemático. Esta concepción, que impregnó todo el pensamiento matemático hasta finales del siglo XIX, consideraba que los objetos matemáticos, y la matemática en general, surgen de la necesidad de representar situaciones concretas y reales, por lo que el número solo era concebido como cantidad o medida de una magnitud real.

Desde esta perspectiva, los números negativos, al no tener soporte en la realidad, y a pesar de que la comunidad matemática los conocía y "usaba con profusión y sin dificultad" (Cid, 2016, p. 17), no eran considerados como objetos matemáticos, e incluso, con frecuencia, eran rechazados por algunos matemáticos, que los calificaban de falsos, absurdos o ficticios.

De esta manera, la historia de los números negativos está llena "de desviaciones, de regresiones y de obstáculos" (Schubring, 2007, p. 2) y su proceso de aceptación "hasta ser considerados como números en la misma forma que lo eran los naturales y los racionales no negativos" (Bruno, 2001, p.1) ha sido largo y complejo. Este proceso de aceptación culminó a mediados del siglo XIX, cuando Hankel (1867) consideró la matemática como una creación intelectual y, por tanto, no basada exclusivamente en las percepciones sensoriales. A partir de esta nueva concepción, se formalizaron los números enteros como una ampliación de los naturales, extendiendo sus operaciones y propiedades y considerando la regla de los signos como un convenio que no requiere demostración.

Sin embargo, y a pesar de la formalización del número entero desde la teoría y la historia matemática, la consideración del número como representación de la realidad persiste, en gran medida, en la escuela (Herrera, 2021). La superación de esta consideración implica un cambio profundo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números y en el pensamiento matemático de los estudiantes, y supone una ruptura con la concepción de número, promovida por el sistema educativo, que el estudiante ha ido construyendo durante la Educación Primaria a partir de los números naturales. Esta ruptura no resulta fácil para los estudiantes y es la causa de muchas de las dificultades y de la mayor parte de los errores en la incorporación de los números enteros (Bishop et al., 2014; Cid, 2016; Gallardo y Mejía, 2015; Glaeser, 1981; Herrera y Zapatera, 2019; Iriarte et al., 1991).

Para incorporar nuevos conocimientos, Piaget (1978) considera que el estudiante debe reorganizar sus esquemas cognitivos previos, y Bachelard (2011) afirma que debe romper con determinados conocimientos anteriores que le impiden avanzar. Brousseau (1989) profundiza en estas consideraciones y señala que, en el proceso de aprendizaje, el estudiante revisa sus conocimientos, los modifica, los completa o los rechaza y que, con frecuencia, conocimientos que antes eran ciertos y válidos, ahora resultan falsos o inadaptados. Cid (2016) sintetiza estas ideas afirmando que, a menudo, "para aprender algo nuevo es necesario modificar un conocimiento anterior que está obstaculizando ese aprendizaje" y añade que "los conocimientos previos [...], en ocasiones, son una rémora que impide la evolución del sujeto hacia otros estados de conocimiento" (p. 7).

A estos conocimientos previos que dificultan, o impiden, la adquisición de nuevos conocimientos, Brousseau (1989) los denominó obstáculos epistemológicos y los diferenció de los obstáculos ontogenéticos, propios de la naturaleza del alumno y de su momento evolutivo, y de los obstáculos didácticos, propios de elecciones didácticas del profesor o del sistema.

Glaeser (1981) observó en la evolución histórica del número negativo, entre otros obstáculos, la falta de aptitud para dar sentido y manipular cantidades negativas y la dificultad para unificar la recta real. Brousseau (1989) cree que el verdadero obstáculo epistemológico de los números enteros es la consideración de los números como objetos matemáticos que representan una cantidad de magnitud. González et al. (1990, p.152) también consideran que "el gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia [...] que identifica número con cantidad". Por su parte, Iriarte et al. (1991) reconocen dos "ideas obstaculizadoras" en el aprendizaje de los números enteros: lo real como obstáculo y la imposición de lo formal; estos autores consideran que la concepción del número como representación de lo real obstaculiza la construcción del campo numérico y que el paso de lo real a lo formal bloquea el progreso de los estudiantes.

Coquin-Viennot (1985) observó que los obstáculos históricos que dificultaron la formalización de los números enteros se repiten en el aprendizaje de los alumnos, y Bishop et al. (2010) establecieron un paralelismo entre la evolución del razonamiento de los alumnos y el de los matemáticos; de esta manera, la evolución en la concepción del número se reproduce también, de forma explícita, en el sistema educativo.

Aunque el desarrollo y formalización del número entero se realiza en los primeros cursos de la Educación Secundaria, su incorporación en el aprendizaje de las matemáticas se suele iniciar en España a finales de la Educación Primaria, con las primeras ideas de negatividad centradas en la comparación y ordenación de los números enteros, en la representación en la recta numérica y en su utilización en situaciones aditivas en contextos reales.[1]

Desde esta perspectiva, el objetivo de este artículo es analizar la incorporación de los números enteros en la enseñanza de las matemáticas en alumnos de 6.º de Educación Primaria (11-12 años) y de 1.º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-13 años), a partir del análisis de los obstáculos y dificultades con los que se enfrentan en su aprendizaje.

2. Marco teórico

Tradicionalmente, la enseñanza del campo numérico se inicia con los números naturales y con los racionales positivos, ambos como representaciones de cantidades concretas; se continúa con los números enteros, en un principio, como representación de magnitudes relativas, o con dos sentidos, para, posteriormente, abordar

[1] El Real Decreto 157/2022, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, no contempla la introducción de los números negativos; sin embargo, en los desarrollos curriculares de algunas comunidades autónomas sí aparece esta introducción.

su formalización. Bruno (2001) señala la secuencia de extensiones que se sigue en España en el aprendizaje del campo numérico en la Figura 1, donde los números indican el orden en que se realizan las extensiones.

Figura 1. Secuencia de extensiones

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_+ \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Q}_+ \arrow[r] \arrow[d, "3"'] & \mathbb{R}_+ \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Q} \arrow[r, "4"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Bruno, 2001.

Vlassis (2008) advierte del papel fundamental del signo menos en el desarrollo y comprensión de los números negativos. En este sentido, Freudenthal (1973) señala dos significados: como estado y como operación. Gobin et al. (1996) denominan estos significados como signo predicativo y signo operativo y añaden, dentro del predicativo, el significado de opuesto. En esta línea, investigadores como Gallardo y Rojano (1994), Vlassis (2008) o Bofferding (2014), señalan tres significados: unario (negativo), binario (resta) y simétrico (opuesto) (Tabla 1), y consideran que, para una buena comprensión del número entero, es necesario que los alumnos interpreten correctamente estos significados y los usen adecuadamente en cada ocasión.

Tabla 1. Significados del signo menos

Significado	Explicación	Ejemplo
Unario	Número negativo	-3 (número con signo)
Binario	Resta	1- 3 (operación)
Simétrico	Opuesto	-(1 - 3) = - (-2) = 2

Fuente: Adaptado de Bofferding, 2014.

Actualmente, la introducción de los números enteros se realiza, casi exclusivamente, en el ámbito aritmético por medio de los modelos concretos, que son “una presentación de los números enteros basada en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los alumnos o que les pueden resultar más atractivos” (Cid, 2003, p. 3). Janvier (1983) clasificó los modelos concretos en modelos de equilibrio, de recta numérica e híbridos, y Cid (2003) adaptó estos modelos, ignorando los modelos híbridos y denominando a los dos primeros modelos de neutralización y modelos de desplazamiento, respectivamente.

En los modelos de neutralización, los números enteros expresan cantidades relativas de magnitud, en los que los signos unarios indican el sentido positivo o negativo y los binarios indican acciones de añadir o quitar; entre los modelos de neutralización más usados están los de tener y deber, ganar y perder, fichas de dos colores que se neutralizan, personas que entran y salen de un recinto y puntuaciones positivas y negativas. En los modelos de desplazamiento, los números enteros indican posiciones o desplazamientos: los signos unarios indican la posición respecto a un origen y los signos binarios indican desplazamientos en sentidos contrarios; entre los modelos de desplazamientos más usados destacan el termómetro, el ascensor, los ejes cronológicos y las clasificaciones.

Bofferding (2014) considera que los modelos de neutralización ayudan a la comprensión del significado unario del signo menos, pero pueden crear confusiones en el significado binario a la hora de restar un número negativo; considera también que los modelos de desplazamiento enfatizan el orden y dan sentido a los significados unario y binario, pero Liebeck (1990) considera que, a veces, los alumnos interpretan el significado unario como una operación o un desplazamiento. Para Cid (2016), aunque los modelos concretos "justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto" (p. 65), por lo que investigadores como Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985), Gobin et al. (1996), o la propia Cid (2016), proponen su utilización en la introducción de los números negativos, pero consideran que pueden ser un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

De esta manera, la enseñanza del número entero, exclusivamente desde los modelos concretos, puede acotar su comprensión y formalización; sin embargo, reducir su enseñanza al plano formal puede conducir a un "formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones" (Iriarte et al., 1991, p. 1). Desde esta perspectiva, se infiere el interés por incorporar el aprendizaje de los números enteros desde los dos planos, el concreto y el formal.

Una forma de unificar los dos planos es utilizar las tres dimensiones establecidas por Bruno (1997, 2000, 2009) y Bruno y Martinón (1994, 1997): abstracta, recta y contextual. En la dimensión abstracta se representan los números y operaciones mediante símbolos abstractos; en la dimensión recta se representan mediante, respectivamente, puntos y vectores en la recta numérica; y en la dimensión contextual se representan por medio de situaciones de la vida cotidiana.

En esta propuesta, las dimensiones contextual y recta se centran fundamentalmente en el plano concreto y la dimensión abstracta en el plano formal. En la dimensión contextual se trabaja con modelos concretos, tanto de neutralización como de desplazamiento; la dimensión recta se afianza con los modelos concretos de desplazamiento; y en la dimensión abstracta se sitúan los conocimientos referidos a sistemas numéricos, estructuras y propiedades.

Pero una comprensión efectiva de los números enteros no solo implica el conocimiento en las tres dimensiones, sino también el conocimiento de las transferencias entre ellas, ya que estas transferencias permiten una visión unificada de la tarea que favorece la construcción de los campos numéricos (Bruno, 1997; Bruno y Cabrera, 2005).

Tradicionalmente, se ha prestado más atención a la transferencia desde la dimensión contextual a la abstracta, que desde la abstracta a la contextual (Bruno 1997, 2000); es decir, se ha primado la resolución de problemas sobre la invención de problemas; además, con frecuencia, se ha relegado el uso de la recta, a pesar de su utilidad en problemas aditivos debidamente contextualizados (Bruno, 1997; Bruno y Cabrera, 2005; Bruno y Martinón, 1994).

La incorporación de los números negativos produce cambios fundamentales en las tres dimensiones definidas en los números naturales. En la dimensión abstracta, todo número *a* tiene un opuesto -*a*. En la dimensión recta, los números conocidos, positivos, se localizan a la derecha del 0 y los números nuevos, negativos, se localizan, de forma simétrica, a la izquierda. Y en la dimensión contextual, sumar y restar, que con los números naturales tenían significados contrarios (añadir y quitar), con los números enteros representan la misma idea, por lo que "deben identificarse tales significados, de modo que sumar y restar se corresponden con la misma idea" (Bruno, 1997, p. 6); por ejemplo, ganar 3 equivalente a perder -3 o perder 3 equivale a ganar -3.

Dentro del campo conceptual de las estructuras aditivas, Vergnaud (1982) diferencia entre los problemas que expresan una acción en el tiempo y los que no, denominándolas, respectivamente, operador y estado o medida. Heller y Greeno (1979) distinguen tres esquemas en los problemas aditivos de una etapa: combinación, causa/cambio y comparación; en el esquema de combinación incluyen situaciones estáticas de uno o varios sujetos, en el de causa/cambio incluyen situaciones en las que cambia el valor de una cantidad y en el de comparación incluyen situaciones en las que se comparan dos cantidades. Nesher (1982) reconoció estos esquemas como categorías semánticas y los denominó estática, dinámica y comparación; y Vergnaud (1982) las designó, respectivamente, composición de medidas, transformación entre medidas y comparación de medidas. En la misma línea, Bruno y Martinón (1997) señalan tres usos de los números: estado, variación y comparación; el estado expresa una cantidad, la variación expresa el cambio en un estado y la comparación expresa la diferencia entre dos estados.

En esta investigación, siguiendo las investigaciones anteriores, se diferencian las situaciones matemáticas, entendidas como cualquier contexto a partir del cual se desarrolla el conocimiento matemático, en situaciones que expresan la medida de una cantidad y situaciones que plantean una suma o una resta. Estas situaciones se denominan, respectivamente, situación estado y situación aditiva; de esta forma, la situación estado se asocia al valor que tiene una cantidad y la situación aditiva se asocia a un problema aditivo de una etapa.

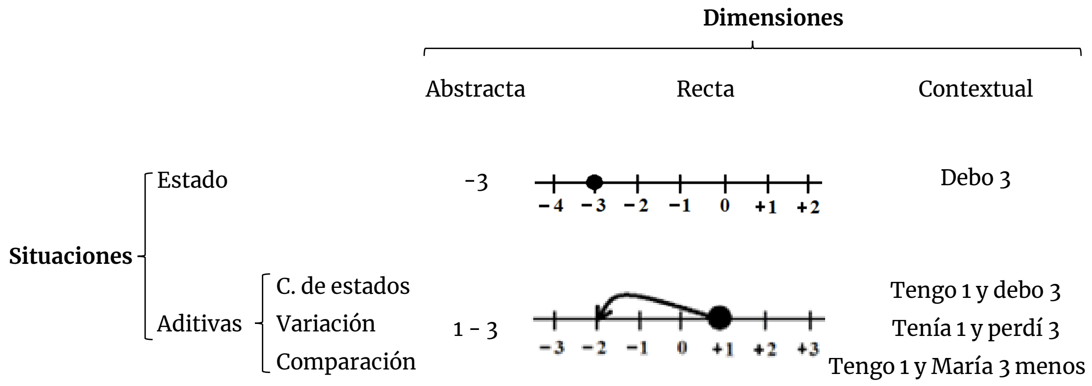
Las situaciones estado contienen, implícita o explícitamente, un sujeto, una magnitud y una unidad de medida en un determinado momento, por ejemplo, "tengo 3" o "debo 3".

En las situaciones aditivas se incluyen, además de las situaciones de variación y de comparación, la composición de estados. En la composición de estados se expresan dos estados de un sujeto en un mismo momento, por ejemplo, "tengo 1 y debo 3"; en la situación variación se expresa el cambio de un estado a lo largo del tiempo, por ejemplo, "perdí 3"; y en la situación comparación se comparan dos estados, por ejemplo, "tengo 3 menos que Luis".

Desde esta perspectiva, las situaciones estado se representan en la dimensión abstracta con el signo unario (positivo o negativo); en la dimensión recta se representan con un punto, a la izquierda del 0 si es negativo y a la derecha del 0 si es positivo; y en la dimensión contextual se utilizan ejemplos de modelos concretos (neutralización y desplazamiento). Por su parte, las situaciones aditivas se representan en la dimensión abstracta con el signo binario (suma o resta); en la dimensión recta se representan con desplazamientos orientados, o vectores, hacia la derecha si se suma y hacia la izquierda si se resta; y en la dimensión contextual se utilizan ejemplos de modelos concretos (neutralización y desplazamiento).

En la Figura 2 se muestran ejemplos de las situaciones citadas y sus representaciones en cada una de las tres dimensiones.

Figura 2. Ejemplos de situaciones



De esta manera, el objetivo de este artículo es analizar la incorporación de los números enteros en la enseñanza de las matemáticas en alumnos de 6.º de Educación Primaria (11-12 años) y de 1.º de Educación Secundaria (12-13 años), a partir de los obstáculos y dificultades con los que se enfrentan en su aprendizaje. Para ello, se estudia cómo identifican, con números enteros, las situaciones estado y aditiva en las dimensiones abstracta, recta y contextual y cómo transfieren las situaciones de una dimensión a otra.

3. Metodología

3.1. Participantes

En el trabajo han participado 266 alumnos de un mismo centro: 127 de cinco unidades de 6.º de Primaria y 139 de cinco unidades de 1.º de Secundaria. Los profesores han impartido a los alumnos el tema de números enteros siguiendo las indicaciones curriculares, según su criterio y de forma totalmente independiente a la investigación.

En una reunión previa, los profesores informaron que todas las clases habían seguido el mismo enfoque para trabajar los números enteros: en 6.º de Primaria se introducen los números negativos a partir de la necesidad de resolver restas en las que el sustraendo es mayor que el minuendo y se concreta en la ordenación y comparación y en la resolución de problemas aditivos de una etapa, asociados a modelos concretos de neutralización y desplazamiento; y en 1.º de ESO se formalizan los números enteros y se amplía su estudio al campo multiplicativo.

3.2. Recogida de datos

Para la recogida de datos se utilizó un cuestionario, adaptado del utilizado por Bruno y Martinón (1994), que consta de dos partes: una centrada en situaciones estado y otra en situaciones aditivas. Cada parte consta de tres cuestiones con las que se pretenden analizar la capacidad de los alumnos para identificar situaciones en las tres dimensiones y para transferir la situación a las otras dos dimensiones (Figura 3).

Figura 3. Cuestionario

SITUACIONES ESTADO

1. Dada la frase *"Lucas debe 3 caramelos"*
   a. Escribe el número que representa esa frase →
   b. Representa el número en la recta numérica

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

2. En la recta numérica se ha representado un número

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

   a. Escribe el número →
   b. Escribe una frase que corresponda con el número representado en la recta →

3. Sea el número *-5*
   a. Señala el número en la recta numérica

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

   b. Escribe una frase representada por ese número →

SITUACIONES ADITIVAS

4. Sea el problema *"La temperatura durante un día de invierno en Segovia fue 2ºC y por la noche bajó 5ºC. ¿Qué temperatura hizo por la noche?"*
   a. Escribe la operación que resuelve el problema y halla el resultado →
   b. Representa la solución del problema en la recta numérica

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

5. En la recta numérica se ha representado la solución de un problema del mismo tipo que el de la pregunta anterior (4)

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

   a. Escribe la operación representada en la recta numérica y el resultado →
   b. Escribe el enunciado de un problema del mismo tipo que se resuelva con esa representación →

6. La operación *2 - 3 = -1* es la solución de un problema del mismo tipo que el de la pregunta 4
   a. Representa la operación en la recta numérica

   −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

   b. Escribe el enunciado de un problema del mismo tipo que se resuelva con esa operación →

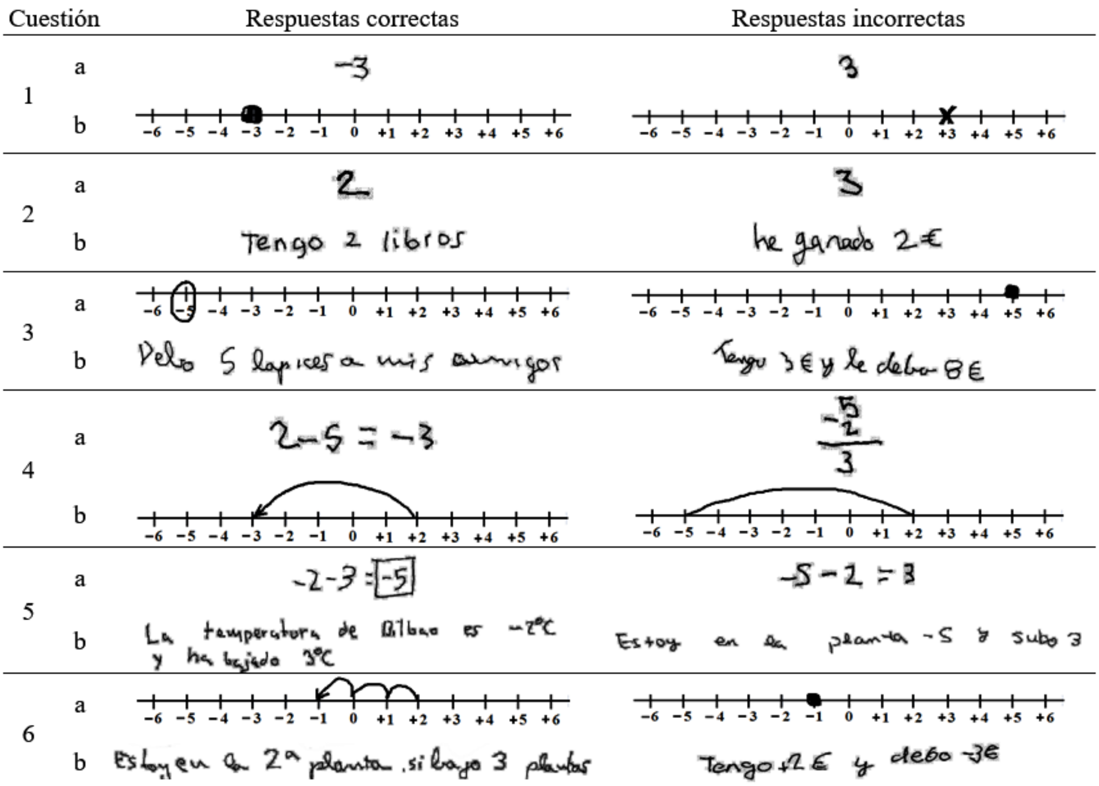
Fuente: Adaptado de Bruno y Martinón, 1994.

3.3. Análisis de resultados

El análisis de los resultados se ha realizado en tres fases:

• ***Fase 1***. Se determina la corrección, o no, de las respuestas de cada una de las cuestiones y se analizan los tipos de situaciones aditivas usados (composición de estados, variación y comparación) y los modelos concretos (neutralización y desplazamiento). En la Figura 4 se muestran ejemplos de respuestas correctas e incorrectas de los alumnos a cada una de las cuestiones.

Figura 4. Ejemplos de respuestas correctas e incorrectas



• Fase 2. Se analizan las transferencias entre las tres dimensiones en cada uno de los dos tipos de situaciones.

• Fase 3. Se comparan los resultados de las transferencias realizadas por los alumnos de 6.º de Primaria y 1.º de Secundaria.

Para identificar a los alumnos se ha asignado a cada uno de ellos un código con el curso y el número dentro de cada curso; así, por ejemplo, el alumno A6.13 se refiere al alumno de 6.º de Primaria número 13.

4. Resultados

A continuación, se muestran los resultados según las tres fases descritas en la metodología: corrección de respuestas, transferencias entre dimensiones y comparación de resultados entre 6.º de Primaria y 1.º de ESO.

4.1. Fase 1. Corrección de respuestas

4.1.1. Situación estado

Cuestión 1. Transferencias desde la dimensión contextual. El 62 % de los alumnos escribieron correctamente el número -3 para representar en la dimensión abstracta la situación estado "Lucas debe 3 caramelos"; sin embargo, el 38 % restante —68 alumnos— prescindieron erróneamente del signo o escribieron +3 [2].

El 69 % de los alumnos señalaron correctamente el punto -3 en la recta, sin embargo, del 31 % restante, 62 alumnos representaron otros números en la recta y 17 alumnos dibujaron el vector (0,-3) o saltos desde 0 a -3 (Tabla 2).

Tabla 2. Resultados de la primera cuestión

		Cuestión 1a						Cuestión 1b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado		74	24	91	44	165	68	95	25	88	37	183	62
Aditiva									4		13		17
Otros			10		2		12						
En blanco			19		2		21		3		1		4
Total		74	53	91	48	165	101	95	32	88	51	183	83
	%	58	42	65	35	**62**	38	75	25	63	37	**69**	31

Nota: B: *bien*, M: *mal*

Cuestión 2. Transferencias desde la dimensión recta. Casi todos los alumnos (98 %) han asociado el punto +2, representado en la recta numérica, con el número 2, con signo positivo o sin signo (Tabla 3). Sin embargo, solo el 31 % ha sido capaz de describir una situación de forma contextual, como el alumno A6.17, que ha escrito la situación estado "Tengo 2 libros" (Figura 5).

Tabla 3. Resultados de la segunda cuestión

		Cuestión 2a						Cuestión 2b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado		123	3	137	1	260	4	47	24	36	8	83	32
Aditiva									47		89		136
Otros			1				1		3		5		8
En blanco					1		1		6		1		7
Total		123	4	137	2	260	6	47	80	36	103	83	183
	%	97	3	99	1	**98**	2	37	73	26	74	**31**	69

[2] Aunque aritméticamente la respuesta 3 sería válida, contextualmente "tener" se asocia al signo positivo y "deber" al signo negativo, por lo que las respuestas +3 y 3 se han considerado incorrectas.

136 alumnos, mayoritariamente de 1.º de ESO, han planteado situaciones aditivas en lugar de situaciones estado; por ejemplo, el alumno A1.93 ha escrito “Mi abuela me ha regalado 2 libros para que los lea cuando me aburra”, que es una situación aditiva al implicar un cambio en el tiempo. Todas las situaciones aditivas descritas son de variación, excepto dos de comparación, como la del alumno A1.82, que ha escrito “Luna tiene 2 años más que Nico” (Figura 5).

Figura 5. Ejemplos de respuestas de alumnos a la cuestión 2b

Alumno	Respuesta
A6.17	Tengo 2 libros
A1.93	Mi abuela me ha dado 2 libros para que los lea cuando me aburra
A1.82	Luna tiene 2 años más que Nico
A1.06	la temperatura de la nevera aumentó 2 grados

Todas las situaciones descritas en la dimensión contextual en la cuestión 2b, excepto dos, corresponden a modelos de neutralización, siendo los verbos más utilizados tener, dar y regalar. Las dos situaciones de desplazamiento utilizan el modelo de temperatura, como, por ejemplo “La temperatura de la nevera aumentó 2 grados” (A1.06).

Cuestión 3. Transferencias desde la dimensión abstracta. El 96 % de los alumnos ha trasladado correctamente el número -5 a la recta numérica. Sin embargo, solo el 50 % ha logrado escribir una situación estado con dicho número (Tabla 4).

Tabla 4. Resultados de la tercera cuestión

		Cuestión 3a						Cuestión 3b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado		118	4	137	1	255	5	73	11	61	1	134	12
Aditiva			3		1		4		36		73		109
Otros									2		4		6
En blanco			2				2		5				5
Total		118	9	137	2	255	11	73	54	61	78	134	132
	%	93	7	99	1	**96**	4	57	43	43	58	**50**	50

146 alumnos (134 bien y 12 mal) han descrito situaciones estado, como “Yo debo 5€ al banco” (A6.03). Sin embargo, 109 alumnos, mayoritariamente de 1.º de ESO, han descrito situaciones aditivas en lugar de situaciones estado; por ejemplo, “A Martín le han quitado 5 bolis” (A1.22).

Las situaciones aditivas descritas son de variación, excepto tres, que son de comparación, como “Mateo mide 5 cm menos que Lucas” (A1.37) (Figura 6).

Figura 6. Ejemplos de respuestas de alumnos a la cuestión 3b

Alumno	Respuesta
A6.03	Yo debo 5€ al banco
A1.22	A Martin le han quitado 5 bolis
A1.37	Mateo mide 5cm menos que Lucas
A6.55	En Canarias hace -5°C
A6.85	El ascensor de la Planta -5 está roto
A1.80	Juan esta a 5 metros por debajo del nivel del mar
A6.11	yo debo -5 €

El 86 % de las situaciones, tanto estado como aditivas, descritas en la cuestión 3b corresponden a modelos de neutralización, siendo los verbos más utilizados deber, quitar y perder. El otro 14 % ha utilizado modelos de desplazamiento, especialmente los de temperatura, plantas de un edificio y, en menor medida, altura sobre el nivel del mar; por ejemplo, los alumnos A6.55, A6.85 y A1.80 escribieron correctamente “En Canarias hacen -5ºC”, “El ascensor de la planta -5 está roto” y “Juan está a 5 m por debajo del nivel del mar”.

Algunos alumnos han escrito erróneamente situaciones como “Yo debo -5€” (A6.11), que equivaldría a la situación “Yo tengo 5€”.

4.1.2. Situación aditiva

Cuestión 4. Transferencias desde la dimensión contextual. El 75 % de los alumnos ha pasado correctamente la situación aditiva “La temperatura durante un día de invierno en Segovia fue 2ºC y por la noche bajó 5ºC”, desde la dimensión contextual a la abstracta, escribiendo la expresión “2 - 5= -3”; sin embargo, del 25 % restante, 50 alumnos, aunque se les pedía expresamente, no han hallado el resultado, lo han calculado mal o han aplicado, erróneamente, la propiedad conmutativa, escribiendo 5 – 2 = 3 (Tabla 5).

Tabla 5. Resultados de la cuarta cuestión

		Cuestión 4a						Cuestión 4b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado			4		1		5		85		69		154
Aditiva		88	29	111	21	199	50	31	9	67	3	98	12
Otros			2		2		4						
En blanco			4		4		8		2				2
Total		88	39	111	28	199	67	31	96	67	72	98	168
	%	69	31	80	20	**75**	25	24	76	48	52	**37**	63

Solo el 37 % de los alumnos ha representado correctamente la situación en la recta numérica, la mayoría mediante un vector y unos pocos mediante saltos desde el punto +2 al -3; aunque estos últimos no hayan orientado los saltos, sus respuestas se han considerado correctas. Del 63 % restante, 154 alumnos han señalado directamente en la recta el resultado de la operación (-3) como si se tratara de una situación estado y no de una situación aditiva, o han señalado los tres puntos (2, -5, -3); algunos de estos alumnos alegaron posteriormente, en la puesta en común, que habían interpretado que solo se pedía el resultado de la operación.

Cuestión 5. Transferencias desde la dimensión recta. El 51 % de los alumnos han transferido correctamente la situación aditiva representada por el vector (-2, -5) a la dimensión abstracta, -2 -3 = -5; sin embargo, al igual que en la cuestión anterior, del 49 % restante, 110 alumnos se han limitado a escribir la operación, han escrito mal el resultado o no han sido capaces de escribir correctamente la operación (Tabla 6).

Tabla 6. Resultados de la quinta cuestión

		Cuestión 5a						Cuestión 5b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado			5		2		7		1		3		4
Aditiva		55	58	81	52	136	110	82	32	95	34	177	66
Otros			4		2		6		6		2		8
En blanco			5		2		7		6		5		11
Total		55	72	81	58	136	230	82	45	95	44	177	89
	%	43	57	58	42	**51**	49	65	35	68	32	**67**	33

El 67 % de los alumnos ha descrito contextualmente una situación aditiva de forma correcta, mientras que del 33 % restante, 66 alumnos han descrito situaciones aditivas de forma incorrecta y 4 han descrito situaciones estado.

La mayoría de las situaciones descritas son situaciones de variación, como "Manolo estaba en la planta -2 y para llegar al coche tuvo que bajar 3 plantas" (A1.08); algunos han descrito situaciones de comparación, como "La temperatura en Nueva York es de -2ºC y en China 3ºC menos ¿Qué temperatura hace en China?" (A6.65) o de composición de estados, como "Le debo a Claudio 2 caramelos y a Iñaki 3 caramelos" (A1.31) (Figura 7).

En la mayoría de las situaciones aditivas se han utilizado modelos de desplazamiento: temperatura, plantas de un edificio y, en menor cantidad, altura sobre nivel del mar. Por ejemplo, los alumnos A1.15, A6.09 y A6.97 han escrito correctamente "Ayer hacía -2ºC y hoy ha bajado 3ºC", "Estoy en la planta -2 y bajo 3 pisos. ¿En qué planta me quedaré?" y "Estaba a 2 m bajo el mar y me sumergí 3 m más. ¿A cuánto estoy ahora?".

Figura 7. Ejemplos de respuestas de alumnos a la cuestión 5b

Alumno	Respuesta
A1.08	Manolo estaba en la planta -2 y para llegar al coche tiene que bajar 3 plantas
A6.65	La temperatura en Nueva York es de -2°C, si en China hace 3°C menos ¿Que temperatura hace en China?
A1.31	Le debo a Claudia 2 caramelos y a Iñaki 3 caramelos
A1.115	Ayer hacía -2°C y hoy ha bajado 3°C
A6.09	Estoy en la planta -2 y bajo 3 pisos ¿En qué planta me quedaré?
A6.97	Estaba a 2 bajo el mar y me sumergí 3 más bajo el mar ¿A cuánto estoy ahora?
A1.133	Laura vive en Barcelona y durante el día hace -2°C y por la noche hace -5°C
A6.24	Andrés está en la planta -2, pero el aparcamiento está -3 plantas debajo ¿En qué planta está el aparcamiento

Algunos alumnos han descrito la situación utilizando los estados inicial y final, como el alumno A1.133 que escribió correctamente "Laura vive en Barcelona, durante el día hizo -2ºC y por la noche hace -5ºC"; otros han usado el signo menos de forma redundante, como el alumno A6.24 que escribió "Andrés estaba en la planta -2, pero el aparcamiento está -3 plantas debajo".

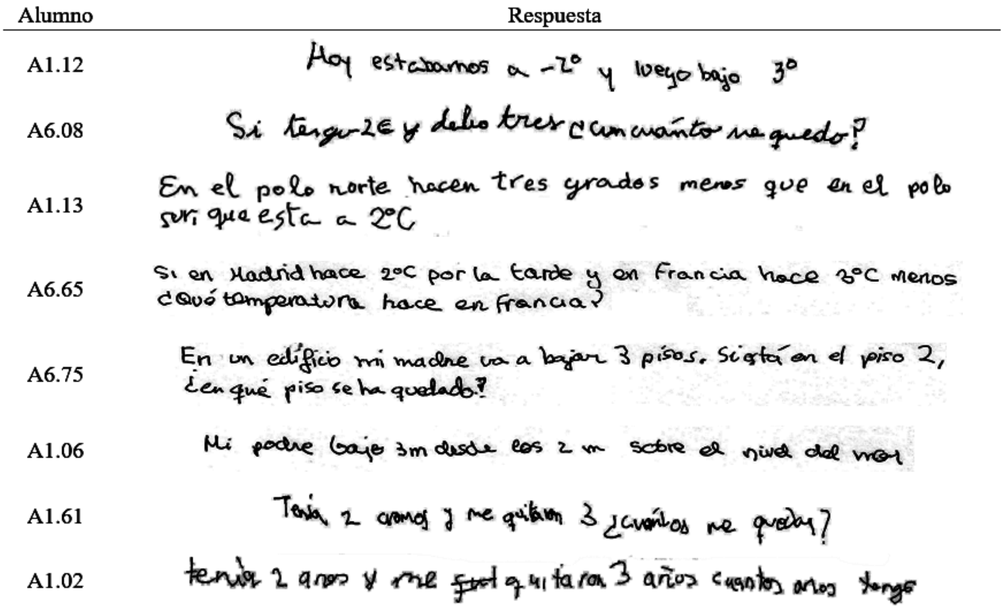
Cuestión 6. Transferencias desde la dimensión abstracta. El 64 % de los alumnos ha transferido correctamente la operación 2 – 3= -1, desde la dimensión abstracta a la dimensión recta, mediante un vector que va desde 2 a -1, o mediante uno o varios saltos (Tabla 7). Del 36 % restante, 20 alumnos han señalado solo un punto, mayoritariamente el -1, y 74 alumnos han representado la operación mediante vectores o saltos no correctos.

Tabla 7. Resultados de la sexta cuestión

		Cuestión 5a						Cuestión 5b					
		6.º P		1.º ESO		Total		6.º P		1.º ESO		Total	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
Estado			14		6		20						
Aditiva		72	41	97	33	169	74	66	26	94	28	160	54
Otros					2		2		9		6		15
En blanco					1		1		26		11		37
Total		72	55	97	42	169	97	66	61	94	45	160	106
	%	57	43	70	30	**64**	36	52	48	68	32	**60**	40

El 60 % ha descrito correctamente la situación en la dimensión contextual, mayoritariamente con una variación, como “Hoy estábamos a 2º y luego bajó 3º” (A1.12); unos pocos han expresado situaciones de composición de estados como “Si tengo 2€ y debo 3€, ¿con cuánto me quedo?” (A6.08) y muy pocos han expresado situaciones de comparación como “En el Polo Norte hacen 3º menos que en el Polo Sur que está a 2ºC” (A1.13) (Figura 8). Del 40 % restante, 54 alumnos han descrito situaciones aditivas que no se corresponden con la operación y 15 han escrito expresiones sin relación con la operación.

Figura 8. Ejemplos de respuestas de alumnos a la cuestión 6b



Alumno	Respuesta
A1.12	Hoy estabamos a -2º y luego bajo 3º
A6.08	Si tengo 2€ y debo tres ¿con cuánto me quedo?
A1.13	En el polo norte hacen tres grados menos que en el polo sur, que esta a 2ºC
A6.65	Si en Madrid hace 2ºC por la tarde y en Francia hace 3ºC menos ¿Qué temperatura hace en Francia?
A6.75	En un edificio mi madre va a bajar 3 pisos. Si está en el piso 2, ¿en qué piso se ha quedado?
A1.06	Mi padre bajo 3m desde los 2 m sobre el nivel del mar
A1.61	Tenía 2 cromos y me quitaron 3 ¿cuántos me quedan?
A1.02	tenía 2 años y me ~~fuel~~ quitaron 3 años cuantos años tengo

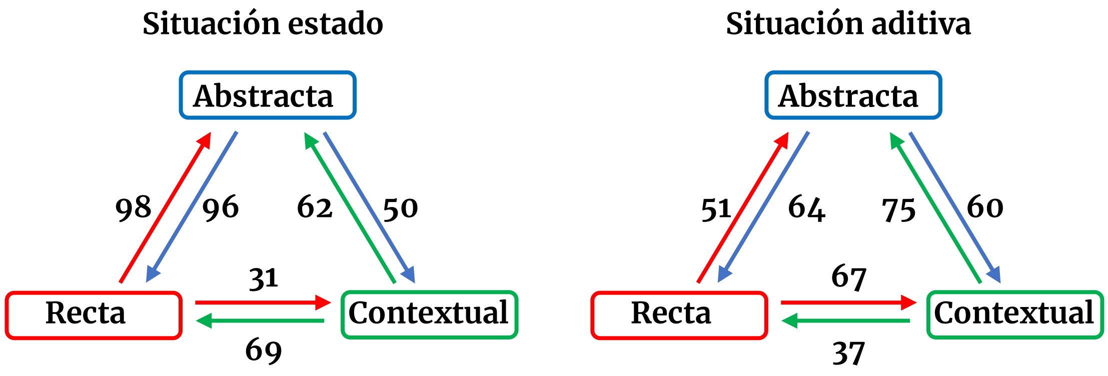
Al igual que en la cuestión 5b, la mayoría de las situaciones describen modelos de desplazamiento: temperatura y, en menor medida, plantas de un edificio y altura sobre el nivel del mar. Por ejemplo, los alumnos A6.65, A6.75 y A1.06 escribieron correctamente: “Si en Madrid hace 2ºC por la tarde y en Francia hace 3ºC menos ¿Qué temperatura hace en Francia?”, “En un edificio mi madre va a bajar 3 pisos. Si está en el piso 2, ¿en qué piso se quedará? y “Mi padre bajó 3 m desde los 2 m sobre el nivel del mar”.

Un 4 % de las respuestas expresan situaciones que, aunque corresponden con la operación, no son reales; por ejemplo, el alumno A1.61 dice “Tenía 2 cromos y me quitaron 3 ¿cuántos me quedan?” y el alumno A1.02. afirma que “Tenía 2 años y me quitaron 3 años. ¿cuántos años tengo?” (Figura 8).

4.2. Transferencias entre dimensiones

En la Figura 9 se muestran los porcentajes de éxito en las transferencias entre las tres dimensiones en ambos tipos de situaciones.

Figura 9. Porcentajes de éxito de las transferencias entre dimensiones



Las transferencias más accesibles a los alumnos en la situación estado son las realizadas entre las dimensiones abstracta y recta, y las más difíciles son las dirigidas hacia la dimensión contextual, en especial desde la dimensión recta.

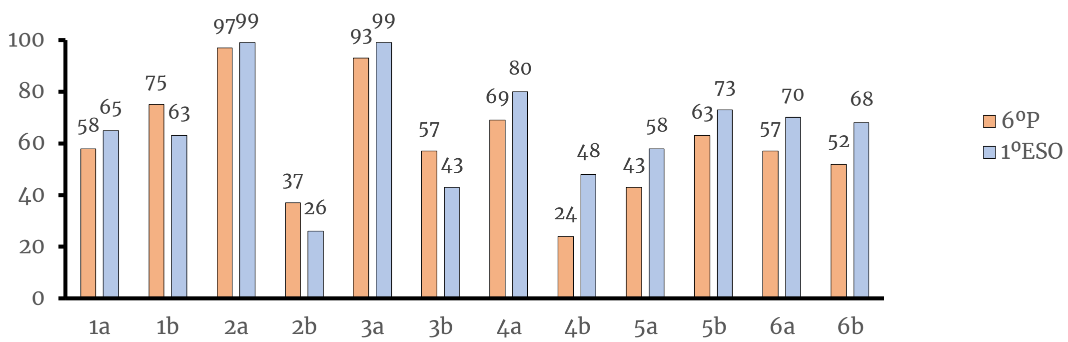
En las situaciones aditivas, a los alumnos les resulta difícil transferir una situación desde la dimensión contextual a la recta, y lo que les resulta más fácil es expresar en forma de suma o resta una situación aditiva expresada contextualmente.

Al comparar los resultados de las transferencias en los dos tipos de situaciones, se observa que en las transferencias "recta-abstracta" hay una gran diferencia entre las dos situaciones, ya que, mientras en la situación estado prácticamente todos los alumnos realizan las dos transferencias, en la situación aditiva realizan las transferencias poco más de la mitad de los alumnos. En las transferencias "recta-contextual" se invierten los resultados, ya que, mientras en la situación estado a los alumnos les resulta difícil describir un contexto a partir de un punto, en la aditiva les resulta difícil reflejar un contexto mediante un vector. Y en las transferencias "contextual-abstracta" los resultados están muy relacionados, aunque son superiores en la situación aditiva.

4.3. Comparación de los resultados entre 6.º de Primaria y 1.º de ESO

En la Figura 10 se comparan los resultados obtenidos en las transferencias por los alumnos de 6.º de Primaria y 1.º ESO en cada una de las cuestiones, expresados en porcentajes de acierto.

Figura 10. Transferencias por cuestiones (%) de los alumnos de 6.º de Primaria y 1.º de ESO



En la figura puede observarse que los alumnos de 6.º de Primaria obtienen mejores resultados que los de 1.º de ESO en las cuestiones 1b, 2b y 3b:

- Cuestión 1b: los alumnos de 1.º de ESO tienden, más que los de 6.º de Primaria, a representar situaciones estado con un vector.

- Cuestión 2b: los alumnos de 1.º de ESO tienden, más que los de 6.º de Primaria, a relacionar un punto con una situación aditiva.

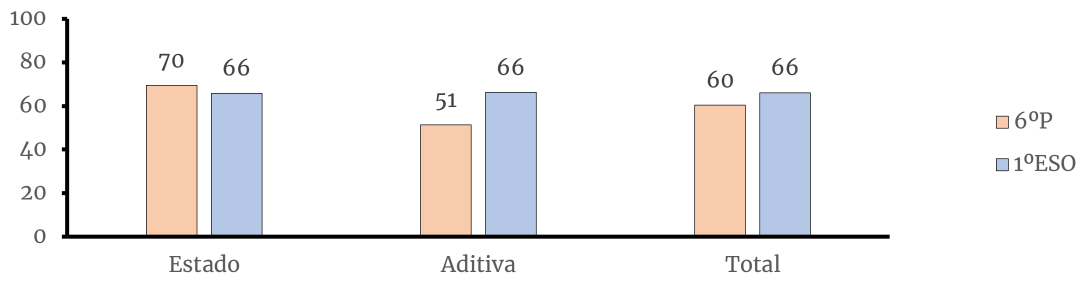
- Cuestión 3b: los alumnos de 1.º de ESO tienden, más que los de 6.º de Primaria, a relacionar un número con una situación aditiva.

Es decir, los alumnos de 1.º de ESO, que han recibido más clases sobre números enteros, tienden a considerar las situaciones estado como situaciones aditivas.

Los resultados de los alumnos de 1.º de ESO son superiores a los de los alumnos de 6.º de Primaria en los otros 9 ítems (1a, 2a, 3a, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a y 6b), debido, probablemente, al mayor desarrollo evolutivo y al mayor número de clases recibidas. Destaca la diferencia en el ítem 4b: mientras el 48 % de los alumnos de 1.º de ESO ha representado la situación aditiva mediante un vector, solo el 24 % de los de 6.º de Primaria ha sido capaces de hacerlo.

Los alumnos de 1.º de ESO obtienen mejores resultados en la situación aditiva y en el global del cuestionario, mientras que los alumnos de 6.º de Primaria obtienen mejores resultados en la situación estado (Figura 11)

Figura 11. Transferencias por situaciones (%) de los alumnos de 6.º de Primaria y 1.º de ESO



5. Discusión y conclusiones

El objetivo de este artículo era analizar la incorporación de los números enteros en la enseñanza de las matemáticas en alumnos de 6.º de Educación Primaria (11-12 años) y de 1.º de Educación Secundaria (12-13 años), a partir del análisis de los obstáculos y dificultades con los que se enfrentan en su aprendizaje; para ello, se estudia cómo 266 alumnos de 6.º de Primaria y de 1.º de ESO identifican, con números enteros, situaciones estado y situaciones aditivas en las dimensiones abstracta, recta y contextual, y cómo transfieren las situaciones de una dimensión a otra.

En las cuestiones de situación estado —aunque los alumnos utilizan un número y un punto, respectivamente, en las dimensiones abstracta y recta— casi la mitad de ellos —especialmente de 1.º de ESO— utilizan contextos aditivos en la dimensión contextual. La situación aditiva más utilizada en estas cuestiones ha sido la de variación y los modelos más utilizados son los de neutralización de tener-deber, dar-quitar y ganar-perder.

En las cuestiones de situación aditiva, los alumnos suelen escribir una operación en la dimensión abstracta y un contexto aditivo en la dimensión contextual, pero, en la dimensión recta —muchos de ellos, especialmente de 6.º de Primaria— señalan el punto que representa el resultado de la operación y no el vector. La situación aditiva más utilizada en estas cuestiones también es la variación y los modelos más utilizados son los de desplazamiento relacionados con la temperatura, el ascensor y la altura sobre el nivel del mar.

Se han observado obstáculos epistemológicos como la persistencia del número como cantidad, dificultades derivadas de los distintos significados del signo menos y de las funciones del vector en la recta numérica y obstáculos didácticos causados por una enseñanza, con frecuencia, descontextualizada, alejada de la realidad y que delega la recta numérica.

El obstáculo epistemológico de considerar el número como expresión de cantidad (Bishop et al., 2014; Brousseau, 1989; Herrera, 2021; Herrera y Zapatera, 2019; Iriarte et al., 1991; Zapatera, 2021) aún persiste al incorporar los números negativos. De esta manera, algunos alumnos prescinden del signo negativo que precede al número y de su significado, ignoran el signo (Peled et al., 1989) tratándolo como positivo o, incluso, interpretándolo como una resta incompleta (Bofferding, 2014). También se ha observado cómo otros alumnos continúan con la creencia de que, en una resta, el minuendo siempre es mayor que el sustraendo y extienden la propiedad conmutativa de la suma a la resta o invierten directamente los términos de la operación para obtener una respuesta positiva (Peled et al.,1989).

Algunos alumnos tienen dificultades para diferenciar los significados unario y binario del signo menos (Bruno y Martinón, 1994; Liebeeck, 1990). Con frecuencia, interpretan el signo negativo como signo de resta (Bofferding, 2014; Gallardo y Rojano, 1994; Vlassis, 2008), lo que les impide diferenciar situaciones estado y situaciones aditivas. De esta manera, utilizan indistintamente puntos o vectores para representar cualquier situación en la recta o describen contextos aditivos a partir de situaciones estado representadas por números o por puntos de la recta.

Las dificultades para comprender el significado del vector en la recta (Bruno y Cabrera, 2005; Cid, 2003) dificultan las transferencias entre dimensiones en las situaciones aditivas. Algunos alumnos asocian el vector con expresiones en las que mezclan signos unarios y binarios y otros combinan indiscriminadamente los componentes del vector (extremos, módulo y sentido) para expresar contextualmente la situación definida por el vector.

Algunos alumnos han descrito situaciones irreales, e incluso surrealistas, como “Carlos tenía 2 galletas y le robaron 5” o “Tengo 2 años y me quitaron 3 años” y otros han utilizado un lenguaje artificial con expresiones redundantes, escribiendo, por ejemplo, “La temperatura ha bajado -3ºC”. Estas situaciones podrían deberse a una enseñanza descontextualizada y alejada de la realidad que, con frecuencia, produce un lenguaje artificial. Este tipo de enseñanza constituiría un obstáculo para la adquisición de conocimientos, ya que el mejor criterio para la adquisición de conceptos es "la capacidad de resolver problemas en lenguaje natural, emanado de la vida social, técnica o económica ordinaria" (Vergnaud, 1982, p. 57).

Los alumnos transfieren mejor una situación aditiva expresada contextualmente a la dimensión abstracta que a la dimensión recta (Bruno, 1997, 2000), y los alumnos de 1.º de ESO tienden a transformar situaciones estado, que no contienen operaciones, en situaciones aditivas que contienen una suma o una resta. De estas dos observaciones podría inferirse una enseñanza algoritmizada que prima el cálculo operacional.

Las transferencias más difíciles para los alumnos son la transferencia desde la dimensión recta a dimensión contextual en las situaciones estado, y la transferencia desde la dimensión contextual a la dimensión recta en las situaciones aditivas. Esta dificultad para trabajar en la recta numérica podría evidenciar que la dimensión recta no ha sido suficientemente trabajada por los alumnos. Aunque algunas investigaciones demuestran que la recta puede causar problemas, por ejemplo, en la resta de números negativos (Janvier, 1983; Liebeck, 1990), su utilización contextualizada puede ser muy útil en la incorporación de los números enteros, ya que "facilita el empleo de situaciones distintas y le sugieren (al alumno) e inducen al uso de contextos y estructuras diferentes" (Bruno y Martinón, 1994, p. 47).

Consideramos que hubiera sido interesante la realización de entrevistas individuales para cruzar y complementar los datos obtenidos y mejorar las conclusiones establecidas, por lo que establecemos la realización de entrevistas como propuesta de mejora para próximas ampliaciones de la investigación.

A partir de los obstáculos y dificultades observados, se pueden diseñar propuestas para iniciar el aprendizaje de los números enteros basadas en el reconocimiento y estudio de diferentes situaciones estado y aditivas para que los alumnos sean capaces de diferenciarlas, representarlas y transferirlas en las tres dimensiones, así como comprender los distintos significados de los signos más y menos.

Referencias

Bachelard, G. (2011). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (27ª reimpresión). Siglo XXI Editores.

Bishop, J.P., Lamb, L., Philipp, R., Schappelle, B., & Whitacre, I. (2010). A developing framework for children's reasoning about integers. *Proceedings of the 32th Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 6, 695-702).

Bishop, J.P., Lamb, L.L., Philipp, R.A., Whitacre, I., Schappelle, B.P., & Lewis, M.L. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 19-61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0019

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(2), 194-245. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.2.0194

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des Savoirs Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, *29*, 5-18.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *Revista EMA*, *5*(3), 236-251.

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *4*(2), 415-427.

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(2), 87-103.

Bruno, A., & Cabrera, N. (2005). Una experiencia sobre la representación en la recta de números negativos. *Quadrante*, *14*(2), 25-41. https://doi.org/10.48489/quadrante.22797

Bruno, A., & Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma, 18*, 39-48.

Bruno, A., & Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(2), 249-258. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4180

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del Seminario Matemático García de Galeano*, 25, 1-40.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros* (Tesis doctoral inédita). Universidad de Zaragoza.

Coquin-Viennot, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(2,3), 133-192.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel.

Gallardo, A. & Mejía, J. (2015). Los números negativos ¿constituyen un obstáculo epistemológico persistente? En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28* (pp. 190-197). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 265-272.

Glaeser, G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 303-346.

Gobin, C., Guichard, J.P., Marot, M., Moinier, F., Riffet, D., Robin, C., & Rodríguez, F. (1996). *Les nombres relatifs au collège*, IREM de Poitiers.

González, J. L., Iriarte, D. M., Jimeno, M., Ortiz, A., Sanz, E., & Vargas-Machuca, I. (1990). *Números Enteros. Matemáticas: cultura y aprendizaje* (Vol. 6). Editorial Síntesis

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihrefunctionen*. Leopold Voss.

Heller, J. I., & Greeno, J. G. (1979). Information processing analyses of mathematical problem solving. *Testing, teaching and learning. National Institute of Education*.

Herrera, E. E. (2021). Implementación de herramienta m-learning para el aprendizaje de adición de números enteros en tiempos de pandemia. *Revista Universidad y Sociedad*, *13*(6), 99-108.

Herrera, J. L., & Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(4), 197-220. https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8226

Iriarte, M. D., Jimeno, M., & Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA*, *7,* 13-18.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. In *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2 (pp. 295-301).

Liebeck, P. (1990). Scores and Forfeits - An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 221-239.

Nesher, P. (1982). Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, (pp. 25-38). Lawrence Erlbaum.

Peled, I., Mukhopadahyay, S., & Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. *Proceedings of the XIII PME,* pp. 106-110.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*. Siglo XXI.

Schubring, G. (2007). Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência. *Boletim de Educação Matemática, 20*(28), 1-20.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Additions and Subtraction Problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570. https://doi.org/10.1080/09515080802285552

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. En A. Rojas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías diversas*, *8*, 121-135.

∞

Alberto Zapatera Llinares

Universidad CEU Cardenal Herrera (España)
alberto.zapatera@uchceu.es | https://orcid.org/0000-0002-7531-8609

Eduardo Quevedo Gutiérrez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (España)
eduardo.quevedo@ulpgc.es | https://orcid.org/0000-0002-5415-3446

Sofía González Gallego

Universidad de La Laguna (España)
sofiagg@gmail.com | https://orcid.org/0000-0002-1712-1488

Alejandro Santana Coll

Universidad de La Laguna (España)
santanacoll@gmail.com | https://orcid.org/0000-0003-4976-6632

Judit Álamo Rosales

Colegio Claret Las Palmas (España)
judit@claretlaspalmas.digital | https://orcid.org/0000-0002-9990-3570

Recibido: 3 de agosto de 2022
Aceptado: 4 de julio de 2023

Obstacles and Difficulties of Students in Incorporating Integer Numbers

Alberto Zapatera Llinares @ [1], Eduardo Quevedo Gutiérrez @ [2], Sofía González Gallego @ [3], Alejandro Santana Coll @ [3], Judit Álamo Rosales @ [4]

[1] Universidad CEU Cardenal Herrera (España)
[2] Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (España)
[3] Universidad de La Laguna (España)
[4] Colegio Claret Las Palmas (España)

Traditionally, the teaching of the numerical field begins with the natural numbers and, later, with the positive rational numbers, both as representations of concrete quantities; then it continues with the wholes numbers with the first ideas of negativity and the resolution of additive situations, almost exclusively, in the arithmetic field by means of the concrete models of neutralization and displacement.

The incorporation of wholes numbers in the teaching of mathematics supposes a break with the number representation as an expression of reality built from natural numbers and implies a profound change in the students' mathematical thinking.

In this research, in order to analyze the obstacles and difficulties that the introduction of wholes numbers entails for students, the responses of 266 students from the 6th year of primary and the 1st year of secondary to a questionnaire in which they must identify and interpret two types of numbers are analyzed of situations (state and additive) expressed in three dimensions (abstract, straight, and contextual) and make transfers between the dimensions.

The following obstacles and difficulties have been observed in some students, among others, when incorporating wholes numbers: (1) The epistemological obstacle of number as an expression of quantity of magnitude still persists; they ignore the negative sign that precedes the number and its meaning, ignore the minus sign, treat it as positive, or even interpret it as an incomplete subtraction. (2) They continue to believe that, in a subtraction, the minuend is always greater than the subtrahend; some students extend the commutative property of addition to subtraction or directly reverse the terms of the operation to get a positive answer. (3) They have difficulties in differentiating the unary and binary meanings, as a quality of the number and as a sign of the subtraction operation; they interpret the negative sign as a sign of the subtraction operation, which prevents them from differentiating state situations and additive situations, and they tend to transform state situations into additive situations. (4) They do not use the number line adequately; they do not understand the meaning of the vector in the line and associate it indistinctly with the unary and binary signs; they indiscriminately use its components (extrems, module and sense) to express additive situations and the transfers in which the straight dimension participates are the least successful. (5) Frequently, they describe incoherent and unreal situations far from their daily environment and use an artificial language with redundant negative expressions.

These obstacles and difficulties show a teaching style that is, sometimes, too algorithmic and addresses wholes numbers from the arithmetic field based on specific models.