

Transmisión de Calor: Conducción.

Fundamentos Ingeniería Térmica

1.-Transferencia de calor en paredes compuestas, Asociación de resistencias térmicas. Espesor crítico de aislamiento
2.-Conducción unidimensional con generación de energía
3.-Conducción bidimensional. Factores de forma
4.-Conducción de calor en régimen transitorio. Sistemas con resistencia interna despreciable

JUAN CARLOS LOZANO MEDINA

INGENIERO INDUSTRIAL

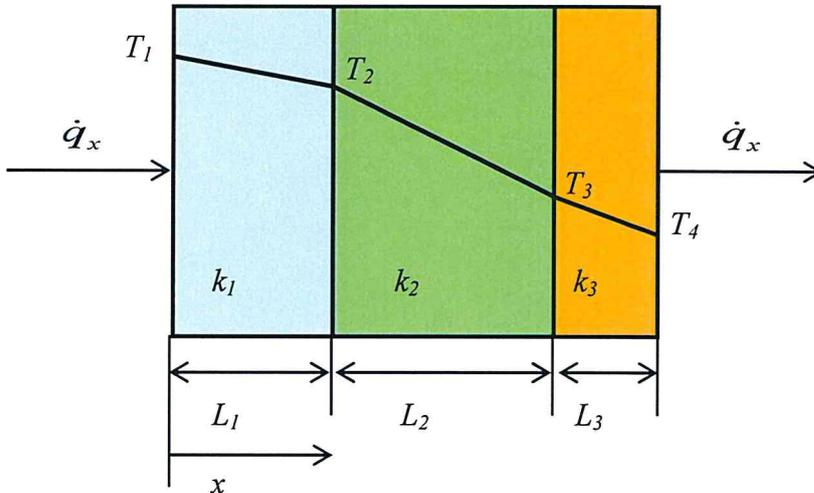
PROFESOR ASOCIADO ULPGC

ISBN 978-84-16989-28-7

1 DE SEPTIEMBRE DE 2015

3.1 TRANSFERENCIA DE CALOR EN PAREDES COMPUESTAS

Lo normal es que las paredes no estén formadas de un único material, por ejemplo, en un horno industrial nos encontramos con una pared de ladrillo refractario, una capa de aislante y un revestimiento exterior. El calor transmitido por conducción a través de la pared se puede calcular como la suma del calor transmitido por cada una de las capas:



La transmisión de calor a través de una pared plana recordemos que se podía expresar como

$$\dot{q}_x = -k \cdot A \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}} \Rightarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{R} \Rightarrow R = \frac{L}{kA}$$

a través de cada una de las capas, si consideramos estado estacionario, es decir, que el flujo de calor es ya constante, será:

$$\text{Capa 1: } \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{L_1}{k_1 A}$$

$$\text{Capa 2: } \dot{q}_x = \frac{T_2 - T_3}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{L_2}{k_2 A}$$

$$\text{Capa 3: } \dot{q}_x = \frac{T_3 - T_4}{R_3} \Rightarrow R_3 = \frac{L_3}{k_3 A}$$

Reorganizando y sumando:

$$\dot{q}_x R_1 = T_1 - \cancel{T_2}$$

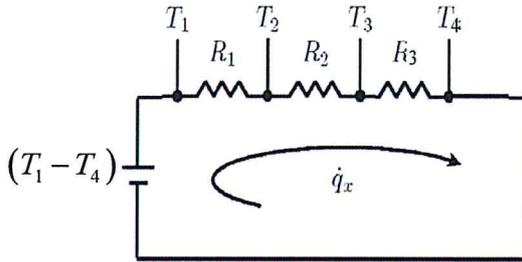
$$\dot{q}_x R_2 = \cancel{T_2} - \cancel{T_3}$$

$$\dot{q}_x R_3 = \cancel{T_3} - T_4$$

$$\dot{q}_x (R_1 + R_2 + R_3) = T_1 - T_4 \quad \rightarrow \quad \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta T}{\sum R_i}$$

El denominador nos está indicando la resistencia al paso del calor por las diferentes capas.

La analogía con la corriente eléctrica es evidente:



Y lo mismo que la asociación de resistencias en un circuito eléctrico se calcula mediante:

Serie: $R_T = R_1 + R_2 + R_3 = \sum_i R_i$

Paralelo: $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

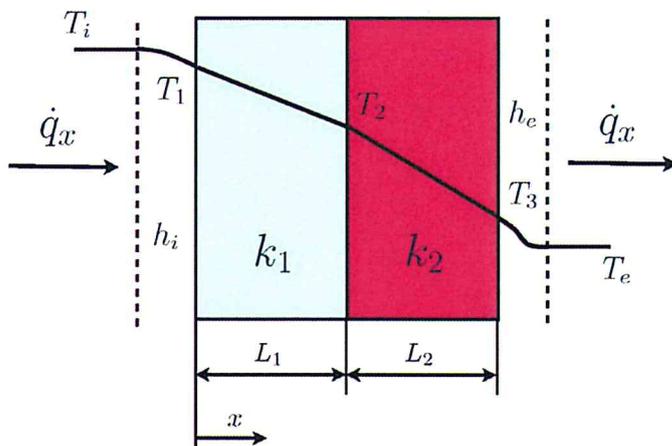
Se plantean expresiones similares para la transferencia de calor:

$$\dot{q}_x = \frac{\Delta T}{R_T}$$

Serie: $R_T = R_1 + R_2 + R_3 = \sum_i R_i$

Paralelo: $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

Y esto sucede no solo con los fenómenos de conducción, también si consideramos además la convección. Ej: consideremos una pared compuesta de dos capas y veamos la transferencia de calor desde el interior de la habitación hasta el aire exterior. La transferencia de calor tiene lugar en cuatro etapas:



1. Convección desde el interior de la habitación a la superficie de la pared interna.
2. Conducción por la capa interna de la pared.

3. Conducción por la capa externa.
4. Convección desde la pared externa hasta el ambiente exterior.

Recordando la ley de Newton para la convección:

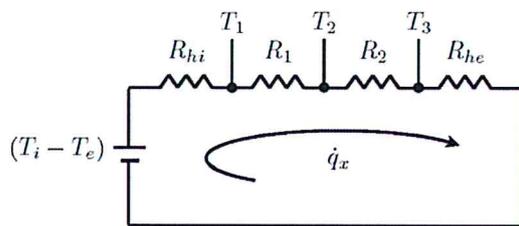
$$\dot{q} = h A (T_s - T_\infty)$$

Tendremos la transferencia de calor en cada capa como:

1.
$$\dot{q}_x = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{h_i A}} = \frac{T_i - T_1}{R_{hi}}$$
2.
$$\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1 A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1}$$
3.
$$\dot{q}_x = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_2}{k_2 A}} = \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$
4.
$$\dot{q}_x = \frac{T_3 - T_e}{\frac{1}{h_e A}} = \frac{T_3 - T_e}{R_{he}}$$

$$\dot{q}_x = \frac{T_i - T_e}{R_{hi} + R_1 + R_2 + R_{he}} = \frac{T_i - T_e}{R_T}$$

Siendo la asociación de resistencias equivalente al circuito:



Recordemos el valor de la resistencia de transmisión de calor para distintas geometrías:

Geometría	Ecuación del flujo de calor	Resistencia térmica
Pared plana	$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{pared}}$	$R_{pared} = \frac{L}{kA}$
Cilindro hueco	$\dot{q} = \frac{(T_i - T_e)}{R_{cilindro}}$	$R_{cilindro} = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi k L}$
Esfera hueca	$\dot{q} = \frac{(T_i - T_e)}{R_{esfera}}$	$R_{esfera} = \frac{r_e - r_i}{4\pi r_e r_i k}$
Superficie convectiva	$\dot{q} = \frac{(T_s - T_\infty)}{R_h}$	$R_h = \frac{1}{hA}$

3.2 ESPESOR CRÍTICO DEL AISLAMIENTO

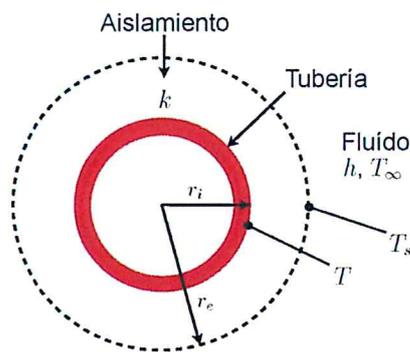
Pregunta: ¿Siempre que se aumenta el aislamiento, disminuye la transferencia de calor?

Respuesta: Depende!

Al agregar más aislamiento a una pared plana sí que disminuye siempre la transferencia de calor: cuanto más grueso sea el aislamiento, mayor es la resistencia térmica de la pared y, por tanto, menor la transferencia de calor.

Pero si se añade aislamiento a una pared esférica o una conducción cilíndrica, hay que tener en cuenta dos efectos contrapuestos:

TUBERÍA CON AISLAMIENTO



- a) Por una parte, el aislamiento incrementa la resistencia a la conducción, y con ello disminuye la transferencia de calor por conducción:

$$\dot{q}_r = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi L k}} \Rightarrow \dot{q}_r = \frac{(T_i - T_e)}{R} \Rightarrow R = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi L k}$$

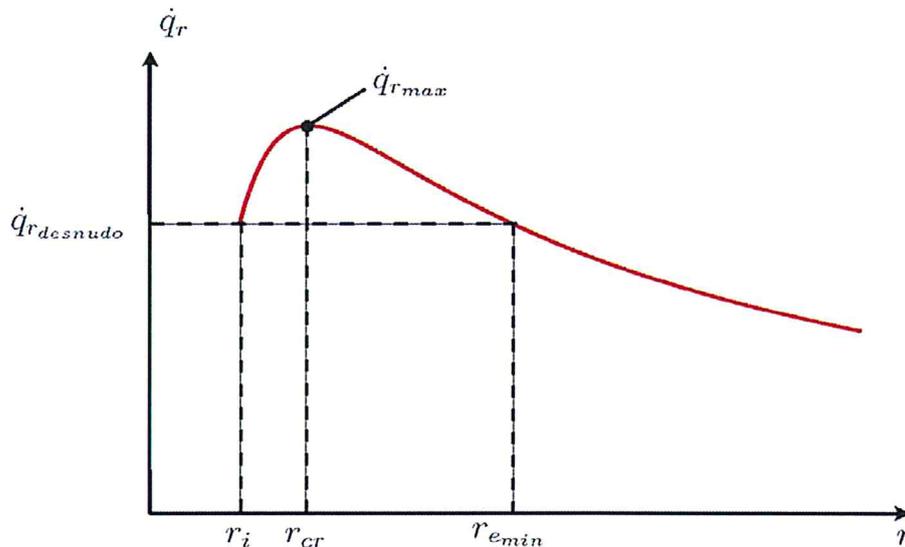
- b) Por otra, aumenta el área exterior, con lo que aumenta la transmisión de calor por convección:

$$\dot{q} = h A (T_s - T_\infty)$$

Luego la transferencia de calor puede aumentar o disminuir, dependiendo de cuál sea el efecto que domine.

$$\dot{q}_r = \frac{(T - T_\infty)}{R_{ais} + R_h} = \frac{(T - T_\infty)}{\frac{\ln(r_e / r_i)}{2\pi L k} + \frac{1}{h(2\pi r_e L)}}$$

En la práctica se observa que la variación del flujo de calor en función del radio exterior de aislamiento viene dado por la siguiente gráfica:



Se observa que:

- Para $r=r_i$ la conducción está desnuda, sin aislamiento.
- Al ir añadiendo aislamiento, el flujo de calor aumenta, esto quiere decir que el efecto de la disminución de la resistencia a la convección es mayor que el aumento de la resistencia a la conducción, como resultado, la resistencia total a la transmisión de calor disminuye y el flujo de calor aumenta.
- Para $r=r_{cr}$ el flujo de calor alcanza un valor máximo.
- Si $r>r_{cr}$ el flujo de calor disminuye. A partir de aquí ya se observa que la resistencia a la conducción comienza a ser mayor que la resistencia a la convección.
- Para que el flujo de calor sea inferior con aislante que sin él, es decir, para que el aislante disminuya de verdad el flujo de calor hacia el exterior, el radio exterior del aislante debe ser superior a un valor mínimo: $r_{e, min}$, para el cual el flujo de calor con aislante es igual al flujo que había sin aislante.

Podemos hallar el radio crítico, pues es el valor para el cual se anula la primera derivada de la función $\dot{q}_r = f(r)$. Para ello reorganizamos la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{q}_r}{L} = \frac{2\pi(T - T_\infty)}{\frac{\ln(r/R)}{k} + \frac{1}{hr}}$$

Teniendo en cuenta que el radio interior es fijo y que por tanto nuestra variable es el radio exterior, derivamos:

$$\frac{d\left(\frac{\dot{q}_r}{L}\right)}{dr} = -\frac{2\pi(T-T_\infty)\left(\frac{1}{kr} - \frac{1}{hr^2}\right)}{\left[\frac{\ln(r/R)}{k} + \frac{1}{hr}\right]^2} = 0$$

Con lo cual el numerado debe anularse:

$$\frac{1}{kr} - \frac{1}{hr^2} = 0$$

Y, por lo tanto:

$$\frac{1}{kr} = \frac{1}{hr^2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{k}{h} = r_{cr}$$

Para comprobar si este valor realmente corresponde a un máximo hay que hacer la segunda derivada y comprobar que su valor en el radio crítico sea menor <0 :

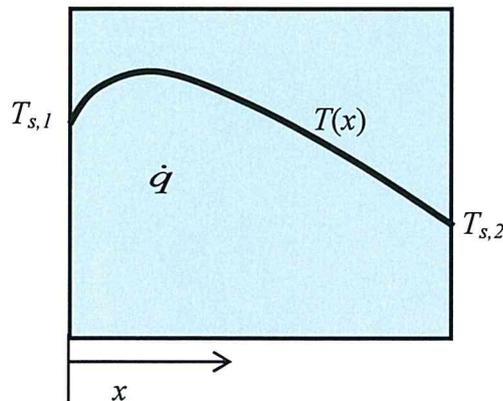
$$\frac{d^2\left(\frac{\dot{q}_r}{L}\right)}{dr^2} = -\frac{2\pi(T-T_\infty)\left[\left(\frac{2}{hr^3} - \frac{1}{kr^2}\right)\left(\frac{1}{hr} + \frac{\ln(r/R)}{k}\right) - 2\left(\frac{1}{kr} - \frac{1}{hr^2}\right)^2\right]}{\left[\frac{\ln(r/R)}{k} + \frac{1}{hr}\right]^3} = 0$$

$$\left[\frac{d^2\left(\frac{\dot{q}_r}{L}\right)}{dr^2}\right]_{r=r_{cr}} = -\frac{h^2}{k^3} < 0 \quad \text{luego es un máximo.}$$

3.3 CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

En este apartado vamos a ver situaciones en las que se genera calor en el medio en el que se está transmitiendo calor, debido sobre todo a la conversión de alguna otra fuente de energía.

En el caso de una pared esto tendría lugar, por ejemplo, si hubiera un cable por el cual estuviera circulando la corriente eléctrica. Parte de esta energía eléctrica se transforma en energía térmica y se disipa por la pared. Según esto, el perfil de temperaturas dentro de la pared podría ser el siguiente:



Recordemos la ecuación general para la transferencia de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Y las simplificaciones que habíamos hecho:

- Conductividad constante en todas las direcciones:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Si tenemos régimen estacionario (quiere decir que las propiedades no dependen del tiempo, es decir, la temperatura del sistema permanece constante con el tiempo):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad \rightarrow \text{Ecc. de POISON}$$

- Si además consideramos conducción unidimensional:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{g}{k} = 0$$

Para resolver esta ecuación integramos:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{g}{k}x = C_1$$

Y hacemos una segunda integración:

$$T = -\frac{g}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

Para hallar los valores de C_1 y C_2 tenemos que coger condiciones de contorno:

a) Una forma de hacerlo es la siguiente:

$$x=0 \Rightarrow T=T_{s,1} \Rightarrow T_{s,1} = C_2$$

$$x=L \Rightarrow T=T_{s,2} \Rightarrow T_{s,2} = -\frac{g}{2k}L^2 + C_1L + T_{s,1} \Rightarrow C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} + \frac{g}{2k}L$$

$$T = -\frac{g}{2k}x^2 + \left(\frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} + \frac{g}{2k}L \right)x + T_{s,1}$$

b) Otra forma de hallar esto que no se si me va a llevar a la misma solución:

$$x=0 \Rightarrow T=T_{s,1}$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = C_1$$

$$\int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}} dT = \int_0^L C_1 dx$$

$$T_{s,2} - T_{s,1} = C_1L$$

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}$$

$$x=L \Rightarrow T=T_{s,2}$$

$$T_{s,2} = -\frac{g}{2k}L^2 + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}L + C_2$$

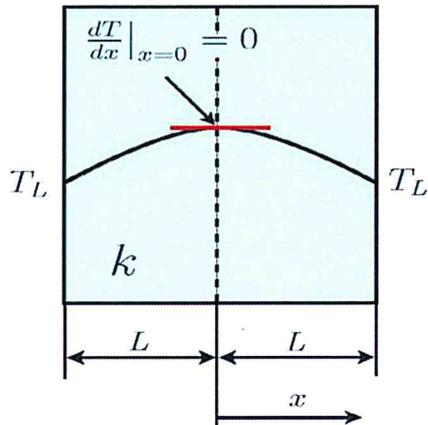
$$C_2 = T_{s,1} + \frac{g}{2k}L^2$$

$$T = -\frac{g}{2k}x^2 + \left(\frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \right)x + \left(T_{s,1} + \frac{g}{2k}L^2 \right)$$

Pues exactamente, exactamente la misma solución no es... Puf, ¡qué lío!!!! Coinciden sólo si $x=L$, si no, ¡no! Creo que la forma más correcta es la a), porque ahí estoy

calculando C_1 y C_2 con dos ecuaciones con dos incógnitas, que se tienen que cumplir a la vez. Explicaré esto a los alumnos.

Un caso particular y especialmente interesante es aquel en el que las superficies se mantienen a la misma temperatura. Entonces, la distribución de temperaturas es simétrica respecto al plano medio:



En este caso resulta más práctico poner el origen de x en el plano medio.

La ecuación de la transferencia de calor se plantea de la misma forma (ecc de Poisson) y su solución será por tanto:

$$T = -\frac{g}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

Para calcular ahora las constantes C_1 y C_2 , se toman las condiciones de contorno:

$$x=0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = C_1 \Rightarrow C_1=0$$

$$x=\pm L \Rightarrow T=T_L \Rightarrow C_2 = T_L + \frac{g}{2k}L^2$$

y la distribución de temperaturas será:

$$T = T_L + \frac{g}{2k}(L^2 - x^2)$$

3.4 CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL. FACTORES DE FORMA

Partimos de la ecuación de Laplace para conducción bidimensional:

Si ahora la ecuación general para la transferencia de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

La simplificamos teniendo en cuenta:

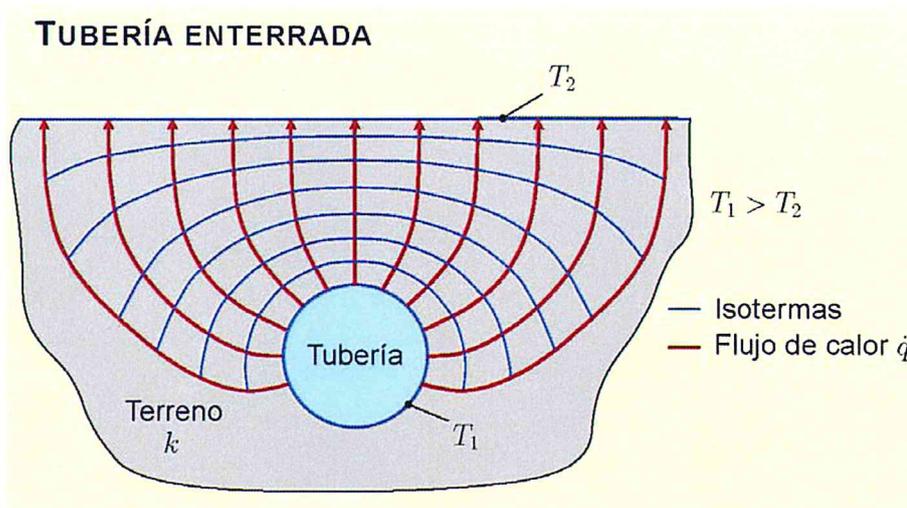
- Conductividad constante en todas las direcciones: $k = \text{cte}$
- Si tenemos régimen estacionario: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
- Sin generación de energía: $g = 0$
- Conducción bidimensional: $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

La expresión se simplifica, obteniendo la ecuación de Laplace para conducción bidimensional:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

La solución de esta ecuación se puede realizar por métodos analíticos, gráficos y numéricos. Nosotros vamos a utilizar la solución gráfica, apoyándonos en los llamados factores de forma.

Tenemos, por ejemplo, una tubería enterrada, por la cual está circulando un fluido a una temperatura superior a la ambiente, T_1 .



El flujo de calor desde la tubería hacia la superficie se realiza en las direcciones x e y, más o menos con las líneas que se muestran en la figura. Podemos considerar que no existe flujo en la dirección z, pues es la de la longitud de la tubería y el flujo de calor en direcciones x e y se realiza todo a lo largo de la tubería.

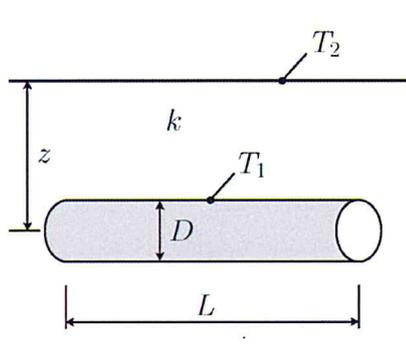
Si k es la conductividad térmica del medio (terreno), el flujo de calor por conducción, lo vamos a obtener mediante una expresión similar a la ley de Fourier:

$$\dot{q} = k \cdot S (T_1 - T_2)$$

Donde S es el factor de forma.

Nos encontramos con diferentes factores de forma, según la geometría de las conducciones:

Cilindro isotérmico enterrado en un medio semiinfinito

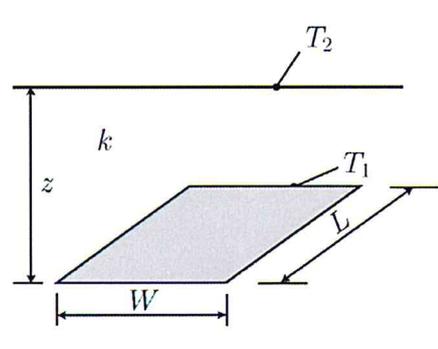


$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{2z}{D}\right)} \quad L \gg \frac{D}{2}$$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{D}\right)} \quad \begin{cases} L \gg \frac{D}{2} \\ z > 3\frac{D}{2} \end{cases}$$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2L}{D}\right) \left[1 - \frac{\ln(L/2z)}{\ln(2L/D)}\right]} \quad \begin{cases} z \gg \frac{D}{2} \\ L \gg z \end{cases}$$

Lámina rectangular isotérmica enterrada en un medio semiinfinito

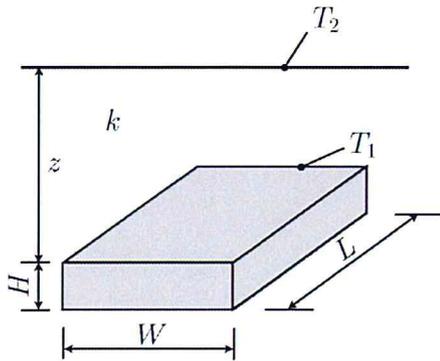


$$S = \frac{\pi W}{\ln\left(\frac{4W}{L}\right)} \quad z = 0, W > L$$

$$S = \frac{2\pi W}{\ln\left(\frac{4W}{L}\right)} \quad \begin{cases} z \gg W \\ W > L \end{cases}$$

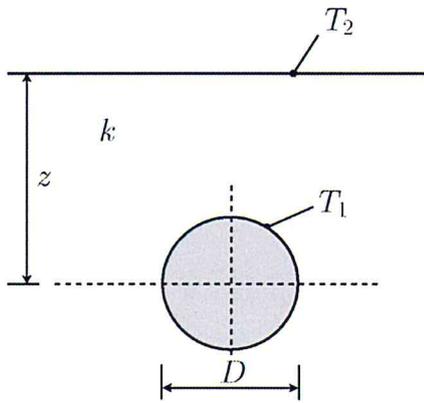
$$S = \frac{2\pi W}{\ln\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \quad \begin{cases} z > 2W \\ W \gg L \end{cases}$$

Viga rectangular isotérmico enterrado en un medio semiinfinito



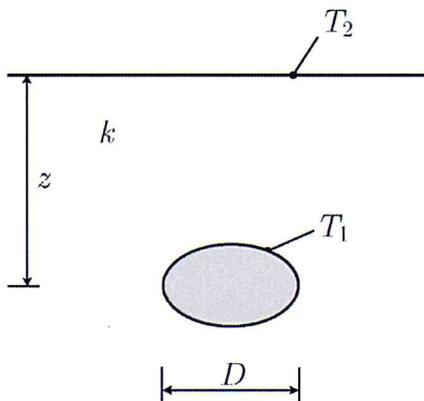
$$S = \frac{2.756L}{[\ln(1 + \frac{z}{H})]^{0.59}} \left(\frac{H}{z}\right)^{0.078} \begin{cases} L \gg W \\ L \gg z \\ L \gg H \end{cases}$$

Esfera isotérmica enterrada en un medio semiinfinito



$$S = \frac{2\pi D}{1 - \frac{D}{4z}}$$

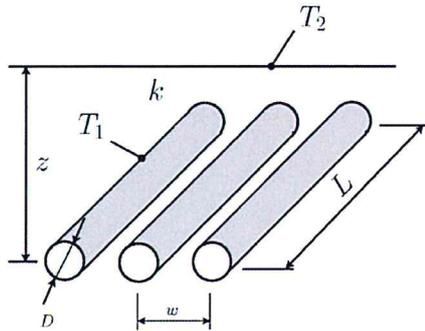
Disco isotérmico enterrado en un medio semiinfinito



$$S = 4D \quad z \gg D$$

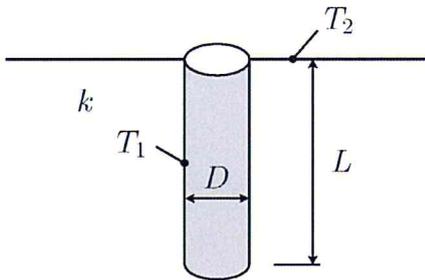
$$S = 2D \quad z = 0$$

Cilindros isotérmicos enterrados en un medio semiinfinito



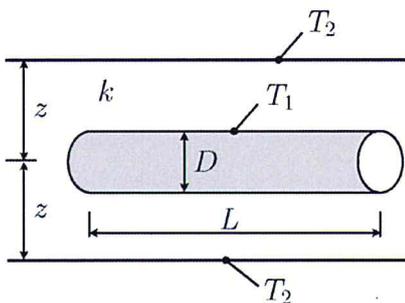
$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh\left(\frac{2\pi z}{w}\right)\right)} \quad \text{Por cilindro}$$

Cilindro isotérmico vertical enterrado en un medio semiinfinito



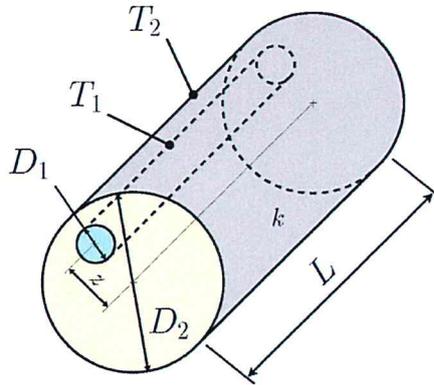
$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4L}{D}\right)} \quad L \gg D$$

Cilindro isotérmico en el plano medio de una pared infinita



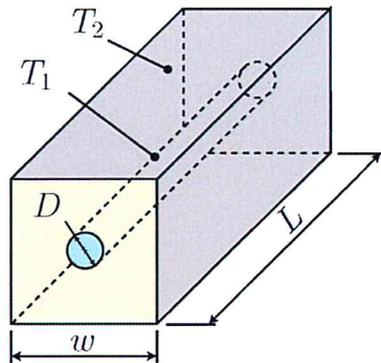
$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{8z}{\pi D}\right)} \quad z > 0.5D$$

Cilindro isotérmico excéntrico (D_1) de longitud L en un cilindro de la misma longitud (D_2)



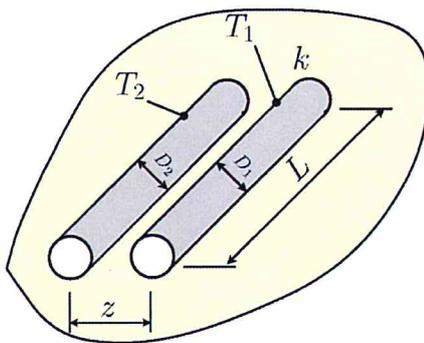
$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1 D_2}\right)} \quad L > D_2$$

Cilindro isotérmico (D_1) de longitud L en el centro de una barra sólida cuadrada de la misma longitud.



$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{1.08w}{D}\right)}$$

Dos cilindros isotérmicos paralelos en un medio semiinfinito



$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)} \quad \begin{cases} L \gg D_1 \\ L \gg D_2 \\ L \gg z \end{cases}$$