

LUIS ALVAREZ Y JULIO ESCLARÍN

## UN MODELO DE CUANTIFICACION DE IMÁGENES

### INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta ponencia es presentar nuevas técnicas basadas en EDP para tratamiento de imágenes. Las EDP se han consolidado en los últimos años como una herramienta útil en el proceso de imágenes y las ecuaciones de difusión pura son básicas en técnicas de filtrado clásico.

El filtro de paso-bajo se hace generalmente por convolución con Gaussianas de varianza creciente. Koenderink [1984] constató que la convolución de una señal con una Gaussiana en cada escala es equivalente a la solución de la ecuación del calor con la señal como dato inicial.

Llamando a este dato  $u_0$ , las sucesivas imágenes se obtienen resolviendo la ecuación del calor

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \Delta u(x,y,t) \text{ en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty] , \quad u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ en } \mathbb{R}^2$$

La solución de esta ecuación para un dato inicial con norma cuadrática acotada es  $u(x,y,t) = G_t * u_0$ , donde  $G_t(x,y) = C\sigma^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/4\sigma)$  es la función de Gauss. Aquí  $t$  representa un parámetro de escala (en la resolución de detalles).

En la teoría clásica los bordes se definen como las curvas donde el gradiente de la imagen suavizada tiene un máximo.

Esta teoría proviene de Marr y Hildreth [1980] y ha sido mejorada por Witkin [1983], Koenderink [1984], y Canny[1983].

$(x,y)$  está en un borde para la escala  $t$  si  $\Delta u(x,y,t)$  cambia de signo y  $|\nabla u(x,y,t)|$  es grande. Esta última condición introduce algún umbral que se habrá de definir previamente. Desgraciadamente los bordes a escalas bajas dan un cálculo inexacto de las fronteras que, de acuerdo con nuestra apreciación,

apreciación, podrían ser consideradas correctas, y por otro lado si pasamos un filtro de paso-bajo muy fino, con varianza pequeña, todos los bordes guardarán su correcta localización, pero los bordes principales estarán incluidos en una multitud de bordes espúreos debidos a ruidos, texturas etc.

La linealidad del operador laplaciano produce a través de las escalas una descolocación o pérdida de bordes de las regiones presentes en la imagen y por tanto es necesario buscar operadores no lineales. Malik y Perona[1971] han propuesto cambiarlo por el operador  $\text{div}(g(|\nabla u|)\nabla u)$  y utilizan como modelo la ecuación:  $u_t = \text{div}(g(|\nabla u|)\nabla u)$  donde  $g(\cdot)$  es positiva y monótona decreciente. Su idea es penalizar la difusión donde los gradientes de la señal son grandes. Sin embargo este modelo presenta algunos inconvenientes:

En primer lugar se comporta mal en presencia de ruido (el ruido se conserva) y en segundo lugar la ecuación está mal planteada desde un punto de vista teórico si  $sg(s)$  no es creciente.

Posteriormente L. Alvarez, P.L. Lions y J.M. Morel[1992] derivaron un método basado en la ecuación de la curvatura media  $u_t = \|\nabla u\| \text{div}(\nabla u / \|\nabla u\|)$  mediante el modelo  $u_t = g(|G * \nabla u|) \|\nabla u\| \text{div}(\nabla u / \|\nabla u\|)$

Este operador representa una difusión direccional en la dirección de mínima variación de la función (dirección ortogonal al gradiente  $\nabla u$ ), y produce una regularización de las formas presentes en la imagen respetando los contrastes entre diferentes formas.

## MODELO MATEMATICO

El método propuesto aquí está basado en ecuaciones de reacción-difusión. La idea que soporta estos modelos es difusión para filtrado de ruidos y reacción para mejora del contraste. Concretamente proponemos la siguiente ecuación:

$$u_t = g(|G * \nabla u|) \|\nabla u\| \text{div} \left[ \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] + f(u) \text{ en } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ en } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

donde  $g(s) = 1/s^2$ ,  $G$  es un núcleo de convolución (por ejemplo una función gaussiana) y  $f(u)$  es una función regular con un número finito de ceros (por ejemplo  $f(u) = -u(1/2-u)(1-u)$ ).

Una interpretación de los términos de la ecuación es la siguiente:

a) el término  $\|\nabla u\| \text{div} \left[ \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] = \Delta u - \frac{\nabla^2 u (\nabla u, \nabla u)}{\|\nabla u\|^2}$

representa un término de difusión degenerado, que difunde  $u$  en dirección ortogonal al gradiente  $\nabla u$  y no difunde en ninguna otra dirección de  $\nabla u$ . El propósito de este término de difusión degenerado es suavizar  $u$  a los dos distintos lados de un borde con un mínimo suavizamiento del borde mismo.

b) El término  $g(|G * \nabla u|)$  se usa para resaltar los bordes. Ciertamente,

un entorno de un punto  $x$ ,  $x$  se considera un punto del borde y la difusión es baja, puesto que  $g(s)$  es pequeña para valores grandes de  $s$ .

c) El término  $f(u)$  es una función regular, con un número finito de ceros de manera que estos actúan como atractores o expulsos según el signo de la derivada en ellos.

Para variar el número de niveles de gris, hemos optado por utilizar la siguiente función como término de reacción :

$$f(u) = \frac{4}{h^2}u(u-h) \quad \text{si } u \in [0, h], \quad f(u) = -\frac{4}{h^2}(u-h)(u-2h) \quad \text{si } u \in [h, 2h]$$

donde  $h$  viene dado por  $256/2$  (niveles de gris-1). Como se quiere que estas funciones se repitan periódicamente, se calcula para cada  $u$  la imagen por  $f$  de  $u \bmod 2h$  en  $[0, 256]$ .

$f$  conecta con regularidad clase  $C^1$  y se prolonga mediante funciones decrecientes a la izquierda de 0 y a la derecha de 256 con la misma conexión anterior. Sus valores máximo y mínimo son 1 y -1 respectivamente en  $[0, 256]$ .

En esta misma línea de utilizar ecuaciones de reacción-difusión para el proceso de imágenes G.H.Cottet y L.Germain[1992] propusieron un modelo basado en otro tipo de operadores no lineales.

## ESTADOS ASIMPTÓTICOS RADIALES

Para estudiar los posibles estados asimptóticos no triviales de la ecuación

(1) supondremos el caso de funciones radiales (para el caso  $g = 1$ ).

Si estos estados existen deben ser tales que verifiquen:

$$\|\nabla u_\infty\| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u_\infty}{\|\nabla u_\infty\|} \right] + f(u_\infty) = 0 \quad \text{donde}$$

$$\|\nabla u\| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] + f(u) = \frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} u_{xx} - 2 \frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} u_{xy} + \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} u_{yy} + f(u)$$

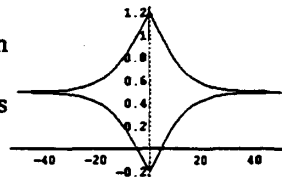
Supongamos que  $u$  es una función radial con centro en el origen, o sea  $u = h(x^2 + y^2)$ . Llamando  $r = x^2 + y^2$  nos queda:

$$u_x = 2xh'(r), \quad u_y = 2yh'(r), \quad u_{xx} = 2h'(r) + 4x^2h''(r),$$

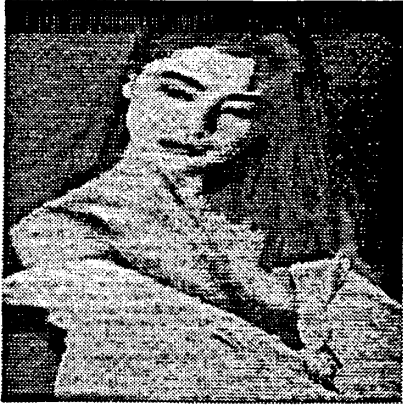
$$u_{xy} = 4xyh''(r), \quad u_{yy} = 2h'(r) + 4y^2h''(r)$$

Con lo que nos queda  $u_{xx} = 2h'(r)$  y la ecuación quedará  $2h'(r) - h(r)(0.5-h(r))(1-h(r)) = 0$ .

Resolviendo esta ecuación diferencial nos queda:



$$h(r) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{Ce^{\frac{r}{2}} + 1}} \quad C > 0$$



**Ejemplo de umbralizado con fases intermedias y resultado final con 50, 100 y 200 iteraciones respectivamente**

#### DISCRETIZACION DEL OPERADOR DIFERENCIAL

Denotando por  $\xi$  la dirección ortogonal a el gradiente de  $u$ ,

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] = u_{\xi\xi} \text{ supongamos ahora que la dirección } \xi \text{ es}$$

conocida:  $\xi = (-\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta)$ . Entonces podemos escribir :

$$u_{\xi\xi} = \mathcal{L}(u) = \operatorname{sen}^2 \theta u_{xx} - 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta u_{xy} + \operatorname{cos}^2 \theta u_{yy} \quad (2)$$

Vamos a escribir  $u_{\xi\xi}$  como una combinación lineal de valores de  $u$  sobre una matriz fija de  $3 \times 3$ .

$$\mathcal{L}(u_{ij}) = -4\lambda_0(u_{ij})h^2 + \lambda_1(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \lambda_2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \lambda_3(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \lambda_4(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1}) \quad (3)$$

donde  $h$  es el valor del incremento que se considera constante e igual para ambas variables.

La discretización mediante este método depende de un parámetro libre  $\lambda_0$ .

cuya elección se hará en función de criterios geométricos.

Aplicando la fórmula de Taylor e igualando (2) con (3) obtenemos los siguientes valores para los  $\lambda_i$ :

$$\lambda_1 = h^2(2 \lambda_0 - \text{sen}^2 \theta) \quad \lambda_2 = h^2(2 \lambda_0 - \text{cos}^2 \theta)$$

$$\lambda_3 = h^2(-\lambda_0 + 0.5(1 + \text{sen} \theta \text{cos} \theta)) \quad \lambda_4 = h^2(-\lambda_0 + 0.5(1 - \text{sen} \theta \text{cos} \theta))$$

Buscamos ahora un polinomio trigonométrico para el valor de  $\lambda_0$  con la propiedad de que la difusión sea pura, de manera que cuando difunda en alguna de las direcciones principales, en las otras la difusión sea 0.

Haciendo:

$\lambda_0(\theta) = a + b \text{cos} \theta + c \text{sen} \theta + d \text{cos}^2 \theta + e \text{sen}^2 \theta + f \text{sen} \theta \text{cos} \theta + g \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta$ , con los  $\lambda_i$  calculados anteriormente y recordando que (2) = (3), los valores finales obtenidos son:

$$-4\lambda_0 = -2 + 4 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta, \lambda_1 = \text{cos}^2 \theta (\text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta), \lambda_2 = \text{sen}^2 \theta (\text{sen}^2 \theta - \text{cos}^2 \theta)$$

$$\lambda_3 = \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta + 0.5 \text{sen} \theta \text{cos} \theta, \lambda_4 = \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta - 0.5 \text{sen} \theta \text{cos} \theta$$

**Lema:** Sea  $\sum_{i=1}^9 \alpha_i = 1$  Un algoritmo de la forma  $u^{n+1}_{ij} = \alpha_1 u^n_{ij} +$

$\alpha_2 u^n_{i+1,j} + \alpha_3 u^n_{i-1,j} + \alpha_4 u^n_{i,j+1} + \alpha_5 u^n_{i,j-1} + \alpha_6 u^n_{i+1,j+1} + \alpha_7 u^n_{i-1,j-1} + \alpha_8 u^n_{i+1,j-1} + \alpha_9 u^n_{i-1,j+1}$  es estable  $\Leftrightarrow \alpha_i \geq 0 \forall i$ .

**Demostración:**

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^9 \alpha_i = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_i \geq 0 \forall i, \text{ supongamos que } \exists c, C > 0 \text{ con } : c < u^n_{ij} < C \forall i.$$

Si  $c'$  es el máximo de los  $u^n_{ij}$  se tiene que:  $u^n_{ij} = (\sum_{i=1}^9 \alpha_i) c' = c' < C$

$\Rightarrow$  Veamos que si  $\exists i$  con  $\alpha_i < 0$  (por comodidad supondremos que es  $\alpha_1$ ),



**Ilustrac. 5** Ejemplo de cambio de nivel de gris de 32 a 8

el algoritmo no es estable, o sea que  $u^{n+1}_{ij}$  puede no mantener cotas de  $u^n_{ij}$ .

$$\sum_{i=1}^9 \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=2}^9 \alpha_i = 1 + |\alpha_1|$$

Si  $u^n_{ij} = c$  si  $\alpha_i > 0$  y  $u^n_{ij} = C$  si  $\alpha_i < 0$ , tendremos que  $u^{n+1}_{ij} =$

$$\left( \sum_{i,j=1}^9 \alpha_i \right) u^n_{ij} = (1 + |\alpha_1|)c - |\alpha_1|C = c + |\alpha_1|(c - C) < c.$$

#### ALGORITMO

$$1^\circ) u_x(i) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{1}{2} \left( (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) + (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) \right)}{4h}$$

$$u_x(i) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + \frac{1}{2} \left( (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) - (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) \right)}{4h}$$

$$2^\circ) \cos \theta = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}; \text{ Sen } \theta = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad \text{y} \quad 3^\circ) \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \mathcal{L}(u_{i,j}^n) + f(u_{i,j}^n)$$

#### REFERENCIAS

- ALVAREZ L., LIONS P.L. y MOREL J.M [1992]: Image selective smoothing by nonlinear diffusion, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 29, No. 3, pp. 845-866.
- CANNY J.[1983]: Finding edges and lines in images, Tech. Report 720, Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- COTTET G.H. y GERMAIN L.[1992]: Image processing through Reaction combined with nonlinear diffusion, Rapport Technique, RT 78.
- KOENDERINK J.J.[1984]: The structure of images, Biol. Cybernet. 50 pp.363-370
- MARR D. y HILDRETH, H.[1980]: Theory of edge detection, Proc. Roy. Soc. London Sr. B. 207, pp.187-210.
- PERONA P. y MALIK, J.[1971]: Scale-space and edge detection for visual scene analysis, IEE Trans. on Computers, C-20, pp. 562-569.
- WITKIN A.P. [1983]: Scale-space filtering, Proc. IJCAI, Karlsruhe, pp. 1019-1021.

LUIS ALVAREZ LEON, JULIO ESCLARIN MONREAL

Departamento de Informática y Sistemas

Edificio de Matemáticas e Informática

Universidad de Las Palmas

Campus de Tafira 35017 Las Palmas