

# DETECCIÓN INVARIANTE FRENTE A TRANSFORMACIONES AFINES DE PUNTOS DOMINANTES MEDIANTE WAVELETS

Fernando Pérez Nava<sup>1</sup>

Antonio Falcón Martel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación  
Universidad de La Laguna, Tenerife, España

<sup>2</sup>Departamento de Informática y Sistemas  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Gran Canaria, España

[fdoperez@ull.es](mailto:fdoperez@ull.es)

[afalcon@dis.ulpgc.es](mailto:afalcon@dis.ulpgc.es)

## RESUMEN

Se presenta una técnica para la detección de puntos dominantes basado en una representación multiescala invariante frente transformaciones afines de contornos. La realización del análisis multiescala está basado en el cálculo de la transformada del contorno mediante un conjunto ortogonal de wavelets. Utilizando esta transformada se calcula un conjunto de descriptores invariantes basado en la expansión del contorno mediante las funciones ortogonales. A este nuevo conjunto de descriptores se le aplican las técnicas de detección de módulos máximos de la transformada proporcionando un conjunto de puntos dominantes del contorno. Se muestran los resultados de la aplicación de esta técnica a un conjunto de contornos los cuales indican su capacidad para determinar aquellos puntos de mayor importancia geométrica.

## 1.-INTRODUCCIÓN

Un problema básico en la visión por ordenador lo constituye la partición de la escena en partes coherentes [1]. Casi la totalidad de los paradigmas de visión por ordenador requieren alguna forma de segmentación como paso de simplificación inicial, de forma que se pueda limitar la complejidad de la información suministrada a procesos de más alto nivel basados en conocimiento.

Para realizar la segmentación de un contorno es necesario resolver los siguientes problemas:

La definición de una medida que separe los puntos que aportan poca información sobre la curva de aquellos puntos con mucha información que se denominan puntos dominantes. Estas medidas están basadas generalmente en el concepto de curvatura.

1. Una forma de comparar esta medida de punto dominante con su entorno (su contexto).
2. Una forma de analizar la evolución de los puntos dominantes a diferentes escala de resolución.
3. Un nivel de significación por debajo del cual la detección de un punto dominante no se puede separar del "ruido" del contorno.

4. La obtención de un conjunto de puntos dominantes que sea invariante frente a transformaciones del objeto.

La invarianza frente a transformaciones es un problema básico, pues la forma de un contorno en una escena depende de la posición del sensor y es necesaria la utilización de descripciones geométricas que no se vean afectadas por un cambio en la posición relativa de la cámara y el objeto.

La distorsión resultante de observar un objeto mediante una cámara con una orientación arbitraria puede ser descrita mediante una transformación perspectiva [2]. Sin embargo, cuando las dimensiones del objeto son pequeñas comparadas a la distancia de la cámara al objeto, puede asumirse un modelo de perspectiva débil que puede ser aproximado mediante una transformación afín.

Una herramienta adecuada para resolver los problemas descritos anteriormente es la del análisis multiescala del contornos [3], pues proporciona el medio de generar una solución integrada a la totalidad de los problemas señalados. Estos métodos están basados en el estudio del contorno a diferentes niveles de resolución utilizando características invariantes con respecto a transformaciones que no cambien la forma del contorno. De particular importancia dentro de estos métodos multiescala son los basados en wavelets [4], [5], pues son capaces de proporcionar un análisis basado en funciones ortogonales, lo que proporciona ventajas en cuanto a la ausencia de redundancia y a la interpretación de la magnitud de la norma de los descriptores como medida de evaluación de puntos dominantes.

Este tipo de análisis multiescala ha sido desarrollado para el caso del grupo de transformaciones euclídeas (traslaciones, rotaciones y cambios de escala) [4]. En este trabajo se mostrará una metodología para su extensión al caso afín; para ello en la sección 2 se introducen los conceptos de la geometría afín diferencial y una breve introducción a las expansiones mediante wavelets. En la sección 3 se presenta la descripción multiescala del contorno, en la sección 4 se presenta el cálculo de puntos dominantes y finalmente las conclusiones del trabajo se presentan en la sección 5.

## 2.-PRINCIPIOS BÁSICOS

A continuación se exponen los elementos básicos necesarios para introducir los nuevos descriptores invariantes que se proponen en este trabajo.

### 2.1 Geometría Afín

Las transformaciones del plano afín,  $y = Ax + b$  con  $A$  una matriz  $2 \times 2$  y  $b$  una matriz  $2 \times 1$  pueden ser expresadas en coordenadas homogéneas como [2]:

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\text{FPN1}]$$

Esto hace que formen un subgrupo del grupo de transformaciones del plano proyectivo. Este subgrupo tiene 6 grados de libertad y posee todos los invariantes

del grupo del plano proyectivo: colinealidad y razón doble. Además posee los siguientes invariantes: paralelismo, cociente de distancias sobre una recta y cociente de áreas. Esto permite que el determinante de vectores sobre el plano sea semi invariante. Además posee los siguientes invariantes diferenciales [6] : longitud afin y curvatura afin. Su expresión es la siguiente:

Dada una curva parametrizada como:  $r(t) = (x(t), y(t))$  si se

$$\text{verifica: } \left| \frac{dt}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} \right| = |t, r| \neq 0$$

donde utilizamos  $| \cdot |$  como el símbolo del determinante, puede definirse un parámetros  $s$  de forma que:

$$s = \int |t, r|^{1/3} dt$$

esta parametrización es la parametrización natural afin de la curva y permite expresar la curva de forma invariante mediante la longitud afin.

La curvatura afin es el invariante diferencial más simple de una curva y se determina como:

$$k(s) = |r'', r''|$$

donde las primas denotan derivación con respecto a  $s$ .

## 2.2 Expansión de contornos mediante wavelets

Una representación a múltiples escalas proporciona un marco jerárquico para interpretar la información presente en una imagen. A diferentes resoluciones los detalles en una imagen generalmente caracterizan estructuras físicas diferentes. En las resoluciones burdas, estos detalles se corresponden a las estructuras más importantes y pueden proporcionar un contexto para analizar la señal a niveles más detallados. Los wavelets son una herramienta muy útil en el análisis multiescala puesto que proporcionan un conjunto de herramientas para el análisis de la señal a diferentes niveles de resolución.

Una expansión basada en wavelets [7], [8] utiliza traslaciones y dilataciones de una función, el wavelet  $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ . En el caso de una transformación continua basada en wavelets (TCW), los parámetros de traslación y dilatación varían continuamente. Es decir la transformada hace uso de las funciones:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$$

donde  $\psi$  es el wavelet de análisis,  $a$  representa una dilatación,  $b$  una traslación y el factor de normalización asegura que sus normas en  $L_2(\mathbb{R})$  sean independientes de  $a$ .

La transformada continua basada en wavelets de una función  $f \in L_2(\mathbb{R})$  se define como:

$$Wf, \psi(a, b) = \langle f, \psi a, b \rangle$$

Donde  $\langle , \rangle$  denota el producto escalar usual en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Un análisis multiresolución, [7], (AMR) de  $L^2(\mathbb{R})$  se define como una sucesión de subespacios cerrados  $V_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , con las propiedades:

$$1. V_j \subset V_{j+1}$$

$$2. f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$$

$$3. f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t+1) \in V_0$$

$$4. \text{clausura } \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \text{ y } \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$$

5. Existe una función de escala [FPN2]  $\phi \in V_0$ , con integral no nula de forma que el conjunto  $\{\phi(t-l), l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_0$ .

Puesto que  $V_0 \subset V_1$ ,  $\phi(t)$  puede escribirse como una combinación lineal de  $\phi(2t-k)$  que son versiones escaladas y trasladadas de  $\phi(t)$ . De forma más precisa:

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2t-k)$$

Es entonces inmediato que el conjunto  $\{\phi_j, l(t-l), l \in \mathbb{Z}\}$ , con:

$$\phi_{j,l}(t) = \phi(2^j t - l), \quad j, l \in \mathbb{Z}$$

es una base de Riesz de  $V_j$ .

Se dice que los wavelets tienen soporte compacto si únicamente un número finito de los  $p_k$  son no nulos en la relación anterior.

Dado un conjunto de subespacios anidados  $V_j$ , la propiedad 1 del AMR implica que existen subespacios  $W_j$ , que son el complemento de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , es decir:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Puesto que los subespacios  $V_j$  están anidados entonces:

$$V_J = V_j \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{j+k}, \quad j < J \text{ y } L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

Además los subespacios  $W_j$  cumplen:  $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}$

Dada una función de escala  $\phi$  en  $V_0$ , el principio básico del AMR es la existencia de otra función  $\psi$  en  $W_0$  llamada wavelet de forma que el conjunto  $\{\psi(t-l), l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $W_0$ . El conjunto de funciones wavelets

$\psi_{j,l}(t) = \psi(2^j t - l)$ ,  $j, l \in \mathbb{Z}$  es entonces una base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$ .

La clase de wavelets ortogonales es particularmente interesante e introduce el concepto de análisis multiresolución ortogonal. Este es un análisis multiresolución

en el que los subespacios wavelet  $W_j$  se definen como el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ . En consecuencia, los espacios  $W_j$  con  $j \in \mathbb{Z}$  son todos mutuamente ortogonales. De esta forma si  $Q_j$  es el operador de proyección en  $W_j$

$$f(t) = \sum_j Q_j f(t)$$

es una expansión ortogonal. Una condición suficiente para un análisis multiresolución ortogonal es que  $V_0 \perp W_0$ . Una función de escala ortogonal es una función  $\phi$  de forma que el conjunto  $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortogonal de  $V_0$ , y una función wavelet ortogonal es una función  $\psi$  tal que el conjunto  $\{\psi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortogonal de  $W_0$ . Entonces puede escribirse para una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$f(t) = \sum_{j,l} q_{j,l} \psi_{j,l}(t) \text{ con } q_{j,l} = \langle f, \psi_{j,l} \rangle$$

lo cual puede verse como una versión discreta de la TCW pues:  $q_{j,l} = \langle f, \psi_{j,l} \rangle$

En base a los coeficientes  $q_{j,l}$  procedentes de este tipo de expansiones se realiza el estudio de la señal a múltiples escalas. Para realizar la expansión de un contorno  $r(t) = (x(t), y(t))$  se expanden las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ .

### 3.-DESCRIPCIÓN PROPUESTA

Existe un interés creciente en el uso de wavelets para la descripción de contornos. En [5] se estudia el problema de la representación de contornos utilizando la TCW y se prueba su invarianza frente al grupo euclídeo de transformaciones. En [4] esta aproximación se extiende al caso afin mediante la utilización conjunta de la función de escala  $\phi(t)$  que genera  $V_0$  y la función wavelet  $\psi(t)$  que genera  $W_0$  y la construcción de descriptores basados en los determinantes obtenidos de la expansión del contorno utilizando ambas funciones. Sin embargo, puesto que la función de escala no es invariante a traslaciones, en este caso la traslación debe ser calculada por algún procedimiento externo, lo que hace que se proporcione únicamente una solución parcial al problema. En nuestra propuesta no se utiliza la función de escala, lo que garantiza un procedimiento completamente invariante.

#### 3.1 Descriptores Invariantes

La propuesta que se presenta está basada en la descripción de los subespacios  $V_0$  y  $W_0$  por pares de funciones ortogonales. De esta forma  $V_0$  estará generado por las funciones de escala  $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ , y  $W_0$  por las funciones wavelets  $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$ . Los descriptores estarán basados en las dos funciones wavelet que generan  $W_0$ , obteniéndose de esta forma la invarianza frente a traslaciones. Puesto que los determinantes son invariantes frente a transformaciones equiafines ( $|A|=1$ ) los coeficientes obtenidos son invariantes frente a transformaciones equiafines. Para transformaciones afines generales, el proceso de generación de puntos dominantes

es invariante, pues está basado en la comparación de los módulos de los descriptores y en el caso de una transformación afin general todos se ven multiplicados por el determinante de la matriz de transformación  $|A|$ .

Dado entonces el contorno:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , éste se reparametriza mediante la longitud afin obteniéndose:  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ . El contorno se expande utilizando las funciones que generan  $W_0$  obteniéndose los coeficientes

$$N_{j,l} = \begin{vmatrix} \langle x(s), \psi_{0;j,l}(s) \rangle & \langle y(s), \psi_{0;j,l}(s) \rangle \\ \langle x(s), \psi_{1;j,l}(s) \rangle & \langle y(s), \psi_{1;j,l}(s) \rangle \end{vmatrix} \quad j, l \in \mathbb{Z}$$

Que constituyen un subconjunto de la TCW:

$$\bar{N}_{j,l} = \begin{vmatrix} W_{x,\psi_0}(2^{-j}, 2^{-j}l) & W_{y,\psi_0}(2^{-j}, 2^{-j}l) \\ W_{x,\psi_1}(2^{-j}, 2^{-j}l) & W_{y,\psi_1}(2^{-j}, 2^{-j}l) \end{vmatrix} \quad j, l \in \mathbb{R}$$

Siendo ambas iguales sobre  $\mathbb{Z}$ , es decir  $\bar{N}_{j,l} = N_{j,l}$ ,  $j, l \in \mathbb{Z}$

En la siguiente sección se mostrará una aplicación de este esquema utilizando los wavelets de Legendre [8], la razón principal de su utilización es que como se mostrará a continuación, dependen de la curvatura afin (el invariante diferencial afin más simple) para los niveles detallados de escala.

### 3.2 Los Wavelets de Legendre

Los wavelets de Legendre están basados en un par las funciones de escala  $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ , y en un par de funciones wavelets  $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$  que se definen en el intervalo  $[0,1]$  de la siguiente forma:

Funciones de escala

Se definen un par de funciones de escala  $\phi_0$ , y  $\phi_1$  como:

$$\phi_0(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{3}(2t-1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

estas funciones verifican la condición de ortogonalidad:

$$\langle \phi_i(t-k), \phi_j(t-l) \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l}, \text{ para } i, j = 0, 1 \text{ y } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Wavelets

Se definen un par de funciones wavelet  $\psi_0$ , y  $\psi_1$  como:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} -\sqrt{3}(4t-1) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ +\sqrt{3}(4t-3) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \psi_1(t) = \begin{cases} 6t-1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 6t-5 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que verifican las condiciones de ortogonalidad:

$$\langle \psi_i(t-k), \psi_j(t-l) \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l}, \text{ para } i, j = 0, 1 \text{ y } k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \phi_i(t-k), \psi_j(t-l) \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l}, \text{ para } i, j = 0, 1 \text{ y } k, l \in \mathbb{Z}.$$

### 3.3 Propiedades

Además de la invarianza de los descriptores  $N_{j,l}$  frente a transformaciones equiafinas la utilización de los wavelets de Legendre relaciona los descriptores con la curvatura afín de la siguiente forma:

Teorema. Si  $r(s)$  posee derivada de cuarto orden en el entorno de un punto  $c$ ,  $k(c)$  es su curvatura afín y  $\bar{N}_{j,l}$ ,  $j, l \in \mathbb{Z}$  los coeficientes de la TCW utilizando los wavelets de Legendre entonces:

$$k(c) = p \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\bar{N}_{\log_2 \Delta h, c - \Delta h}}{\Delta h^6}, \quad p = \frac{48^2 \cdot 10}{\sqrt{3}}$$

Por tanto para los niveles de detalle de la señal:

$$\bar{N}_{\log_2 \Delta h, c - \Delta h} \approx \frac{k(c) \Delta h^6}{p} \quad p = \frac{48^2 \cdot 10}{\sqrt{3}}$$

## 4.-DETECCIÓN DE PUNTOS DOMINANTES

La detección de puntos dominantes se lleva a cabo mediante la identificación de los descriptores  $\bar{N}_{a,b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , de módulo máximo y la construcción de las curvas de máximos. Esta técnica ya ha sido desarrollada para el caso euclídeo [5] y en este trabajo se estudia su aplicabilidad al caso afín.

Sea entonces  $M(b,a) = |\bar{N}_{a,b}|$ , es decir el módulo del coeficiente  $\bar{N}_{a,b}$ . Se dirá que  $M(b_0,a)$  tiene módulo máximo si  $M(b_0,a) > M(b,a)$  para todo  $b \neq b_0$  perteneciente a un entorno de  $b_0$ . Se definen entonces las curvas de módulo máximo como aquellas que están determinadas por los descriptores de módulo máximo, es decir son curvas sobre el semiplano  $\{(b,a): b \in \mathbb{R}, a > 0\}$  a lo largo de las cuales todos los puntos son de módulo máximo. A la hora de construir estas curvas es conveniente emplear la TCW, ya que la evolución de los máximos puede hacerse de forma más precisa mediante una variación lenta del parámetro de escala. En general, es necesario realizar algún tipo de postprocesamiento de los máximos ya que éstos pueden verse influenciados por el ruido de la señal.

Una vez construida esta representación los distintos puntos dominantes son determinados mediante un procedimiento de seguimiento [5], [9] y su importancia suele determinarse mediante alguna propiedad de la curva de módulos máximos, como por ejemplo: longitud de la curva, media de los módulos sobre la curva, razón de cambio del módulo a lo largo de la curva u otras [9].

La estructura del espacio de escalas en el caso euclídeo suele aproximarse a la de un árbol, lo que es aprovechado por los procedimientos de seguimiento para la localización de los puntos de módulo máximo a lo largo de todo el espacio de escalas. La estructura en el caso afín es más compleja, pues se ve influenciada de forma determinante por los puntos de inflexión de la curva. Sin embargo, como veremos el procedimiento de detección de puntos dominantes es sencillo de implementar y aprovecha la estructura que aparece en el espacio de escalas cuando se trazan sobre las curvas de módulo máximo.

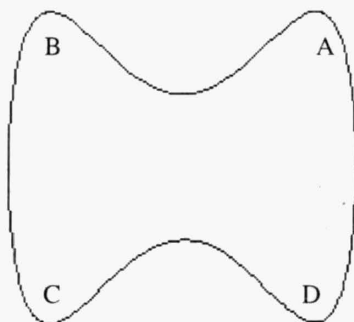


Figura 1: Contorno de prueba

La estructura del espacio de escalas en el caso euclídeo suele aproximarse a la de un árbol, lo que es aprovechado por los procedimientos de seguimiento para la localización de los puntos de módulo máximo a lo largo de todo el espacio de escalas. La estructura en el caso afín es más compleja, pues se ve influenciada de forma determinante por los puntos de inflexión de la curva. Sin embargo, como veremos el procedimiento de detección de puntos dominantes es sencillo de implementar y aprovecha la estructura que aparece en el espacio de escalas cuando se trazan sobre las curvas de módulo máximo.

Para apreciar la forma del espacio de escalas determinado por los descriptores invariantes propuestos, en la Figura 1 se muestra un contorno de prueba para el que se han calculado el conjunto de descriptores basados en los wavelets de Legendre y a los que posteriormente se les ha hallado su módulo.

En la Figura 2 se representan los módulos de mayor magnitud con tono más claro y los de menor magnitud con tono más oscuro. Esta representación se hace utilizando los parámetros que definen los wavelets: el parámetro de traslación  $b$  y el parámetro de escala  $a$ . Los niveles de resolución más detallados están



representados en la parte inferior de la imagen mientras que los niveles con menor resolución se muestran en la parte superior.

Para facilitar la interpretación del espacio de escala se han señalado cuatro puntos sobre la curva A, B, C y D y su correspondiente posición en el espacio de escalas. Así mismo, para una mejor observación del espacio, se ha utilizado una representación logarítmica de las magnitudes de los módulos de los descriptores.

En la Figura 3 se muestra el corte representado en la Figura 2 mediante una línea discontinua. En este caso el valor de la escala está fijo y se representa el módulo de los descriptores en función del parámetro de traslación  $b$ .

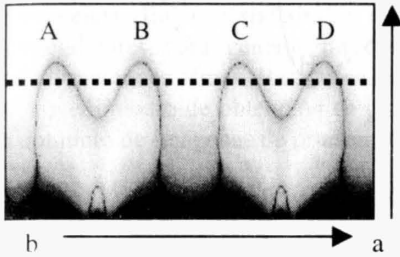


Figura 2: Representación del espacio de escalas según los parámetros de los wavelets de Legendre  $a$  y  $b$

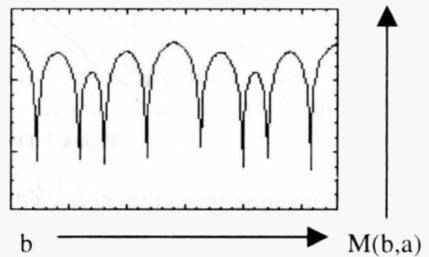


Figura 3: Corte del espacio de escalas

A continuación, en la Figura 4 se muestra el conjunto de curvas de módulo máximo sobreimpuesto sobre el espacio de escalas. En ella se aprecia que las curvas de módulo máximo son de tres tipos: o recorren libremente el espacio (como la curva E), acaban en una estructura en forma de V (como la curva C), o acaban en una estructura con forma de V invertida (como la curva B). Estos puntos de final de curva en el espacio de escalas son los elegidos como puntos dominantes de la curva. Su importancia relativa puede venir dada por cualquiera de los criterios expuestos anteriormente: longitud de la curva, media de los módulos sobre la curva, razón de cambio del módulo a lo largo de la curva u otras. En la figura 5 se aprecia el resultado de la elección de los puntos dominantes anteriormente señalados sobre la curva.

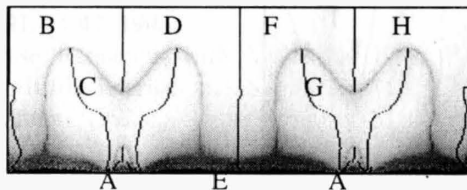


Figura 4: Curvas de módulo máximo

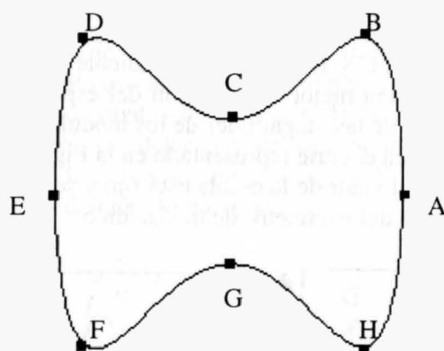


Figura 5: Puntos dominantes

Seguidamente se muestran otros ejemplos del uso de esta técnica:

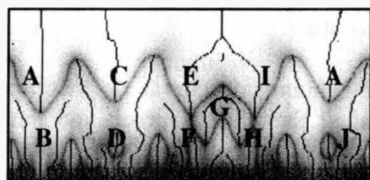


Figura 6: Espacio de escalas

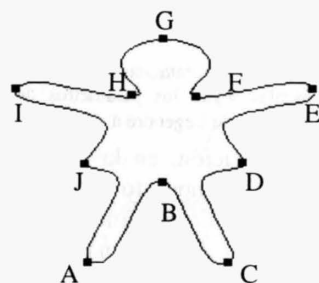


Figura 7: Puntos dominantes

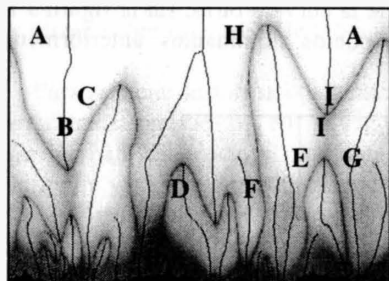


Figura 7: Espacio de escalas

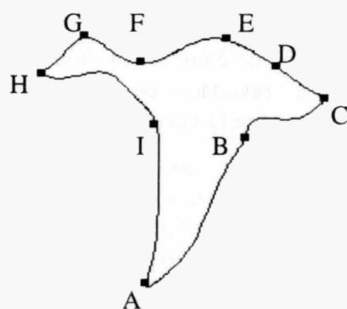


Figura 8: Puntos dominantes

Como puede apreciarse el procedimiento descrito consigue detectar los puntos con una mayor importancia geométrica mediante el análisis de la estructura del espacio de escalas generado con los descriptores basados en los wavelets de Legendre para el contorno.

## 5.-CONCLUSIONES

Se ha presentado una técnica para la detección de puntos dominantes basada en una representación multiescala invariante de contornos bidimensionales frente a una transformación general afín. Esta técnica realiza el análisis multiescala mediante el cálculo de la transformada continua del contorno utilizando un conjunto ortogonal de wavelets. En este trabajo se muestran las ventajas de elegir dos wavelets independientes para generar un conjunto de descriptores invariantes frente a transformaciones afines. Basado en este nuevo conjunto de descriptores se presenta un procedimiento de obtención de puntos dominantes y se muestra su aplicación a un conjunto de imágenes de prueba.

## 6.-REFERENCIAS

- [1] M. A. Fischler y H. C. Wolf, "Locating Perceptually Salient Points on Planar Curves", IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 16, nº 2, pp 113-129, Febrero 1994.
- [2] J.L. Mundy and A. Zisserman, "Geometric Invariance in Computer Vision", MIT Press 1992
- [3] F. Mokhtarian, A.K. Mackworth, "A Theory of Multiscale, Curvature-Based Shape Representation for Planar Curves", IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 14, nº 8, pp 789-804, Agosto 1992.
- [4] Q. M. Tieng and W. Bowles, "Wavelet Based Affine Invariant Representation: A Tool for Recognizing Planar Objects in 3D Space", IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 19, nº 8, pp 846-857, Agosto 1997.
- [5] J.-P. Antoine, D. Barache, R.M. Cesar Jr. and L. da F. Costa, Multiscale Shape Analysis using the Continuous Wavelet Transform, In IEEE International Conference on Image Processing, September 1996.
- [6] S. Buchin, "Affine Differential Geometry", Science Press 1983
- [7] E. Hernández and G. Weiss "A First Course on Wavelets", CRC Press, 1996.
- [8] M. Ueda and S. Lodha, "Wavelets: An Elementary Introduction and Examples", Tech. Report UCSC-CRL 94-47, 1995.
- [9] J.Liu y otros, Noise Reduction with Multiscale Edge Representation and Perceptual Criteria, In IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-scale Analysis, Octubre 1992.