

Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería

Comunicaciones presentadas
al II Simposium sobre Aplicaciones
del Método de los Elementos Finitos
en Ingeniería, celebrado en la
Escuela Técnica Superior de
Ingenieros de Caminos, Canales y
Puertos de la Universitat Politècnica
de Catalunya del 9 al 12 de junio
de 1986.

**Diseño por ordenador,
Técnicas de cálculo numérico
Mecánica de fluidos y
Problemas térmicos**

Editores

J. Oliver, M. Casteleiro, E. Oñate

u p c
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
E D I C I O N S

Barcelona 1986

Institut Català de Bibliografia. Dades Catalogràfiques:

Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería (2n : 1986 : Barcelona)

Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería : comunicaciones presentadas al II Simposium sobre Aplicaciones del Métodos de los Elementos Finitos en Ingeniería, celebrado en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universitat Politècnica de Catalunya del 9 al 12 de junio de 1986.

-- En 3 v. -- Bibliografía.-- ISBN 84-7653-015-3

3 : Diseño por ordenador, técnicas de cálculo numérico, mecánica de fluidos y problemas térmicos.- -- ISBN 84-7653-012-9

I. Escola Tècnica Superior d'Enginyer de Camins, Canals i Ports (Barcelona)

II. Títol 1. Elements finits, Mètode dels -- Congressos, conferències, etc. 2. Enginyeria d'estructures -- Congressos, conferències, etc.

624.04:517]:061.3(467. 1 Ba Barcelona) "1986"

Disseny de la coberta: Jordi Pallí

J. Oliver, M. Casteleiro, E. Oñate
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya
Diagonal, 647-08028 Barcelona.

Imprimeix: Artes Gráficas Torres
Morales, 17 - 08029 Barcelona

ISBN Vol. 3 : 84-7653-012-9

Obra completa 84-7653-015-3

Dip. legal: B-21791-1986

DIVERSOS ALGORITMOS APLICABLES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS NO LINEALES MEDIANTE METODOS DE LAGRANGIANO AUMENTADO.

L. Ferragut(*) y G. Winter(**)

(*) E.T.S. Ingenieros de Minas de Madrid. Ríos Rosas, 21
28003 Madrid.

(**) E.T.S. Ingenieros Industriales de Las Palmas.
Tarifa Alta. 35017 Las Palmas.

RESUMEN

Al abordar la resolución de problemas no lineales mediante técnicas de Lagrangiano aumentado es usual utilizar algoritmos del tipo "Uzawa" para el cálculo de la solución; uno de los inconvenientes de tales algoritmos es la adecuada elección de parámetros que aseguren una convergencia rápida. En este trabajo presentamos diversas variantes de los algoritmos antes citados que permiten un cálculo automático de los parámetros y los aplicamos al cálculo de flujo no lineal en medio poroso.

INTRODUCCION

Los métodos de Lagrangiano aumentado fueron introducidos por Hestenes [1] y Powell [2] en 1969, para resolver problemas de optimización. Más recientemente (1974), Glowinski y Marrocco [3] utilizan tales métodos en la resolución numérica de problemas de contorno regidos por ecuaciones en derivadas parciales; finalmente Ferragut y Elorza [4] estudian su aplicación a problemas de flujo no lineal en medio poroso.

Muchos problemas de la física se pueden formular de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } & F(Bv) - L(v) & (1) \\ & v \in V \\ & V, H \text{ espacios vectoriales normados} \\ & B \in L(V, H) \\ & F, L, \text{ funciones convexas, propias, semicontinuas} \\ & \text{inferiormente sobre } H \text{ y } V \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

El principio de los métodos de Lagrangiano aumentado, véase Fortin, Glowinski [5] consiste en desacoplar las dificultades inherentes al operador lineal B del carácter no lineal del problema introduciendo una

nueva variable y una nueva ecuación.

Así reformulamos (1) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } \{ & F(q) + L(v) \} \\ (v, q) & \in W \\ W = \{ & (v, q) \in V \times H ; Bv = q \} \end{aligned} \quad (2)$$

La restricción $Bv=q$ se elimina mediante un multiplicador de Lagrange $\mu \in H'$ (dual de H); el problema a resolver es entonces el cálculo de un punto silla de la funcional

$$\mathcal{L}(v, q, \mu) = F(q) + L(v) + \langle \mu, Bv - q \rangle \quad (3)$$

ó bien de la Lagrangiana aumentada

$$\mathcal{L}_r(v, q, \mu) = \mathcal{L}(v, q, \mu) + \frac{r}{2} \|Bv - q\|^2 \quad (4)$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ el producto de dualidad (o equivalente) entre H' y H y la norma en H respectivamente, o una norma equivalente.

FLUJO NO LINEAL EN MEDIO POROSO.

Para velocidades relativamente altas del flujo a través de un medio poroso se producen desviaciones significativas de la ley de Darcy, por lo que resulta necesario utilizar otras expresiones matemáticas para representar la relación no lineal, existente en muchos casos, entre el gradiente hidráulico y la velocidad de flujo, véase por ejemplo Nazeer [6]. Las expresiones de uso más generalizado son las de tipo binómico y las de tipo exponencial; ésta última consiste en sustituir la ley de Darcy $\vec{v} = -k \vec{\nabla} u$, donde v es la velocidad del fluido, u la altura piezométrica y k la conductividad hidráulica por la siguiente:

$$\vec{v} = -k_n |\vec{\nabla} u|^{n-1} \vec{\nabla} u \quad (5)$$

donde $|\cdot|$ designa el módulo de un vector en R^d ($d=1, 2$ ó 3) y k_n es una constante que depende del exponente n que a su vez depende del valor de $|\vec{\nabla} u|$. En régimen lineal $n=1$ y en régimen turbulento puro $n=0.5$.-- Las ecuaciones que gobiernan el flujo estacionario en un medio isótropo, $\Omega \subset R^d$ serán:

$$\left. \begin{aligned} - \nabla \cdot (k_n |\nabla u|^{n-1}) \nabla u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= u_0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ -k_n |\vec{\nabla} u|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial n} &= g & \text{sobre } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

siendo $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ el contorno de Ω y f, u_0 y g funciones conocidas que representan respectivamente el caudal volumétrico aportado en cada punto de Ω , la altura -

piezométrica conocida en r_0 y el flujo conocido en r_1 .

FORMULACION VARIACIONAL.

Es bien conocido que la solución u de (6) es también solución del siguiente problema de optimización:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \quad (7)$$

donde $J(\cdot)$ viene dada por ($s=n+1$):

$$J(v) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} k_n |u|^S dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_1} g v d \quad (8)$$

y siendo $K = \{v \in W^{1,S}(\Omega) ; v|_{\Gamma_0} = 0\}$ y W^{1,S^1} el espacio de Sobolev $\{v \in L^S(\Omega) ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^S(\Omega), 1 \leq i \leq d\}$

Aquí desacoplamos el operador gradiente $\vec{\nabla}(\cdot)$ de la ley no lineal de flujo; así la Lagrangiana (3) toma en este caso la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v, \vec{q}, \vec{\mu}) = & \frac{1}{S} \int_{\Omega} k_n |\vec{q}|^S dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_1} g v d\gamma + \\ & + \int_{\Omega} k_d \vec{\mu} (\vec{\nabla} u - \vec{q}) dx \end{aligned} \quad (9)$$

y elegimos como lagrangiana aumentada:

$$\mathcal{E}_r(v, \vec{q}, \vec{\mu}) = \mathcal{E}(v, \vec{q}, \vec{\mu}) + \frac{r}{2} \int_{\Omega} k_d \|\vec{\nabla} v - \vec{q}\|^2 dx \quad (10)$$

siendo k_d la conductividad de Darcy.

En la práctica resolvemos la versión discretizada de (10) mediante el método de elementos finitos.

ALGORITMOS DE RESOLUCION.

Algoritmo de Uzawa.

El algoritmo utilizado en Ferragut y Elorza [4] para la búsqueda de un punto silla de (10) es del tipo Uzawa combinado con una relajación por bloques en cada iteración, es decir:

Se eligen \vec{p}^0 y $\vec{\lambda}^0$ arbitrarios

1º) Conocido \vec{p}^i y $\vec{\lambda}^i$ calculamos u^{i+1} resolviendo:

$$r \int_{\Omega} k_d \vec{\nabla} u^{i+1} \vec{\nabla} v dx = \int_{\Omega} k_d (r \vec{p}^i - \vec{\lambda}^i) \vec{\nabla} v dx + \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\gamma \quad (11)$$

$\forall v \in V_h$ (subespacio de dimensión finita).

2º) Calculamos \vec{p}^{i+1} resolviendo el problema no lineal local en cada punto de integración:

$$k_n |\vec{p}^{i+1}|^{s-2} \vec{p}^{i+1} + r k_d \vec{p}^{i+1} = (r \vec{v}u^{i+1} + \vec{\lambda}^i) k_d \quad (12)$$

3º) Calculamos $\vec{\lambda}^{i+1}$ mediante el cálculo explícito en cada punto de integración ($\rho > 0$):

$$\vec{\lambda}^{i+1} = \vec{\lambda}^i + \rho (\vec{v}u^{i+1} - \vec{p}^{i+1}) \quad (13)$$

Si $|\vec{v}u^{i+1} - \vec{p}^{i+1}| > \alpha |\vec{v}u^{i+1}|$ hacemos i igual a $i+1$ y volvemos al paso 1º.

Estimación de parámetros.

Los valores óptimos de r y ρ en el algoritmo anterior dependen de cada tipo de problema y de los datos del mismo. Experimentalmente se observa que el tomar $\rho=r$ conduce a resultados satisfactorios, por otra parte si utilizamos el algoritmo anterior para la resolución del caso lineal obtenemos la convergencia en la variable u en una sola iteración si elegimos $\rho=r=1$; en efecto, supongamos $s=2$, $\vec{p}^0 = \vec{\lambda}^0 = 0$, la resolución de (12) y (13) en la primera iteración proporciona los valores

$$\vec{p}^1 = \frac{\vec{v}u^1}{2} \quad \text{y} \quad \vec{\lambda}^1 = \frac{\vec{v}u^1}{2}$$

en consecuencia, al calcular u^2 mediante (11) obtenemos $u^2 = u^1$ solución de:

$$\int_{\Omega} k_d \vec{v}u^1 \vec{v}v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, d\gamma \quad (14)$$

que es el problema lineal en su forma variacional clásica. Observemos sin embargo que la convergencia de $\vec{p}^i \rightarrow \vec{v}u$ no se obtiene en una iteración sino que de (12) y (13) deducimos $\vec{p}^i = \vec{\lambda}^i$ y así:

$$\vec{p}^{i+1} = \frac{\vec{v}u^{i+1} + \vec{\lambda}^i}{2} = \frac{\vec{v}u^{i+1} + \vec{p}^i}{2} \quad (15)$$

de donde teniendo en cuenta que $\vec{v}u^i = \vec{v}u^0 = \vec{v}u$ para todo i resulta:

$$\vec{p}^i = \frac{(2^i - 1) \vec{v}u}{2^i} \quad (16)$$

existe pues un desacoplamiento entre la convergencia en u y la de \vec{p} . Para trasladar estos resultados al caso no lineal habrá que tomar $r=\rho$ de forma que - -

$r k_d = k_n |\vec{v}u|^{n-1}$ que es la conductividad en el caso de la ley exponencial, estimaremos el valor de r con la solución obtenida en la aproximación anterior y la expresión (11) del algoritmo de Uzawa se sustituye por:

$$\int_{\Omega} k_n |\vec{v}u^i|^{n-1} \vec{v}u^{i+1} \vec{v}v \, dx = \int_{\Omega} (k_n |\vec{v}u^i|^{n-1} \vec{p}^i - k_d \vec{\lambda}^i) \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, d\gamma \quad (17)$$

Obtenemos así un algoritmo que recuerda al clásico de Newton con la ventaja que éste conserva la simetría inicial del problema, con lo cual para la resolución de (17) podemos utilizar un método iterativo tipo SOR o gradiente conjugado preconditionado (GCP) con el fin de evitar la factorización de la matriz del sistema en cada paso.

APLICACIONES.

Acuífero confinado.

Se ha aplicado el nuevo algoritmo a la resolución del ejemplo ya expuesto en [4] de un acuífero que ocupa una región rectangular, con dos pozos y una corriente de aporte de agua que la divide. La convergencia medida con $|\vec{p} - \vec{v}u| < \alpha |\vec{v}u|$ se obtenía para un valor de $\alpha = 10^{-3}$ en 11 iteraciones utilizando el algoritmo de Uzawa con $\rho=r=1$ que se demostró que eran los valores óptimos en este ejemplo. Con la modificación introducida (expresión (17)) la convergencia se obtiene en 8 iteraciones; además si se utiliza un método iterativo en la resolución del sistema lineal un error del 10% es permisible con lo cual el número de iteraciones internas (SOR ó GCP) disminuye considerablemente sin afectar por ello al número de iteraciones externas (Uzawa modificado). Los datos del problema, mallado y la solución correspondiente han sido expuestas en [4] y por ello no los reproducimos aquí.

Explotación minera a cielo abierto.

En este ejemplo [7] presentamos un cálculo realizado sobre una mina a cielo abierto con un sistema de pozos paralelos al eje mayor de la corta destinados a impedir la inundación de la mina. En la Fig.1 se muestra la sección media con las condiciones de contorno; hemos dibujado con línea punteada la futura posición de los pozos. El cálculo de las reacciones nodales en el pozo permite conocer el caudal de extracción necesario para mantener la superficie freática por debajo de la superficie de la mina. El valor

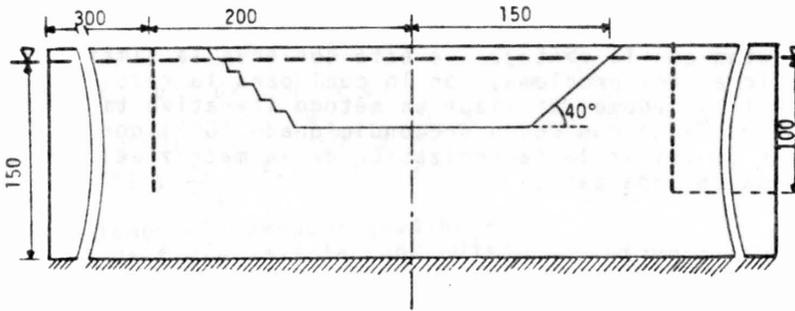


Figura 1

de la permeabilidad de Darcy, k_d , tomado, es de 2000m/
/día y la relación k_n/k_d , figura en la tabla 1; El mo-
delo realizado evita parte de la zona seca estimada me-
diante un modelo más grosero que el aquí utilizado --
(Fig.2) correspondiente a una interpolación lineal en
cada triángulo, con 1022 nodos y 1886 elementos.

k_n	k_n/k_d	n	$ \vec{v}u $
2000	1	1	$0. - 10^{-2}$
1200	0.6	0.89	$10^{-2} - 10^{-1}$
580	0.29	0.69	$10^{-1} - 10^0$
520	0.26	0.56	$10^0 - 10^1$
580	0.29	0.52	$10^1 - 10^2$

Tabla 1

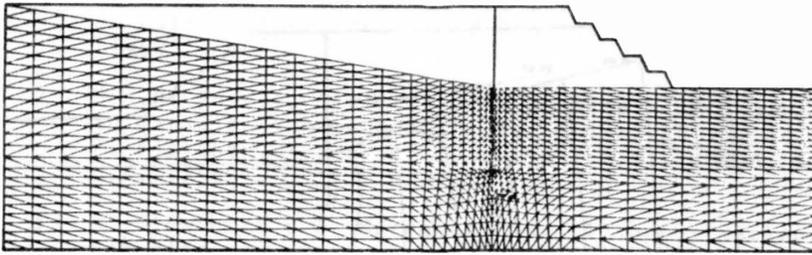


Figura 2

El tratamiento de la superficie libre se describe en [4] y [7] y el cálculo de la solución realizado mediante el algoritmo de Uzawa implica un número de iteraciones igual a 50 para una tolerancia de error de 10^{-3} ; con el algoritmo modificado propuesto aquí el número de iteraciones necesario es de 10. La importante reducción en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia hace que el ahorro en tiempo de cálculo sea significativo, aproximadamente a la mitad en este ejemplo, a pesar que el costo por iteración sea mayor con el nuevo método.

En la figura 3 se representa la posición de la superficie libre una vez alcanzado el equilibrio y en la figura 4 se han representado las líneas de igual altura piezométrica correspondientes a este mismo ejemplo.

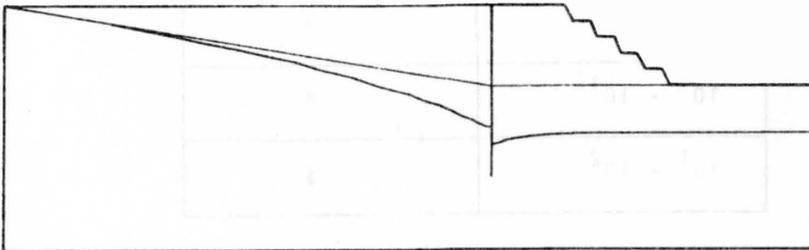


Figura 3

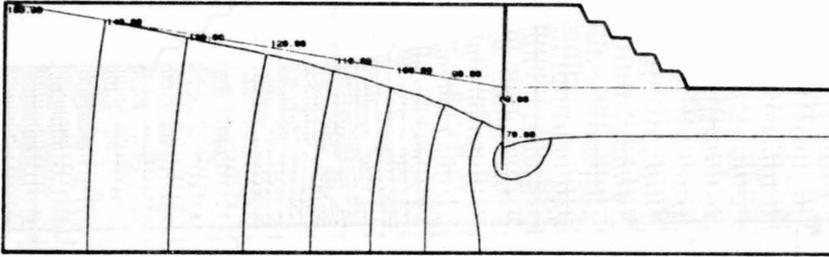


Figura 4

Finalmente en la figura 5 se señalan las zonas con diferente carácter no lineal en función del valor del gradiente, así tenemos:

Intervalo de $ \vec{\nabla}u $	Tipo de marca
$0 - 10^{-2}$.
$10^{-2} - 10^{-1}$	+
$10^{-1} - 10^0$	#
$10^0 - 10^1$	*
$10^1 - 10^2$	\$

Tabla 2

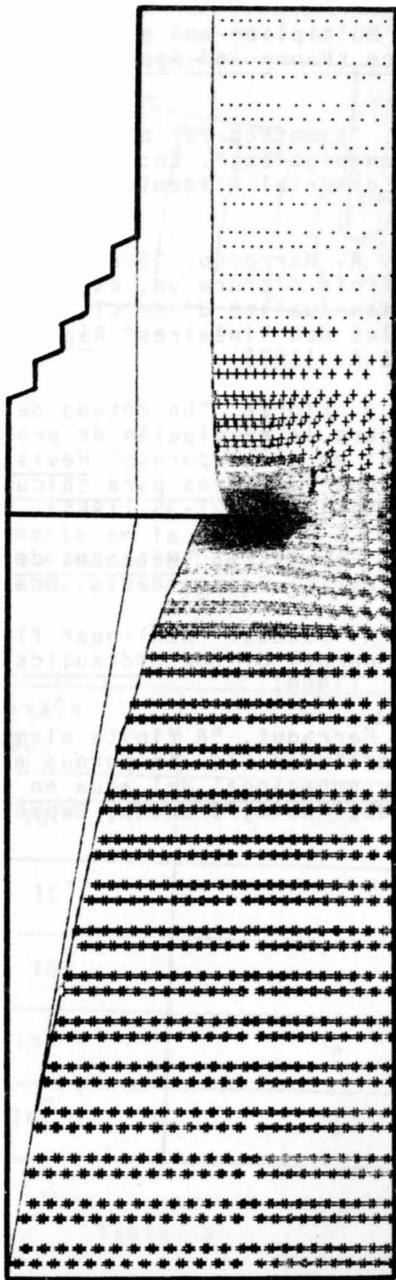


Figura 5

REFERENCIAS

1. M. Hestenes. "Multiplier and gradient methods". J. Optimization theory and Applications 4,303-329 (1969).
2. M.J.D. Powell. "A method for nonlinear constraints in minimization problems". En: Optimization, ed. R. Fletcher, Editorial Academic Press, London, U.K. (1969).
3. R. Glowinski y A. Marrocco. "Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un, et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires" Rapport de Recherche 115, I.R.I.A. (1975).
4. L. Ferragut y J. Elorza. "Un método de Lagrangiano aumentado para la resolución de problemas de flujo no lineal en medio poroso" Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería 1, 3, 27-35 (1985).
5. M. Fortin y R. Glowinski. "Méthodes de Lagrangien augmenté". Editorial Dunod, Paris, Francia (1982).
6. A. Nazeer y D.K. Sunada. "Nonlinear flow in porous media". Journal of the Hydraulics Division HY6, 1847-1857 (1969).
7. J. Elorza y L. Ferragut. "A finite element approximation of nonlinear flow in porous media" II Congreso Internacional del agua en la minería Ed. R. Fernández Rubio, Granada, España (1985).