III Congreso Matemática Aplicada
XIII C.E.D.Y.A. Madrid, 1993

LUIS MAZORRA MANRIQUE DE LARA

UN CRITERIO DE ENERGÍA PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR. APLICACIÓN AL FILTRADO DE IMÁGENES.

INTRODUCCIÓN

Una herramienta fundamental en el tratamiento de imágenes es la convolución con núcleos gaussianos. Koenderink [1984] constató que dicha convolución es equivalente a la resolución de la ecuación del calor dada por:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} && \text{en } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,y,0) &= u_0(x,y) && \text{en } \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde $u_0(.,.)$ representa la imagen inicial, $u(x,y,t)$ la imagen convolucionada con una función gaussiana cuya desviación típica σ verifica $t=\sigma^2/2$. Por otro lado es bien conocido que en este caso la convolución en 2 dimensiones coincide con la composición de dos convoluciones unidimensionales siguiendo las direcciones de los ejes, por tanto vamos a reducir el estudio al caso unidimensional.

1 APROXIMACIÓN DE FILTROS GAUSSIANOS

Sea $G_\sigma(x)$ el filtro gaussiano:

$$G_\sigma(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{1.1}$$

Sabemos que la convolución de una función $f(x)$ con un filtro gaussiano, es equivalente, a resolver la ecuación del calor $u_t-u_{xx}=0$, con el dato inicial $u(x,0)=f(x)$, si hacemos $t=\sigma^2/2$, entonces $u(x,t)=G_\sigma*f(x)$. Así, una aproximación de la ecuación del calor es una aproximación de filtros gaussianos. Vamos, ahora, a discretizar la ecuación usando el esquema incondicionalmente estable más simple. Sean $h>0$ y $k>0$ los incrementos espacial y temporal respectivamente, y $u_i^n \simeq u(ih,nk)$. Usamos la discretización siguiente:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{h^2} = 0 \qquad (1.2)$$

Sea $\lambda = k/h^2$. Entonces tenemos:

$(1+2\lambda)\, u_i^{n+1} - \lambda\, u_{i-1}^{n+1} - \lambda\, u_{i+1}^{n+1} = u_i^n$ para todo i entero y $n \in \mathbf{N}$

Además podemos interpretar la señal u^{n+1} como la convolución de la u^n con un filtro definido por la función de transferencia:

(6) $$m_\lambda(w) = \frac{1}{1+2\lambda-2\lambda\cos(wh)} \qquad (1.3)$$

Como $|m_\lambda(w)| \leq 1$ y $\lambda > 0$ y $w \in \mathbb{R}$, el esquema es estable Sod [1985] para todo $k>0$ y $h>0$. Ahora vamos a ver resultados interesantes acerca de (1.3).

<u>Lema.</u> Sean $h,k>0$, $\lambda = k/h^2$ y sea $m_\lambda(w)$ definido por (6), entonces tenemos:

$$m_\lambda(w) = \frac{\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(1-\nu e^{-iwh})} \qquad (1.4)$$

$$m_\lambda(w) = (1+4\lambda)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \nu^{|m|} e^{iwhm} \qquad (1.5)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} m_\lambda^n(w)\,dw = \frac{2\pi\nu^n}{h\lambda^n(1-\nu^2)^{2n}} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{m} \binom{n-1}{m} \nu^{2m}(1-\nu^2)^{n-m}$$

donde $$\nu = \frac{1+2\lambda-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \qquad (1.6)$$

<u>Demostración.</u> (1.4) y (1.5) se consiguen con cálculos sencillos en la definición de $m_\lambda(w)$. La igualdad (1.6) se obtiene a partir de una integral compleja en el círculo unidad, realizando el cambio $z = e^{iwh}$.

Hay que significar, según (1.4), que $m_\lambda(w)$ es una combinación de un filtro causal y uno anticausal. Además podemos descomponer el cálculo de u^{n+1} en los siguientes pasos:

(i)	$u_i^{n+1/3} = u_i^n + \nu u_{i-1}^{n+1/3}$	para todo i entero
(ii)	$u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1/3} + \nu u_{i+1}^{n+2/3}$	para todo i entero
(iii)	$u_i^{n+1} = (\nu/\lambda) u_i^{n+2/3}$	para todo i entero

y así, tenemos que el cálculo de u_i^{n+1} sólo necesita 3 multiplicaciones y 2 sumas para cada i entero. Además, en muchas aplicaciones podemos obviar el paso (iii), ya que sólo es un proceso de normalización.

Según (1.5), podemos interpretar u^{n+1} como la convolución de u^n con el filtro $h_\lambda(i)$, definido por:

$h_\lambda(i) = (1+4\lambda)^{-1/2}\nu^{|i|}$ para todo i entero

puesto que $\nu \to 1$ cuando $\lambda \to +\infty$, el dominio efectivo de este filtro se vuelve infinito, sin embargo, el número de operaciones para calcular u^{n+1} permanece fijo independiente de λ.

En términos de frecuencia, podemos interpretar la solución de la ecuación de calor, u(x,t), como la convolución del dato inicial f(x) con un filtro gaussiano que tiene la función de transferencia $m(w)=e^{-tw^2}$, cuando discretizamos la señal f(x) y el filtro gaussiano $G_\sigma(x)$ con un incremento espacial h, el filtro m(w) se convierte en una función $2\pi/h$ periódica definida por:

$$m(w,h) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-t(w+2\pi m/h)^2} \qquad \text{para todo } t>0 \qquad (1.7)$$

(mírese Gasquet & Witomski [1990]). Por otra parte, u_i^n es una aproximación de u(ih,nk) y puede interpretarse como la convolución de la señal inicial u_i con el filtro definido por la función de transferencia $m_\lambda^n(w)$. Además $m_\lambda^n(w)$ es una aproximación de m(w,h). Desde un punto de vista teórico, λ debe hacerse pequeño para que u_i^n se acercara a la solución continua u. Sin embargo, si hacemos t "grande", necesitaríamos muchas iteraciones para aproximarnos a u(i,t), y entonces el esfuerzo computacional aumentaría rápidamente. Así, desde un punto de vista práctico, necesitamos tomar λ grande para reducir dicho esfuerzo computacional. Pero, si h es bastante pequeño y t bastante grande, el dominio de la función $m(w)=e^{-tw^2}$ estaría incluido en el intervalo $[-2\pi/h, 2\pi/h]$, y en él, m(w,h)=m(w). Hay que hacer constar, que $m_\lambda(w)$ y $m_\lambda^n(w)$ son no negativas, $2\pi/h$ periódicas, decrecientes en el intervalo $[0,\pi/h]$ y verifican que $m_\lambda(0)=m_\lambda^n(0)=1$. Como $m_\lambda^n(w)$ decrece mas rápido que $m_\lambda(w)$, de este modo aproxima mejor la función m(w). La relación teórica entre λ,n y t, viene dada por:

$$h^2\lambda n=t. \qquad (1.8)$$

Pero como, mostraremos en las experiencias numéricas, en este caso $m_\lambda^n(w)$ converge lentamente a m(w) cuando n tiende a infinito. Para acelerar la convergencia, usamos un criterio diferente para escoger λ y n. Usamos como criterio que m(w) y $m_\lambda^n(w)$ tengan la misma energía:

$$F(\lambda,n) = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} m_\lambda^{2n}(w)dw = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} m^2(w)dw \cong (\pi/2t)^{1/2} \qquad (1.9)$$

Como quiera que, $F(\lambda,n)$ es continuamente decreciente respecto de λ, satisface:

$F(0,n) = 2\pi/h$ y $\lim F(\lambda,n) = 0$, si $\lambda \to +\infty\,\pi$

Así, si $2\pi/h > (\pi/2t)^{1/2}$, tenemos que para todo $n \in N$, existe un único $\lambda>0$ tal que $F(\lambda,n)=(\pi/2t)^{1/2}$. Y, podemos hacer esta relación explícita, usando (1.7). Por ejemplo, para fijar ideas, si tomamos n=1,tenemos la relación siguiente:

$$(2\pi/h)(1+2\lambda)(1+4\lambda)^{-3/2} = (\pi/2t)^{1/2}$$

Como mostramos en los resultados numéricos (ver figura), el criterio (1.9) es más eficiente que el (1.8) para aproximar m(w).

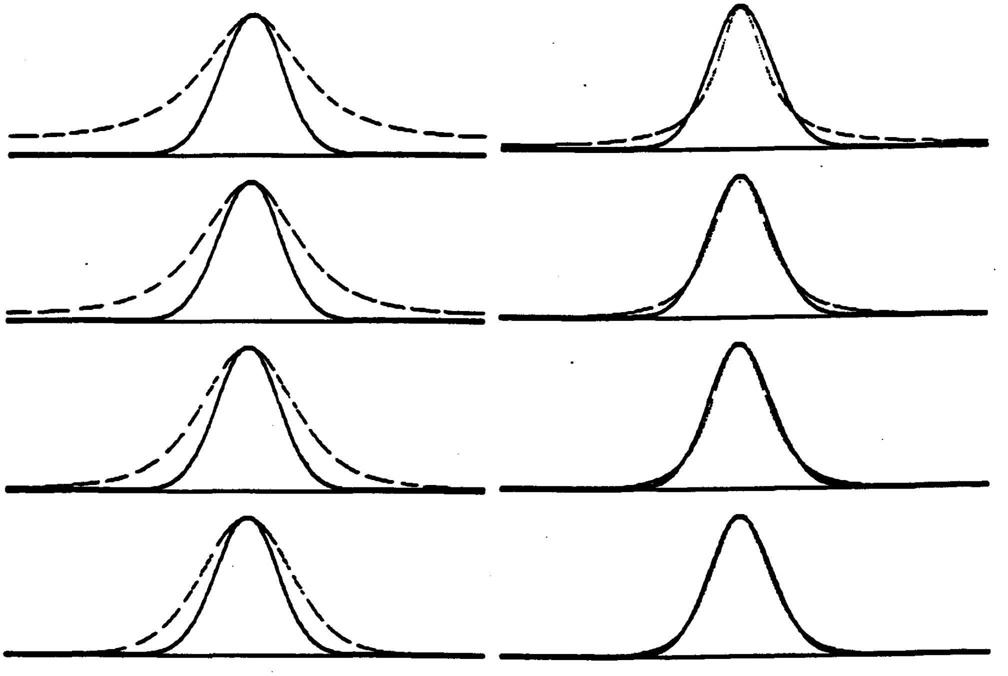

Figura.- Aproximación gaussiana. Representamos una aproximación al filtro $m(w)=e^{-3w^2}$, usando iteraciones de $m_\lambda(w)$ (la línea continua corresponde a m(w) y la discontinua corresponde a las iteraciones de $m_\lambda(w)$). En izquierda, mostramos la aproximación clásica, usando (1.8). Y en la derecha, usamos el criterio de conservación de la energía (1.9).

<u>Nota 1.</u> La estructura recursiva reduce, drásticamente, el esfuerzo computacional requerido para la implementación de los filtros. Las operaciones necesarias son, un número fijo de multiplicaciones y sumas por punto, independientemente del tamaño de ventana considerado. (mírese, por ejemplo, Shen y Castan [1986] y Deriche [1990]).

REFERENCIAS

L. ALVAREZ AND L. MAZORRA, *Signal and Image Restoration by using shock filters and anisotropic diffusion*, SIAM on Numerical Analysis, January, 1994.

L. ALVAREZ, P.L.LIONS AND J.M.MOREL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II)*, SIAM on Numerical Analysis, 29, N°3, pp. 845-866, 1992.

L.ALVAREZ, F. GUICHARD, P.L.LIONS AND J.M.MOREL, *Axiomatic and fundamental equations of image processing* , Arch.Rational.Mechanics, 123, 3, pp 199-257, 1993

F.CATTE, T.COLL, P.L.LIONS AND J.M.MOREL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM on Numerical Analysis, 29, pp. 182-193, 1992.

R.DERICHE, *Fast algorithms for low-level Vision*, IEEE trans. on pattern analysis and machine intelligence, 12, N°1, pp. 78- 87, 1990.

C.GASQUET AND P.WITOMSKI. *Analyse de Fourier et applications*, Ed. Masson, 1990.

M.KASS AND A.WITKIN, *Analyzing oriented patterns*, Comput. Vision Graphics Image Process. 37, pp. 362-385, 1987.

D.MARR, *Vision*, Freeman and Co. 1982.

J.J.KOENDERINK, *The structure of images*. Biol. Cybern. 50, pp. 363-370, 1984.

S.OSHER AND L.RUDIN, *Feature-oriented image enhancement using shock filters*, SIAM on Numerical Analysis, 27, pp. 919-940, 1990.

S.OSHER AND J.SETHIAN, *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the hamilton-Jacobi formulation*, J. Comp. Physics, 79, 12-49, 1988.

P.PERONA AND J.MALIK, *Scale space and edge detection for visual scene analysis*, Proc. IEEE Computer Soc. Workshop on Computer Vision, 1987.

A.RAVISHANKAR AND B.G.SCHUNCK, *Computing Oriented Texture Fields*, CVGIP: Graphical models and image processing. 53 N° 2, pp. 157-185, 1991.

L.RUDIN, *Images, numerical analysis of singularities, and shock filters,* Ph.D. thesis, Computer Science Dept., Caltech, Pasadena, CA, #5250:TR:87; 1987.

J.SHEN AND S.CASTAN, *An optimal linear operator for edge detection*, in Proc. CVPR, Miami, FL,June 1986, pp. 109-114

G.A..SOD, Numerical methods in fluid dynamics, Cambridge University Press, 1985.

LUIS MAZORRA MANRIQUE DE LARA
Departamento de Informática y Sistemas.
Universidad de Las Palmas.
Campus de Tafira.
35017 Las Palmas.