



# Métodos Numéricos en Ingeniería

---

R. Abascal, J. Domínguez y G. Bugada (Eds.)

# Métodos Numéricos en Ingeniería

---

R. Abascal,  
J. Domínguez,  
G. Bugada (Eds.)



Primera edición, Mayo 1999

© SEMNI, Sociedad Española de Métodos en Ingeniería

Imprime: Artes Gráficas Torres, S.A.  
Morales, 17 - 08029 Barcelona

ISBN: 84-89925-45-3  
Dep. Legal: B-15630-99

## Elementos de contorno

### *ACOPLAMIENTO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y DE CONTORNO EN ELASTODINÁMICA PLANA ARMÓNICA CON ELEMENTOS NO CONCORDANTES*

Rus Carlborg, Guillermo / Gallego, Rafael

Se presenta una formulación para el acoplamiento no concordante entre regiones malladas con elementos finitos y elementos de contorno en problemas elastodinámicos planos armónicos. El acoplamiento se realiza de manera débil-débil, es decir que no se establece de manera exacta ni el equilibrio ni la compatibilidad en la interfase. Las ecuaciones de interfase se establecen igualando tensiones y desplazamientos integrados sobre parte de la interfase multiplicadas por una función de ponderación. Resulta un método exible y robusto, que permite ser ampliado y aplicado a cualquier tipo de problemas.

### *ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA LAS ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO HIPERSINGULARES*

Martínez-Castro, Alejandro / Gallego, Rafael

En este trabajo se presenta un análisis de sensibilidad de la solución para el método de los elementos de contorno, en su formulación estándar (ecuación integral de contorno del potencial) e hipersingular (ecuación integral de contorno de flujos), con respecto a la posición de los puntos de colocación. Se ha estudiado el caso de potencial bidimensional. La variación de la solución obtenida mediante ambas ecuaciones cuando se perturba la posición de los puntos de colocación sirve de base para definir unos valores de sensibilidad nodal. En base a esto, se definen unos indicadores de error, que permiten adaptar la malla, introduciendo selectivamente nuevos grados de libertad, allí donde son necesarios.

### *ANÁLISIS NUMÉRICO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES DE MECÁNICA DE LA FRACTURA DINÁMICA EN MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISÓTROPAS*

Sáez, Andrés Domínguez, José

Se presenta una formulación basada en el Método de los Elementos de Contorno para el análisis de problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura en medios transversalmente isótropos sometidos a cargas dinámicas. En la implementación numérica se emplean elementos con nodos a un cuarto normales y singulares, que permiten modelar el comportamiento que desplazamientos y tensiones presentan en los alrededores del vértice de una grieta. La solución fundamental dinámica se transforma para permitir su eficiente evaluación en un programa de elementos de contorno. Se estudia la difracción de ondas planas longitudinales por una grieta circular inmersa en un medio infinito.

*APLICACIÓN DEL M.E.C. A LA DETERMINACIÓN DE RIGIDECES DINÁMICAS DE CIMENTACIONES EMBEBIDAS SOBRE SUELOS POROELÁSTICOS*

Maeso, Orlando / Aznárez, Juan J. / Chirino, Francisco

Se presenta un modelo tridimensional de elementos de contorno para la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones embebidas sobre suelos poroelásticos saturados. El medio poroso se representa de acuerdo a la teoría de Biot. La cimentación se considera rígida y sin masa. Se propone una técnica eficiente para resolver los problemas numéricos que aparecen en las aristas de la zapata, asociados a la superabundancia de incógnitas. Se presentan rigideces dinámicas verticales de cimentaciones que descansan sobre semiespacios o suelos estratificados que incorporan zonas poroelásticas y viscoelásticas, entre las cuales se imponen condiciones rigurosas de equilibrio y continuidad.

*APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO EN ELASTODINAMICA*

Suárez, Javier / Gallego, Rafael

En la presente ponencia, se incluye el desarrollo de una formulación integral y de una metodología para la resolución mediante aplicación del Método de los Elementos de Contorno, del problema inverso de identificación aplicado a problemas de potencial y/o a estados elastodinámicos antiplanos con variación armónica en el tiempo. La formulación integral desarrollada concluye en la que hemos llamado ecuación integral de las variaciones en el contorno (BIE), deducida a partir del cálculo de variaciones en un doble planteamiento del problema directo, consecuencia de una doble consideración geométrica, geometría real y geometría supuesta, del dominio de definición. La discretización de la ecuación integral, previa aproximación de la frontera con elementos de contorno cuadráticos e isoparamétricos, nos permite obtener un sistema lineal de ecuaciones, cuya resolución mediante aplicación del método de los mínimos cuadrados ponderados, nos permite determinar el valor de las variables geométricas que aproxima la geometría supuesta a la geometría real del dominio. Mediante un proceso iterativo, hacemos coincidir ambas geometrías.

*APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO AL ANÁLISIS DE PLACAS SOBRE FUNDACIONES ELÁSTICAS SEGÚN LA TEORÍA DE REISSNER*

Saraiva Leite, Luciano Gobo/ Silva Silva, Ney Amorim

El método de los Elementos de Contorno puede ser aplicado para el análisis de placas apoyadas en fundaciones elásticas usando la Teoría de Reissner. También será analizado placas apoyadas en apoyos internos simulando estacas o tubos. Serán considerados apoyos con rigidez infinita, rigidez axial real y rigidez axial y flexión real donde en ese último caso será adicionado a la resistencia lateral del suelo. Finalizando, algunos ejemplos prácticos donde es analizado placas apoyadas directamente en el suelo a la influencia de la reacción del suelo sobre las placas de coronación de estacas y tubos.

## PROLOGO

Este CD-ROM contiene las 224 comunicaciones presentadas al IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería celebrado en Sevilla durante los días 7-10 de Junio de 1999. Los congresos anteriores tuvieron lugar en Las Palmas de Gran Canaria (1990), La Coruña (1993), y Zaragoza (1996).

El Congreso es ya el cuarto de la serie que sobre dicho tema organiza la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI). El éxito creciente obtenido en las sucesivas ediciones, así como el aumento en la calidad y variedad de los trabajos presentados, constituye una muestra importante del grado de consolidación que dicha organización ha alcanzado dentro de la comunidad científica nacional e internacional.

La edición actual constituye una novedad en cuanto a que las Actas del Congreso se han editado por primera vez en un CD-ROM, abandonando el tradicional soporte en papel.

La organización del IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería se ha efectuado, de forma conjunta, entre SEMNI y la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla.

El contenido de este volumen es muy amplio y refleja la importante actividad que se desarrolla en España en relación con los aspectos más teóricos de los métodos numéricos, así como sus aplicaciones a diversos campos tales como el análisis estructural, la mecánica de fluidos, la geomecánica, la visualización gráfica, la optimización, el análisis de materiales compuestos y el electromagnetismo, entre otros. Se incluyen asimismo una serie de comunicaciones escritas por especialistas de prestigio internacional que participaron en las sesiones plenarias del congreso.

Todos los trabajos publicados se han reproducido directamente a partir de los manuscritos remitidos por los autores. Por ello, los organizadores no pueden aceptar ninguna responsabilidad por su contenido.

Finalmente, los organizadores quieren agradecer a los autores de los trabajos editados en estos volúmenes el esfuerzo realizado así como su contribución al éxito del congreso.

Barcelona/Sevilla Junio 1999

Ramón Abascal y José Domínguez  
*Universidad de Sevilla*

Eugenio Oñate  
*Presidente de SEMNI*

Gabriel Bugada  
*Universidad Politécnica de Cataluña y CIMNE*

## **APLICACIÓN DEL M.E.C. A LA DETERMINACIÓN DE RIGIDECES DINÁMICAS DE CIMENTACIONES EMBEBIDAS SOBRE SUELOS POROELÁSTICOS**

**Orlando Maeso, Juan J. Aznárez y Francisco Chirino**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
Campus Universitario de Tafira, 35017 Las Palmas de Gran Canaria, España  
e-mail: maeso@cicei.ulpgc.es

**Palabras clave:** Cimentaciones, Rigideces Dinámicas, Poroelasticidad, Elementos de Contorno, Interacción Suelo-Estructura.

**Resumen.** *Se presenta un modelo tridimensional de elementos de contorno para la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones embebidas sobre suelos poroelásticos saturados. El medio poroso se representa de acuerdo a la teoría de Biot. La cimentación se considera rígida y sin masa. Se propone una técnica eficiente para resolver los problemas numéricos que aparecen en las aristas de la zapata, asociados a la superabundancia de incógnitas. Se presentan rigideces dinámicas verticales de cimentaciones que descansan sobre semiespacios o suelos estratificados que incorporan zonas poroelásticas y viscoelásticas, entre las cuales se imponen condiciones rigurosas de equilibrio y continuidad.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La interacción dinámica suelo-estructura es un tema relacionado con el estudio de estructuras cimentadas sobre suelos que se consideran flexibles, y sujetas a acciones dinámicas directamente aplicadas a la estructura o transmitidas a través del suelo. Uno de los procedimientos para abordar el problema es la llamada técnica de subestructuración. Se basa en estudiar aisladamente la cimentación, supuesta rígida y sin masa, en el sentido de obtener sus impedancias dinámicas, esto es, la matriz que relaciona los desplazamientos y giros prescritos en la interfase con el vector de fuerzas y momentos resultantes. Un segundo paso consiste en el estudio conjunto de estructura y zapata (con su propia masa) todo ello sustentado sobre los resortes y amortiguadores equivalentes obtenidos del paso anterior. Si se admiten las hipótesis usuales de comportamiento elástico y lineal, el estudio dinámico puede llevarse a cabo en el dominio de la frecuencia.

En la mayoría de los estudios realizados hasta el momento se consideraba la zapata apoyada o enterrada sobre un terreno que se modelaba como un medio viscoelástico<sup>1-5</sup>. Sin embargo el presente artículo enfoca su interés en el análisis del comportamiento de cimentaciones superficiales y enterradas situadas sobre un terreno saturado de agua.

Para modelar un medio saturado de agua se recurre a la teoría de la Poroelasticidad, cuya versión dinámica se debe a Biot<sup>6,7</sup>, que considera el medio como un material homogéneo constituido por dos fases: un esqueleto sólido y un medio fluido que rellena todos los intersticios. Haciendo uso de esta formulación Halpern y Christiano<sup>8</sup> obtienen los primeros resultados de flexibilidad de cimentaciones superficiales tridimensionales sobre un semiespacio poroelástico, integrando para ello funciones de Green sobre los elementos en que se divide la interfase cimentación-terreno. Posteriormente aparece un estudio similar para el caso bidimensional<sup>9</sup>. El MEF también ha sido empleado para el estudio de estratos bidimensionales, obteniendo impedancias de cimentaciones rígidas<sup>10</sup>. En lo que respecta al uso del MEC, existen resultados para cimentaciones tridimensionales superficiales haciendo uso de una formulación integral de Laplace<sup>11,12</sup>. Más recientemente se ha presentado un modelo bidimensional de elementos de contorno<sup>13</sup> para el cálculo de rigideces dinámicas basado en la formulación para medios viscoelásticos presentada por Domínguez<sup>14</sup>.

En este artículo se presenta un modelo tridimensional de elementos de contorno de acuerdo a la formulación ya referida<sup>14</sup> de medios viscoelásticos, que permite obtener la rigidez dinámica de cimentaciones superficiales o embebidas sobre terrenos saturados de agua. Algunos resultados correspondientes a este modelo ya han sido presentados por los autores para el caso de cimentaciones superficiales<sup>15</sup>. El terreno puede modelarse bien como un semiespacio poroelástico, o bien como un medio estratificado con geometría completamente general, y con una distribución general de capas viscoelásticas y poroelásticas. Este medio estratificado puede descansar sobre una base infinitamente rígida, o sobre un semiespacio flexible, que a su vez puede modelarse como medio viscoelástico o poroelástico. Las condiciones de contacto en la interfase cimentación-terreno pueden ser de cualquier tipo (soldadas o relajadas, permeables o impermeables).



Asimismo en las interfases entre diferentes medios se escriben de forma rigurosa las condiciones de equilibrio y de continuidad. Aunque solo se presentan resultados de rigideces dinámicas verticales, la extensión del estudio al resto de componentes de la matriz de rigidez es inmediato. Se acompaña un breve estudio paramétrico de la influencia que tiene en la respuesta la variación de algunas características del medio.

En cuanto al MEC en sí, se presenta una técnica para resolver el problema que existe cuando en un borde confluyen elementos con normales diferentes en los que el movimiento está prescrito, y por tanto son incógnitas las tracciones a ambos lados del borde. En este caso la aplicación de la ecuación nodal tal como plantea la formulación habitual del MEC no proporciona suficiente número de ecuaciones para resolver el problema. La solución escogida pasa por la obtención de nuevas ecuaciones para puntos de aplicación en el interior del elemento, y no coincidentes con los nodos.

## 2 ECUACIONES BÁSICAS

El punto de partida para el análisis del problema poroelastodinámico mediante el MEC lo constituye la representación integral de desplazamientos y tensiones en el contorno  $\Gamma$  del medio en estudio. Haciendo uso de la notación vectorial dicha ecuación puede ser escrita como sigue:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma \quad (1)$$

En esta expresión, las integrales sobre  $\Gamma$  han de ser entendidas en el sentido del Valor Principal de Cauchy, siendo:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ U_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $u_k$  y  $t_k$  son las componentes del desplazamiento y la tracción en el esqueleto sólido;  $\tau$  y  $U_n$  representan, respectivamente, la tensión equivalente y el movimiento normal al contorno en la fase líquida. De otra parte  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  son tensores 4x4 que constituyen la solución fundamental:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} * & * & * & -\tau_1^* \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & -\tau_1^* \\ * & * & * & -\tau_2^* \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -\tau_2^* \\ * & * & * & -\tau_3^* \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -\tau_3^* \\ * & * & * & -\tau_o^* \\ u_{o1} & u_{o2} & u_{o3} & -\tau_o^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} * & * & * & -U_{n1}^* \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & -U_{n1}^* \\ * & * & * & -U_{n2}^* \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & -U_{n2}^* \\ * & * & * & -U_{n3}^* \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & -U_{n3}^* \\ * & * & * & -U_{no}^* \\ t_{o1} & t_{o2} & t_{o3} & -U_{no}^* \end{bmatrix} \quad (3)$$

En estas expresiones hay implícitos dos conjuntos de soluciones fundamentales. Una

correspondiente a una carga puntual aplicada en el sólido que constituyen las tres primeras filas de los tensores y otra debida a una fuente puntual aplicada en la fase líquida y que representa la cuarta fila. Por último,  $c^i$  es el tensor correspondiente al término libre:

$$c^i = \begin{bmatrix} c_{11}^e & c_{12}^e & c_{13}^e & 0 \\ c_{21}^e & c_{22}^e & c_{23}^e & 0 \\ c_{31}^e & c_{32}^e & c_{33}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Jc^p \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $c_{ik}^e$  representan las componentes del término libre para el problema elastostático con las propiedades del esqueleto sólido. Asimismo  $c^p$  coincide con el término libre correspondiente al problema de potencial estático. Más información en Domínguez<sup>14</sup>.

### 3 ELEMENTOS DE CONTORNO

Para el planteamiento numérico de la ecuación (1), el contorno  $\Gamma$  se divide en NE elementos cada uno determinado por NJ nodos que sirven de base para aproximar las variables fundamentales del problema:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad \mathbf{p} = \Phi \mathbf{p}^j \quad (5)$$

donde  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{p}^j$  son vectores de 4NJ componentes y  $\Phi$  una matriz de (4x4NJ) que contiene las funciones de forma. La geometría se aproxima de la misma forma. Tras el proceso de discretización, la ecuación (1) puede escribirse como sigue:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (6)$$

Esta ecuación implica la aplicación de la carga en los nodos que forman parte de la discretización. Si el punto de colocación (PC) no forma parte de la discretización, el primer término de la ecuación (6) se modifica, y queda en función de los desplazamientos nodales del elemento que contiene a PC:

$$c^j \Phi \mathbf{u}^j + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) pueden escribirse para tantos puntos de aplicación como sea necesario, no necesariamente nodos de la discretización dependiendo del número de incógnitas del problema, y obtener finalmente el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  contiene todos los valores nodales del problema. La aplicación de las condiciones de contorno en (7) permite obtener los valores desconocidos de las variables del problema.

#### 4 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES SINGULARES

A la vista de las expresiones anteriores, las integrales a evaluar sobre cada elemento serán del tipo:

$$\mathbf{G}\mathbf{W} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \quad \mathbf{H}\mathbf{W} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \quad (8)$$

Cuando el punto de colocación no pertenece al elemento, estas integrales pueden calcularse numéricamente mediante una cuadratura gaussiana estándar. Por el contrario, cuando el punto de colocación pertenece al elemento, sea o no un nodo de la discretización, las integrales  $\mathbf{G}\mathbf{W}$  presentan una singularidad de orden  $(1/r)$  y las integrales  $\mathbf{H}\mathbf{W}$  de orden  $(1/r^2)$ . Las primeras serán evaluadas numéricamente mediante un proceso de subdivisión en triángulos<sup>16,17</sup> que conduce a un jacobiano de orden  $(r)$  lo que permite cancelar la singularidad que presentan. Este proceso se ilustra en la Figura 1 para un punto de colocación no perteneciente a la discretización.

En lo que respecta a la integrales  $\mathbf{H}\mathbf{W}$ , la singularidad del tipo  $(1/r^2)$  se centra en los términos de la solución fundamental correspondientes a tensiones en el esqueleto sólido. Su expresión, al igual que en problemas elastostáticos, es de la forma:

$$I = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma_j \quad (9)$$

Esta ecuación puede ser escrita como sigue:

$$I = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) (\phi_q - \phi_q^i) d\Gamma_j + \phi_q^i \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) d\Gamma_j \quad (10)$$

donde  $\phi_q^i$  es el valor de la función de forma en el punto de colocación. La primera integral es regular y puede evaluarse con el procedimiento descrito. La segunda puede transformarse en una integral de línea haciendo uso del teorema de Stokes de la forma que sigue:

$$\int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma_j = \varepsilon_{lmk} \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_m \quad (11)$$

donde  $S_j$  es el perímetro del elemento y  $\varepsilon_{lmk}$  es el tensor de permutación. Esta integral es regular si el punto de colocación es interior al elemento analizado. Si se trata de un nodo del perímetro será necesaria la contribución de los elementos que confluyen en él para cancelar la singularidad (Figura2).

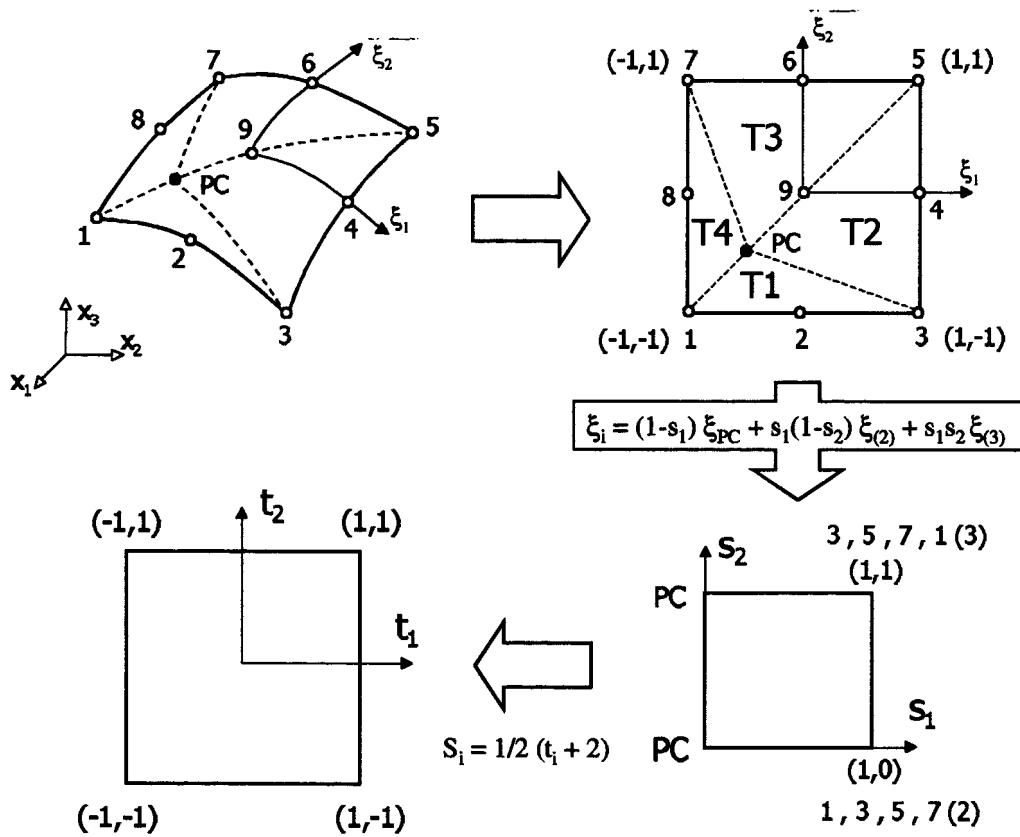


Figura 1: Integración local. Subdivisión en triángulos. Elemento cuadrilátero.

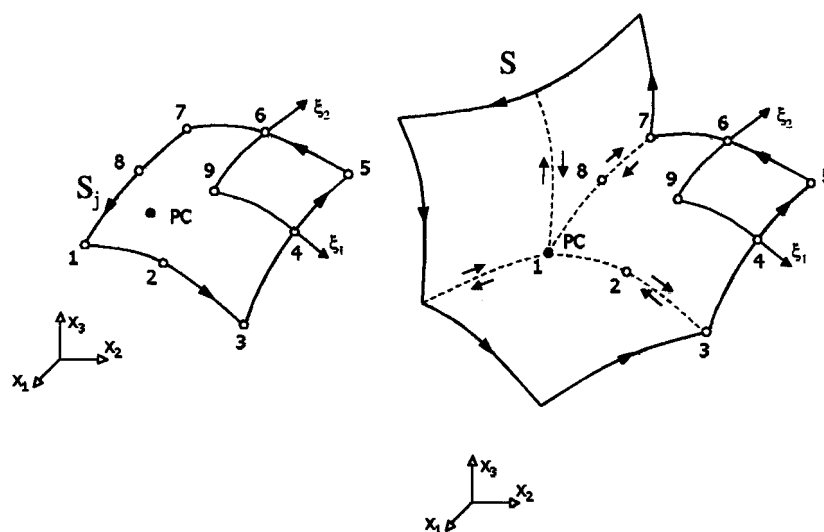


Figura 2: Cancelación de singularidad. Elemento cuadrilátero.

## 5 RIGIDECES DINÁMICAS DE CIMENTACIONES

Como se comentó anteriormente, la determinación de este parámetro representa un paso importante en el análisis dinámico de problemas de interacción suelo-estructura. Así, para una excitación armónica de frecuencia cualquiera, la matriz de rigidez dinámica relaciona el vector de fuerzas (y momentos) aplicadas a la cimentación y el vector de desplazamientos (y giros) resultante, considerada ésta como un sólido rígido y sin masa.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (12)$$

Cada término  $K_{ij}$  de la matriz de rigidez representa la fuerza o momento resultante en la coordenada  $i$  ante un desplazamiento o giro unitario armónico en la dirección  $j$ , y se trata de un número complejo que puede expresarse como sigue:

$$K_{ij} = \text{Re}(K_{ij}) + i \text{Im}(K_{ij}) \quad (13)$$

donde la parte real está relacionada con la rigidez y las propiedades de inercia del terreno, y la parte imaginaria con el amortiguamiento del sistema (Figura 3).

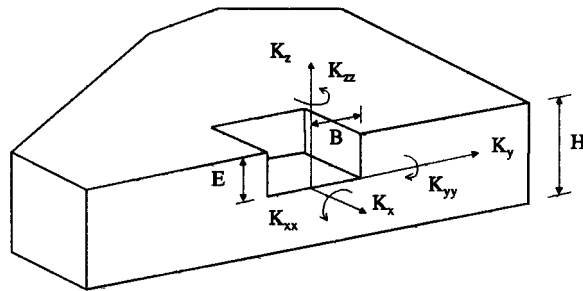


Figura 3: Cimentación embebida. Geometría y sistema de referencia.

Cuando el terreno incorpora zonas viscoelásticas y poroelásticas saturadas, los contornos cercanos de cada región pueden ser divididos en elementos. La ecuación (6) puede escribirse para la región porosa, mientras que para la región elástica se escribirá la conocida ecuación del mismo tipo que relaciona los vectores nodales de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y tracciones  $\mathbf{p}$  en el contorno. Es necesario entonces establecer las condiciones de equilibrio y de continuidad en las interfases. Así, en la interfase entre una región sólida impermeable y una región porosa se impone el equilibrio entre las tensiones tangenciales en el sólido elástico y el esqueleto sólido, y las tensiones normales del sólido con la tensión normal total del medio poroso (que incluye tanto la tensión normal del esqueleto como la presión de poro). La compatibilidad implica la igualdad de desplazamientos entre sólido y esqueleto, así como la de los desplazamientos normales de las dos fases del medio poroso. Si las condiciones de la interfase son permeables la presión de poro es nula, y el movimiento normal de las dos fases del medio poroso ya no es el mismo.

En los contornos exteriores se imponen condiciones de contorno de tracción y presión de poro nulas en la superficie libre, y de movimiento y flujo normal prescritos (con variación armónica) según alguna de las direcciones coordenadas en las caras laterales y en el fondo de la cimentación. Esto significa que en los nodos situados en las aristas de la zapata (normales diferentes a ambos lados del borde) son incógnitas y diferentes entre sí las tensiones asociadas a cada una de las normales (Figura 4). Así pues el número de incógnitas será mayor de  $4 \cdot N$ , siendo  $N$  el número total de nodos, por lo que la aplicación de las ecuaciones del MEC en todos los nodos de la discretización no ofrece suficiente número de ecuaciones. En estos casos se ha escogido como solución el escribir ecuaciones integrales adicionales, pero situando el punto de colocación en el interior de los elementos que confluyen en el borde conflictivo. La técnica de obtención de los núcleos de integración correspondientes ya se ha explicado en los apartados precedentes. Las nuevas ecuaciones diferentes permiten completar el número total de ecuaciones necesarias. La estrategia ha sido comprobada y los resultados obtenidos son muy satisfactorios.

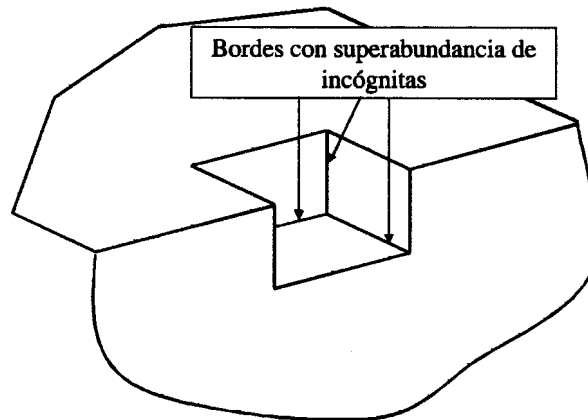


Figura 4: Bordes con tratamiento especial

En los apartados siguientes se van a presentar diferentes resultados de rigideces verticales de cimentaciones cuadrada de lado  $2B=8$  m, y de grado de embebimiento  $E/B$  variable. El terreno se ha modelado bien como un semiespacio poroelástico, o bien como un estrato de profundidad  $H$  variable, y se han distinguido a su vez los casos en que el estrato descansa sobre una base rígida o una base de flexible.

El medio poroelástico se caracteriza por las propiedades correspondientes a una arena densa que ya fue utilizado por otros autores<sup>9,13,15</sup>. Módulo de elasticidad transversal del esqueleto sólido  $G=3.2175 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>; módulo de Poisson  $\nu=0.25$ ; porosidad  $\phi =0.35$ ; densidad del sólido  $\rho_s=1425$  Kg/m<sup>3</sup>; densidad del fluido  $\rho_f=1000$  Kg/m<sup>3</sup>; densidad añadida nula; coeficiente de permeabilidad  $k=10^{-3}$  ms<sup>-1</sup> (que corresponde a una constante de disipación  $b=1.1986 \times 10^6$  Ns/m<sup>4</sup>, y constantes de Biot  $Q=4.61 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup> y  $R=2.4823 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>). Se ha incluido en el esqueleto sólido un coeficiente de amortiguamiento histerético de valor  $\beta=0.05$ , de manera que el módulo de elasticidad transversal puede escribirse como  $\mu=G(1+2i\beta)$ . En todos los ejemplos la cimentación se ha supuesto soldada al terreno, con condiciones de contacto impermeable.

### 5.1 Rigideces dinámicas verticales de cimentaciones sobre semiespacio

Cuando el terreno se modela como un semiespacio poroelástico uniforme, tan sólo es necesario discretizar la interfase cimentación-terreno y los contornos cercanos de la superficie libre. Pruebas sucesivas pusieron de manifiesto que resulta suficiente prolongar la discretización hasta distancias del orden de  $10 \times B$ . La Figura 5 muestra la discretización para este caso, donde sólo se incluye una cuarta parte de la geometría completa debido a las simetrías que presenta el problema.

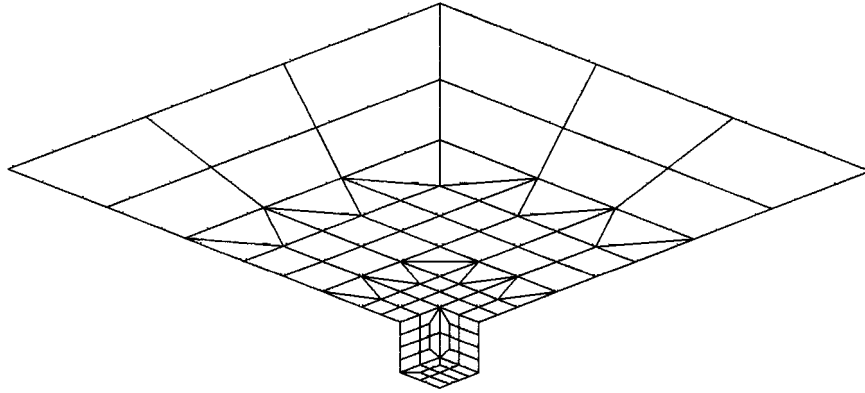


Figura 5: Discretización de elementos de contorno. Cimentación sobre semiespacio

En la Figura 6 se presentan la parte real e imaginaria de la impedancia vertical para una zapata cuadrada con un grado de embebimiento  $E/B=1$ . Los resultados se presentan frente a la frecuencia adimensional  $a_0=\omega B/C_s$ , siendo  $\omega$  la frecuencia angular,  $C_s=[G/(\rho_1+\rho_2)]^{1/2}$ , con  $\rho_1=(1-\phi)\rho_s$  y  $\rho_2=\phi\rho_f$ . Se estudia la influencia del grado de permeabilidad del medio ( $k$ ) para dos valores,  $10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  y otro 100 veces mayor. Se aprecian mayores valores de la parte real de la rigidez para el medio menos permeable en el entorno de las frecuencias bajas. Ambas curvas se comparan con los resultados correspondientes a un medio elástico drenado y no drenado.

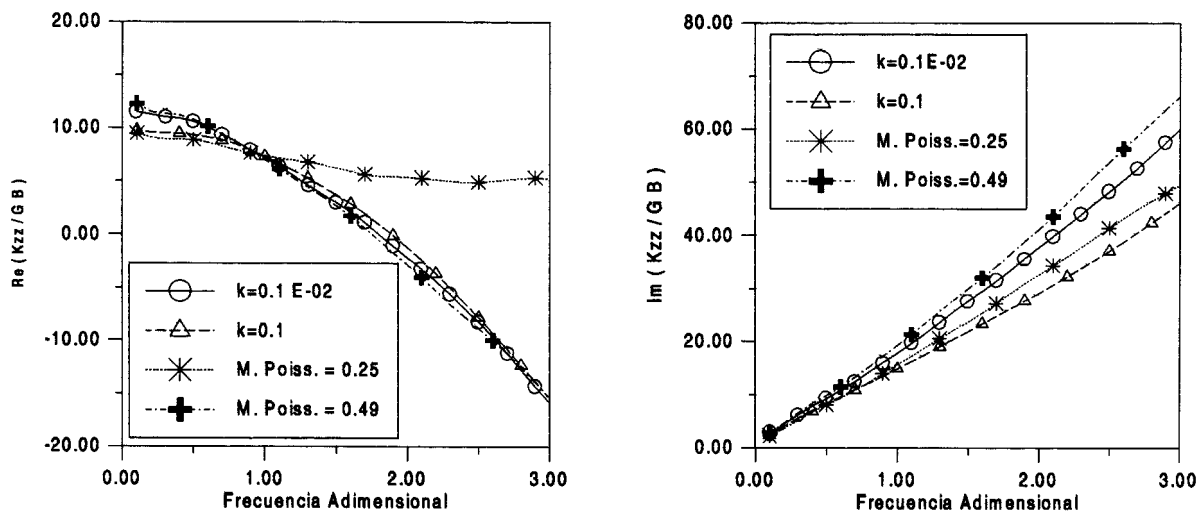


Figura 6: Cimentación embebida sobre semiespacio. Influencia de la permeabilidad del medio

Observando la componente real, se aprecia cómo la curva del medio poroso más permeable se ajusta hacia el medio elástico con  $\nu=0.25$  a baja frecuencia, y que ocurre lo mismo entre el medio poroso menos permeable y el elástico no drenado. A frecuencias  $a_0 \geq 1$ ,



independientemente de la permeabilidad, el comportamiento tiende hacia el que tiene el material no drenado.

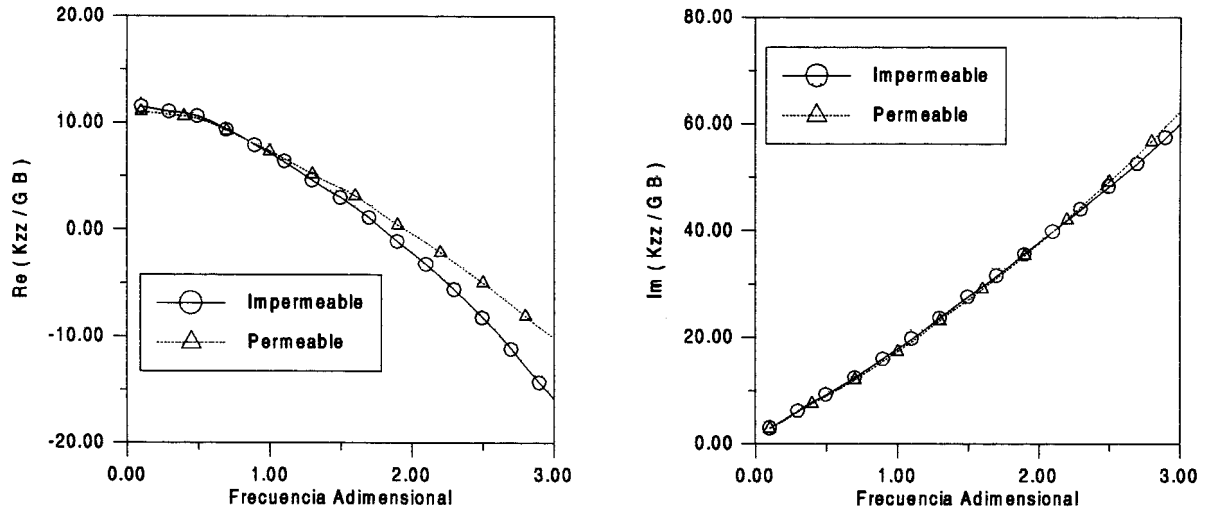


Figura 7: Cimentación embebida sobre semiespacio. Influencia de las condiciones de contacto

En la Figura 7 se analiza la influencia de la permeabilidad de la interfase cimentación-terreno. Cuando la condición de contacto es permeable la componente real de la rigidez disminuye frente al caso impermeable, especialmente a altas frecuencias. Esta diferencia es menos apreciable en la componente imaginaria.

La influencia del grado de embebimiento  $E/B$  se analiza en la Figura 8. Se aprecia como en el rango de frecuencias  $<1.25$  la parte real de la rigidez aumenta con el grado de embebimiento. También es destacable el incremento del amortiguamiento, en todo el rango de frecuencias.

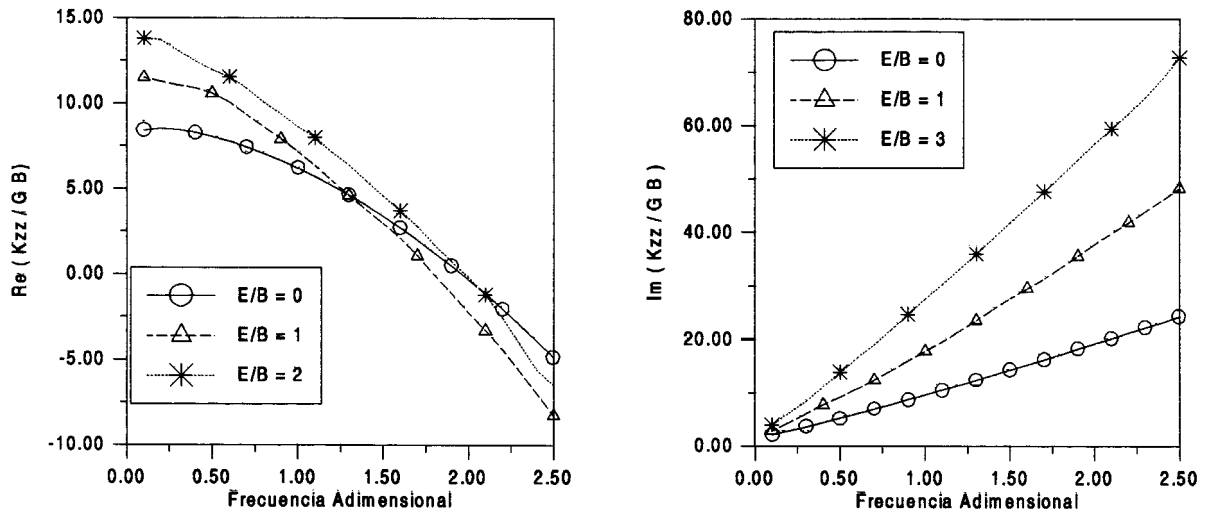


Figura 8: Cimentación embebida sobre semiespacio. Influencia del grado del embebimiento

## 5.2 Rigideces dinámicas verticales de cimentaciones sobre estrato

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para una cimentación embebida  $E/B=1$  sobre un estrato poroelástico de profundidad variable. En primer lugar, se considera la base infinitamente rígida. La cantidad de superficie libre y base discretizados es la misma que en el apartado anterior. La discretización utilizada se presenta en la Figura 9.

En la Figura 10 se presentan los resultados obtenidos para profundidades de estrato  $H/B=2$  y 4 y se comparan con los correspondientes al semiespacio. La rigidez se muestra muy sensible con el espesor del estrato. Este efecto es especialmente llamativo para  $H/B=2$ . Conforme el espesor del estrato aumenta el comportamiento se acerca al obtenido para el semiespacio, si bien se observan las oscilaciones típicas de este tipo de problemas donde el amortiguamiento por radiación es menor.

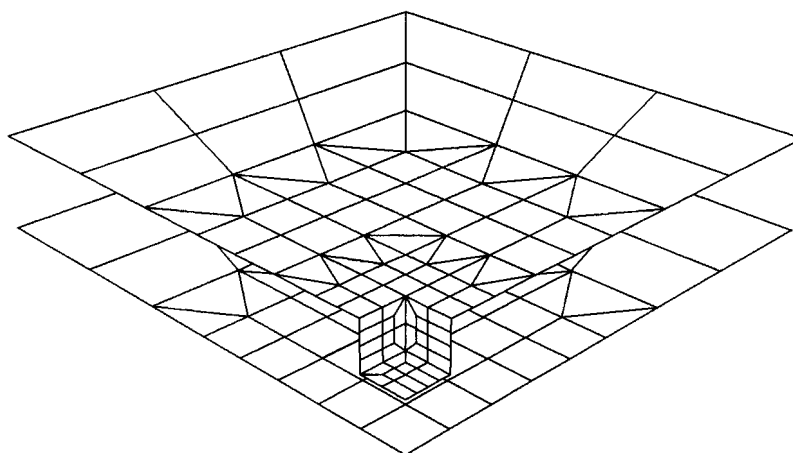


Figura 9: Discretización de elementos de contorno. Cimentación sobre estrato

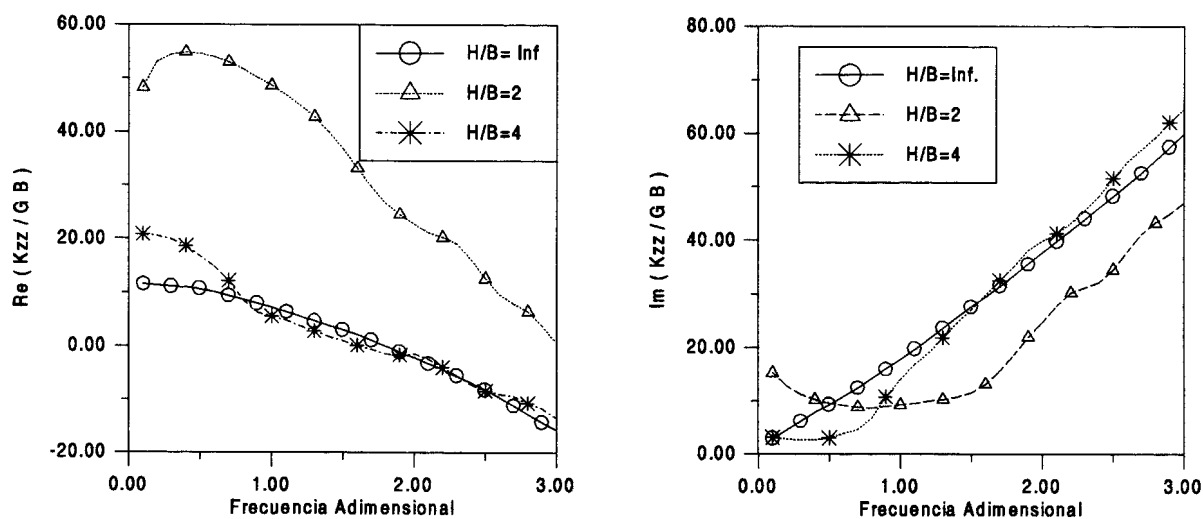


Figura 10: Cimentación sobre estrato. Influencia del espesor del estrato

Por último se presentan en la Figura 11 los resultados obtenidos para un estrato poroelástico que descansa sobre un semiespacio viscoelástico flexible e impermeable. El grado de embebimiento adoptado es  $E/B = 1$ . La densidad, coeficiente de Poisson y amortiguamiento del medio elástico son los mismos que los correspondientes del esqueleto sólido del estrato. Con el ánimo de comprobar la capacidad del modelo para representar esta situación se ha optado por dar al medio elástico una rigidez especialmente elevada, y comparar los resultados con el caso de estrato sobre base rígida. En concreto, la relación de rigideces  $RG = G_{BASE} / G$  adoptada es 50. La profundidad del estrato  $H/B=2$ . Se comprueba, como es lógico, la similitud de los resultados en ambos casos.

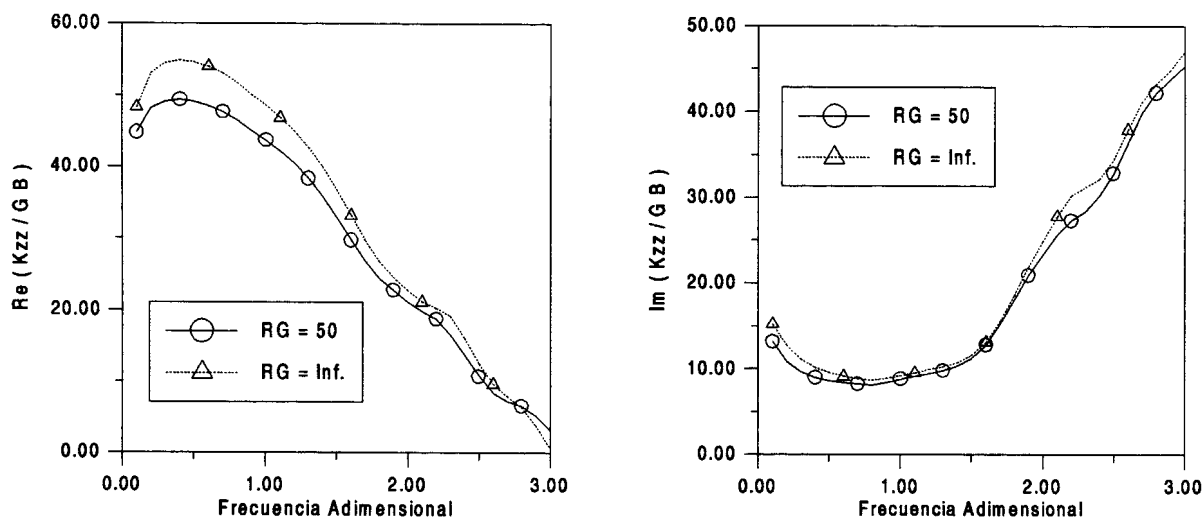


Figura 11: Cimentación sobre estrato. Influencia de la rigidez de la base

## 6 SUMARIO Y CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un modelo numérico de elementos de contorno para la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones embebidas tridimensionales rígidas sobre medios poroelásticos. El suelo puede incorporar diferentes zonas poroelásticas y viscoelásticas, con interfases de geometría completamente arbitraria. El modelo se ha empleado para calcular rigideces dinámicas verticales de cimentaciones sobre semiespacios poroelásticos saturados, y sobre estrato poroelástico que descansa en una base rígida o flexible. El estudio de geometrías más complicadas de las diferentes zonas puede ser llevado a cabo sin ninguna dificultad en el estado actual del modelo. Se ha analizado la influencia que sobre la respuesta tienen factores como la permeabilidad del medio, las condiciones de contacto cimentación-terreno, el grado de embebimiento, la profundidad del estrato o la flexibilidad de la base.

En lo referente al MEC, se ha implementado una estrategia eficiente para resolver el problema de superabundancia de incógnitas asociado a los nodos de las aristas de la

zapata. Las ecuaciones integrales adicionales necesarias se obtienen utilizando puntos de colocación que no forman parte de la discretización. Se ha presentado el procedimiento de obtención de los núcleos de integración. Esta técnica puede incorporarse fácilmente a un código estándar de elementos de contorno, y su eficiencia ha sido comprobada.

Se puede concluir que el modelo de elementos de contorno presentado permite contemplar una mayor generalidad en cuanto a las propiedades y geometría de las diferentes regiones que conforman el suelo, en relación con otras técnicas numéricas utilizadas en el cálculo de rigideces dinámicas de cimentaciones.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación aportada por la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica (Proyecto PB96-1322-C03-03) para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] E. Alarcón, J.J. Cano and J. Domínguez, "Boundary element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations", *Int. J. Num. and Anal. Meth. In Geomechanic*, **13**, 645-664 (1989).
- [2] J. Domínguez and R. Abascal, "Dynamics of foundations", *Topics in Boundary Element Research*, C.A. Brebbia (Ed.), **4**, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [3] J.E. Luco and R.J. Apsel, "On Green's functions to a layered half-space: Part I", *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 209-229 (1983)
- [4] G.C. Gazetas and J.M. Roësset, "Forced vibrations of strip footings on layered soils", *Methods of Structural Analysis*, ASCE, **1**, 115-131 (1976).
- [5] A.S. Veletsos and Y.T. Wei, "Vibration of viscoelastic foundation", *J. Geo. Eng. Div.*, ASCE, **100**, 225-246 (1973)
- [6] M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-178 (1956)
- [7] M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 179-191 (1956)
- [8] M.R. Halpern and P. Christiano, "Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half-space", *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, **14**, 439-454 (1986)
- [9] M.K. Kassir and J. Xu, "Interaction functions of a rigid strip bounded to saturated elastic half-space", *Int. J. Solids Struct.*, **24**, 915-936 (1988)
- [10] S. Bougacha, J.L. Tassoulas y J.M. Roësset, "Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, **119**, 1632-1648 (1993)
- [11] J. Chen and G.F. Dargush, "Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses", *Int. J. Solids Struct.*, **32**, 2257-2278 (1995)

- [12] M.B. Chopra and G.F. Dargush, "Dynamic analysis of axisymmetric foundations on a poroelastic stratum using BEM", *Proc. 10<sup>th</sup> Engrg. Mech. Spec. Conf.*, ASCE, N.Y., **2**, 1046-1049 (1995)
- [13] B.R. Japón, R. Gallego y J. Domínguez, "Dynamic stiffness of foundations on saturated poroelastic soils", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, **123**, 1121-1129 (1997)
- [14] J. Domínguez, "Boundary element approach for dynamic poroelastic problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **35**, 307-324 (1992)
- [15] J. Aznárez, O. Maeso y F. Chirino, "Una técnica numérica para la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones sobre suelos saturados", *Proc. I Congreso Nacional Ing. Sísmica*, Murcia (en prensa) (1999)
- [16] J.C. Lachat and J.O. Watson, "Effective numerical treatment of boundary integral equations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **10**, 991-1005 (1976)
- [17] H.B. Li, G.M. Han and H.A. Mang, "A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **21**, 2071-2098 (1985)