UNIVERSIDAD POLITECNICA DE LAS PALMAS

ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA

1

Apuntes de Campos y Ondas Electromagnéticas

(TEMA 1 y APENDICES)

Por

Rafael A. MONTENEGRO ARMAS

Ingeniero Industrial del I. C. A. I.

A P U N T E S

D E

C A M P O S Y O N D A S

E L E C T R O M A G N E T I C A S

Por
RAFAEL A. MONTENEGRO ARMAS
Ingeniero Industrial del I.C.A.I.

Obra publicada el día 3/12/84 en la Universidad Politécnica de Las Palmas.

Ejemplar impreso en el Departamento de Publicaciones de la Escuela Universitaria Politécnica: c/ Pérez del Toro nº 1 en Las Palmas de Gran Canaria.

Máquina Fotocopiadora: marca Rank Xerox serie 1075-Nº 1101140748.

Nº de Páginas: 52

Depósito Legal: G.C. 1205-1984

P R O L O G O

Los presentes apuntes han sido elaborados con el fin de cubrir el programa de la asignatura "Campos y Ondas Electromagnéticas" de 2º Curso de Ingenieros Técnicos de Telecomunicación. De esta forma, se intenta facilitar al alumno el estudio de esta asignatura; dado que no existe un libro de texto que se ajuste fielmente al programa actualmente impartido.

Momentáneamente, y debido a su complejidad, los temas irán apareciendo en fascículos.

En el Tema 1 se estudiarán las Ecuaciones Generales de Maxwell y se definirán los conceptos fundamentales.

Los Temas 2, 3 y 4 tratarán la Electrostática, Magnetostática y Campos Electromagnéticos Cuasiestacionarios, respectivamente.

El Tema 5 se dedicará al estudio general de la Electrodinámica.

Los Temas 6 y 7 comprenderán el estudio de Ondas Electromagnéticas, tanto libres como guiadas.

Agradezco la colaboración prestada por D. Eduardo Rovaris Romero en la preparación de estos apuntes, y la rapidez y esmero del Departamento de Publicaciones.

Las Palmas de G.C., Noviembre 1.984

Rafael A. Montenegro Armas

R. Montenegro A.

APENDICES

N O T A C I O N

m	:	masa
l	:	longitud
t	:	tiempo
S	:	superficie
V	:	volumen
dl	:	elemento de longitud
dS	:	elemento de superficie
dV	:	elemento de volumen
T	:	periodo
f	:	frecuencia
w	:	pulsación
$\vec{v}$	:	velocidad lineal
$\vec{a}$	:	aceleración lineal
λ	:	longitud de onda
λ_g	:	longitud de una onda guiada
λ_c	:	Longitud de onda de corte
K	:	número de onda
K_c	:	número de onda de corte
γ	:	constante de propagación
α	:	constante de atenuación
β	:	constante de fase
v	:	velocidad de propagación de onda
v_p	:	velocidad de fase
v_g	:	velocidad de grupo
c	:	velocidad de propagación de la luz
c_o	:	velocidad de propagación de la luz en el vacío
δ	:	profundidad de penetración o pelicular
f_c	:	frecuencia de corte

W, U	:	trabajo o energía
P	:	potencia
$\vec{F}$	:	fuerza
$\vec{E}$	:	campo eléctrico
$\vec{B}$	:	campo magnético
$\vec{D}$	:	inducción eléctrica
$\vec{H}$	:	inducción magnética
$\vec{P}$	:	polarización eléctrica
$\vec{M}$	:	polarización magnética
$\vec{S}$	:	vector de Poynting
$\vec{A}$	:	vector potencial
Φ	:	potencial eléctrico escalar
V	:	voltaje
ϕ	:	flujo magnético
q	:	carga eléctrica puntual
Q	:	carga eléctrica global
ρ_1	:	densidad de carga lineal
ρ_s	:	densidad de carga superficial
ρ_v	:	densidad de carga volumétrica
I	:	intensidad de corriente eléctrica
$\vec{J}$	:	densidad (volumétrica) de corriente eléctrica
$\vec{j}$	:	densidad superficial de corriente eléctrica
σ	:	conductividad eléctrica
R	:	resistencia eléctrica
C	:	capacidad
L	:	coeficiente de autoinducción
Z	:	impedancia
η	:	impedancia característica
L_{ij} , M	:	coeficiente de inducción mutua entre los circuitos i y j

L_i	:	coeficiente de autoinducción interna
L_e	:	coeficiente de autoinducción externa
ε	:	constante dieléctrica (o permitividad) absoluta
ε_r	:	constante dieléctrica (o permitividad) relativa
ε_o	:	constante dieléctrica (o permitividad) del vacío
μ	:	permeabilidad absoluta
μ_r	:	permeabilidad relativa
μ_o	:	permeabilidad del vacío
X_e	:	susceptibilidad eléctrica
X_m	:	susceptibilidad magnética

U N I D A D E S

(M.K.S.Q.)

Se exponen a continuación las unidades de las magnitudes más usuales en Electromagnetismo. Trataremos exclusivamente el sistema M.K.S.Q.; este sistema toma como referencia básica para las magnitudes mecánicas el sistema M.K.S., como magnitud electromagnética fundamental elige la carga eléctrica y el culombio como unidad para medirla (Comisión Electrotécnica Internacional, año 1.935).

MAGNITUD	UNIDAD
Longitud	metro (m)
Masa	kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s)
Frecuencia	1/s = hertz (Hz)
Angulo	radián (rad)
Pulsación	rad/s
Velocidad lineal	m/s
Aceleración lineal	m/s^2
Fuerza	$kg\cdot m/s^2$ = newton (N)
Presión	N/m^2
Trabajo o Energía	$N\cdot m$ = julio (J)
Potencia	J/s = vatio (W)
Carga eléctrica	culombio (C)
Intensidad de corriente eléctrica	amperio (A) = C/s
Densidad (volumétrica) de corriente	A/m^2
Densidad superficial de corriente	A/m
Campo eléctrico	N/C = V/m
Potencial eléctrico o voltaje	W/A = $N\cdot m/C$ = voltio (V)
Impedancia	V/A = ohmio (Ω)
Admitancia	$1/\Omega$ = siemens (S)
Capacidad	C/V = faradio (F)
Coeficiente de autoinducción	$V\cdot s/A$ = henrio (H)
Conductividad	S/m
Constante dieléctrica	F/m
Permeabilidad	H/m
Inducción eléctrica	C/m^2

Flujo magnético	V·s = weber (Wb)
Campo magnético	Wb/m^2 = Tesla (T)
Inducción magnética	A/m
Constante de propagación	rad/m
Constante de atenuación	rad/m = 1/m
Constante de fase	rad/m
Longitud de onda	m
Profundidad de penetración	m
Vector de Poynting	W/m^2
Densidad de carga lineal	C/m
Densidad de carga superficial	C/m^2
Densidad de carga volumétrica	C/m^3

PREFIJOS

DE

MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS

FACTOR por el que se multiplica la unidad	PREFIJO	SIMBOLO
10^{18}	exa	E
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

CONSTANTES FISICAS

FUNDAMENTALES

Constante dieléctrica del vacío: $\varepsilon_o = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ F/m

Permeabilidad del vacío: $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Velocidad de la luz en el vacío: $c_o = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m/s

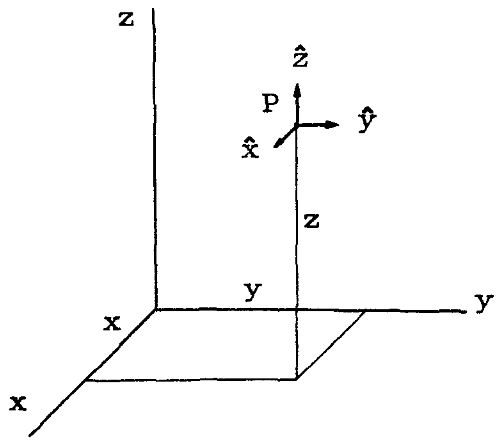
Carga del electrón: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Masa del electrón en reposo: $m_e = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}$ kg

Conductividad del cobre a 20ºC: $\sigma_{Cu} = 5{,}7 \cdot 10^{7}$ S/m

SISTEMAS DE COORDENADAS

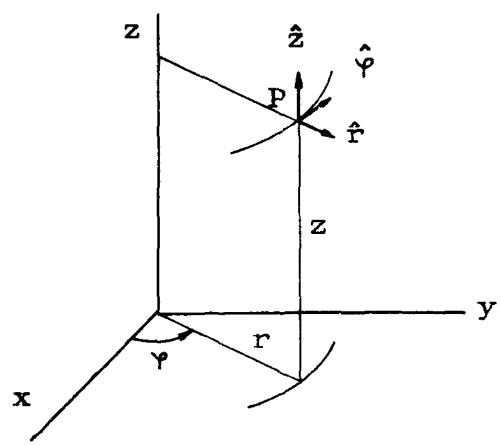
1.- CARTESIANAS.



Coordenadas: P (x,y,z)

Vectores unitarios: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

2.- CILINDRICAS.



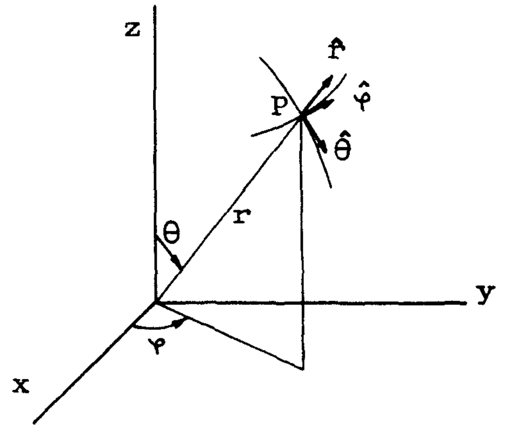
Coordenadas: P (r,φ,z)

Vectores unitarios: $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$

Transformación a cartesianas:

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \operatorname{sen}\varphi$$
$$z = z$$

3.- ESFERICAS



Coordenadas: P (r,θ,φ)

Vectores unitarios: $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$

Transformación a cartesianas:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

O P E R A D O R E S E N L O S D I S T I N T O S

S I S T E M A S D E C O O R D E N A D A S

1.- COORDENADAS CARTESIANAS.

Sea un campo escalar definido por:

$$U = U(x,y,z)$$

Sea un campo vectorial:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

donde A_x, A_y, A_z son funciones escalares de (x,y,z). Entonces:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

2.- COORDENADAS CILINDRICAS.

Sea un campo escalar definido por:

$$U = U(r,\varphi,z)$$

Sea un campo vectorial:

$$\vec{A} = A_r \,\hat{r} + A_\varphi \,\hat{\varphi} + A_z \,\hat{z}$$

donde A_r, A_φ, A_z son funciones escalares de (r,φ,z). Entonces:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\hat{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{z}$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2}\right)\hat{r} +$$

$$+ \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2}\right)\hat{\varphi} +$$

$$+ \left(\nabla^2 A_z\right)\hat{z}$$

3.- COORDENADAS ESFERICAS.

Sea un campo escalar definido por:

$$U = U(r,\theta,\varphi)$$

Sea un campo vectorial:

$$\vec{A} = A_r\,\hat{r} + A_\theta\,\hat{\theta} + A_\varphi\,\hat{\varphi}$$

donde A_r, A_θ, A_φ son funciones escalares de (r,θ,φ). Entonces:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\ \text{sen}\theta}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\hat{\varphi}$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,A_r) + \frac{1}{r\ \text{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}\theta\ A_\theta) + \frac{1}{r\ \text{sen}\theta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{A} = {} & \frac{1}{r\ \text{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}\theta\ A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{r} + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\ A_\varphi)}{\partial\ r}\right)\hat{\theta} + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\ A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 U = {} & \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\ \text{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sen}\theta\ \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \\ & + \frac{1}{r^2\ \text{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} = {} & \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \text{cotg}\theta\ A_\theta + \text{cosec}\theta\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right)\hat{r} + \\ & + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\text{cosec}^2\theta\ A_\theta - 2\,\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + 2\ \text{cotg}\theta\ \text{cosec}\theta\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right)\hat{\theta} + \\ & + \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2}\left(\text{cosec}^2\theta\ A_\varphi - 2\ \text{cosec}\theta\ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - 2\ \text{cotg}\theta\ \text{cosec}\theta\ \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\right)\hat{\varphi}\end{aligned}$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

1.- TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKY:

" El flujo de un campo vectorial, $\vec{A}$, a través de una superficie cerrada, S, es igual a la integral de volumen de la divergencia de $\vec{A}$ extendida al volumen, V, encerrado por la superficie S ".

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \; dV$$

2.- TEOREMA DE STOKES:

" La circulación de un campo vectorial, $\vec{A}$, a lo largo de una línea cerrada, c, es igual al flujo del rotacional de $\vec{A}$ a través de cualquier superficie, S, que tenga como contorno la línea c ".

$$\oint_c \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

B I B L I O G R A F I A

1.- ALONSO-FINN. "Física. Vol II: Campos y Ondas". Fondo Educativo Interamericano, S.A. Bogotá, 1.970

2.- E. BENITO. "Problemas de Campos Electromagnéticos". Editorial AC. Madrid, 1.972

3.- J.I. PEREZ ARRIAGA-F. GARCIA OCHOA GARCIA. "Ampliación de Física". Ediciones I.C.A.I. Madrid, 1.975

4.- P. LORRAIN-D.R. CORSON. "Campos y Ondas Electromagnéticas". Selecciones Científicas. Madrid, 1.972

5.- S. RAMO-J.R. WHINNERY-T. VAN DUZER. "Campos y Ondas". Pirámide, S.A. Madrid, 1.974

6.- E.D. JORDAN-K.G. BALMAIN. "Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes". Paraninfo. Madrid, 1.978

7.- J. FRAILE MORA. "Problemas de Electrotecnia. Parte I: Campos Eléctricos". E.T.S.I.T. Madrid, 1.972

8.- V. ORTEGA CASTRO. "Líneas de transmisión y guiaondas". E.T.S.I.T. Madrid, 1.979

9.- R. VALLE SANCHEZ. "Campos Electromagnéticos". E.T.S.I.T. Madrid, 1.972

10.- A. DELGADO GUTIERREZ-C. BLANCO ESCOBAR. "Problemas de Microondas". E.T.S.I.T. Madrid, 1.978

11.- KRAUS. "Electromagnetics". Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1.953

12.- HARNWELL. "Principles of Electricity and Electromagnetism". Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1.949

13.- KING. "Fundamental Electromagnetic Theory". Dover Publications. New York, 1.963

14.- LANGMUIR. "Electromagnetic fields and waves". Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1.961

15.- MATVEYEV. "Principles of Electrodynamics". Reinhold Publishing Corporation, New York, 1.966

16.- NUSSBAUM. "Electromagnetic theory for Engineers and Scientists". Prentice-Hall, Inc. Englewood cliffs. New Jersey, 1.965

17.- POPOVIC. "Introductory Engineering Electromagnetics". Addison-Wesley, Massachusetts, 1.972

18.- REITZ-MILFORD. "Foundations of Electromagnetic Theory". Addison-Wesley, Massachusetts, 1.966

19.- WEBER. "Electromagnetic Theory". Dover Publications. New York, 1.965

2o.- SHADOWITZ. "The Electromagnetic Fields". Mc Graw-Hill Book Company. New York.

21.- DURAND. "Electrostatique et Magnetostatique". Masson. París, 1.953

22.- PANOFSKY-PHILLIPS. "Clasical Electricity and Magnetism". Addison-Weley Publishing Company. Massachusetts, 1.956

23.- STRATTON. "Electromagnetic Theory". Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1.941

24.- VAN BLADEL. "Electromagnetic Fields". Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1.964

NOTA: Estos apuntes se han desarrollado teniendo como base fundamental los diez primeros libros expuestos en esta Bibliografía.

T E M A 1

ECUACIONES GENERALES DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

T E M A 1

ECUACIONES GENERALES DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

1.0.- INTRODUCCION.

El estudio de los fenómenos electromagnéticos se puede enfocar principalmente desde dos puntos de vista:

a) Siguiendo el desarrollo histórico de la Electricidad y Magnetismo, encontrándonos con nombres como Coulomb, Gauss, Laplace, Faraday,..., que nos introducen en las Leyes fundamentales, hasta llegar a las Ecuaciones de Maxwell.

b) Partiendo de las Ecuaciones de Maxwell tomadas como postulados indiscutibles en la actualidad y que definen con toda generalidad cualquier fenómeno electromagnético. Un planteamiento desarrollado de esta forma gana en rigor científico, aunque quizás sea menos intuitivo que el planteamiento histórico.

Nosotros vamos a tomar el segundo camino; es decir, partiremos de las ecuaciones más generales para en posteriores temas hacer las particularizaciones necesarias en cada caso.

1.1.- CARGA Y CORRIENTE ELECTRICA.

El origen de todos los fenómenos electromagnéticos es la existencia de la carga eléctrica y el movimiento de ésta. Se ha definido muchas veces la carga eléctrica como un exceso o defecto electrones en los átomos de un cuerpo, pero en sí, la esencia de esta magnitud base no se conoce, aunque se pueden ver los efectos físicos que produce. Se pueden citar los siguientes:

- Una carga eléctrica crea un campo a su alrededor, que llamaremos eléctrico, capaz de ejercer una fuerza sobre otras cargas que estén dentro de él, incluso cuando las cargas estan en reposo.

- Las cargas eléctricas cuando se encuentran en movimiento son capaces de crear fuerzas sobre otras cargas en movimiento. Este tipo de fuerzas, de origen distinto al anterior, son las llamadas fuerzas magnéticas.

Debe quedar claramente sentado desde un principio que la teoría que pretendemos desarrollar no corresponde a un estudio microscópico de la materia, sino a una visión macroscópica de ésta.

Por ello, y aunque la separación entre ambos estudios no pueda quedar definida con precisión por tratarse de un concepto relativo, vamos a considerar siempre cargas o agrupaciones de carga que ocupen un espacio apreciablemente mayor que el correspondiente a las partículas elementales, cuya existencia está demostrada, pero cuyo estudio entra dentro del campo un tanto probabilístico de la teoría cuántica; y no en la consideración del fenómeno en gran escala tal y como vamos a tratar. Desde luego, la validez de nuestras conclusiones se hará menos exacta cuanto más nos acerquemos al estudio microscópico.

Podremos decir que un cuerpo tiene una carga global positiva o negativa, si posee un defecto o exceso de electrones, respectivamente. Esta teoría nos lleva a la conclusión de que el número de cargas existentes en la naturaleza es una constante.

Veamos a continuación el concepto de densidad de carga volumétrica, que representaremos por ρ_v . Sea un cuerpo que ocupa un volumen, V, en el espacio y en que hay una distribución de carga en su interior. Si consideramos un elemento de volumen, dV, correspondiente a un punto genérico, en el que existe una cantidad de carga, dq, definimos la densidad de carga volumétrica en dicho punto como el cociente:

$$\rho_v = \frac{dq}{dV} \qquad (1\text{-}1)$$

En general, esta magnitud, que representa carga por unidad de volumen, será función del punto considerado y del tiempo. La carga eléctrica global,Q, que poseerá el volumen V en su interior, vendrá dada por la integral de volumen de ρ_v extendida a dicho volumen V:

$$Q = \iiint_V \rho_v \cdot dV \qquad (1\text{-}2)$$

Análogamente se pueden definir la densidad de carga superficial, ρ_s , y la densidad de carga lineal, ρ_l , cuando la carga está distribuida en una superficie, S, o en una línea, L.

$$(1\text{-}3) \qquad \rho_s = \frac{dq}{dS} \qquad ; \qquad \rho_l = \frac{dq}{dl} \qquad (1\text{-}4)$$

Siendo dq la cantidad de carga existente en el elemento de superficie dS ó en el elemento de longitud dl, según el caso.

También podemos decir que la carga global, Q, existente en la superficie S vendrá dada por la integral de superficie de ρ_s extendida a dicha superficie:

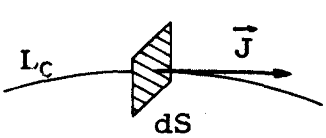
$$Q = \iint_S \rho_s \, dS \tag{1-5}$$

Y así mismo, la carga neta que poseerá la línea L vendrá dada por la integral de línea de ρ_l extendida a lo largo de ella:

$$Q = \int_L \rho_l \, dl \tag{1-6}$$

En cuanto a la magnitud base del electromagnetismo, la carga eléctrica, nos queda por decir que su unidad de medida en el sistema M.K.S.Q. (el más usual) es el culombio (C).

En todos los conductores existe una carga libre, capaz de moverse siempre que exista una diferencia de potencial (este concepto será estudiado en el siguiente tema) entre dos puntos del mismo. Este movimiento de cargas es lo que llamamos corriente eléctrica. Este fenómeno nos lleva a considerar una nueva magnitud, necesariamente vectorial, que defina de alguna manera el movimiento de cargas. Esta magnitud es la llamada densidad volumétrica de corriente, $\vec{J}$, (ó simplemente, densidad de corriente). Para cada punto, la dirección de $\vec{J}$ será la del movimiento de las cargas que pasen por dicho punto. Y, por convenio, se ha tomado como sentido de $\vec{J}$ el del movimiento de las cargas, cuando éstas son positivas, y el contrario si éstas son negativas. Su módulo vendrá dado por la cantidad neta de carga, dq , que atraviesa por unidad de tiempo, dt , un elemento de superficie, dS , normal a la dirección del movimiento de las cargas en dicho punto. En la figura adjunta se representa una línea de corriente, L_c, (trayectoria seguida por una sucesión de cargas) y se puede observar como el vector $\vec{J}$ es tangente a ella en cada punto.



Podemos sacar como conclusión que el valor de la densidad de corriente $\vec{J}$ dependerá en general del punto e instante considerado.

Por otro lado, si tenemos una superficie S, a través de la cual existe una fluencia de cargas, definimos una nueva magnitud llamada intensidad de corriente eléctrica, I , a través de dicha superficie, como la carga neta global, dQ , que atraviesa la superficie S en la unidad de tiempo.

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (1\text{-}7)$$

Teniendo en cuenta la definición de densidad de corriente $\vec{J}$, se puede decir que la intensidad de corriente, I , a través de una superficie S , no es más que el flujo del vector $\vec{J}$ a través de dicha superficie:

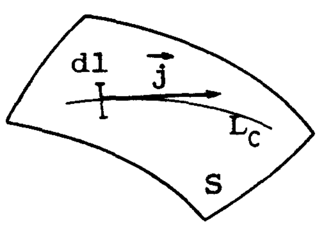
$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \qquad (1\text{-}8)$$

La unidad de intensidad de corriente eléctrica más utilizada (sistema M.K.S.Q.) es el amperio (A). Tal que, decimos que la intensidad que atraviesa una superficie S es de un amperio, cuando la carga neta que pasa de un lado a otro es de un culombio cada segundo.

Es evidente que el valor de la intensidad I depende de la superficie elegida S y del instante considerado.

La unidad de densidad de corriente $\vec{J}$ en el sistema estudiado es (A/m^2); esto se deduce fácilmente de la expresión (1-8).

Cuando en lugar de encontrarnos con un movimiento de cargas en el interior de un medio material, éste se produce únicamente en su superficie, S , se suele definir su movimiento puntual mediante la llamada densidad superficial de corriente, $\vec{j}$;



esta magnitud vectorial es un caso particular de la definición de $\vec{J}$. El módulo de $\vec{j}$ nos representa la cantidad neta de carga, dq , que atraviesa por unidad de tiempo, dt , un elemento de longitud, dl , situado sobre la superficie, S , y perpendicular a la dirección del movimiento de cargas en el punto considerado. El sentido y dirección son análogos al de $\vec{J}$.

La densidad superficial de corriente $\vec{j}$ tiene por unidad de medida el amperio por metro (A/m).

Anteriormente ya se ha indicado que la carga eléctrica es una constante en la naturaleza. Esto no es más que una conclusión del Principio de Conservación de la carga. No existe evidencia, ni comprobación experimental, que nos haga admitir que la carga pueda crearse o destruirse en cantidades macroscópicas. Este principio nos lleva a consecuencias de mayor interés.

En efecto, sea una superficie cerrada S en cuyo interior existe una densidad volumétrica de carga, ρ_v , dependiente del punto e instante considerado. Si existe movimiento de cargas, de acuerdo con el Principio de Conservación, debe verificarse que el flujo neto de carga que sale de S tiene que coincidir con la disminución de carga en el volumen V encerrado por S, es decir:

$$I = \oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_v \, dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dV$$

Según el teorema de Gauss-Ostrogradski, también llamado de la divergencia, tenemos que:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \cdot dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dV$$

O bien:

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) dV = 0$$

Teniendo en cuenta que el integrando es una función continua y que el resultado de la ecuación anterior debe verificarse para cualquier volumen, por pequeño que sea, debe cumplirse que:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \qquad (1\text{-}9)$$

Que es la llamada ecuación de continuidad. Esta ecuación diferencial tiene gran importacia, pues nos relaciona la densidad de corriente $\vec{J}$ con la densidad de carga volumétrica ρ_v .

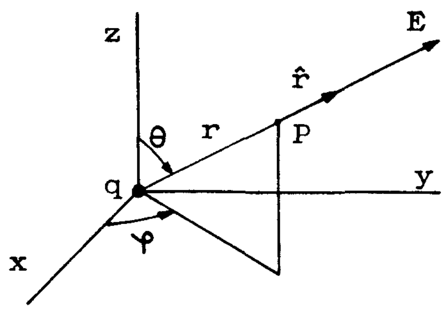
Obsérvese que si la densidad de carga volumétrica no depende del tiempo, la ecuación de continuidad se reduce a que la $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, esto es lo mismo que decir que el flujo de $\vec{J}$ a través de cualquier superficie cerrada sería nulo.

1.2.- DEFINICION DE LOS CAMPOS FUNDAMENTALES $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Veamos a continuación las definiciones más elementales de los campos fundamentales utilizados en electromagnetismo.

a) Campo eléctrico ($\vec{E}$):

Sea una carga puntual q situada en el origen de coordenadas. Esta carga es capaz de crear una fuerza sobre cualquier otra que se encuentre a su alrededor. Decimos que en cada punto P del espacio existe un campo vectorial, que llamaremos campo eléctrico, $\vec{E}$. Esta magnitud se define como la fuerza que ejercería la carga q sobre una carga unitaria (+1 C) situada en el punto P. Su valor viene dado por:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \qquad (1\text{-}10)$$

Donde: ε = constante dieléctrica (o permitividad) absoluta del medio que rodea a la carga q.

Tal que:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \qquad (1\text{-}11)$$

Siendo: ε_r = constante dieléctrica (o permitividad) relativa.

ε_o = constante dieléctrica (o permitividad) del vacío.

El valor de la constante dieléctrica del vacío se obtiene experimentalmente. Para el sistema M.K.S.Q. resulta:

$$\varepsilon_o = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\ m^2} \qquad (1\text{-}12)$$

Para cada medio material se considera un valor de la constante dieléctrica relativa, que no posee dimensiones.

Si en el punto P se situase una carga q', la fuerza ejercida por la carga q sobre q' vendría dada por:

$$\vec{F} = q' . \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q\, q'}{r^2} \hat{r} \qquad (1\text{-}13)$$

De esta expresión, llamada Ley de Coulomb, se deduce fácilmente que la unidad del campo eléctrico es el cociente entre la unidad de fuerza y la de carga; es decir, N/C , para el sistema M.K.S.Q.

Si tenemos una distribución de **n** cargas puntuales , q_i , (i = 1,2,...,n) situadas arbitrariamente en el espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ que crea dicha distribución en un punto P se puede obtener como la suma vectorial de los campos $\vec{E}_i$, que cada carga crea en dicho punto, (principio de superposición).

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \qquad (1\text{-}14)$$

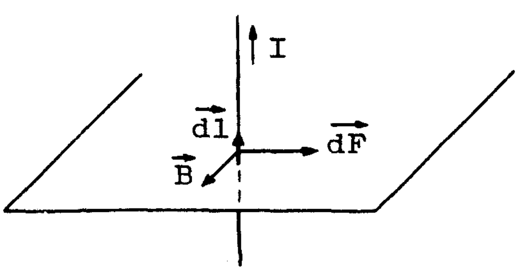
b) <u>Campo magnético ($\vec{B}$)</u>:

Ya se ha indicado que las cargas eléctricas en movimiento crean un campo a su alrededor, que llamamos campo magnético $\vec{B}$, y que tendrá un valor para cada punto del espacio. Si una carga puntual q se introduce en dicho campo llevando una velocidad $\vec{v}$, el campo magnético ejercerá una fuerza $\vec{F}$, tal que:

$$\vec{F} = q\ (\ \vec{v} \times \vec{B}\ ) \qquad (1\text{-}15)$$

Obsérvese que esta fuerza lleva la dirección perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$, y es proporcional a los valores de las tres magnitudes que intervienen en el fenómeno.

En el caso particular en que el movimiento de las cargas se realice a lo largo de un conductor filiforme, que se encuentra en el interior de un campo magnético $\vec{B}$, puedo considerar un elemento del conductor $\vec{dl}$ que llevará la dirección del conductor y el sentido de la intensidad I que circula por él, tal que la fuerza, $\vec{dF}$, que ejerce el campo $\vec{B}$, existente sobre el elemento del conductor $\vec{dl}$, viene dada por:



$$\vec{dF} = dq\ \left(\ \frac{\vec{dl}}{dt} \times \vec{B}\ \right) \qquad (1\text{-}16)$$

Siendo dq la carga que existe en el $\vec{dl}$, y $\vec{dl}/dt$ la velocidad con que se mueve. Esta expresión se puede poner de la siguiente forma:

$$\vec{dF} = \frac{dq}{dt}\ (\ \vec{dl} \times \vec{B})$$

Teniendo en cuenta la definición de intensidad de corriente eléctrica (ver expresión 1-7) obtenemos que:

$$\vec{dF} = I \left(\vec{dl} \times \vec{B} \right) \tag{1-17}$$

La fuerza global que actúa sobre el conductor L sería la integral de línea extendida a toda su longitud.

$$\vec{F} = \int_L \vec{dF} = \int_L I \left(\vec{dl} \times \vec{B} \right) \tag{1-18}$$

De la expresión 1-17 se deduce fácilmente la unidad de medida del campo magnético $\vec{B}$ en el sistema M.K.S.Q. ; se le da el nombre de tesla (T).

$$T = \frac{N}{A \cdot m}$$

Si introducimos el concepto de flujo ϕ del campo magnético $\vec{B}$ a través de una superficie S:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \tag{1-19}$$

Su unidad se deduce fácilmente de esta expresión; se le da el nombre de weber (Wb):

$$Wb = \frac{N}{A \cdot m} \cdot m^2 = \frac{N \cdot m}{A} = \frac{J}{A}$$

Fácilmente se ve la relación:

$$T = \frac{Wb}{m^2}$$

A veces, se da el valor del campo magnético en el sistema C.G.S. gausiano. La unidad de medida es el gauss. Tal que la equivalencia que posee con el tesla es:

$$1\ T = 10^4 \text{ gauss}$$

Hasta ahora hemos visto la existencia de fuerzas exclusivamente eléctricas (a) ó magnéticas (b). Ambos efectos se pueden superponer, tal que si tenemos una carga puntual q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en el interior de una región en la que existe un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$, estos ejercerán una fuerza electromagnética $\vec{F}$ que vendrá dada por la expresión:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \tag{1-20}$$

Esta es la llamada Fuerza de Lorentz. Obsérvese que esta expresión no es más que la superposición de los efectos eléctricos (ver expresión 1-13) y magnéticos (ver expresión 1-15). Esta expresión tiene gran importancia dado que es válida incluso, en el caso en que los campos electromagnéticos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, que actúan sobre la carga q, sean función del tiempo y del punto en que se encuentre la carga q, en cada instante.

1.3.- DEFINICION DE LOS CAMPOS AUXILIARES $\vec{D}$ y $\vec{H}$. MEDIOS MATERIALES.

En la pregunta anterior se han definido los campos fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$, asociados cada uno a los fenómenos eléctricos y magnéticos respectivamente. Ahora bien, para estudiar los fenómenos electromagnéticos resulta cómodo definir dos campos auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$. El campo auxiliar $\vec{D}$ está relacionado con el campo eléctrico $\vec{E}$ y más concretamente, con la carga libre existente en los cuerpos. El campo auxiliar $\vec{H}$ está relacionado con el campo magnético $\vec{B}$. Veremos en el estudio de las ecuaciones de Maxwell su relación con la densidad de corriente libre y de desplazamiento, (conceptos que ya estudiaremos). Vamos a estudiar a continuación, las relaciones funcionales existentes entre los campos fundamentales y los auxiliares:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= f_1(\vec{E}) \\ \vec{H} &= f_2(\vec{B}) \end{aligned} \tag{1-21}$$

Impondremos a estos campos auxiliares que estas relaciones dependan únicamente de las propiedades del medio material en las proximidades del punto estudiado.

Dejemos,primeramente, bien clara la cuestión de la nomenclatura. En algunos libros antiguos, se encontrará que llaman al campo auxiliar $\vec{H}$ intensidad del campo magnético, debido a que se le consideraba como campo fundamental. Luego definían $\vec{B}$ dándole el nombre de inducción magnética. Incluso algunos autores modernos, que tratan el campo $\vec{B}$ como campo fundamental, se creen obligados a seguir llamándolo inducción magnética, debido a que el nombre de campo magnético se reservó historicamente para $\vec{H}$. En estos apuntes, proponemos la siguiente nomenclatura, pues nos parece más acertada:

- Campos fundamentales:
  - $\vec{E}$: campo eléctrico
  - $\vec{B}$: campo magnético
- Campos auxiliares:
  - $\vec{D}$: inducción eléctrica
  - $\vec{H}$: inducción magnética

También se suele llamar al campo $\vec{D}$ desplazamiento eléctrico.

Antes de establecer el tipo de relación funcional f_1 y f_2 entre los campos (vease expresión 1-21) en los distintos medios, vamos a clasificar éstos según sus características y propiedades fundamentales:

a) En cuanto al comportamiento según las direcciones estudiadas en el entorno de un punto dado, el medio puede ser:

- Isótropo: cuando las propiedades del mismo varían de igual forma en todas las direcciones en las proximidades del punto considerado.
- Anisótropo: cuando no es isótropo.

Muchos cristales útiles, así como los gases ionizados y las ferritas con campos magnéticos aplicados son medios anisótropos.

b) En cuanto a la dependencia de sus propiedades del punto considerado, el medio puede ser:

- Homogéneo: cuando todos sus puntos poseen iguales propiedades físicas.
- Inhomogéneo: ó no homogéneo, cuando no es homogéneo.

Un medio no homogéneo, importante en la práctica, es la atmósfera. Su inhomogeneidad es debida a los cambios de temperatura y humedad, ó a la ionización en los niveles más altos.

c) En cuanto al comportamiento del medio con relación a las amplitudes de las magnitudes estudiadas, el medio puede ser:

- Lineal: cuando sus características no dependen de las amplitudes de las magnitudes estudiadas y por lo tanto, las relaciones existentes entre los campos fundamentales y auxiliares son constantes para el punto considerado.

- No lineal: en caso contrario.

Veamos ya las relaciones funcionales entre los campos fundamentales y auxiliares según los distintos tipos de medios:

1) Vacío o espacio libre.

Consideramos el vacío o espacio libre como un medio isótropo, homogéneo y lineal. Convenimos que los campos auxiliares y fundamentales están relacionados mediante una constante:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_o} \vec{B} \qquad (1\text{-}22)$$

Donde ε_o es la constante dieléctrica o permitividad del vacío (véase expresión 1-12), y μ_o es la llamada permeabilidad del vacío. Ambas constantes están relacionadas con la velocidad de la luz en el vacío, c_o:

$$c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \qquad (1\text{-}23)$$

Puesto que c_o es un valor medido experimentalmente:

$$c_o = 2{,}9979 \cdot 10^8 \ \text{m/s} \qquad (1\text{-}24)$$

Si obtuviera también experimentalmente el valor de ε_o, utilizando la ley de Coulomb (expresión 1-13) , podría determinar el valor de μ_o a partir de la expresión (1-23). Se adopta como valor para μ_o en el sistema M.K.S.Q. el siguiente:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{N}{A^2} \qquad (1\text{-}25)$$

Sus unidades se deducen fácilmente de la expresión (1-23) una vez conocida las de ε_o y c_o.

2) En un medio isótropo establecemos que los vectores auxiliares sean paralelos a los fundamentales, es decir:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \qquad (1\text{-}26)$$

Donde ε es la, ya definida, constante dieléctrica (o permitividad) absoluta del medio considerado (véase expresión 1-11) y μ es la permeabilidad absoluta del medio considerado.

$$\varepsilon = \varepsilon_r \, \varepsilon_o$$
$$\mu = \mu_r \, \mu_o \qquad (1\text{-}27)$$

Siendo ε_r la constante dieléctrica (o permitividad) relativa del medio, y μ_r la permeabilidad relativa del medio. Estos dos valores son adimensionales.

En el caso que el medio sea además homogéneo, ε_r y μ_r serán independientes de las coordenadas del punto estudiado. Y si además, el medio es lineal, ε_r y μ_r serán independientes de los valores de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Luego, podemos decir que para medios isótropos, homogéneos y lineales, ε y μ serán valores constantes conocidos para el medio tratado.

A lo largo de estos apuntes, mientras no se indique lo contrario, consideraremos medios isótropos, homogéneos y lineales.

Si el medio es inhomogéneo (no homogéneo), ε_r y μ_r pueden depender de las coordenadas del punto considerado. Y si además no es lineal, estos valores dependerán también de las amplitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

3) Si un medio es anisótropo, los campos auxiliares no serán paralelos, en general, a los campos fundamentales. La relación existente entre ellos será de caracter tensorial. Por ejemplo, si en un punto concreto, las componentes del vector $\vec{E}$ son: E_1, E_2, E_3; las componentes del vector $\vec{D}$ (son: D_1, D_2, D_3) se obtendrán mediante la relación tensorial:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}28)$$

Por lo tanto $\vec{E}$ y $\vec{D}$ serán paralelos únicamente según las direcciones principales del tensor (ε).
Puede demostrarse que este tensor es simétrico: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$
Análogamente ocurriría con la relación existente entre $\vec{H}$ y $\vec{B}$.

En el caso que el medio sea homogéneo, los términos del tensor (ε) serán independientes de las coordenadas del punto estudiado. Si fuese inhomogéneo, ocurriría lo contrario.

Si el medio fuese además lineal, los términos del tensor (ε) no dependerían del valor de $\vec{E}$. Lo contrario ocurriría si fuese no lineal.

Veamos las unidades en el sistema M.K.S.Q. de los vectores auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$. Si tenemos en cuenta las expresiones 1-26, y conocidas ya las unidades de ε, μ, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se deducen fácilmente:

$$\left[\vec{D}\right] = \left[\varepsilon\right]\left[\vec{E}\right] = \frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot\frac{N}{C} = \frac{C}{m^2}$$

Luego las unidades de medida del campo inducción eléctrica $\vec{D}$ es el cociente entre la unidad de carga (C) y la de superficie (m^2). Por otro lado:

$$\left[\vec{H}\right] = \left[\frac{1}{\mu}\right]\left[\vec{B}\right] = \frac{1}{N/A^2}\cdot\frac{N}{A\cdot m} = \frac{A}{m}$$

Es decir, la unidad del campo inducción magnética $\vec{H}$ es el cociente entre la unidad de intensidad de corriente eléctrica (A) y la unidad de longitud (m).

1.4.- <u>DEFINICION DE LOS CAMPOS DE POLARIZACION $\vec{P}$ y $\vec{M}$.</u>

Aunque las relaciones establecidas entre los campos fundamentales ($\vec{E}$ y $\vec{B}$) y los auxiliares ($\vec{D}$ y $\vec{H}$) son suficientes para darnos la descripción de los fenómenos, que se producen en un medio material, es útil introducir otros dos vectores auxiliares: $\vec{P}$ (polarización eléctrica) y $\vec{M}$ (polarización magnética), con el fin de que nos definan el efecto que se produce al tratar los fenómenos electromagnéticos en un medio material con relación al que se producirá en el vacío. Vamos simplemente a definir estos nuevos campos auxiliares:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{M} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H} \end{aligned} \qquad (1\text{-}29)$$

Obsérvese que cuando el medio estudiado es el vacío, $\vec{P}$ y $\vec{M}$ resultan nulos. Veamos como existe una relación entre estos campos auxiliares y los fundamentales; teniendo en cuenta las expresiones (1-26) para medios isótropos, resulta:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\,\vec{E}$$

$$\vec{M} = \left(\frac{1}{\mu_o} - \frac{1}{\mu}\right)\vec{B} \qquad (1\text{-}30)$$

Si tenemos en cuenta (1-27), podemos poner que:

$$\vec{P} = \varepsilon_o\,(\varepsilon_r - 1)\,\vec{E}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_o}\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)\vec{B} \qquad (1\text{-}31)$$

En la práctica también se utilizan dos constantes adicionales: X_e (susceptibilidad eléctrica) y X_m (susceptibilidad magnética).

$$X_e = \varepsilon_r - 1$$

$$X_m = \mu_r - 1 \qquad (1\text{-}32)$$

Las expresiones (1-31) puestas en función de X_e y X_m quedarían:

$$\vec{P} = \varepsilon_o\, X_e\, \vec{E}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_o}\,\frac{X_m}{1 + X_m}\,\vec{B} \qquad (1\text{-}33)$$

Teniendo en cuenta todas las ecuaciones anteriores, se puede obtener la relación entre los campos $\vec{P}$ y $\vec{M}$ con $\vec{D}$ y $\vec{H}$ respectivamente; resulta:

$$\vec{P} = \frac{X_e}{\varepsilon_r}\,\vec{D}$$

$$\vec{M} = X_m\,\vec{H} \qquad (1\text{-}34)$$

Las dimensiones de $\vec{P}$ y $\vec{M}$ coinciden con las de $\vec{D}$ y $\vec{H}$, respectivamente, dado que la susceptibilidad eléctrica y magnética son valores adimensionales (véase expresión 1-32). Téngase en cuenta que en el caso de tratar con medios anisótropos, X_e y X_m serán tensores.

1.5.- LEY DE OHM.

Se ha podido establecer una relación experimental entre la densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$, (Ley de Ohm):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (1\text{-}35)$$

Donde σ es la llamada conductividad del medio.

Por lo tanto, si conozco el campo eléctrico $\vec{E}$ existente en un punto determinado de un cuerpo, en un cierto instante, y su conductividad, se puede obtener la densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ en dicho punto y para ese instante.

Ahora bien, esta ley tiene sus limitaciones. El cuerpo en cuestión debe encontrarse en reposo y su mayor validez se consigue para buenos conductores (con valores considerables de conductividad). Para los semiconductores, ya empieza a haber problemas.

Según el valor de la conductividad, los medios se pueden clasificar en buenos conductores, malos conductores y aislantes; es obvio que tal clasificación es relativa, pues exige tomar un cuerpo de referencia.

Es muy útil tener en cuenta los casos teóricos extremos:
a)"Conductor perfecto", para este caso tomaremos un valor de la conductividad muy alto, teóricamente infinito.
b)"Aislante o dieléctrico perfecto", consideraremos que en estos medios no existe conducción eléctrica y por lo tanto, diremos que poseen conductividad nula.

De la expresión (1-35), Ley de Ohm, se deducen las dimensiones de la conductividad: cociente entre las unidades de la densidad de corriente eléctrica y del campo eléctrico. Para el sistema M.K.S.Q.:

$$[\sigma] = \frac{[\vec{J}]}{[\vec{E}]} = \frac{A/m^2}{N/C} = \frac{A/m}{N\cdot m/C}$$

Según veremos en el próximo tema, se definirá el concepto de potencial eléctrico, cuya unidad es el voltio: V = N.m/C.

Y recordando que se define la unidad de impedancia (resistencia) como V/A = ohmio (Ω), resulta:

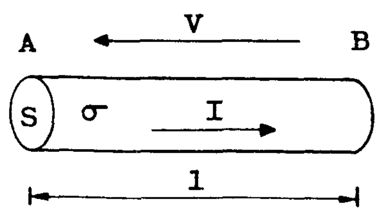
$$\left[\sigma\right] = \frac{A/m}{V} = \frac{1}{\Omega \cdot m}$$

La magnitud inversa de la impedancia es llamada admitancia. Su unidad de medida en este sistema es el siemens (S), con lo que $S = 1/\Omega$. Según esto:

$$\left[\sigma\right] = \frac{S}{m}$$

<u>Caso particular</u>:

Consideremos un conductor cilíndrico de longitud l y con sección constante S, de conductividad $\sigma =$ cte. Si a través de cualquier sección transversal S circula una misma intensidad I, puedo suponer una distribución uniforme de densidad de corriente $\vec{J}$, que llevará la dirección longitudinal del conductor y el sentido de la intensidad (siempre que estemos trabajando con corriente continua o baja frecuencia). Según esto, podremos poner:



$$J = \frac{I}{S} = \sigma E \qquad (1\text{-}35')$$

Al ser $\vec{J}$ constante para todos los puntos del conductor, también lo será el campo eléctrico $\vec{E}$, y se podrá obtener fácilmente su valor en función de la diferencia de potencial V aplicada entre los extremos del conductor A y B (concepto que veremos en el próximo tema); siendo $E = V/l$. Luego:

$$\frac{I}{S} = \sigma \cdot \frac{V}{l}$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \cdot I = R \cdot I$$

Siendo R la resistencia eléctrica que presenta el conductor:

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \qquad (1\text{-}36)$$

De esta forma hemos llegado a la Ley de Ohm conocida en el estudio de circuitos eléctricos:

$$I = \frac{V}{R} \qquad (1\text{-}37)$$

1.6.- ECUACIONES DE MAXWELL.

Consideremos una región del espacio en la que existen fenómenos electromagnéticos. Sea un punto ordinario de esta región, es decir, un punto tal que en sus proximidades el medio posee propiedades físicas continuas sin experimentar variaciones bruscas. Entonces, en dicha región pueden quedar definidos los campos electromagnéticos fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$, así como los auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$ (cuyas relaciones ya se han estudiado), mediante las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
1^{a}) & \operatorname{div} \vec{D} = \rho_v \\[2ex]
2^{a}) & \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\[2ex]
3^{a}) & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\[2ex]
4^{a}) & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{array}
\right\} \qquad (1\text{-}38)
$$

En estas ecuaciones, todos los campos escalares (ρ_v) o vectoriales ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$) pueden ser funciones de las coordenadas del punto considerado y del tiempo. Todos estos campos se suponen finitos en todo punto del espacio, y funciones continuas con derivadas continuas respecto de la posición y del tiempo.

Estas cuatro ecuaciones se pueden poner en forma integral basándonos en los teoremas de Gauss-Ostrogradsky (o de la divergencia) y de Stokes:

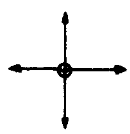
$$
\left.
\begin{array}{ll}
1^{a}) & \oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \rho_v \, dV \\[2ex]
2^{a}) & \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \\[2ex]
3^{a}) & \oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \\[2ex]
4^{a}) & \oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}
\end{array}
\right\} \qquad (1\text{-}39)
$$

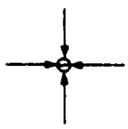
Las ecuaciones de Maxwell son fruto de la experiencia, y por lo tanto no tiene sentido hablar de sus demostraciones matemáticas. Veamos con más detalle el sentido de cada una de estas ecuaciones:

1) La primera ecuación de Maxwell tiene su origen experimental en la Ley de Coulomb. Establece que los manantiales y sumideros del campo eléctrico ($\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$) se encuentran únicamente en los puntos donde hay concentración de carga eléctrica neta, respectivamente positiva o negativa.

Decimos que en un punto existe un manantial de un cierto campo, si de él nacen líneas de dicho campo. Y hablaremos de un sumidero si en él desaparecen las líneas de campo:

Manantial (div $\vec{E} > 0$) Sumidero (div $\vec{E} < 0$)





La primera ecuación de Maxwell en forma integral es conocida como el teorema de Gauss; e indica que el flujo del campo inducción eléctrica a través de una superficie cerrada S es igual a la carga eléctrica Q contenida en el volumen V interior a S.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q \qquad (1\text{-}40)$$

2) La segunda ecuación de Maxwell es consecuencia de las experiencias de Faraday sobre inducción de corrientes. Expresa que la variación del campo magnético con el tiempo es la única causa de creación de remolinos del campo eléctrico. Decimos que en un punto existe un remolino de campo eléctrico, si entorno a dicho punto los vectores del campo, presentan como promedio una componente neta que tienda a rodear al punto en un sentido. En este caso, el rotacional del campo será distinto de cero.

La segunda ecuación de Maxwell, en forma integral, nos dice que la circulación del campo eléctrico $\vec{E}$ a lo largo de cualquier línea cerrada, c, que se encuentre en reposo, respecto del sistema de coordenadas utilizado, es igual a menos el flujo de la variación del campo magnético respecto del tiempo a través de cualquier superficie S de borde la línea,c.

3) La tercera ecuación nos indica que no existen ni manantiales ni sumideros del campo magnético $\vec{B}$. Por tanto las líneas de campo se cierran sobre sí mismas. Un campo de esta forma es llamado solenoidal. No podemos crear una analogía del campo magnético con el eléctrico y hablar de "cargas magnéticas", aunque esta es una cuestión que está en estudio en la actualidad.

En cuanto a su forma integral, puedo decir que nos indica que el flujo de campo magnético a través de cualquier superficie cerrada S es nulo.

4) La cuarta ecuación de Maxwell es consecuencia de la ley de Biot y Savart, que ya estudiaremos más adelante. Nos indica las causas de los remolinos del campo magnético ($\vec{B} = \mu \vec{H}$). Estas son la densidad de corriente $\vec{J}$ y la corriente de desplazamiento (así es como se llama a la variación del campo inducción eléctrica $\vec{D}$ con relación al tiempo). Veremos como la corriente de desplazamiento juega un papel fundamental en el estudio de propagación de ondas.

La cuarta ecuación de Maxwell, en forma integral, es también conocida con el nombre de Teorema de Ampere generalizado, y nos indica que la circulación de la inducción magnética $\vec{H}$ a lo largo de una línea cerrada, c, es igual al flujo de la densidad de corriente $\vec{J}$ y de la corriente de desplazamiento a través de cualquier superficie que S que tenga como contorno la línea c. Estos flujos indican la intensidad de todo tipo que atraviesa la superficie S.

En el caso particular de que el medio estudiado sea isótropo, homogéneo y lineal, los campos fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están relacionados con los auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$, respectivamente, por medio de las expresiones (1-26) donde la constante dieléctrica y la permeabilidad absolutas serían valores constantes. Las ecuaciones de Maxwell se podrían poner únicamente en función de los campos fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$ fácilmente:

$$\begin{aligned}
&1^{\underline{a}}) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \\
&2^{\underline{a}}) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&3^{\underline{a}}) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\
&4^{\underline{a}}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \varepsilon \right)
\end{aligned} \qquad (1\text{-}41)$$

O en su forma integral:

$$1^a)\quad \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \frac{\rho_v}{\varepsilon}\, dV$$

$$2^a)\quad \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

$$3^a)\quad \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \qquad (1\text{-}42)$$

$$4^a)\quad \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \iint_S \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}$$

En el caso de que el medio considerado sea conductor, se podrá emplear la Ley de Ohm, con el fin de poner $\vec{J}$ en función de $\vec{E}$, con lo que las cuatro ecuaciones de Maxwell quedarían en función de los campos fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$ y la densidad volumétrica de carga como fuente fundamental de los campos electromagnéticos. Obsérvese la interrelación existente entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$, es decir, una variación de campo magnético o eléctrico con relación al tiempo producen campo eléctrico o magnético respectivamente. Podríamos decir que existe un efecto de realimentación entre ambos.

Si el medio estudiado es el vacío, son válidas las expresiones (1-41) Y (1-42). En este caso, la constante dieléctrica y permeabilidad absoluta serían las correspondientes al vacío.

1.7.- <u>TEOREMA DE POYNTING. ENERGIA.</u>

En esta pregunta, trataremos de encontrar las expresiones matemáticas de la potencia y energía almacenada por los campos electromagnéticos, así como la verificación del principio de conservación de la energía.

Empecemos por la parte matemática del problema para luego dar su explicación física.

Mediante el cálculo vectorial, sabemos que siempre se verifica que:

$$\text{div } (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} \qquad (1\text{-}43)$$

Teniendo en cuenta la segunda y cuarta ecuación de Maxwell para medios isótropos, homogéneos y lineales (expresiones 1-41) y la relación existente entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$ (expresiones 1-26), tendremos que la ecuación 1-43 se puede poner de la siguiente forma:

$$\text{div}\ (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Puesto que consideramos el medio isótropo, homogéneo y lineal (caso más normal), la expresión anterior puede ponerse:

$$\text{div}\ (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2\right) - \vec{E} \cdot \vec{J} \qquad (1\text{-}44)$$

Esta ecuación es la expresión puntual e instantánea del principio de conservación de la energía. En ella podemos definir los siguientes conceptos:

a) Densidad de flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo (vector de Poynting), $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \qquad (1\text{-}45)$$

Este vector nos indica, para cada punto del espacio, la densidad de energía por la velocidad con que se traslada. Por lo tanto, este vector llevará la dirección y sentido del flujo de energía. Su unidad en el sistema M.K.S.Q. es vatios por metros cuadrados (W/m^2).

b) Densidad espacial de energía electromagnética, u:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 \qquad (1\text{-}46)$$

Nos indica la energía electromagnética almacenada por unidad de volumen en un entorno del punto considerado. El primer sumando corresponde a la energía debida a la existencia del campo eléctrico $\vec{E}$, y el segundo a la del campo magnético $\vec{B}$. Su unidad de medida en el sistema M.K.S.Q. es julios por metros cúbicos (J/m^3).

La energía electromagnética, U, almacenada en un volumen V viene dada por la integral de volumen de la densidad espacial de energía electromagnética extendida a dicho volumen:

$$U = \iiint_V u \, dV \qquad (1\text{-}47)$$

c) Densidad espacial de potencia disipada en forma de calor u otros tipos de energía, p_d:

$$p_d = \vec{E}.\vec{J} \qquad (1\text{-}48)$$

Nos indica la potencia disipada por unidad de volumen en un entorno del punto considerado. Su unidad en el sistema M.K.S.Q. es vatios por metro cúbico, (W/m^3).

La potencia total disipada, P_d, en un volumen V viene dada por la integral de volumen de p_d extendida a dicho volumen:

$$P_d = \iiint_V p_d \, dV \qquad (1\text{-}49)$$

<u>NOTA</u>: Si continuamos estudiando el caso particular de un conductor cilíndrico de longitud l, sección transversal S y conductividad σ, por el que circula una intensidad I debido a que está aplicada una diferencia de potencial V entre sus extremos, podemos pensar obtener la potencia disipada en el mismo. (Véase "caso particular" expuesto en la pregunta 1.5). Teniendo en cuenta la expresión (1-35') y las consideraciones allí expuestas, puedo poner que:

$$p_d = \vec{E} \, . \, \vec{J} = \frac{I}{S \, \sigma} \, . \, \frac{I}{S} = \frac{I^2}{\sigma \, S^2}$$

Vemos como p_d es un valor independiente de las coordenadas del punto considerado en el conductor; (siempre que estemos trabajando con corriente contínua o baja frecuencia). Por lo tanto al efectuar la integral extendida al volumen de conductor correspondiente al trozo estudiado (volumen = S.l), el cálculo se simplifica, tal que:

$$P_d = \frac{I^2}{\sigma \, S^2} \, S \, l = \frac{I^2}{\sigma \, S} \, l$$

Recordando la expresión (1-36) que nos daba el valor de la resistencia R del conductor, tendremos que:

$$P_d = I^2 \, R \qquad (1\text{-}50)$$

Que es la ley de Joule conocida en el estudio de circuitos eléctricos.

Volviendo al estudio del teorema de Poynting que teníamos planteado en su forma diferencial (expresión 1-44), podemos introducir en ella los conceptos definidos:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} = - \frac{\partial}{\partial t} u - p_d \qquad (1\text{-}51)$$

Si ponemos esta ecuación diferencial en forma integral, utilizando el teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{dS} = - \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} u \, dV - \iiint_V p_d \, dV \qquad (1\text{-}52)$$

Considerando las expresiones (1-47) y (1-49) y siempre que el volumen V estudiado sea invariante con el tiempo, puedo poner:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{dS} = - \frac{\partial U}{\partial t} - P_d \qquad (1\text{-}53)$$

Esta ecuación, de gran importancia, es conocida como el teorema de Poynting, y no es más que el principio de conservación de la energía electromagnética aplicado a una región del espacio que ocupa un volumen V inmóvil encerrado por una superficie S, desde un punto de vista instantáneo. Démonos cuenta que la dimensión de los dos miembros de la ecuación es la de potencia.

En cuanto al significado de dicha ecuación (expresión 1-53), podemos decir que nos expresa que: "La energía electromagnética que sale de la región estudiada en la unidad de tiempo (flujo del vector de Poynting a través de la superficie cerrada S) es igual a la disminución de la energía electromagnética almacenada en dicha región, en la unidad de tiempo, menos la potencia disipada en el interior del volumen V".

En el estudio de propagación de ondas electromagnéticas volveremos sobre este teorema, y veremos con más detalle las propiedades del vector de Poynting.

1.8.- UNIDADES Y DIMENSIONES EN ELECTROMAGNETISMO.

A medida que hemos ido definiendo magnitudes electromagnéticas, se han expresado sus unidades en el sistema M.K.S.Q. Este sistema toma como referencia básica para las magnitudes mecánicas el sistema M.K.S., como magnitud electromagnética fundamental elige la carga eléctrica y el culombio (C) como unidad para medirla (Comisión Electrotécnica Internacional, año 1.935).

En el apéndice titulado "Unidades. (M.K.S.Q.)" se encuentra un resumen de las unidades de las magnitudes más usuales en Electromagnetísmo.

Existen algunas magnitudes que se suelen encontrar dadas en el sistema C.G.S. (u.e.s.) y en el sistema C.G.S. (u.e.m.) o gausiano, ambos no racionalizados. A continuación se exponen las unidades más utilizadas y su equivalencia con las correspondientes en el sistema M.K.S.Q.

a) Sistema C.G.S. (u.e.s.):

- Carga eléctrica: su unidad es el franklin (ues), tal que:
  1 culombio = 3.10^9 franklin

b) Sistema C.G.S. (u.e.m.) o gausiano:

- Carga eléctrica: se mide en u.e.m. (unidades electromagnéticas) de carga, se verifica que:
  1 culombio = 10^{-1} u.e.m.
- Campo magnético: se mide en gauss, tal que:
  1 tesla = 10^4 gauss
- Flujo magnético: a su unidad se le da el nombre de maxwell, tal que:
  1 maxwell = gauss. cm^2 , luego:
  1 weber = 10^8 maxwell
- Inducción magnética: su unidad se llama oersted, tal que:

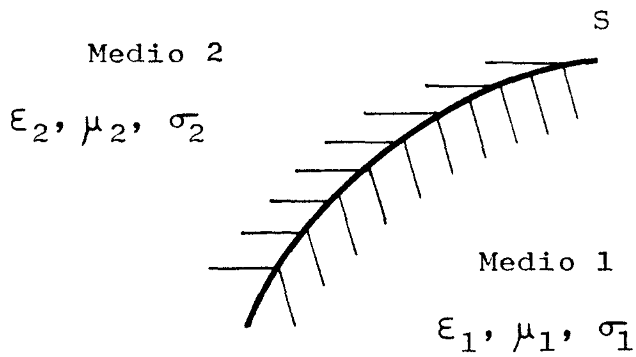
$$1 \ \frac{A}{m} = 4\pi \ . \ 10^{-3} \ \text{oersted}$$

En estos apuntes se trabajará exclusivamente en el sistema M.K.S.Q.

1.9.- CONDICIONES DE CONTORNO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO.

Hasta ahora hemos estudiado los fenómenos electromagnéticos en un medio concreto, definido por su constante dieléctrica, permeabilidad y conductividad. Vamos a ver lo que sucede con los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ y $\vec{H}$ cuando existe una discontinuidad brusca entre un medio 1 (definido por ε_1, μ_1, σ_1) y un medio 2 (definido por ε_2, μ_2, σ_2), que presentan una superficie de separación S.

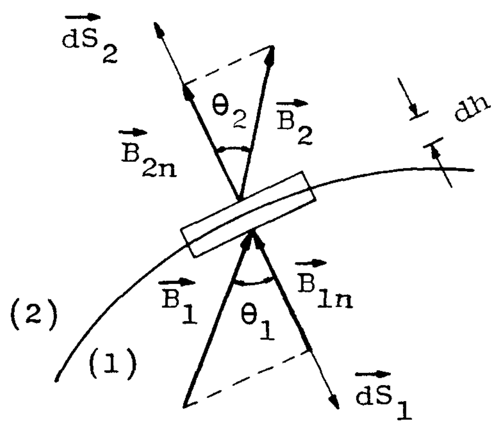
Pretendemos formular matemáticamente estas discontinuidades de los campos, o dicho de otra forma, encontrar que condiciones deben cumplir en estos contornos para que podamos afirmar que se cumplen las ecuaciones de Maxwell.



Obtendremos cuatro condiciones fundamentales:

a) <u>Condición de contorno de la componente normal del campo magnético</u>.

Si consideramos un cilindro elemental de altura despreciable y áreas de las bases dS, paralelas a la superficie de separación de los medios.



Debe verificarse que:

$$\vec{dS}_1 = - \vec{dS}_2$$

Según la 3ª ecuación de Maxwell en forma integral (véase expresión 1-39), el flujo del vector B a través de la superficie que encierra el volumen cilíndrico debe ser nulo; esto es:

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_2 + \text{Flujo lateral} = 0$$

$$|\vec{B}_1| \, |\vec{dS}_1| \cos(\pi - \theta_1) + |\vec{B}_2| \, |\vec{dS}_2| \cos(\theta_2) + \text{Flujo lateral} = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$|\vec{B}_1| \cos(\pi-\theta_1) = - |\vec{B}_1| \cos\theta_1 = - B_{1n}$$

$$|\vec{B}_2| \cos \theta_2 = B_{2n}$$

$$|\vec{dS}_1| = |\vec{dS}_2| = dS$$

Siendo B_{1n} y B_{2n} las componentes normales del campo magnético en los medios 1 y 2, respectivamente, según figura. (Mucho cuidado con el convenio de signos implícito en la figura). Tendremos:

$$- B_{1n}\, dS + B_{2n}\, dS + \text{Flujo lateral} = 0$$

Para obtener este resultado se ha supuesto que las bases del cilíndro elemental son suficientemente pequeñas como para admitir que $\vec{B}$ es constante en ellas. El flujo lateral depende de la altura del cilíndro elemental, dh. En el límite, al hacer dh $\rightarrow$ 0, el flujo lateral se hace nulo, ya que las bases del cilíndro están apoyadas a ambos lados de la superficie de separación y no existe superficie lateral prácticamente. Por tanto, se llega a la conclusión de que las componentes normales del campo magnético en el medio 1 y 2 coinciden; según convenio de la figura:

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1-54}$$

La ecuación escalar anterior, se puede poner de forma vectorial para conseguir mayor exactitud; teniendo en cuenta la figura:

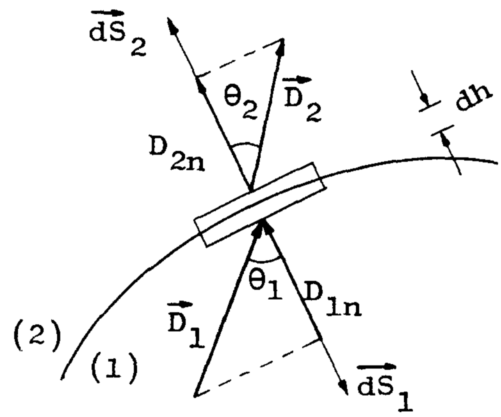
$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \tag{1-54'}$$

En el caso en que los medios 1 y 2 sean isótropos, homogéneos y lineales, se verificará que:

$$\mu_1 \vec{H}_{1n} = \mu_2 \vec{H}_{2n} \tag{1-55}$$

b) <u>Condición de contorno de la componente normal del campo eléctrico.</u>

Construimos un cilíndro elemental de forma análoga al caso anterior, tal que deberá verificarse en este caso la primera ecuación de Maxwell, (véase expresión 1-39): el flujo del vector $\vec{D}$ a través de la superficie que encierra el volumen cilíndrico debe ser igual a la carga encerrada en éste.



Si suponemos en el interior del cilíndro una densidad volumétrica de carga ρ_v, la carga encerrada en él será: $\rho_v.dS.dh$. Por tanto:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{dS}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{dS}_2 + \text{Flujo lateral} = \rho_v dS \cdot dh$$

Operando de forma análoga al caso anterior:

$$- D_{1n}\, dS + D_{2n}\, dS + \text{Flujo lateral} = \rho_v\, dS\, dh.$$

Si hacemos $dh \to 0$, el flujo lateral es despreciable y obtendría, después de dividir toda la ecuación por dS.

$$- D_{1n} + D_{2n} = \lim_{dh \to 0} \rho_v\, dh$$

El segundo miembro de esta ecuación nos indica la carga por unidad de superficie, ρ_S, existente en la superficie de separación de ambos medios. Por lo tanto, se obtiene definitivamente la condición que debe verificar las componentes normales del campo inducción eléctrica $\vec{D}$.

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_S \qquad (1\text{-}56)$$

Siendo ρ_S la densidad superficial de carga existente en la superficie de separación de los medios. Vuelvo a insistir en la importancia del convenio de signos implícito en la figura adjunta, para que la ecuación escalar anterior se pueda particularizar con validez en cada caso concreto.

En el caso particular de que los medios 1 y 2 sean isótropos, homogéneos y lineales, se verifica que:

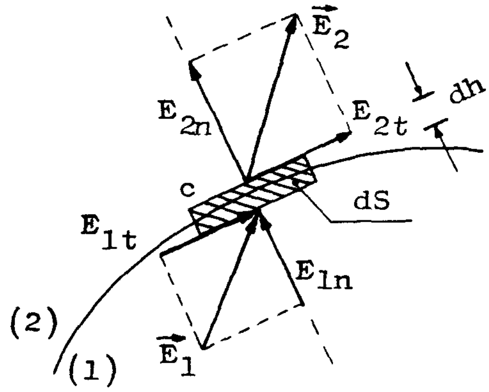
$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_S \qquad (1\text{-}57)$$

c) Condición de contorno de la componente tangencial del campo eléctrico.

Consideremos una línea cerrada elemental, c, de forma rectangular, que tenga sus lados mayores de longitud, dl, paralelos a la superficie de separación de ambos medios, y cuya altura sea el espesor, dh, de la capa de transición. El área de este rectángulo:

$$dS = dl \cdot dh \qquad (1\text{-}58)$$

Según la segunda ecuación de Maxwell en forma integral (véase expresión 1-39), la circulación del campo eléctrico $\vec{E}$ a lo largo de la línea cerrada, c, debe ser igual al flujo de $(-\partial\vec{B}/\partial t)$ a través de la superficie que define el rectángulo, dS.



Si tomamos como sentido positivo de circulación el contrario de las agujas del reloj, tendremos que la componente tangencial de $\vec{E}_1$ aportará una circulación positiva según la figura y la de $\vec{E}_2$ una negativa. Las componentes normales no aportan ningún valor de circulación a lo largo de los lados paralelos a la superficie de separación de los medios, por ser normales a dichos tramos de línea. Por tanto puedo poner que:

$$E_{1t}\, dl - E_{2t}\, dl + \text{circulación lateral} = \iint_S -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Si dh → 0, la circulación lateral se hace cero, al igual que el flujo de $(-\partial\vec{B}/\partial t)$ a través de la superficie S definida por el rectángulo, puesto que el integrando es un valor finito y el recinto de integración tendería a anularse, dado el valor de dS; (véase expresión 1-58). Por tanto, la ecuación anterior nos lleva a la conclusión de que las componentes tangenciales del campo eléctrico en los medios 1 y 2 coinciden; según el convenio implícito en la figura:

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1-59}$$

Esto es lo mismo que decir que la componente tangencial del campo eléctrico $\vec{E}$ es contínua a través de la superficie de separación de dos medios materiales. Esta condición se puede poner de forma más rigurosa, en forma vectorial; teniendo en cuenta la figura:

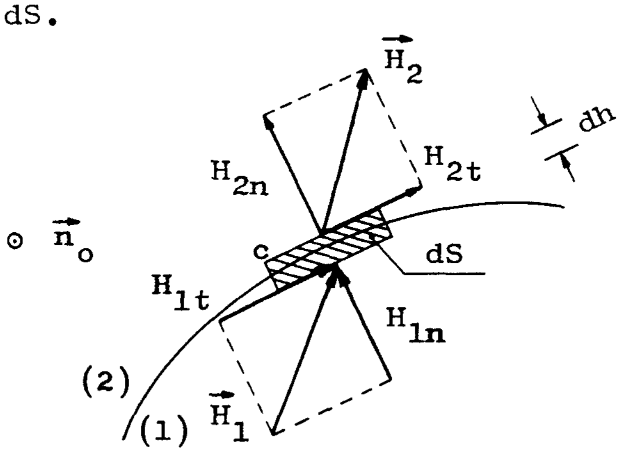
$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \tag{1-59'}$$

En los medios materiales que estudiaremos nosotros (isótropos, homogéneos y lineales), podemos poner que:

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{1-60}$$

d) Condición de contorno de la componente tangencial del campo magnético.

Construimos una línea cerrada elemental, c, de forma análoga al caso anterior. Teniendo en cuenta la 4ª ecuación de Maxwell en forma integral (véase expresión 1-39): la circulación del campo inducción magnética $\vec{H}$ a lo largo de la línea cerrada, c, deberá ser igual al flujo de $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a través de la superficie que define el rectángulo, dS.



Si tomamos como sentido positivo de circulación el contrario al de las agujas del reloj, tendremos que la componente tangencial de $\vec{H}_1$ aportará una circulación positiva (según figura) y la de $\vec{H}_2$ una negativa. Las componentes normales no aportarían circulación en los tramos perpendiculares a éstas. Por lo tanto, podría poner que:

$$H_{1t}\, dl - H_{2t}\, dl + \text{circulación lateral} = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Cuando $dh \rightarrow 0$, la circulación lateral evidentemente se anula. La segunda integral del segundo miembro también se anula, puesto que el integrando es un valor finito y el recinto de integración se anula; en cambio, la primera integral, (flujo de $\vec{J}$ a través de la superficie dS) nos indica la corriente libre que circula por la superficie de separación a través de dS. Esta sí puede tomar un valor distinto de cero, sobre todo en el caso en que uno de los medios sea un buen conductor. Recuérdese que $\vec{J}$ podría tomar valores teóricamente infinitos, para un campo eléctrico finito, si se trata de un "conductor perfecto" en el que la conductividad puede ser prácticamente infinita, (véase Ley de Ohm, expresión 1-35). Según estas consideraciones, la expresión anterior tomaría la forma:

$$H_{1t}\, dl - H_{2t}\, dl = \lim_{dh \rightarrow 0} \vec{J} \cdot (\, dl\, dh\, \vec{n}_o \,)$$

Siendo $\vec{n}_o$ un vector unitario perpendicular a la superficie $dS = dl.dh$ definida por la línea rectangular elemental considerada (ver figura); es decir, es perpendicular al plano del papel y saliente de él, debido al sentido positivo de circulación escogido, (regla del sacacorcho). Si simplificamos en la ecuación anterior, dividiendo por dl ambos miembros, el segundo miembro lo puedo poner como $(\vec{J}\, dh).\vec{n}_o$, donde $\vec{J}$ dh nos indica la densidad superficial de corriente, $\vec{j}$, existente en la superficie de separación (concepto del que ya hemos hablado en la pregunta 1-1):

$$\vec{j} = \lim_{dh \rightarrow 0} \vec{J}\, dh \tag{1-61}$$

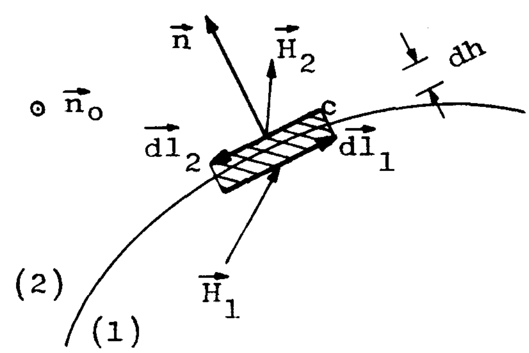
Por tanto, puedo poner que:

$$H_{1t} - H_{2t} = \vec{j} \cdot \vec{n}_o \tag{1-62}$$

El segundo miembro nos indica la intensidad por unidad de longitud que circula, por la superficie de separación en la dirección transversal al campo magnético tangencial.

Démonos cuenta que si en la superficie de separación de los medios no existe movimiento de cargas, se verificará que la componente tangencial del campo inducción magnética, $\vec{H}$, es continua. Esto será lo más normal, a no ser que uno de los medios considerados, sea un "conductor perfecto".

Cabría preguntarnos si la dirección de $\vec{j}$ viene impuesta de alguna manera, por las direcciones que lleven los vectores $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$, dada la relación existente entre ambos en las ecuaciones de Maxwell. Fijémonos que en el estudio anteriormente citado, se han supuesto los vectores en el medio 1 y 2 coplanarios con la normal saliente a la superficie; cuestión que, en principio, parece razonable. De ahí que $\vec{n}_0$, tal como se ha dibujado, se ha considerado normal a dicho plano. Hagamos a continuación, un estudio algo más general y veamos como la dirección de $\vec{j}$ viene impuesta, cosa que no se deduce explícitamente de la ecuación (1-62): Consideremos que en el medio 1 existe una inducción magnética $\vec{H}_1$ y en el medio 2, $\vec{H}_2$ y sea una línea elemental rectangular arbitraria, tal que el vector $\vec{n}_0$ define la normal al plano en que se encuentra.



Tomemos como sentido de integración, el indicado en la figura con el fin de que según la regla del sacacorchos, nos defina el sentido positivo de $\vec{n}_0$. Sea $\vec{n}$ el vector unitario, según la normal saliente a la superficie en el punto considerado. Si aplicamos la cuarta ecuación de Maxwell, despreciando ya la circulación lateral y el flujo de la corriente de desplazamiento, por las razones ya indicadas, obtendríamos que:

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{dl}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{dl}_2 = \lim_{dh \to 0} \vec{J} \cdot (dl\ dh\ \vec{n}_o)$$

Observando la figura anterior, puedo poner que:

$$\vec{dl}_1 = - dl\ (\vec{n}_o \times \vec{n})$$

$$\vec{dl}_2 = dl\ (\vec{n}_o \times \vec{n})$$

Por lo tanto puedo poner que:

$$- \vec{H}_1 \cdot (\vec{n}_o \times \vec{n})\ dl + \vec{H}_2 \cdot (\vec{n}_o \times \vec{n})\ dl = \lim_{dh \to 0} (\vec{J}\ dh) \cdot \vec{n}_o\ dl$$

Dividiendo toda la ecuación por dl, teniendo en cuenta la expresión (1-61) y recordando la propiedad distributiva del producto escalar:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{n}_o \times \vec{n}) = \vec{j} \cdot \vec{n}_o$$

Recordando la propiedad vectorial: (cualesquiera que sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \qquad (1\text{-}63)$$

$$\vec{n}_o \cdot \left[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right] = \vec{j} \cdot \vec{n}_o$$

Utilizando las propiedades distributiva y conmutativa del producto escalar:

$$\vec{n}_o \cdot \left[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) - \vec{j} \right] = 0$$

Esta expresión debe verificarse para cualquier línea rectangular escogida y , por tanto, debe ser independiente de la dirección $\vec{n}_o$ de la normal a la superficie del rectángulo; luego, puedo poner que:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j} \qquad (1\text{-}64)$$

Expresión que nos relaciona genéricamente el campo inducción magnética $\vec{H}$ en ambos medios, con la densidad superficial de corriente $\vec{j}$.

Se observa que $\vec{j}$ tiene que estar obligatoriamente sobre la superficie de separación de ambos medios, y ser perpendicular al vector diferencia $\vec{H}_2 - \vec{H}_1$.

Si consideramos que $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ y $\vec{n}$ son coplanarios, el vector diferencia $\vec{H}_2 - \vec{H}_1$ estará contenido en el plano definido por los tres vectores anteriores. Por tanto, el vector $\vec{j}$ será necesariamente perpendicular a $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$. En este caso, la ecuación (1-62) se puede poner de forma modular:

$$H_{1t} - H_{2t} = j \qquad (1\text{-}65)$$

puesto que $\vec{j}$ y $\vec{n}_o$ serían paralelos, ya que en su deducción se había supuesto $\vec{n}_o$ perpendicular al plano definido por $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ y $\vec{n}$. En esta ecuación escalar se considera además el convenio de signos impuesto en la figura correspondiente.

Teniendo en cuenta las relaciones entre los campos auxiliares y fundamentales (expresión 1-26), se podría extender fácilmente las ecuaciones (1-64) y (1-65) para el campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{j} \qquad (1\text{-}66)$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = j \qquad (1\text{-}67)$$