BIBLIOTECA GENERAL

FORMACIÓN DE PROFESORADO
I

BLOQUES METODOLÓGICO Y AFÍN

José Juan Castro Sánchez
Gonzalo Marrero Rodríguez
Emigdia Repetto Jiménez
(Coordinadores)

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.º Documento 496589
N.º Copia 857/01

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Servicio de Publicaciones

2006

© del texto: LOS AUTORES
© de la edición: SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Primera edición

ISBN Obra completa : 84-96502-88-0

ISBN Volumen I: 84-96502-87-2

Depósito Legal: GC 159-2006

Maquetación y diseño: SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA ULPGC

Impresión: SERVICIO DE REPROGRAFÍA, ENCUADERNACIÓN Y AUTOEDICIÓN ULPGC

Impreso en España. *Printed in Spain*

Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del «Copyright», bajo las sanciones establecidas por las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático.

ÍNDICE

Presentación 7

Bloque metodológico 9

Diseños y técnicas de investigación en educación 11
José Juan Castro Sánchez

Estadística básica 33
José Juan Castro Sánchez

Estrategias de investigación 53
M.ª del Carmen Mato Carrodeguas

Medición y construcción de instrumentos 93
José Juan Castro Sánchez

Bloque afín 137

Escritura creativa: aprendizaje y perfeccionamiento 139
Isabel Ruiz de Francisco

Historia y educación matemática 203
Víctor Manuel Hernández Suárez

Iniciación a la teleformación 253
Pilar Etopa Bitata

Las habilidades motrices básicas en el diseño curricular 303
Dolores Cabrera Suárez y Guillermo Ruiz Llamas

HISTORIA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Víctor Manuel Hernández Suárez

PRESENTACIÓN

Desde el establecimiento de los sistemas nacionales de educación, en cada generación se han levantado voces a favor de una aproximación histórica en la Enseñanza de las Matemáticas y, en particular, del uso de la Historia de las Matemáticas en su Enseñanza.

La Historia de las Matemáticas facilita al profesorado una visión más completa de la materia y una formación científica más extensa. El uso de problemas históricos en el aula brinda al estudiante una perspectiva más general de las Matemáticas y mejora la enseñanza-aprendizaje de determinados conceptos matemáticos. Las contribuciones que la Historia de las Matemáticas puede hacer a la enseñanza de éstas son múltiples y dependen de muchos factores. Por un lado, es imprescindible que los profesores se formen e investiguen en Historia de la Matemática; por otro, se precisan recursos apropiados para no caer en la anécdota fácil exenta de contenido matemático. No obstante, las diferentes posibilidades de utilización de la Historia de la Matemática, como recurso implícito y explícito, nos revelan que es un instrumento útil para perfeccionar la enseñanza de las Matemáticas y la formación integral del alumnado. Es muy importante seleccionar textos históricos relevantes en la Historia de las Matemáticas que ayuden al estudiante a asimilar los conceptos más fácilmente. El uso de cuestiones históricas en clase es una de las técnicas a las que se puede recurrir para mejorar la transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos y también actúa como revulsivo en aquellos casos en los que el estudiante no esté adecuadamente motivado.

En este curso investigaremos, fundamentalmente, las repercusiones didácticas que posee la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Asimismo, se analizan las principales aportaciones del hombre a las Matemáticas a través de los tiempos, a la vez que se propone la realización de actividades didácticas contando con los recursos de cada época histórica. Con su estudio se pretende que los alumnos conozcan que la Matemática es una creación viva, fruto de la actividad humana, y que el conocimiento de su historia permite comprenderla conceptualmente y dar a su enseñanza la necesaria dimensión cultural.

Objetivos generales

1. Comprender la evolución de algunos conceptos matemáticos.
2. Alcanzar una visión de la Matemática como actividad humana.
3. Integrar los aspectos científicos, culturales y sociales de las Matemáticas.
4. Conocer la evolución histórica de la Educación Matemática.
5. Conocer la evolución de la enseñanza de algunos conceptos matemáticos.
6. Proporcionar una panorámica de las ramas más importantes de la Matemática en la Educación Primaria y Secundaria, desde un punto de vista histórico.
7. Conocer ejemplos, problemas y curiosidades de la Historia de la Matemática seleccionados por su interés didáctico o su significación histórica.
8. Realizar un análisis pedagógico de dichos problemas concretos, así como de las aplicaciones didácticas de la Historia de la Matemática en general.
9. Potenciar los recursos informáticos como herramienta didáctica para la Enseñanza-Aprendizaje de la Historia de las Matemáticas.
10. Incorporar las nuevas tecnologías a la investigación en Educación Matemática.
11. Definir problemas relevantes para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, que puedan ser abordados por los doctorandos en sus trabajos de investigación.
12. Conocer algunas de las principales líneas de investigación en Educación Matemática.

Contenidos

- La Historia de las Matemáticas en la enseñanza.
- El desarrollo histórico de las Matemáticas.
- El análisis de biografías de grandes matemáticos.
- La Historia de la Educación Matemática.

1. Contextos históricos de la Ciencia en el aula

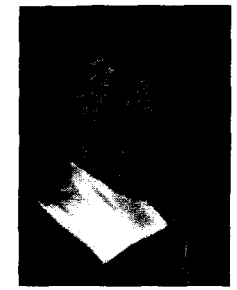
¿Para qué conocer la historia de una disciplina en el aula? Frecuentemente se concibe que el docente pueda usar algunos elementos de la historia de la disciplina que imparte, es decir, añadir anécdotas y comentarios para hacer más amena una clase, o proporcionar una "introducción" histórica del tema o materia que se va a tratar, pero que a la vez es completamente independiente del desarrollo mismo del curso. En otras palabras, utilizar los conocimientos históricos para rellenar y amenizar las clases, pero de una manera ajena a la metodología y conceptos propios del curso.

Existen planteamientos que afirman que el conocimiento del desarrollo histórico de una disciplina proporciona al docente una pista de cómo, probablemente, se desarrolla el conocimiento de tal disciplina en la mente de un alumno.

Pero, más que nada, el conocimiento de la historia de una disciplina y su relación directa con los conocimientos que se imparten proporciona al docente, y de hecho también al alumno, la posibilidad de comprender la naturaleza de tales conocimientos, su razón de ser, los motivos por los que se desarrollaron en un momento dado de su historia, la explicación de por qué evolucionaron de esa manera y el impacto que tuvieron en el entorno socio-histórico y cultural que rodeaba a los seres humanos que lo hicieron.

En Matemáticas, el saber cómo se ha desarrollado esta área del conocimiento humano permite lograr una perspectiva de su filosofía y las razones esenciales de su evolución. Las preocupaciones principales, las concepciones de los objetos matemáticos, y la concepción misma de las Matemáticas han variado notablemente a lo largo de la historia.

A René Descartes (1596-1650), se le reconoce un gran mérito, ya que se le atribuye la invención de la Geometría Analítica. Sin embargo, en su ensayo *La Geometría* (obra publicada originariamente en el año 1637, que marcó el renacimiento de la Matemática en el siglo XVIII, y constituyó el primer tratado impreso que contiene los fundamentos de la Geometría Analítica; esta valiosa obra influyó en mentes tan valiosas como la de Isaac Newton, quien la leyó en 1663) no presenta sistemas de coordenadas cartesianas, que es lo que creemos necesario para desarrollar esta geometría. Debemos comprender el ambiente de racionalismo que imperaba en el siglo XVII, y que este ensayo no es más que una aplicación, un ejemplo, del método que describe en su obra *Discurso del Método*. Es realmente brillante la posibilidad de estudiar con otro método, no el geométrico, objetos que pertenecen al ámbito geométrico. En otras palabras, Descartes posibilitó la descripción y estudio de objetos geométricos, por ejemplo, no en términos de pertenencia y no pertenencia, sino en términos de relaciones numéricas o algebraicas. Así, en lugar de analizar los objetos geométricos, se investigan las propiedades algebraicas de las expresiones asociadas a dichos objetos. Es el método, el cambio en la visión, lo que le concedió el mérito al ilustre matemático francés.



Otro ejemplo sobre este desarrollo es el Cálculo mismo, cuyo origen está en el estudio del movimiento, hecho que no se había dado con anterioridad a ese nivel, aunque con antecedentes en el mismo desarrollo de Descartes y Vieta. Newton y Leibniz emprendieron el desarrollo del Cálculo, pero ambos con serios "huecos" en cuestiones de rigor: no había definiciones precisas y eran más bien los métodos lo que estaba mejor definido. Más, eso no detuvo el desarrollo del Cálculo, ni su aplicación exitosa en el estudio del movimiento, ni su expansión en lo que conocemos como el Análisis. Han existido intentos de axiomatizar esta rama de las Matemáticas, mas no se ha logrado.

Los conceptos de la Aritmética y el Álgebra se aplicaron durante muchos siglos, pero los esfuerzos por regularlos y axiomatizarlos, sólo tienen siglo y medio. El Cálculo se ha desarrollado asimismo sin esta axiomatización y derivando fórmulas y procedimientos que permiten su estudio y aplicación más sencilla, soslayando así recurrir a las definiciones de cada objeto cada vez que se utilizan.

Los cursos de Geometría en la Educación Secundaria, aunque se denomine "euclidiana" y comiencen con las definiciones, los axiomas y los postulados de Euclides, continúan en un orden y con una metodología diferente a la del gran matemático griego. El enfoque que perdura actualmente en nuestras aulas tiene sus orígenes en una crisis de los fundamentos y las continuas tentativas de suministrarle una sedimentación sólida a la Matemática, en este caso la Geometría, que existieron en el siglo XIX.

Si retrocedemos de nuevo a la pregunta inicial, no solamente el conocimiento de la historia de la disciplina sirve para amenizar la clase, también nos permite ofrecer una panorámica de su desarrollo como producto social, cultural, sumergido en un entorno variable. Asimismo, al docente le proporciona un diseño de su filosofía, sus métodos, sus objetos, y le permite aplicar esta información, con una capacidad de discriminación cimentada, en el momento de impartir sus clases, conceptos y métodos de una forma coherente con el nivel en el que se desenvuelve.

Para finalizar, resaltamos la frase pronunciada por el astrónomo y físico italiano Galileo Galilei (1564-1642), refiriéndose al Universo escribía: "Este grandísimo libro que continuamente tenemos abierto ante los ojos no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua y a conocer los caracteres en los cuales está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas".

2. La historia de las Matemáticas en la enseñanza

Desde que se establecieron los sistemas nacionales de educación, en cada generación se han alzado voces a favor de una aproximación histórica en la Enseñanza de las Matemáticas y, en particular, del uso de la Historia de las Matemáticas en su Enseñanza.

Como señaló Fauvel en 1991, un fuerte argumento para ello, sobre todo en los albores del siglo XX, fue el punto de vista genético, debido a Herbert Spencer, según el cual la génesis del conocimiento en cada niño debe seguir el mismo camino que la génesis del conocimiento en la raza.

El principio genético postula que el desarrollo de la inteligencia humana reproduce desde la infancia los pasos que ha seguido la evolución histórica de los conceptos matemáticos. Podemos ensayar en algunos temas, la aplicación del método genético. Este método, extraído de la Biología, pretende reconstruir el clima psicológico que envuelve a cada momento creador que haya supuesto un avance significativo en la Historia de las Matemáticas. La aplicación de este método en la Enseñanza ha sido reivindicada por ilustres matemáticos y profesores de Matemáticas, e intenta demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el estudiante debe repetir, a grandes rasgos, el proceso histórico que se ha desarrollado hasta su formulación actual. Félix Klein (1849-1925), en su obra en dos volúmenes, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, destinada a la formación de los estudiantes de Magisterio, desarrolla un razonamiento genético. Así, al final del primer volumen señala: "Para precisar bien mi opinión en este punto (el punto de vista pedagógico-matemático que aconseja no dar demasiado pronto al alumno cosas demasiado abstractas y difíciles), he de recordar la ley fundamental biogenética, según la cual el individuo en su desarrollo recorre en rápida sucesión todos los estados del desarrollo de la especie a que pertenece. Este principio, creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la Matemática lo mismo que en cualquier otra enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se nota con sobrada frecuencia".

La aplicación de este método consiste en realizar una reconstrucción histórica que ponga de manifiesto el conocimiento de las preguntas y necesidades que acarrearon en un período de la Historia la introducción de nuevos conceptos, así como los problemas específicos propios del nacimiento de los mismos. Estas dificultades se manifiestan asimismo de forma rotunda en el aprendizaje estos conceptos y en la resolución de los mismos problemas, como ya señalaba Kline en 1908. Por ejemplo: si los números negativos no afloraron hasta el milenio de Historia Matemática, y si tuvieron que pasar otros mil años hasta que fueron aceptados por los matemáticos, es indudable que los estudiantes tendrán dificultades con esta clase de números. En el campo del Álgebra, es muy significativo el ejemplo siguiente. Si contemplamos la Historia del Álgebra, vislumbraremos las dificultades que tienen frecuentemente los escolares de Educación Primaria y Secundaria con las letras que representan las

incógnitas. Estos problemas son análogos a los que han padecido los matemáticos durante más de 20 siglos, en la transición desde el Álgebra Retórica de los griegos de la época clásica al Álgebra Simbólica de Vieta. Entre ambas, se desarrollaron las etapas intermedias del Álgebra Sincopada de Diofanto, los avances de los árabes y el famoso "Arte de la cosa" de los algebristas italianos del Renacimiento.

Célebres matemáticos españoles como Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, entre otros, estimularon esta aproximación histórica, incluyendo en sus libros de texto comentarios sobre Historia de las Matemáticas adaptados a los alumnos.

J. Rey Pastor (1888-1962)

Julio Rey Pastor destaca por su labor en la Didáctica de las Matemáticas. En 1910 fundó con algunos profesores la Sociedad Matemática Española, e introdujo y divulgó en España la Matemática moderna. En sus numerosas obras didácticas hay puntos de vista y demostraciones originales. Realizó trabajos de investigación histórica sobre las Matemáticas españolas del siglo XVI, entre otros. Crea la Revista Matemática Hispano-Americana en 1919, y escribe muchos textos para la Enseñanza Secundaria, contribuyendo a la renovación de la enseñanza.

En nuestra práctica didáctica en el aula, debemos procurar ajustarnos al máximo posible al *Decálogo de la Didáctica de la Matemática Media* formulado por D. Pedro Puig Adam en 1955, y que exponemos a continuación: "Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las sugerencias que estimo más fundamentales:

- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
- No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
- Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
- Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
- Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

- Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- Promover en todo lo posible la autocorrección.
- Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
- Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento".

Estas ideas formuladas hace 50 años conservan todo su vigor y creemos que deben ser el objetivo en su práctica docente de cualquier profesor de Matemáticas.

P. Puig Adam (1900-1960)

La imagen ha sido reproducida de la portada de la revista *Números*, V. 41, abril de 2000, editada por la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas.

En Canarias, resaltamos la extraordinaria labor pedagógica e investigadora desarrollada en los últimos cincuenta años por José Martel Moreno (San Lorenzo, 1925), Catedrático de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, y Nácere Hayek Calil, (Tenerife, 1922), Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de La Laguna, ambos Profesores Eméritos.

José Martel Moreno y Nácere Hayek Calil

La Historia debe ser una poderosa herramienta para lograr objetivos tales como:

- Mostrar la forma peculiar de brotar las ideas en Matemáticas.
- Enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, los problemas, junto con sus precedentes, la motivación.
- Señalar los problemas abiertos de cada período, su evolución y la situación actual de los mismos.
- Anotar las conexiones históricas de la Matemática con otras ciencias, en cuya interacción han brotado tradicionalmente muchas ideas importantes.

Se ha fomentado de nuevo el interés por los aspectos históricos en la Educación Matemática, a partir de la década de los setenta del siglo pasado. Schubring en 1983, señalaba algunas muestras de este florecimiento:

- Fundación del Grupo Inter-IREM de Historia de las Matemáticas, cuyo objetivo es la utilización de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza.
- Aparición del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM).
- Numerosos trabajos que estudian las relaciones entre Historia de las Matemáticas y Enseñanza desde puntos de vista diferentes, realizados por autores como Janke, Otte y Schubring (los tres en Bielefeld, Alemania), Pyenson (Montreal), Dhombres (Nantes), Eccarius (Eisenach, Alemania) y Filloy (México), entre otros.
- Publicación de trabajos acerca de la Enseñanza de las Matemáticas desde el punto de vista de los enseñantes, como los realizados por Howson en Southampton, y de la historia del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas, como los de Glaeser (Estrasburgo) y Schmidt (Colonia).

Debemos resaltar las iniciativas siguientes, referidas a la utilización de la Historia de las Matemáticas en el aula:

- La publicación en 1969 por el NCTM de la obra *Historical Topics for the Mathematical Classroom*, en la que se detalla una serie de materiales históricos para la Educación Matemática.
- La obra colectiva de los IREM franceses: *Mathematiques au fil des ages*, en la que se ofrece una selección de textos que muestran cómo han evolucionado históricamente las Matemáticas.
- Los Congresos del HPM, entre los que destacan las dos Conferencias Internacionales sobre Historia y Epistemología en la Educación Matemática, celebrados en Montpellier (Francia, 1993) y en Braga (Portugal, 1996).

En junio de 1991, la revista *For the Learning of Mathematics*, http://flm.educ.ualberta.ca, publicó un número monográfico muy interesante. Culminaba así el interés

de esta publicación periódica por impulsar en sus páginas el debate en torno al uso de la Historia de la Matemática en su aprendizaje.

En España también ha aumentado de manera notable la inquietud por los aspectos históricos en Educación Matemática desde diversas perspectivas, como lo refrendan la gran cantidad de ponencias y comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales, tesis doctorales leídas, artículos y monografías, así como por los numerosos cursos de doctorado y la organización de seminarios especializados.

Algunas de las razones que se manejan para la integración de la Historia de las Matemáticas en su Enseñanza son las siguientes:

Para el profesor constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas en el currículo. La exploración de la Historia le ayudará también a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos, así como el papel de las Matemáticas como actividad humana.

Para los alumnos, las Matemáticas ya no representarán el papel de edificio acabado, restituyéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que es una fuerte motivación para su aprendizaje.

J. Fauvel en 1991, proponía, las siguientes directrices por parte de los docentes en el aula:

1. Nombrar anécdotas matemáticas del pasado.
2. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.
3. Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase.
4. Impartir lecciones de Historia de las Matemáticas.
5. Pensar ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.
6. Promover la creación de pósteres, exposiciones u otros proyectos sobre un tema histórico.
7. Emplear ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
8. Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
9. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
10. Imaginar aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
11. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

En Ontoria, A. (1992), pp. 139-148, podemos ver una experiencia de trabajo sobre "Historia de la Matemática como recurso didáctico en el aula", mediante el empleo de mapas conceptuales.

Es necesario por parte del profesorado realizar estudios sobre Historia de las Matemáticas. Hay muchas maneras de elaborar estos estudios:

- Obtener simplemente una cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más trascendentes. Esta vía no requiere mucho esfuerzo de estudio, pero debemos ser conscientes que nos suministra una panorámica parcial de la Historia de las Matemáticas.
- Profundizar en la evolución del pensamiento y en el trabajo matemático. Es un camino muy interesante. Sin embargo, demanda una sólida formación matemática y humanística. Entre los temas de investigación señalamos los siguientes:
  1. Las diferentes culturas científico-Matemáticas.
  2. Evolución de los principales conceptos matemáticos.
  3. Origen y Desarrollo de las diferentes Ramas de las Matemáticas: Aritmética, Geometría, Álgebra, Estadística, Análisis Matemático y Cálculo de Probabilidades.
  4. Los hitos más trascendentales del pensamiento matemático.
  5. Los problemas más interesantes.
  6. Los diversos procedimientos de resolución.
  7. Las Escuelas y Tendencias en Matemáticas.

En el cuadro 1 podemos ver un ejemplo sobre el concepto de función en la Historia.

- Existe también la posibilidad de analizar la Historia de la Matemática tomando como referencia a sus creadores. Una meticulosa selección de personajes es fundamental para poder ilustrar los momentos matemáticos más relevantes. Es un camino fructífero y motivador, ya que enlaza con la parte humana de los protagonistas de esa extraordinaria obra colectiva del espíritu humano que es la Matemática. No obstante, podemos excluir de nuestra selección a muchos actores trascendentales en la Historia de las Matemáticas, lo que constituye una dificultad.
- Utilización didáctica de vídeos. Existen vídeos con la biografía de matemáticos, otros que muestran algunas experiencias históricas, o descubrimientos que han ejercido una gran influencia en la vida de los seres humanos. El profesor debe elaborar fichas para que los alumnos las completen antes y después de la proyección. A modo de ejemplo podemos citar *Donald en el País de las Matemáticas*, volumen 5 del Canal Disney, véase Del Río, J. (1988). También podemos resaltar las series: *Universo Matemático* y *Más por Menos*, de Antonio Pérez Sanz.

Cuadro 1

Edad Antigua	✓ *Los babilonios*: concepto de función relacionado con la astronomía. ✓ *Los griegos*: intento de buscar dependencia entre variables en la acústica. Obstáculo: el papel de las proporciones.
Edad Media	✓ *Nicolás de Oresme* (1323-1382): estudia los fenómenos a través de aproximaciones geométricas. Obstáculo: la falta de un correcto aparato matemático
Edad Moderna	✓ *René Descartes* (1596-1650): nace la geometría analítica. Expresa una ecuación en x e y para indicar la dependencia entre dos variables. ✓ *Isaac Newton* (1642-1727): descubre el desarrollo de las funciones en series infinitas de potencias. ✓ *Gottfried W. Leibniz* (1646-1716): es el primero en utilizar el término de función. ✓ *Jean Bernoulli* (1667-1759): da la primera definición explícita de función como una expresión analítica. ✓ *Leonhard Euler* (1707-1783): define el concepto de función y de otros relacionados con él. Idea la notación f(x) utilizada hasta nuestros días. ✓ *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813): limita el concepto de función a funciones analíticas definidas por series de potencias. ✓ *Jean-Baptiste-Joseph Fourier* (1768-1830): generaliza el tipo de funciones representadas por series de potencias, las funciones trigonométricas. ✓ *Gustav Dirichlet* (1805-1859): da una definición general, "Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x".

- Otro eje interesante es observar atentamente la evolución y desenlace de algunos "problemas matemáticos". Algunas de las cuestiones que pueden averiguarse son las siguientes: a) ¿Cuándo se esbozó el problema? b) ¿Quién o quiénes lo diseñaron? c) ¿Quiénes lo solucionaron? d) ¿Con qué dificultades se toparon en la resolución del problema? e) ¿Fueron publicadas las soluciones?
- Podríamos profundizar en ciertas ramas de las Matemáticas:
  - Aritmética.
  - Álgebra.
  - Análisis.
  - Geometría.
  - Estadística.
  - Probabilidad.
- Finalmente, nuestro interés se puede centrar en un personaje o en una determinada cultura. Así, por ejemplo, podríamos tratar: Las figuras de Euler, Kolmogorov; las culturas matemáticas griega o egipcia.

Para concluir, señalamos que cualquiera que sea la opción adoptada, dispondremos de una serie de personajes, hechos, problemas, culturas, que gradualmente nos ayudarán a comprender mejor la Historia de las Matemáticas.

3. Etapas educativas

En este apartado y en el siguiente, nos hemos inspirado fundamentalmente en J. Peralta (1995), *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática.*

Podemos asociar los contenidos matemáticos de las diferentes etapas educativas a un periodo concreto de la Historia de las Matemáticas.

Si adoptamos un enfoque muy generalista, podemos diferenciar en la Historia de las Matemáticas cuatro etapas fundamentales, cualitativamente distintas, aunque no es posible delimitar fronteras exactas entre ellas ya que sus rasgos fundamentales comparecen gradualmente.

- La primera etapa es la del *Nacimiento de la Matemática* como ciencia teórica e independiente, y abarca desde el principio de la humanidad hasta el siglo V a. C., aproximadamente. En ella afloran, íntimamente conexionadas la Aritmética y la Geometría. En esa época, las Matemáticas eran un conjunto de reglas aisladas enlazadas a la vida real y deducidas de la experiencia; no constituían todavía un sistema lógicamente unificado, ya que no se efectuaban demostraciones, aunque se fue evolucionando paulatinamente hacia ello.
- La segunda etapa puede ser considerada como la de la *Matemática Elemental*, erigida sobre un sistema lógico, ya que cada proposición tiene su demostración correspondiente. Esta época perduró unos 2000 años, y terminó hacia el siglo XVII.
- La tercera etapa, caracterizada por el origen y desarrollo del *Análisis Matemático*, se extiende, aproximadamente, a lo largo de la segunda mitad del siglo XVII y todo el siglo XVIII.
- La cuarta etapa es la de la *Matemática Contemporánea* (siglos XIX y XX), que surge tras el desarrollo impresionante de la Matemática en el siglo anterior, y en la que los matemáticos empiezan a encontrar defectos en los fundamentos de un edificio en constante crecimiento, y tratan de analizar con espíritu crítico conceptos que hasta entonces eran considerados como intuitivos. Esta fase podría resumirse en tres puntos: análisis profundo y crítico de todas las nociones, afán sistematizador y fecundidad.

La primera etapa la podríamos sintetizar señalando que comprende los resultados elementales de la Aritmética y de la Geometría y que, a nivel general, constituye el objeto de la Educación Primaria y parte de la Secundaria Obligatoria. Los descubrimientos más importantes del segundo período y parte del tercero: La Geometría Analítica y los inicios del Cálculo Infinitesimal y del Cálculo de Probabilidades, abarcan los contenidos de la parte final de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Los resultados básicos del tercer periodo, como el desarrollo del Análisis

Matemático, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Superior, y algunos temas del cuarto periodo, como las Estructuras algebraicas, forman parte de los conocimientos matemáticos de un ingeniero y del primer ciclo de una licenciatura en Ciencias Matemáticas o Físicas. Por último, las ideas y resultados del cuarto período corresponden, fundamentalmente, a las licenciaturas en Matemáticas y, en parte, a Físicas.

4. Principios didácticos

El análisis de la Historia de las Matemáticas puede indicarnos algunas directrices para el desempeño de nuestra labor docente. Vamos a analizarlas inmediatamente.

- Por ejemplo, si nos fijamos, el Cálculo Infinitesimal nació en el último tercio del siglo XVII de la mano de Newton y Leibniz, y durante todo el siglo XVIII evolucionó de modo espectacular. Los hermanos Bernouilli, D'Alembert y Lagrange, entre otros, fueron construyendo la teoría mediante un proceso de resolución de problemas en buena medida suministrados por la Física, para los que crearon métodos específicos.

  Asimismo, podemos hacer reflexiones análogas sobre otras partes de las Matemáticas en las cuales se ha evolucionado **de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto**. En la Enseñanza de las Matemáticas, sin embargo, no suele ocurrir así y solemos proceder al revés, como se observa en el ejemplo siguiente.

  Habitualmente, se presentan a los estudiantes las fórmulas y sus demostraciones antes que ejemplos numéricos de las mismas. Por ello, es muy frecuente que algunos soliciten explicar "con números" en vez de "con letras", o nos demanden algunos ejemplos antes de definir un concepto o formular una proposición.

  Así, en *Métricas* de Herón de Alejandría (siglo I d. C.), se actúa de la siguiente forma: "Hay un método general para encontrar, sin medir perpendiculares (esto es, alturas), el área de un triángulo cualquiera dados sus tres lados". Luego, se realiza un ejemplo numérico: el triángulo de lados 7, 8 y 9 y se prueba que el área es $\sqrt{720}$. Después, se realiza la demostración geométrica de que el área del triángulo es:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

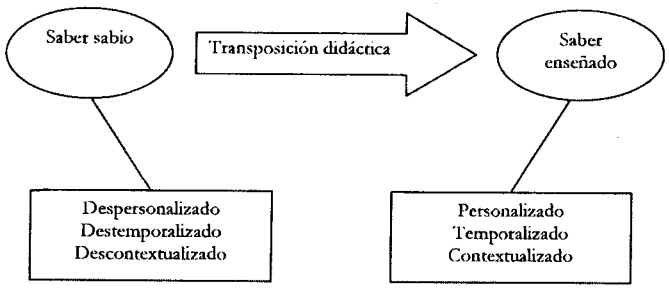
  donde *a, b, c* son las medidas de sus lados y *p* el semiperímetro. Por último, se concluye con otro ejemplo diferente: el triángulo de lados 13, 14 y 15, cuya área es 84.

  Como conclusión, después de la lectura de muchos textos históricos matemáticos, podemos decir que la racionalización en Matemáticas debe hacerse tratando de buscar, a partir de casos particulares la posterior generalización.

- **La Historia de la** Matemática nos debe ayudar para que ésta se presente de **una forma más humana**:
  - Al dejar constancia de que lo que se está aprendiendo es fruto de una actividad humana que tiene sus orígenes, bien en inquietudes relacionadas con la subsistencia o modo de organización de la sociedad, bien en el intento de responder a cuestiones surgidas en el seno de las Ciencias en general.
  - Al resaltar las dificultades, anécdotas y ciertos semblantes personales de algunos matemáticos.
  - Al comprobar la cooperación existente entre los matemáticos para llegar a buenos resultados. Observamos que los descubrimientos no han sido siempre producto de mentes deslumbrantes de personas aisladas. Por el contrario, frecuentemente han sido logrados como consecuencia de la colaboración de muchos, y como fruto de avances progresivos durante muchos siglos.
- La Historia nos suministra una perspectiva crítica, sin ella los conceptos matemáticos se alteran, se desconceptualizan y se apartan de la problemática de donde emergieron. Nos encontramos entonces en presencia del fenómeno denominado la "transposición didáctica".

  Chevallard (1982) escribe sobre este proceso de "deshistorización", de "despersonalización" del saber: "El saber toma entonces el aspecto de una realidad antihistórica, intemporal, que se impone por sí misma; que no teniendo creador, aparece libre con relación a todo el proceso de génesis, no pudiéndose hacer constar el origen, la utilidad, la pertinencia".

  El esquema siguiente, reproducido de M. C. Chamorro (2003, p. 85), muestra el Conjunto de transformaciones que sufre un saber para ser enseñado (Ives Chevallard).



El saber que forma parte del sistema didáctico no es idéntico al saber científico, y su legitimidad depende de la relación que éste establezca desde el punto intermedio en el que se encuentra respecto de los académicos y del saber común de los padres.

Esta distancia, entre el saber que se debe enseñar y el saber científico, es negada porque de dicha negación depende, en parte, la legitimación. La transformación

de los conocimientos en su proceso de adaptación supone la delimitación de conocimientos parciales, la descontextualización y finalmente una despersonalización.

A propósito de la despersonalización del saber, señala Chevallard que todo saber, está conectado originalmente con su productor puesto que se encarna en él. Compartir ese saber, aún en el interior de la comunidad académica, supone cierto grado de despersonalización, que constituye un requisito para la publicidad del saber. Por ejemplo, menciona que lo que hoy conocemos como "Mecánica clásica", fue en principio un saber personal (casi esotérico, agrega) de Isaac Newton. Fueron las presiones de su entorno las que produjeron el nacimiento de los "Principia". Pero sin duda, este proceso que se inicia dentro de la misma comunidad académica, completa su ciclo en el momento de la enseñanza.

La Historia de las Matemáticas debe recordarnos el **papel práctico** de las mismas. La mayoría de los conceptos matemáticos fueron creados para **resolver problemas de la vida cotidiana**. Gran parte de estos problemas han caído en el olvido, enseñándose frecuentemente unas Matemáticas carentes de sentido.

- El conocimiento de cómo se fueron forjando paulatinamente los conceptos y las notaciones matemáticas nos ayuda muchas veces a **comprender mejor ciertos errores** de nuestros alumnos, así como a diseñar situaciones didácticas más apropiadas para un aprendizaje progresivo y fructífero de determinados conceptos matemáticos.

  Asimismo, la Historia de las Matemáticas puede suministrarnos algunos recursos para que los alumnos no cometan errores. Así, en los *Elementos* de Euclides aparecen muchas igualdades algebraicas a partir de construcciones geométricas, que nos pueden ayudar a comprender mejor los problemas planteados.

  La tabla 1, reproducida de Wussing H. (1998): *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, nos muestra un esquema de la obra.

  En la tabla 2 se muestran los cinco poliedros regulares (los lados, ángulos y polígonos que conforman cada una de sus caras son idénticos). Interpretados por Platón como forma fundamental de los elementos del mundo. Al final del libro XII de los *Elementos*, Euclides incluyó la prueba de que son los únicos posibles.

- Arquímedes de Siracusa (285-212 a. C.), matemático, físico e inventor griego, empleaba un nuevo método, **el método heurístico**, que también fue utilizado a lo largo de la historia por otros matemáticos famosos, como Descartes, Leibniz y Bolzano. La Historia de las Matemáticas nos muestra cómo algunos matemáticos importantes aplicaron este método para realizar sus descubrimientos. Sería conveniente que también se empleara para el aprendizaje de los alumnos. En Geometría los escritos más importantes de Arquímedes fueron:

- *De la Esfera y el Cilindro.* Introduce el concepto de concavidad, que Euclides no había utilizado, así como ciertos postulados relativos a la línea recta.
- *De los Conoides y Esferoides.* Define las figuras engendradas por la rotación de distintas secciones planas de un cono.
- *De las Espirales.* Analiza estas curvas importantes y estudia sus elementos más representativos.

En Aritmética son, fundamentalmente, dos las obras más interesantes:

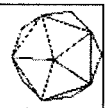
- *El Arenario.* Expone un método para escribir números muy largos dando a cada cifra un orden diferente según su posición.
- *De la medida del Círculo.* Es una de sus obras fundamentales. Demuestra que la razón entre la circunferencia y el diámetro está comprendida entre 3 + 10/71

Tabla 1

Libro		Contenido	Procedencia
I	Libros de planimetría	Del punto hasta el teorema de Pitágoras	Periodo jónico, principalmente pitagórica
II		Álgebra geométrica	
III		Teoría del Círculo	
IV		Polígonos regulares inscritos y circunscritos	
V		Extensión de la teoría de las magnitudes a los irracionales	Eudoxo de Cnido
VI		Proporciones aplicadas a la planimetría	
VII	Libros de teoría de números	Teoría de la divisibilidad, números primos	Pitagóricos
VIII		Números cuadrados y cúbicos, series geométricas	
IX		Teoría de lo par y lo impar	
X	Irracionales	Clases de irracionales cuadráticos Anexión de áreas	Teeteto
XI	Libros estereométricos	Estereometría elemental	Periodo Jónico
XII		Método de exhaución: pirámide, cono, esfera	Eudoxo de Cnido
XIII		Poliedros regulares	Teeteto

y 3 + 1/7; dicha relación es conocida en la actualidad por π. Asimismo, muestra la equivalencia entre el área del círculo y un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y el perímetro de la circunferencia.

Tabla 2

Los 5 Sólidos Platónicos					
Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Vértices	4	8	6	20	12
Aristas	6	12	12	30	30
Caras	4	6	8	12	20
Aristas por Cara	3	4	3	5	3
Interpretación	Fuego	Tierra	Aire	El Mundo	Agua

Sin embargo, sería prácticamente imposible, recorrer con exactitud la evolución histórica de los conceptos. La ayuda que puede encontrar el profesor en la Historia de la Matemática, no debe convertirse en la realización de un planteamiento historicista gobernado por razones de fidelidad histórica. Lo que debemos hacer es extraer de la Historia la problemática que permita redescubrir a los estudiantes, por medio de su actividad investigadora, los conocimientos que suelen darse con frecuencia totalmente elaborados. La tarea del profesor debe consistir en una reelaboración del material histórico para preparar guías de trabajo asequibles al nivel del grupo, lo que conllevará a simplificaciones y alteraciones del proceso histórico.

- Las Matemáticas deben enseñarse relacionándolas con la evolución cultural general y con las demás ciencias, haciendo ver que **forman parte de la cultura.** El conocimiento de la Historia de las Matemáticas, puede contribuir a proporcionar al alumno la conciencia de que la Matemática es uno de los factores relevantes de la evolución cultural, y a impulsar el desarrollo de su cultura general.

  Esa cultura general, enciclopédica, a la que debe de tender la Enseñanza Secundaria, fue incluida en la Edad Media dentro de las denominadas "Artes Liberales". Éstas eran siete y se caracterizaban por demandar principalmente el ejercicio del entendimiento.

  En esa época se hablaba de las "Artes Liberales", conocimientos a los que debía acceder de manera gradual todo ser humano básicamente instruido. Éstas se dividían en dos grupos: el *Trivium* (la triple vía) y el *Cuadrivium* (la cuádruple vía).

Al *Trivium* correspondían: La Gramática, la Dialéctica y la Retórica, y al *Cuadrivium*: La Aritmética (estudio de los "números en reposo"), la Geometría, la Música y la Astronomía ("magnitudes en movimiento").

Con las tres primeras se aprendía a pensar y razonar debidamente por medio del conocimiento y significado de la lengua (Gramática), la coherencia lógica de la misma (Dialéctica), y finalmente, por su aplicación al discurso y la palabra (Retórica), verdaderos soportes y vehículos todos ellos del pensamiento. Sólo a través del *Trivium*, de las palabras, voces y nombres de las cosas, podía accederse a las Ciencias del *Cuadrivium*, que eran superiores a aquéllas por cuanto que expresaban, y expresan, un conocimiento más esencial y profundo.

Las cuatro Ciencias del *Cuadrivium* se referían directamente al estudio de los ritmos y de los ciclos, de la proporción y la medida, que, como sabemos, conforman la estructura prototípica de todas las cosas.

Se trataba entonces de impartir una formación integral y generalista, algo cada vez más en desuso. La Historia de la Matemática debe ser uno de los elementos que contribuyan al resurgimiento de ese ideal.

Las dos ramas iniciales de la Matemática: Aritmética y Geometría, brotaron para solucionar problemas de la vida cotidiana. La primera por la necesidad del empleo de los números para contar y formalizar actividades comerciales, y la segunda para realizar toda clase de mediciones. A lo largo de los siglos, las Matemáticas se fueron desarrollando por dos razones fundamentales: Para resolver necesidades sociales o de la vida diaria y como ayuda en otras ciencias.

El cuadro 2, reproducido de J. Peralta (1995), pp. 106-107, muestra cómo ciertas necesidades sociales, originaron el desarrollo de herramientas matemáticas adecuadas.

Insertamos aquí un poema escrito por Rafael Alberti en 1946, dedicado a la razón áurea, que enlaza Poesía y Matemáticas.

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente
Tu canto es una esfera transparente.

A ti, divina proporción de oro.

Alberto Durero, gran pintor alemán nacido en Nuremberg, realizó en 1514 el grabado *La Melancolía*, que se puede ver en el *Germanisches National Museum* de Nuremberg. Esta obra relaciona el Arte con las Matemáticas.

Cuadro 2

Necesidades sociales	Desarrollo matemático
Cambio de bienes en las sociedades primitivas	Primeros sistemas de numeración
Intercambios en sociedades mercantiles	Operaciones aritméticas
Recuperación por sus dueños de las tierras ribereñas tras las inundaciones (Egipto)	Cartografía Geometría del plano
Necesidad de un calendario en las sociedades	Astronomía
Arquitectura	Geometría del espacio
Comercio	Aritmética mercantil
Entretenimiento de los nobles	Combinatoria y Cálculo de Probabilidades
Administración del Estado y necesidades de las compañías de seguros	Estadística
Óptimo aprovechamiento de los recursos bélicos (2ª Guerra Mundial)	Programación lineal
Capacidad de toneles de vino (Kepler) y otros asuntos	Cálculo Integral
Tratamiento masivo de datos en la sociedad industrial	Calculadoras y Ordenadores

De todo lo expuesto anteriormente, podemos resaltar los seis Principios Didácticos que se infieren del estudio de la Historia de la Matemática:

- Enseñanza-Aprendizaje de lo particular a lo general.
- Actividad humana.
- Papel práctico de las Matemáticas.
- Recursos para evitar errores.
- Aplicación del Método heurístico.
- Finalidad cultural.

En este grabado, Durero pintó, en lugar destacado, el siguiente cuadrado mágico de orden 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Si analizamos el artículo "Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias", de Miguel de Guzmán Ozámiz, extraemos las siguientes reflexiones sobre la Matemática:

- Es una actividad creadora de belleza, en la que se busca una cierta clase de belleza intelectual, solamente accesible, como Platón afirmaba, a los ojos del alma, y en esto consiste en el fondo la fuerza motivadora y conductora siempre presente en los esfuerzos de los grandes creadores de la Matemática.
- Es un potente instrumento de intervención en las estructuras de la realidad a nuestro alrededor, ayudando en la aplicación de modelos fidedignos al mundo tanto físico como mental. En realidad, bien se puede afirmar que la mayor parte de los logros de nuestra tecnología no son sino Matemática encarnada con la mediación de otras ciencias.
- Es una actividad profundamente lúdica, tanto que en los orígenes de muchas de las partes más interesantes de la Matemática el juego ha estado presente de forma muy activa, como en la teoría de números, combinatoria, y probabilidad, entre otras.
- Esta presencia viva de la Matemática en nuestra cultura no es algo que vaya disminuyendo. Si observamos las tendencias que se manifiestan cada vez con más fuerza, parece claro que el predominio de la intuición matemática va a ser un distintivo bien patente de las civilizaciones futuras.

Incluimos, por último, las conclusiones de Isabel Ortega en su artículo "la Historia que vivieron los matemáticos", recuperable en Internet:

> Las cuestiones prácticas de la humanidad movieron a los matemáticos a resolver problemas a lo largo de toda la historia. Tanto los árabes se preocuparon por calcular las particiones de las complicadas herencias familiares, como los primeros matemáticos de la remota antigüedad concibieron el número cardinal para proteger sus rebaños de posibles pérdidas, los calculistas orientales desarrollaron métodos que necesitaban para el comercio, los egipcios hicieron geometría para determinar sus propiedades territoriales cuando las crecidas del Nilo borraban las marcas y la trigonometría se desarrolló a expensas de las necesidades de la navegación.
>
> Pero además de estas motivaciones y muchas otras por el estilo asociadas al cálculo y a los intereses económicos que a priori se conceden a la tarea del matemático, es interesante observar la variada gama de intereses que han movido a los creadores de la matemática a desarrollar sus teorías. A Monge, involucrado con la Revolución Francesa, su dedicación a la consolidación de los ideales de libertad lo llevó a la creación de la Geometría Descriptiva; a los pitagóricos, su intento de plasmar una filosofía en base a sus creencias místicas, les hizo desarrollar la aritmética; Hipatya hizo matemática teórica a fin de proporcionar a sus contemporáneos unas herramientas racionales que contrarrestaran el dogmatismo de su época; Russell, admirado de la precisión del método matemático, y con el fin de aplicarlo a la filosofía, terminó haciendo filosofía de la matemática; los italianos renacentistas como Tartaglia, entusiasmados por el verdadero festín que les proporcionaba Gutemberg y mostrando un verdadero gusto por el desafío que entraña la resolución de problemas, arribaron a la fórmula de la resolución de la ecuación de tercer grado; Arquímedes dio pasos fundamentales en el cálculo fabricando máquinas a pedido del rey; todo esto sin olvidar a Platón que vio en la matemática una parte fundamental de la formación de los ciudadanos de su república ideal. Las pasiones más diversas han movido a la creación matemática y las producciones muestran a su vez los coloridos matices de las civilizaciones asignándoles a los matemáticos un lugar en la historia similar a la de los artistas que interpretan el momento que les toca vivir, dejan un testimonio de esa interpretación e influyen en las épocas posteriores.
>
> Tal es la historia que vivieron los matemáticos.

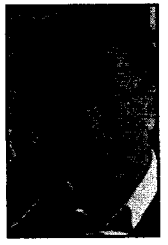
5. La historia en la formación del docente

En este apartado seguimos las directrices de Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004), matemático universal, el último de los pitagóricos. Es célebre su frase: *El juego*

y la belleza están en el origen de una gran parte de las Matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?

Un cierto conocimiento de la Historia de la Matemática, debería formar parte imprescindible del bagaje de conocimientos del docente de cualquier nivel, primario, secundario o universitario. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como herramienta en su propia enseñanza, sino inicialmente porque la historia le puede proporcionar una visión realmente humana de la ciencia y de la Matemática.

La perspectiva histórica nos aproxima a la Matemática como ciencia humana, no endiosada, y capaz también de corregir sus errores. Nos acerca a las encantadoras idiosincrasias de las personas que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy diferentes.



Miguel de Guzmán

Desde el enfoque del conocimiento más profundo de la propia Matemática, la Historia nos proporciona un marco en el que los elementos comparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en una gran riqueza intelectual para el que enseña. El orden lógico no es obligatoriamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el docente debería saber cómo han sucedido las cosas, para:

- Vislumbrar mejor los problemas de la humanidad, en la elaboración de las ideas Matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos.
- Comprender mejor la conexión de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática.
- Utilizar este conocimiento como guía saludable para su propia formación.

El conocimiento de la Historia de la Matemática suministra una visión dinámica de la evolución de la misma. Tal visión dinámica nos facultaría para muchas tareas interesantes en nuestra labor educativa:

- Posibilidad de extrapolación hacia el futuro.
- Inmersión creativa en los problemas del pasado.

- Comprobación de lo sinuoso de los caminos del descubrimiento, con la percepción de las imprecisiones y confusiones iniciales.

Además, el conocimiento de la Historia de la Matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter intensamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales del período, así como de las mutuas y profundas influencias que la cultura en general, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras.

Sería muy útil que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara, al menos, un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida.

Así, podríamos aconsejar:

- La lectura comprensiva de algunos excelentes tratados de historia.
- Acudir, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos.
- Analizar biografías de ilustres matemáticos.

El MEC (1992) nos indica que:

> La Historia de las Matemáticas informa sobre cuáles han sido los modos del razonar matemático en el transcurso del tiempo, qué conceptos son difíciles o han supuesto una auténtica ruptura con épocas anteriores y cuáles otros han servido para desarrollar o afianzar teorías ya establecidas. Esta información es útil para la práctica docente en cuanto que puede decirse que en los alumnos el aprendizaje reproduce en parte las crisis históricas de ruptura y reorganización de conceptos propios del avance científico. Por ejemplo, la tardía aparición del cero como número se compagina bien con las dificultades que tienen los alumnos al respecto: escriben mal los números con ceros intermedios o con ceros en la parte decimal, interpretan que una ecuación cuya raíz es cero no tiene solución, etc.
>
> Sería ingenuo, sin embargo, establecer un paralelismo estricto entre el desarrollo de la Historia de las Matemáticas y el de los conceptos matemáticos en los alumnos. Por ejemplo, en la actualidad los alumnos interpretan gráficas funcionales sencillas desde edades muy tempranas, mientras que históricamente el concepto de función y su visualización mediante una curva pertenecen a una época tardía. Esta disconformidad puede explicarse quizás por la utilización masiva del lenguaje gráfico en nuestra cultura.

6. Historia de la Educación Matemática

En este apartado nos hemos inspirado fundamentalmente en el trabajo de investigación de Germán Delgado Rodríguez (1998), *Evolución de la Educación Matemática en España*, dentro del programa de doctorado *Formación del Profesorado* de la ULPGC.

En este epígrafe se hace un análisis de la manera en que se ha ido avanzando en el mundo de la investigación y la educación en el área de las Matemáticas.

Comenzamos describiendo la evolución de la formación del profesorado de Educación Primaria y Secundaria. Con los títulos "La Educación Matemática en España" y " La Educación Matemática en el Contexto Internacional" se hace un análisis tanto del papel que ha representado la Didáctica de las Matemáticas hasta convertirse en un Área de Conocimiento con reconocimiento universitario, como de la creación de Sociedades de Profesores, dentro y fuera de nuestro país.

6.1. Evolución en la formación de los docentes

Formación del Profesorado de la Educación Primaria	
S.XIX	La formación de los Maestros se lleva a cabo en las Escuelas Normales.
1909	Se funda la Escuela Superior del Magisterio, en la que se forman Maestros e Inspectores.
1914	Se reforma el Plan de Estudios de Magisterio, que se denomina Escuela de Estudios Superiores del Magisterio (EESM), con tres años de duración y secciones como Letras, Ciencias y Labores. Existe una formación en materias comunes, pedagógicas y específicas.
1931	Con el nuevo Plan de Estudios de Formación de Maestros se alcanza un nivel universitario para estos estudios. Aparecen asignaturas como Metodología de las Matemáticas, se analiza la psicología del niño en el aprendizaje de esta materia, y se hace referencia a la Historia de las Matemáticas. También se establece un período de prácticas docentes.
1932	La Escuela Superior de Magisterio se sustituye por la Sección de Pedagogía de las facultades de Filosofía y Letras.
1940	El Plan Bachiller acaba con los valores de libertad científica y pedagógica, implantándose una ideología nacional-católica. El título de Maestro se obtiene tras cursar doce asignaturas, de forma oficial o libre.
1942	Se establece el Plan Provisional; en él, los estudios de Magisterio se realizan en tres cursos de tipo científico-cultural, pedagógico y práctico.
1967	Se implanta el Plan de Estudios de Magisterio. Consta de tres cursos: dos años teóricos, con una asignatura de Didáctica de la Matemáticas, y un año de prácticas en un centro escolar. Para poder acceder a estos estudios es necesario poseer el título de Bachiller.

Formación del Profesorado de la Educación Primaria (continuación)	
1971	Se establece un Plan experimental y las escuelas de Magisterio se incorporan a la Universidad como Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB. Para ingresar, es necesario haber realizado el COU; tendrá tres años de duración, y las disciplinas se organizan en Comunes, de Especialización y Optativas. Al final se obtiene la titulación de Diplomado Universitario especialista en Filología, Ciencias Humanas o Ciencias, que capacita para impartir en la primera etapa de EGB. En 1977 se crea la nueva especialidad de Educación Preescolar.
1991	A partir del curso 1991-1992 se crean las nuevas especialidades de Educación Física, Educación Especial, Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Musical, Lengua Extranjera y Audición y Lenguaje.

Formación del Profesorado de la Educación Secundaria	
1857	Se crean las Facultades de Ciencias con tres cursos comunes y tres secciones: Físico-Matemáticas, Químicas y Naturales. Tres van a ser sus funciones principales: la investigación, el dominio teórico de las Matemáticas y la formación de profesores de Bachillerato y Universidad. Sin embargo, hay poca consideración hacia los matemáticos frente a los ingenieros, de modo que éstos últimos ocupan los cargos docentes.
Finales del XIX	Hay tres Facultades de Ciencias: Barcelona, Madrid y Zaragoza. Existe una carencia de cuestiones pedagógicas y didácticas mientras que aumentan las de carácter científico.
Años 60	Aparecen nuevas facultades para cursar la licenciatura de Matemáticas: Santiago de Compostela, Granada, Sevilla, Valencia, Valladolid, Salamanca y La Laguna.
1963	Se establece el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) en las Escuelas de Formación del Profesorado de Enseñanzas Medias, con una parte teórica de Psicología y Didáctica de alguna materia específica, como Matemáticas, y otra parte práctica.
Años 70	Se crean los Institutos de Ciencias de la Educación (ICE) cuyas funciones más importantes son las de formar a los docentes en todos los niveles, el perfeccionamiento del profesorado en ejercicio, proponer investigaciones educativas y encargarse de los cursos del CAP.

Formación del Profesorado de la Educación Secundaria (continuación)	
Años 80	Con la llegada de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) se crean nuevos planes de estudios en las Facultades de Matemáticas que tendrán unas materias obligatorias y otras que proponen cada Universidad. Además, se mantiene la licenciatura de 4 o 5 años y la formación didáctica no tiene cabida salvo en algunas asignaturas optativas como Didáctica de la Matemática, pero la formación didáctica de los profesores de Secundaria debe realizarse fuera de las facultades.

6.2. La Educación Matemática en España

En 1876 se funda la Institución Libre de Enseñanza (ILE) que tuvo una gran influencia en la educación hasta la Guerra Civil. Esta influencia queda plasmada en el interés por realizar una renovación pedagógica y por implantar en el país las corrientes que en educación, y en particular de las Matemáticas, se producían fuera de nuestras fronteras. Muchos autores expresan su preocupación por las Matemáticas y esto queda recogido en los numerosos trabajos de la enseñanza de la Aritmética y de la Geometría que se publican en este período. En lo referente a la metodología, se insiste en que es necesario enseñar jugando e instruir deleitando.

En 1911 se crea la Sociedad Matemática Española (SME) y su revista. Uno de sus objetivos más inmediatos es el de trabajar en Pedagogía Matemática; a pesar de esto, no existe un gran interés sobre temas didácticos. La revista de la SME comienza haciendo público lo que va ocurriendo en los congresos internacionales, pero por falta de presupuesto y de originalidad desaparece en 1917.

Durante este período destaca por su labor en la Didáctica de las Matemáticas la figura de D. Julio Rey Pastor (1888-1962), quien funda la *Revista Matemática Hispano-Americana* en 1919, y escribe muchos textos para la Enseñanza Secundaria, contribuyendo a la renovación de la enseñanza.

Con la Guerra Civil se produce un paréntesis en la educación que no se restablece hasta finales de los años cuarenta. En 1949 aparece la revista de investigación educativa *Bordón,* con estudios de Aritmética y Geometría en la Escuela Elemental y con algunas indicaciones metodológicas para los Maestros; de esta manera van surgiendo numerosos trabajos sobre la Educación Matemática que se extienden hasta los años sesenta junto con otras publicaciones como la *Revista de Enseñanza Media* (REM), en 1956, publicada por el Ministerio de Educación, y la *Revista Vida Escolar* (RVE), en 1958.

Durante esta época, destaca en el panorama didáctico de las Matemáticas la obra de D. Pedro Puig Adam (1900-1960), preocupado por la enseñanza de esta materia en la educación elemental y superior; además fue autor de numerosos trabajos de investigación y enseñanza de las Matemáticas, como es "La Matemática y su enseñanza actual" de (1955), donde establece su "Decálogo de la Didáctica Matemática

Media", en la que expresa su pensamiento sobre la metodología de la enseñanza de las Matemáticas.

Ya en los setenta, con la Ley General de Educación en marcha, se ve la necesidad de crear algún organismo que llevara a cabo el desarrollo de la investigación educativa y la formación del profesorado; así surge el Centro Nacional de Investigaciones para el Desarrollo de la Educación (CENIDE) y los Institutos de Ciencias de la Educación (ICE), que estaban estrechamente relacionados pues, por un lado, el CENIDE proporcionaba a los ICE las pautas de la reforma educativa y las líneas de investigación y, por otro, los Centros educativos, a través de los ICE, hacen llegar al CENIDE las necesidades del profesorado. El CENIDE sufre en los siguientes años varios cambios de nombre; así, en 1974 se convierte en Instituto Nacional de Ciencias de la Educación (INCIE); en 1981 pasa a denominarse Subdirección General de Investigación Educativa y, finalmente, en 1983, se crea el Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE).

En 1976, la Universidad de Granada celebra la Primera Reunión Coloquio de Didáctica de la Matemática, en la que se manifiesta la intención de dar estructura universitaria a los estudios de Didáctica de la Matemática.

Uno de los objetivos básicos de la Ley de Reforma Universitaria de 1983 es el de convertir los Departamentos en los bloques organizativos básicos de las Universidades, cada uno de ellos especializado en un área de conocimiento determinada, o varias, y capaces de satisfacer de modo eficaz y competente las necesidades de todas las Facultades y Escuelas afectadas por esa área. El Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática, con reconocimiento universitario, fue establecida en 1984. Se han producido, en términos generales, dos modelos diferentes en la adscripción del Área de Didáctica de la Matemática en los Departamentos Universitarios: adscrita a otros Departamentos de Matemáticas, o junto a otras áreas de Didácticas Especiales, como se indica en los cuadros 3 y 4.

Cuadro 3. Agrupamiento con Áreas de Matemáticas

Agrupamiento con Áreas de Matemáticas
Departamentos de Matemáticas formado por todas las áreas: Universidades de Alcalá de Henares, Autónoma de Madrid, Cantabria, Islas Baleares, León, Oviedo, Navarra y Zaragoza.
Departamentos de Matemáticas junto con Matemática Aplicada: Castilla-La Mancha, Córdoba, Las Palmas de Gran Canaria.
Departamento de Análisis Matemático: La Laguna, Valladolid.
Departamento de Economía Aplicada: Alicante.

Cuadro 4. Agrupamiento con otras Áreas de Didáctica

Agrupamiento con otras Áreas de Didáctica
Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales: Autónoma de Barcelona, Barcelona, Extremadura, País Vasco, Salamanca, Santiago y Sevilla.
Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Sociales: Murcia.
Departamento de Didáctica de la Matemática, Ciencias Sociales y Experimentales: Málaga.
Departamento de Formación del Profesorado (Junto con el resto de las áreas educativas): Cádiz.
Departamento de Didáctica de la Matemática: Complutense, Granada y Valencia.

En estos años se constituyen muchas Sociedades de Profesores de Matemáticas, que promueven la reforma del sistema educativo, toman iniciativas sobre su propia formación y promoción profesional e intentan dar solución a los problemas de la educación matemática, investigación incluida. De esta manera nacen la Sociedad Canaria "Isaac Newton" (1978), la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales" (1980), y la Sociedad Aragonesa "Pedro Ciruelo" (1981). Ya en 1989 se constituye la "Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas" con el fin de desarrollar un Servicio de Publicaciones, un Centro Bibliográfico y de Documentación, coordinar la celebración de Congresos, fomentar las relaciones con otros países, etc. A partir de aquí se crean multitud de Sociedades y se constituyen grupos de trabajo destinados a la docencia, investigación y difusión de las Matemáticas y al perfeccionamiento del profesorado. En cuanto a las publicaciones, cabe destacar las revistas: *Enseñanza de las Ciencias*, *Thales*, *Epsilon*, *Números*, *Sigma*, *UNO*, *Suma*, y *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, entre otras.

6.3. Educación Matemática en el Contexto Internacional

La investigación en Educación Matemática comienza en las universidades, y es a comienzo del siglo XIX en Prusia cuando las universidades se convierten no sólo en

centros para enseñar, sino también en lugares donde realizar investigaciones y, a finales de este siglo comienzan a preparar a los estudiantes alemanes en la enseñanza de las Matemáticas desde una visión pedagógica. En la actualidad, las Matemáticas están situadas entre la educación humanística y la científica.

En 1908 se constituye en Roma la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas, que comenzó su labor informando sobre el estado de la enseñanza matemática en los diferentes países.

Félix Klein fue nombrado presidente de la Comisión (en cuyo puesto se mantuvo hasta su muerte en 1925). Es el primero en impartir cursos de metodología en la educación universitaria y dirige el primer Doctorado en Educación Matemática en 1911.

Ante la necesidad de aumentar el número de profesores cualificados, se comienza por elaborar programas de formación del profesorado; para tal fin, en la Alemania de los años veinte, se crearon centros de enseñanza superior. Poco a poco, la Educación Matemática fue reconocida como materia universitaria con lo que se fomentó la investigación en dicho campo.

Por otro lado, la Psicología comienza a influir en la investigación matemática; destacan las formas de pensamiento de Piaget y Vygostsky sobre los efectos de la instrucción, de modo que "la enseñanza se considera un tratamiento y el aprendizaje un efecto".

Ya en los años treinta, se puede decir que los educadores matemáticos se dividían en dos bandos: los reduccionistas, que estaban a favor de eliminar del currículo todo aquello que no tenía sentido dentro de la sociedad, y los que apostaban por una enseñanza basada en potenciar la Aritmética como materia escolar, sobre todo en aspectos como el cálculo, en vez de los aspectos formativos, sociológicos y psicológicos. En esta década se plantea la necesidad de posponer la Aritmética para cursos superiores, pero no se consigue suprimirla de la enseñanza elemental en la que se imparte de manera informal, al igual que ocurre con la Geometría Euclídea que también se mantiene. Por otro lado, el aprendizaje memorístico, al igual que el aprendizaje incidental (los niños aprenden mejor si no se les enseña sistemáticamente) y la teoría de capacitación (la enseñanza de conceptos debe realizarse cuando se alcanza una determinada madurez como para aprenderla) son fuertemente criticados.

Con la llegada de la Segunda Guerra Mundial queda paralizada la investigación, pero una vez acabada, sobre todo en los años cincuenta, reaparecen las cuestiones sobre Educación Matemática con nuevas publicaciones y la necesidad de conocer el funcionamiento mental de los niños. En 1959 tiene lugar el Coloquio de Royaumont, en el que se pretende reformar los contenidos y métodos de enseñanza de las Matemáticas, obteniéndose como resultado la base de la Matemática Moderna que incluye la incorporación de la Teoría de Conjuntos y el Álgebra Lineal en la enseñanza elemental en detrimento de la Geometría Euclidiana. También se ve la importancia de incorporar la Psicología a la Educación Matemática, aunque no se produce un consenso entre psicólogos y matemáticos.

En los sesenta y setenta, se crean numerosas revistas, centros e institutos de investigación como las que se citan a continuación:

REVISTAS	Educational Studies in Mathematics (1968) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (1969) Investigations in Mathematics Education (1969) Journal for Research in Mathematics Education (1970)

INSTITUTOS	Shell Center for Mathematical Education de la Universidad de Nottingham, Inglaterra (1968) Instituts de Recherche por l'Enseignement de Mathématiques, Francia (1969) Institut für Didaktik der Mathematik de Bielefeld, Alemania (1973)

Es en este período cuando los investigadores en Educación Matemática entran en contacto con psicólogos evolutivos para desarrollar conjuntamente trabajos sobre la elaboración y el desarrollo de instrumentos que fomenten la habilidad de razonamiento, la habilidad de aplicar Matemáticas en contextos no rutinarios y las actitudes hacia varias facetas de esta materia.

Actualmente, los investigadores están considerando más seriamente las dimensiones sociales y culturales de la Educación Matemática que está comenzando a ser una disciplina universitaria en muchos países. A medida que va aumentando la profesionalización del docente, comienzan a surgir estudios institucionalizados como en las disciplinas tradicionales.

Actividades

1. Las cifras. *Historia de una gran invención.* Sintetiza este libro de Ifrah, G. (1987).

2. *Los Elementos* de Euclídes. Realiza un resumen de la obra. Explora en la página web http://www.xtec.es/~jdomen28/indiceeuclides.htm.

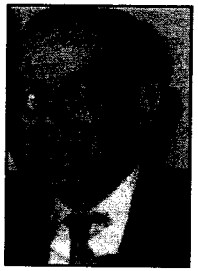
3. Efectúa un trabajo sobre el: "Marco Histórico del Álgebra". Consulta: Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J. (1996); pp. 37-72. Resuelve algunos de los 13 ejercicios propuestos por los autores.

4. Analiza los problemas de interés histórico o didáctico, que exponemos a continuación, relacionados con las siguientes ramas de las Matemáticas:
   - Aritmética: Números poligonales. Cuadrados mágicos.
   - Geometría: El Número de oro. Los Sólidos Platónicos.
   - Cálculo de Probabilidades: Los problemas del Caballero de Meré.

5. La *Aritmética* de Diofanto. Realiza una sinopsis de la obra y resuelve algunos de los problemas propuestos. Investiga en la página web http://www.arrakis.es/~mcj/diofanto.htm.

6. Examina la biografía de dos matemáticos ilustres. Averigua en las páginas web http://www.divulgamat.net y http://www.geocities.com/grandesmatematicos.

7. Nácere Hayek Calil, prestigioso Catedrático de Análisis Matemático y Profesor Emérito de la Universidad de La Laguna, publicó en el año 2002, en la revista *Números*, Volumen 52, 3-26, una magnífica biografía sobre el gran matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). Efectúa una sinopsis.



Nácere Hayek Calil

El Gobierno de Noruega, coincidiendo con el bicentenario del nacimiento de Abel, creó el "Premio Abel", considerado como "el Nobel de las Matemáticas". El premio se denomina así en memoria del célebre matemático noruego. Se entregó por primera vez en 2003, y tiene una dotación de unos 750.000 euros, aproximadamente. El Premio Abel es otorgado por la Academia Noruega de Ciencias y Letras.

Niels Henrik Abel

8. Obtén una biografía de la gran matemática y didacta italiana Emma Castelnuovo (Roma, 1913), en la dirección http://www.smpm.es.

Emma Castelnuovo

9. EL PAPIRO DE RHIND

Contenido matemático y principales características.

10. LA TABLILLA BABILÓNICA PLIMPTON 322

Su origen, contenido matemático y las diversas interpretaciones sobre su importancia en las matemáticas babilónicas.

11. EL MÉTODO BABILÓNICO PARA OBTENER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO

Procedimiento de aproximación.

12. LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

Origen y análisis de las diferentes lúnulas estudiadas por Hipócrates.

13. EL MÉTODO DE EXHAUSCIÓN

Su origen histórico, en qué se basa y distintas aplicaciones posibles al campo de la geometría de las áreas.

14. EL *ARENARIO* DE ARQUÍMEDES

Objetivo, contenido matemático y principales características de la obra.

15. LOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT

Realiza un resumen de la conferencia de David Hilbert:

Los Problemas Futuros de la Matemática

Versión y Traducción: José Ramón Ortiz, recuperable en:

http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm

En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París del 6 al 12 de agosto de 1900, David Hilbert planteó 23 famosos problemas matemáticos que entonces estaban sin resolver, y que son conocidos como "los problemas del Congreso de París". Su influencia fue tan notable, que bien podría afirmarse que las Matemáticas del siglo XX han florecido, en buena parte, del intento por resolver dichos problemas, y no sólo por el esfuerzo empleado con ese objetivo, sino porque en el proceso de resolución han aparecido a su vez nuevos problemas que han motivado el desarrollo de esta ciencia.

"¿Quién de nosotros no quisiera levantar el velo tras el cual yace escondido el futuro, y asomarse, aunque fuera por un instante, a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo ulterior en los siglos futuros? ¿Cuáles serán las metas particulares que tratarán de alcanzar los líderes del pensamiento matemático de las generaciones futuras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán los siglos por venir en el ancho y rico campo del pensamiento matemático?

La historia nos enseña la continuidad del desarrollo de la ciencia. Sabemos que cada época tiene sus propios problemas, y dependerá de la próxima generación, ya sea, resolverlos o bien, desecharlos por considerarlos improductivos y remplazarlos por nuevos problemas. Si queremos hacernos una idea del desarrollo probable del conocimiento matemático en el futuro inmediato, debemos plantear a nuestras mentes aquellas cuestiones dudosas al observar los problemas que la ciencia de hoy nos propone y cuya solución la esperamos del futuro. El momento presente, marcado por el encuentro de dos siglos, me parece una buena ocasión para presentar una revisión de estos problemas. Porque el cierre de una gran época no sólo nos invita a mirar al pasado, sino que también dirige nuestros pensamientos hacia el futuro.

No podemos negar el profundo significado que representan ciertos problemas tanto para el avance de la ciencia matemática en general, como por el importante

papel que representan estos problemas en el trabajo del investigador particular. Siempre que una rama de la ciencia nos ofrezca una abundancia de problemas, permanecerá siempre viva: una carencia de problemas pronosticaría una extinción o cesantía en su desarrollo independiente. Así como cada empresa humana persigue ciertos objetivos, también la investigación matemática requiere sus problemas. Es por medio de la solución de problemas que se templa la fuerza del investigador, al descubrir nuevos métodos y nuevos enfoques, y ganando un horizonte más vasto y más libre.

Es muy difícil y casi imposible juzgar correctamente, de antemano, el valor de un problema, porque la recompensa final depende de la ganancia que obtenga la ciencia de dicho problema. Sin embargo, podemos preguntar si existen criterios generales que puedan caracterizar lo que es un buen problema matemático.

Un matemático francés de tiempos pasados dijo: "Una teoría matemática no debe ser considerada completa hasta que sea tan clara de entender que pueda ser explicada al primer hombre que pase por la calle". Esta claridad y facilidad de comprensión, que aquí se le exige a una teoría matemática, yo la exigiría, aún con más razón, para un problema matemático perfecto; porque lo que es claro y fácil de comprender nos atrae, lo complicado nos repele.

Más aún, un problema matemático debería ser lo suficientemente difícil como para retarnos, pero sin ser inabordable, ya que burlaría nuestros esfuerzos. Por el contrario, debería ser una señal-guía para conducirnos por el laberinto de las ocultas verdades, recompensando nuestros esfuerzos con el placer que nos depara la solución hallada.

Los matemáticos de siglos pasados se ocuparon de resolver con gran fervor y pasión los problemas más difíciles. Ellos sabían el valor de estos problemas. Sólo citaré, a modo de ejemplo, el Problema de la brachistochrone de Jean Bernoulli. La experiencia nos enseña, nos explica Bernoulli en el anuncio público de este problema, que los espíritus nobles nunca cesan de trabajar por el progreso de la ciencia, por medio del planteamiento de problemas difíciles y al mismo tiempo útiles. De esta forma él esperaba merecer el reconocimiento del mundo matemático, siguiendo el ejemplo de Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani y otros, al plantear, ante los más distinguidos analistas de su época, un problema, por medio del cual, como con una piedra de toque, podrían ensayar la excelencia de sus métodos y al mismo tiempo valorarlos entre sí. Es así, a partir del problema de Bernoulli y de otros problemas similares, como tiene su origen el cálculo de variaciones.

Fermat ha propuesto, como es bien conocido, que la ecuación diofántica (de Diofanto): es imposible de resolver para números enteros x, y, z, –salvo en casos evidentes. El problema de la demostración de esta imposibilidad nos ofrece un ejemplo convincente de la influencia que puede tener sobre la ciencia un problema tan especial y en apariencia tan poco importante. En efecto, es el problema de Fermat el que lleva a Kummer a introducir los números ideales y al descubrimiento del teorema de la descomposición unívoca de los números de un campo ciclotómico (kreiskörper) en factores ideales primos, teorema que, junto a la extensión a cualquier campo algebraico, hecha por Dedekind y Kronecker, se ha convertido en el punto central de la

teoría moderna de números , y cuya significación se extiende más allá de los límites de la teoría de números, dentro de las regiones del álgebra y la teoría de funciones.

Pasando a un campo muy diferente de investigación, me referiré al Problema de los tres cuerpos. Poincaré, al tratar de forma novedosa tan difícil problema y acercarse tanto a una solución, descubrió los métodos fecundos de una gran parte de la mecánica celeste y que hoy en día son reconocidos y aplicados por la astronomía práctica.

Estos dos problemas, el de Fermat y el de los tres cuerpos, nos parecen polos opuestos: el primero, la creación libre de la razón pura, perteneciente a la región de la teoría de números abstracta; el segundo, propuesto por los astrónomos y necesario para el conocimiento de los fenómenos más simples y fundamentales de la naturaleza.

Pero como sucede a menudo, el mismo problema especial encuentra aplicaciones en las más disímiles ramas del conocimiento matemático. Así, por ejemplo, el problema de las geodésicas representa un papel fundamental desde un punto de vista histórico, en los fundamentos de la geometría, en la teoría de curvas y superficies, en mecánica y en el cálculo de variaciones. Felix Klein, en su obra sobre el icosaedro, ha destacado convincentemente la importancia del problema de los poliedros regulares en la geometría elemental, en la teoría de grupos, en la teoría de ecuaciones y en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

Para arrojar más luz sobre la importancia de ciertos problemas, voy a referirme a Weierstrass, quien consideró como un gesto providencial, el haber encontrado, en el comienzo de su carrera, un problema tan importante para su futuro trabajo como el problema de inversión de Jacobi.

Una vez expuesta la importancia general de los problemas de la matemática, vamos a pasar a la cuestión de las fuentes de donde surgen estos problemas. Seguramente, los primeros y más antiguos problemas de cada rama de la matemática surgen de la experiencia y son sugeridos por el mundo de los fenómenos externos. Aún las reglas para calcular con números enteros debe haber sido descubierta de esta manera, en un estadio primitivo de la civilización humana, justamente como los niños de hoy día aprenden las aplicaciones de estas leyes a través de métodos empíricos. Lo mismo podemos decir de los primeros problemas de la geometría, propuestos en la antigüedad, como la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo; así como los más antiguos problemas de la teoría de resolución de ecuaciones numéricas, en la teoría de curvas, en el cálculo diferencial e integral, en el cálculo de variaciones, la teoría de las series de Fourier y la teoría del potencial, sin mencionar la abundancia y riqueza de los problemas propios de la mecánica, la astronomía y la física.

Pero, en el desarrollo progresivo de una disciplina matemática, el espíritu humano, motivado por el éxito de las soluciones, se hace consciente de su independencia. Por medio de la combinación lógica, la generalización y la especialización, la separación y la recolección de ideas –a veces sin apreciable influencia del exterior– ésta evoluciona y a partir de ella misma produce nuevos y más fecundos problemas, y aparece, entonces, como la cuestionadora de verdad. Así surgieron el problema de los números primos y los otros problemas de la aritmética, la teoría de Galois, de las ecuaciones,

la teoría de los invariantes algebraicos, la teoría de las funciones abelianas y automorfas; de forma general, podemos decir que casi todos los problemas especiales de las teorías modernas de números y de funciones se originan de esta manera.

Así, mientras trabaja la fuerza creativa de la razón pura, el mundo exterior hace sentir de nuevo su influencia, nos impone nuevos problemas a partir de la experiencia, creando nuevas disciplinas matemáticas; y mientras buscamos conquistar estos nuevos campos del conocimiento para el acervo de la razón pura, nos encontramos, frecuentemente, con las respuestas a antiguos problemas y así, al mismo tiempo, hacemos avanzar las viejas teorías de la forma más ventajosa. Y me parece a mí, que esta repetida interacción entre la razón y la experiencia es la causa de las más sorprendentes analogías, así como la siempre preestablecida armonía con la cual el matemático percibe los problemas, los métodos y las ideas en los diversos dominios de su ciencia.

Examinaremos a continuación, someramente, las exigencias y las condiciones generales que debemos considerar para resolver un problema matemático. Antes que nada, debería ser posible establecer la exactitud de la solución por medio de un número finito de pasos basados en un número finito de hipótesis, las cuales están implicadas en el enunciado del problema y deben ser formuladas con precisión. Esta exigencia de deducción lógica por medio de un número finito de procesos, constituye, simplemente, la exigencia necesaria de rigor En efecto, el rigor en la demostración, condición que hoy en día es de importancia proverbial para la matemática, corresponde a una necesidad filosófica general de nuestro entendimiento; por otra parte, sólo satisfaciendo esta exigencia, el pensamiento y la sugestibilidad del problema alcanzan su máxima fecundidad. Un nuevo problema, especialmente cuando proviene del mundo exterior de la experiencia, es como una joven rama, que florece y nos da frutos sólo cuando ha sido cuidadosamente injertada, de acuerdo con las estrictas reglas de la horticultura, sobre el viejo tronco, los logros establecidos de la ciencia matemática.

Es un error creer que el rigor en la demostración es enemigo de la simplicidad. Por el contrario, encontramos numerosos ejemplos en los cuales el método más riguroso es al mismo tiempo el más simple y el más fácil de entender. La mera búsqueda del rigor nos fuerza a descubrir métodos más simples de demostración. También, frecuentemente, esta búsqueda de rigor nos conduce hacia métodos con mayor capacidad de desarrollo que los viejos métodos de menor rigor. Así, la teoría de curvas algebraicas ha experimentado una simplificación considerable y ha alcanzado una mayor unidad a través de métodos teórico-funcionales más rigurosos y la introducción consistente de consideraciones auxiliares transcendentes. Más aún, la prueba de que una serie de potencias permite la aplicación de las cuatro operaciones elementales de la aritmética, así como la diferenciación y la integración término a término, y el consecuente reconocimiento de la utilidad de las series de potencias basada en esta demostración, contribuyó enormemente a la simplificación de todo el análisis, particularmente de la teoría de la eliminación y la teoría de ecuaciones diferenciales, así como las pruebas de existencia que exigieron estas teorías. Pero el mejor ejemplo, a mi forma de ver, en este orden de ideas, lo constituye el cálculo de variaciones. El tratamiento de la primera y la segunda variación de las integrales definidas requiere

de cálculos extremadamente complicados, y los procedimientos aplicados por los matemáticos del pasado carecían del rigor necesario. Fue Weierstrass el primero en mostrarnos el camino hacia una nueva y segura fundamentación del cálculo de variaciones. Por medio de los ejemplos de la integral simple y de la integral doble, en breve mostraré, hacia el final de mi conferencia, como esto nos conduce directamente a una sorprendente simplificación del cálculo de variaciones. Señalaré que en la demostración de los criterios necesarios y suficientes para la existencia de un mínimo y un máximo, el cálculo de la segunda variación y una parte de los fatigantes razonamientos relativos a la primera variación son totalmente superfluos, sin hablar del considerable progreso aportado por la eliminación de las restricciones a las variaciones para las cuales las derivadas de las funciones variaban muy poco.

Me gustaría, por otra parte, mientras insisto sobre el rigor en el razonamiento como una condición necesaria para la solución completa de un problema, presentar mi desacuerdo con la opinión de que los conceptos del análisis, o los de la aritmética, son los únicos susceptibles de un tratamiento completamente riguroso. Esta opinión, que, ocasionalmente, ha sido sostenida por hombres eminentes, la considero completamente errónea. Tal interpretación unilateral de la exigencia de rigor nos conduciría, rápidamente, a ignorar los conceptos que surgen de la Geometría, la Mecánica o la Física, hasta llegar a paralizar el flujo de nuevo material proveniente del mundo exterior, y finalmente, como última consecuencia, al rechazo de las ideas del continuo y de los números irracionales. ¡Ignorar la fuente de la Geometría y la Física Matemática, sería como extirpar un nervio vital para la ciencia matemática! Por el contrario, yo creo que cualquiera que sea la fuente de donde provienen las ideas matemáticas, ya sea de la Teoría del conocimiento o de la Geometría, o de las teorías de las ciencias físicas y naturales, el problema matemático consistirá en investigar los principios fundamentales que subyacen a estas ideas para establecerlos en un sistema simple y completo de axiomas, de tal forma que la exactitud y rigor de las nuevas ideas y su susceptibilidad de deducción no sea inferior a la de los antiguos conceptos aritméticos.

A los nuevos conceptos les corresponden, necesariamente, nuevos símbolos. Y estos deben ser escogidos de tal forma que nos recuerden los fenómenos que motivaron la creación de estos nuevos conceptos. De esta forma, las figuras geométricas son los símbolos que representan la intuición espacial, y son usados por todos los matemáticos. ¿Quién no ha utilizado la doble desigualdad $a > b > c$, visualizada como tres puntos consecutivos sobre una línea recta, como el símbolo geométrico que representa el concepto «entre»? ¿Quién, al tratar de probar un difícil teorema sobre la continuidad de funciones o sobre la existencia de puntos de condensación, no ha dibujado segmentos de recta o rectángulos encerrados unos dentro de otros? ¿Quién podría prescindir de la figura del triángulo, el círculo con su centro, o la cruz que forman los ejes de coordenadas? ¿O de la representación de un campo vectorial, o la figura de una familia de curvas o superficies con su cubrimiento, que representa un papel tan importante en la Geometría diferencial, en la Teoría de ecuaciones diferenciales, en los fundamentos del cálculo de variaciones, y en otras ramas de las ciencias matemáticas puras?

Los símbolos aritméticos son números escritos y los símbolos geométricos son fórmulas dibujadas; y ningún matemático podría prescindir de estas fórmulas dibujadas, de la misma forma que no podría prescindir de los paréntesis o de cualquier otro símbolo analítico a la hora de realizar un cálculo.

La aplicación de los símbolos geométricos como método riguroso presupone el conocimiento exacto y completo de los axiomas que son el fundamento de esas figuras; y para que esas figuras geométricas puedan ser incorporadas al tesoro general de los símbolos matemáticos, se hace necesaria una rigurosa investigación de su contenido conceptual. De la misma forma que al sumar dos números, se deben colocar los dígitos uno debajo del otro en el orden correcto para que sólo las reglas de la aritmética, es decir, los axiomas de la aritmética, determinen el uso correcto de los dígitos, el uso de los símbolos geométricos debe estar determinado por los axiomas de los conceptos geométricos y sus combinaciones.

La coincidencia entre el pensamiento geométrico y el pensamiento aritmético se revela también en lo siguiente: en la investigación aritmética, lo mismo que en las consideraciones geométricas, no remontamos la cadena deductiva hasta los axiomas, y por el contrario, especialmente en el primer enfrentamiento del problema, lo abordamos por medio de una combinación de razonamientos, rápidos e inconscientes, pero no definitivos, con una confianza absoluta en un cierto sentimiento aritmético acerca del comportamiento de los símbolos aritméticos. Sin esta confianza, no podríamos hacer progresar a la Aritmética, así como tampoco a la Geometría sin la imaginación geométrica, la facultad que nos hace ver en el espacio. Como un ejemplo de una teoría aritmética que opera rigurosamente con los conceptos y los símbolos de la geometría, podríamos mencionar la obra de Minkowski, *Geometrie der Zahlen.*

Aquí sería conveniente señalar algunas de las dificultades que podrían presentar los problemas matemáticos y la forma de superarlas.

Si no podemos resolver un problema matemático, la razón suele ser, frecuentemente, nuestra falta al no poder reconocer un punto de vista más general, en el cual nuestro problema aparece como un simple vínculo en una cadena de problemas relacionados. Después de encontrar este punto de vista, no solamente se hace el problema más accesible a nuestra investigación, sino que al mismo tiempo nos apropiamos de un método también aplicable a los problemas relacionados. Citaré como ejemplos, dentro de la teoría de las integrales definidas, la introducción por parte de Cauchy de los caminos complejos de integración y, dentro de la teoría de números, la introducción por parte de Kummer de la noción de número ideal. Esta forma de hallar métodos más generales es, sin lugar a dudas, la más accesible y la más segura; porque aquellos que buscan métodos sin tener en mente un problema determinado, buscan, la mayor parte del tiempo, en vano.

En los problemas matemáticos, según mi forma de ver, la particularización representa un papel más importante que la generalización. Quizás, en la mayoría de los casos, la causa de no haber podido hallar la solución de un problema, reside en el hecho de no haber tratado primero de resolver los problemas más sencillos y fáciles. Todo depende, entonces, en hallar estos problemas más sencillos y tratar de

resolverlos por medio de los procedimientos más rigurosos con que contemos y de aquellos conceptos susceptibles de generalización. Esta regla es una de las más importantes palancas para remover las dificultades matemáticas y, me parece, que siempre la usamos, aunque quizás, inconscientemente.

Ocasionalmente sucede que buscamos la solución bajo hipótesis incompletas o en un sentido incorrecto, y por esta razón no tenemos éxito. De aquí surge el siguiente problema: demostrar la imposibilidad de la solución bajo las hipótesis dadas, o en el sentido considerado. Tales pruebas de imposibilidad fueron realizadas por los antiguos; así, por ejemplo, demostraron que la razón entre la hipotenusa y el lado de un triángulo rectángulo isósceles es irracional. Posteriormente, las preguntas sobre la imposibilidad de ciertas soluciones representan un papel prominente; y percibimos, de esta manera, que los problemas difíciles de la antigüedad, como la prueba del axioma de las paralelas, la cuadratura del círculo, o la resolución por radicales de las ecuaciones de quinto grado, han encontrado finalmente una solución rigurosa y satisfactoria, aunque en un sentido muy diferente a la intención original.

Y, probablemente, sea este hecho fundamental, junto con otras razones filosóficas, lo que suscite la convicción compartida por todos los matemáticos, aunque sin una prueba que la sustente, de que todo problema matemático bien definido debe ser necesariamente susceptible de una solución exacta, ya sea en la forma de una respuesta directa a la pregunta planteada, o por medio de la demostración de la imposibilidad de hallar una solución, es decir, el necesario fracaso de toda tentativa de demostración futura. Tomemos cualquier problema no resuelto, tal como la pregunta sobre la irracionalidad de la constante C de Euler-Mascheroni o la existencia de un número infinito de números primos de la forma $2n + 1$. Por más que estos problemas parezcan inabordables, y nos sintamos incapaces ante ellos, sin embargo, tenemos la firme convicción de que su solución debe seguir un número finito de deducciones lógicas

¿Es este axioma de la posibilidad de resolver todo problema una característica particular del pensamiento matemático, o es consecuencia de una ley general inherente a la naturaleza de nuestro entendimiento, la creencia de que toda pregunta planteada por nuestro entendimiento debe ser susceptible de una solución? En otras ciencias también encontramos problemas antiguos que han sido resueltos por medio de la demostración de su imposibilidad. Podemos citar, como ejemplo, el problema del movimiento perpetuo. Después de muchos fracasos al tratar de construir una máquina de movimiento perpetuo, los científicos investigaron las relaciones que deben existir entre las fuerzas de la naturaleza si tal máquina fuera imposible; y esta pregunta inversa llevó al descubrimiento de la Ley de la conservación de la energía, la cual, al mismo tiempo, explicaba la imposibilidad del movimiento perpetuo en el sentido original.

Esta convicción en la resolución de todo problema matemático es un gran incentivo para el investigador. Siempre escuchamos dentro de nosotros la llamada perenne: He aquí el problema. Busca la solución. La puedes hallar usando el razonamiento puro, porque el matemático nunca dirá: «ignorabimus»

En un esfuerzo por acortar la conferencia, como le habían sugerido Minkowski y Hurwitz, Hilbert se vio obligado a presentar sólo 10 problemas de un total de 23 que había enumerado en su manuscrito, los cuales fue ilustrando con pequeñas sipnosis de sus orígenes y significado.

Los tres primeros (1, 2 y 6) correspondían a los fundamentos de la Matemática.

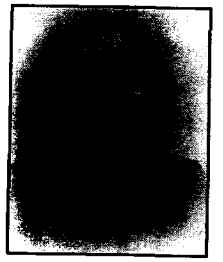
Hasta aquí –prosiguió Hilbert– sólo hemos considerado problemas relacionados con los fundamentos de la ciencia matemática. Desde luego, que el estudio de los fundamentos de una ciencia siempre son importantes, y el análisis de estos fundamentos siempre estarán entre los problemas más importantes para el investigador. Weierstrass dijo: «El objetivo final que siempre debemos tener presente es llegar al conocimiento correcto de los fundamentos... Pero para progresar en las ciencias es indispensable resolver los problemas individuales». De hecho, un acucioso conocimiento de sus teorías especiales es necesario para el tratamiento satisfactorio de los fundamentos de la ciencia. Sólo aquel arquitecto que conoce el propósito y todos los detalles de la estructura está en la posición de construir unas fundaciones seguras.

Los cuatro problemas siguientes (7, 8, 13 y 16) fueron seleccionados de la Aritmética y el Álgebra.

Los últimos tres problemas (19, 21 y 22) elegidos por Hilbert para cerrar su conferencia correspondían a la Teoría de funciones.

Los problemas mencionados –dijo Hilbert a su audiencia– son apenas algunos ejemplos de problemas, pero creo que son suficientes para mostrarnos lo rico, variado y extenso de la ciencia matemática de hoy; lo cual nos hace pensar si acaso la matemática no estará destinada, como otras ciencias que se han dividido en numerosas ramas, y sus representantes han terminado sin entenderse unos con otros, haciendo muy difícil su vinculación. Pero no creo que sea este nuestro caso, ni lo deseo. En mi opinión, la ciencia matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad esta condicionada por la conexión de sus partes. Porque, a pesar de toda la variedad del conocimiento matemático, somos conscientes de la similitud de sus procedimientos lógicos, el parentesco de las ideas matemáticas como un todo y las numerosas analogías en sus diferentes dominios. Más aún: cuanto más se desarrolla una teoría matemática, más gana en armonía y en uniformidad, y surgen inesperadas relaciones entre sus diferentes ramas. De aquí que, con el crecimiento de la matemática, su carácter orgánico no disminuye, sino que se manifiesta más clara y evidentemente.

Pero, preguntamos: ¿Con el crecimiento del conocimiento matemático no se hará imposible, para cualquier investigador individual, abarcar todos los dominios de este conocimiento? Para contestar, me permito hacer referencia al perfecto engranaje de esta ciencia matemática, en la cual todo verdadero avance va acompañado de la invención de instrumentos más finos y de métodos más simples, que al mismo tiempo que nos asisten a la comprensión de nuevas teorías, nos ayudan a rechazar desarrollos más complicados. Es por ello que se hace posible para el investigador individual, una vez que domina estos finos instrumentos y estos métodos simples, encontrar su camino en los diferentes dominios de la matemática más fácilmente que para los investigadores de otras ciencias.



David Hilbert

La unidad orgánica de la Matemática es inherente a la naturaleza de esta ciencia, porque la matemática es el fundamento de todo conocimiento exacto sobre los fenómenos naturales. Y si el nuevo siglo nos diera los talentosos profetas y los discípulos entusiastas, quizás pudiera satisfacerse completamente este magno destino de la Matemática".

Esta foto de David Hilbert fue realizada en 1900, año de la conferencia y ha sido reproducida de la página Web de la Universidad de St. Andrews, Escocia. http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Hilbert.html.

Exponemos a continuación los 23 problemas de Hilbert:

1. Problema de Cantor sobre el cardinal del continuo. ¿Cuál es el cardinal del continuo?
2. La compatibilidad de los axiomas de la Aritmética. ¿Son compatibles los axiomas de la Aritmética?
3. La igualdad de los volúmenes de dos tetraedros de igual base e igual altura.
4. El problema de la distancia más corta entre dos puntos. ¿Es la línea recta la distancia más corta entre dos puntos, sobre cualquier superficie, en cualquier geometría?
5. Establecer el concepto de grupo de Lie, o grupo continuo de transformaciones, sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.
6. Axiomatización de la física. ¿Es posible crear un cuerpo axiomático para la Física?
7. La irracionalidad y trascendencia de ciertos números como e, 2, etc.
8. El problema de la distribución de los números primos.
9. Demostración de la ley más general de reciprocidad en un cuerpo de números cualesquiera.
10. Establecer métodos efectivos de resolución de ecuaciones diofánticas.
11. Formas cuadráticas con coeficientes algebraicos cualesquiera.
12. La extensión del teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraica.

13. Imposibilidad de resolver la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de sólo dos argumentos.
14. Prueba de la condición finita de ciertos sistemas completos de funciones.
15. Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert o geometría algebraica.
16. Problema de la topología de curvas algebraicas y de superficies.
17. La expresión de formas definidas por sumas de cuadrados.
18. Construcción del espacio de los poliedros congruentes.
19. Las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones, ¿son siempre analíticas?
20. El problema general de condiciones de contorno de Dirichlet.
21. Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales de clase fuchsiana, conocidos sus puntos singulares y grupo monodrómico.
22. Uniformidad de las relaciones analíticas por medio de funciones automórficas: siempre es posible uniformizar cualquier relación algebraica entre dos variables por medio de funciones automorfas de una variable.
23. Extensión de los métodos del cálculo de variaciones.

Ejercicios de autoevaluación

1. El principio genético de Herbert Spencer postula que:
   a) El desarrollo de la inteligencia humana reproduce desde la infancia los pasos que ha seguido la evolución histórica de los conceptos matemáticos.
   b) La génesis del conocimiento en cada niño no debe seguir el mismo camino que la génesis del conocimiento de su especie.
   c) La génesis del conocimiento individual es independiente de la génesis del conocimiento de la especie.
   d) La evolución histórica de la inteligencia humana es útil en la adquisición de los conceptos matemáticos en los niños.

2. Según Félix Klein, el principio genético debe ser seguido en líneas generales en la enseñanza porque:
   a) El individuo, en su desarrollo, recorre en rápida sucesión todos los estados del desarrollo de la especie a que pertenece.
   b) Reforma la psicología de la historia de la matemática.
   c) Reconstruye la pedagogía de la historia de la matemática.
   d) Intenta reconstruir el clima patológico que envuelve a cada momento creador trascendente en la historia de la matemática.

3. La aplicación del método genético consiste en:
   a) Realizar una reconstrucción histórica que ponga de manifiesto sólo el conocimiento de las preguntas y necesidades que motivaron la introducción de un concepto nuevo.
   b) Intentar cambiar la herencia genética y conseguir un mejor aprendizaje.
   c) Realizar una reconstrucción histórica de las necesidades que acarrearon la introducción de un nuevo concepto y sus dificultades.
   d) Que el individuo recorra de lleno cada uno de los estados del desarrollo de las Matemáticas.

4. ¿Quién escribió *De la medida del Círculo*, una obra donde se demuestra que la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro está comprendida entre $3 + 10/71$ y $3 + 1/7$, lográndose una buena aproximación del número π?
   a) Arquímedes.
   b) Euclides.
   c) Diofanto.
   d) Apolonio.

5. ¿Qué dos ramas iniciales de la Matemática nacieron para resolver problemas de la vida ordinaria?
   a) Probabilidad y Estadística.
   b) Aritmética y Álgebra.
   c) Geometría y Análisis Matemático.
   d) Aritmética y Geometría.

6. Las Artes Liberales englobaban la cultura general a la que debe tender la Enseñanza Secundaria, se dividían en:
   a) Dos grupos: el *Trivium* (Gramática, Dialéctica y Retórica) y el *Cuadrivium* (Aritmética, Geometría, Música y Astronomía).
   b) Tres grupos: el Divium (Física y Filosofía), el *Trivium* (Gramática, Música y Poesía) y el *Cuadrivium* (Aritmética, Geometría, Alquimia y Astronomía).
   c) Dos grupos: el *Trivium* (Gramática, Música y Poesía) y el *Cuadrivium* (Aritmética, Geometría, Alquimia y Astronomía).
   d) Dos grupos: el *Trivium* (Gramática, Música y Filosofía) y el *Cuadrivium* (Aritmética, Geometría, Física y Astronomía).

7. Las Ciencias del *Cuadrivium* se referían al estudio de:
   a) Los ritmos, los astros, la proporción y la medida.
   b) Los números, los ciclos, el tamaño y la mesura.
   c) Los ritmos, los ciclos, la proporción y la medida.
   d) Los números, los ritmos, los ciclos y la mesura.

8. ¿De dónde proceden nuestros símbolos actuales y nuestro método de formar los números?
   a) De los babilonios, reelaborados por fenicios y hebreos.
   b) De los árabes, traídos a Europa por los indios.
   c) De los griegos, adaptados por los romanos.
   d) De la India, traídos a Europa por los árabes.

9. ¿Qué pueblos desarrollaron la geometría elemental?
   a) Los babilonios.
   b) Los egipcios.
   c) Los griegos.
   d) Los romanos.

10. ¿Quién escribió y sobre qué versaba el libro *Los Elementos*?
   a) Euclides, sobre Aritmética.
   b) Euclides, sobre Geometría.
   c) Pitágoras, sobre Geometría.
   d) Pitágoras, sobre Álgebra.

11. El libro X de *Los Elementos* trata sobre:
   a) Álgebra geométrica.
   b) Geometría del Plano.
   c) Números Irracionales
   d) Geometría del Espacio.

12. ¿Qué obra marcó el renacimiento de la Matemática en el siglo XVIII?:
   a) *Métricas* de Herón de Alejandría.
   b) *La Geometría* de Descartes.
   c) *Las Cónicas* de Apolonio.
   d) *Matemática elemental desde un punto de vista superior* de Félix Klein.

13. ¿Quién formuló en 1955 el "Decálogo de la Didáctica de la Matemática Media", referido al que debe ser el objetivo en su práctica docente de cualquier profesor de Matemáticas?:
   a) Julio Rey Pastor.
   b) Miguel de Guzmán.
   c) Leonhard Euler
   d) Pedro Puig Adam.

14. En el Álgebra Retórica:
   a) Se utilizan algunas abreviaciones para simplificar la resolución.
   b) Se emplean diferentes símbolos y signos matemáticos.
   c) Las operaciones se describen con palabras.
   d) No se trabaja con números.

15. El Álgebra Sincopada es aquélla:
   a) Cuyas operaciones se describen con palabras.
   b) Que utiliza algunas abreviaciones para simplificar la resolución.
   c) Que emplea diferentes símbolos y signos matemáticos.
   d) Que no utiliza números.

16. ¿Cuál es la característica del Álgebra Simbólica?
   a) No utiliza números.
   b) Las operaciones se describen con palabras.
   c) Emplea algunas abreviaciones para simplificar la resolución.
   d) Utiliza diferentes símbolos y signos matemáticos.

17. ¿Cuáles son las 4 etapas fundamentales en la Historia de la Matemática?
   a) Desarrollo del Álgebra. Matemática Elemental. Matemática Contemporánea. Desarrollo de la Geometría.
   b) Nacimiento. Matemática Elemental. Nacimiento y Desarrollo del Análisis Matemático. Matemática Contemporánea.
   c) Etapa clásica. Edad Media. Análisis Matemático. Geometría.
   d) Prehistoria. Grecia clásica. Renacimiento. Estadística.

18) El libro de Félix Klein, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, estaba destinado a la formación de los aspirantes a:

a) Ingeniería.

b) Arquitectura.

c) Magisterio.

d) Medicina.

19) Hay un método general para encontrar, sin medir alturas, el área de un triángulo cualquiera dados sus tres lados. Este método fue descubierto por:

a) Pitágoras de Samos.

b) Eudoxo de Cnido.

c) Pappus de Alejandría.

d) Herón de Alejandría.

20) El método de exhaución consiste en hallar:

a) El área de un recinto mediante el cálculo de áreas de regiones poligonales que cada vez se aproximen más a ella, por exceso y por defecto.

b) El volumen de un poliedro regular, conociendo la superficie de sus caras.

c) El área de un pentágono regular, conociendo el lado.

d) El área de un triángulo, conociendo sus tres lados.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

a. 11) c.

a. 12) b.

c. 13) d.

a. 14) c.

d. 15) b.

a. 16) d.

c. 17) b.

d. 18) c.

c. 19) d.

b. 20) a.

Bibliografía

Aleksandrov, A. y otros (1979). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. V.1. Madrid: Alianza Universidad.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Baumgart, J. y otros (1969, 1989). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: NCTM.

Bell, E. (2004). *Los grandes matemáticos*.

http://www.geocities.com/grandesmatematicos.

Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma*, vol. 1(2), 17-28.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Carlavilla, J.; Fernández, G. (2004). *Historia de las Matemáticas*. Granada: Proyecto Sur.

Collette, J. (1985). *Historia de las Matemáticas*. V. I-II. Madrid: Siglo XXI.

Courant R.; Robbins, H. (1971): *¿Qué es la Matemática?* Aguilar: Madrid.

De Guzmán, M. (2002). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm.

De Guzmán, M. *Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias*. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/cipra.htm.

De Guzmán, M. http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman.

Del Río, J. (1988). "Donald en el País de las Matemágicas" o el aprovechamiento didáctico de una película. *Suma*, 1, Vol. 1, 35-40.

Fernández, S. (2001). La Historia de las Matemáticas en el aula. *Uno*, Vol. 26, 9-27.

González, P. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 9 / n° 3, 281-289.

Hayek, N. (2002). Una biografía de Abel. *Números*. Vol. 52, 3-26.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras: historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.

Kilpatrick, J.; Rico, L.; Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.

Kline, M. (1992. *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días*. V. I-II-III. Madrid: Alianza Universidad.

Larios, V. (1999). Contextos históricos de la ciencia en clase. *Revista Gaceta COBAQ*. Año XVI, 137, páginas 7-9.

http://www.uaq.mx/matematicas/vlarios/xart05.html.

Massa, M. R.; Romero, F.; Casals, M. A. (2004). *La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de la Trigonometría. El Teorema de Pitágoras*. http://www.ma1.upc.edu/recerca/reportsre/0304/rep030402massa.pdf.

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *Suma*, nº 17, 17-26.

Meavilla, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. Zaragoza: Prensas universitarias de Zaragoza.

MEC (1992). *Secundaria obligatoria. Matemáticas*. Madrid.

Méndez, J. (2003). *Las Matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones*. Serie Lecciones Inaugurales / 6. Universidad de La Laguna.

Montesinos, J. L. (2000). *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería.

Ontoria, A. (1992). *Mapas conceptuales. Una técnica para aprender*. Madrid: Narcea.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivola.

Rey, J. y Babini, J. (1986). *Historia de la Matemática, V. I-II*. Barcelona: Gedisa.

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Rico, L. y Sierra, M (1994). Educación Matemática en la España del siglo XX. En: J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigación*, 99-207. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, R. (1985). Notas históricas y lúdicas en la clase de Matemáticas. Aspectos didácticos de Matemáticas, *Educación Abierta 57*, ICE Universidad de Zaragoza, 91-104.

Sancho, J. (1990). Posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas. Aspectos Didácticos de Matemáticas. 3, *Educación Abierta 86*, ICE Universidad de Zaragoza, 77-101.

Sierra, M. (1997). Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de Secundaria. En: L. Rico (ed.): *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 179-194, Horsori-ICE, Universitat de Barcelona.

Sierra, M. (2000). El papel de la Historia de la Matemática en la enseñanza. En: A. Martinón (ed.): *Las Matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos, 93-96*. Madrid: Monografías de Editorial Nívola sobre Historia de las Matemáticas.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Treviño, E. (2003). *Matemáticos y su Historia: Una antología biográfica*. http://www. secundariasgenerales.tamaulipas.gob.mx/grandes%20matemáticos%20carta.doc

Valiente, S. (2000). *Didáctica de la matemática*. Madrid: La Muralla.

Wussing, H; Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Prensas Universitarias, Universidad de Zaragoza.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

http://www.arrakis.es/~mcj/historia.htm. Gacetilla Matemática. Historias.

http://www.arrakis.es/~mcj/arquimed.htm. Gacetilla Matemática. Historias. Arquímedes de Siracusa.

http://www.divulgamat.net. DivulgaMat. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas.

http://personales.ya.com/casanchi/did/historia01.htm. La Historia que vivieron los matemáticos. Isabel Ortega.

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/. Matemáticas. Antonio Pérez Sanz.

http://www3.uva.es/aufop/publica/numeros.htm. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado.

http://thales.cica.es/epsilon. Epsilon. Revista de Educación Matemática.

http://www.smpm.es/fespm/fespm.html. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

http://www.sinewton.org. Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas.

http://comandes.uji.es/Revistes/PaginaRevista.asp?Valor=813&Many=2005. "Uno", Revista de Didáctica de las Matemáticas.

COLECCIONES DIDÁCTICAS

1. *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. Consejo Editor: Luis Rico Romero, José María Fortuny Aymemi, Luis Puig Espinosa. Editorial Síntesis, Madrid.
2. *Educación Matemática en Secundaria*. Directores: Miguel de Guzmán, Luis Rico. Editorial Síntesis, Madrid.
3. *La matemática en sus personajes*. Director: Antonio Pérez Sanz. Ediciones Nivola, Madrid.
4. *Mathema*. Editorial Comares, Granada.
5. *Cuadernos de Historia de la Ciencia*. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Director: Mariano Hormigón.

RELACIÓN DE REVISTAS DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

- Arithmetic Teacher.
- Educación Matemática.
- Epsilon.
- Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning.
- Journal for Research in Mathematical Education.

- Mathematics Teacher.
- Mathematics Teaching in the Middle School.
- NCTM News Bulletin.
- Petit X.
- Recherches en Didactique des Mathematiques.
- Retos: Revista de problemas de Matemáticas.
- Suma.
- Teaching Children Mathematics.
- Uno.
- Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática.
- Números.