

G. Winter*, G. Montero*, P. Cuesta*, M. Galán* y E. Flórez*

RESOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA CONVECCION/DIFUSION EN UN INTERCAMBIADOR DE CALOR DE FLUJO CRUZADO CON LECHO GRANULAR MOVIL

INTRODUCCION:

Uno de los problemas que abordamos en la actualidad es la optimización del diseño de un sistema conjunto de filtración e intercambiador de calor, basado en circular un gas contaminado de cenizas y pequeñas partículas a través de un lecho móvil de rellenos granulados sólidos. Consideramos el problema de convección-difusión para una modelización del cálculo de temperaturas en el intercambiador de calor de flujo cruzado, donde partículas sólidas que se desplazan verticalmente son atravesadas en dirección perpendicular por un gas. Se proponen esquemas basados en integración a lo largo de las características y de Taylor-Galerkin describiéndose comparativamente resultados obtenidos de consistencia y de estabilidad numérica.

MODELO. FORMULACION DEL PROBLEMA:

Se considera la transferencia de calor entre fase sólida y fluida en un modelo aproximado de dos fases cuya formulación es propuesta por Schmidt y otros (1981) con las hipótesis de propiedades constantes para el fluido y material, coeficientes uniformes de transferencia de calor y velocidades de ambas fases constantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{ha}{e_f c_f \varepsilon} (\theta - T) + \frac{K_d}{e_f c_f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{fase fluida} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{ha}{e_s c_s (1 - \varepsilon)} (T - \theta) + \frac{K_a}{e_s c_s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{fase sólida} \quad (2)$$

Las condiciones de contorno son tipo Dirichlet a las entradas para ambas fases y para las salidas consideramos condiciones de transferencia de calor por convección con el exterior. Se considera para cada fase la siguiente aproximación a lo largo de las características,

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1 (\theta^* - T^*)^{k_1} + \beta_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{k_1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha_2 (T^* - \theta^*)^{k_2} + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^{k_2}$$

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T^{n+1}(x, y) - T^n(x - \Delta x, y)}{\Delta t} \quad \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\theta^{n+1}(x, y) - \theta^n(x, y - \Delta y)}{\Delta t}$$

considerando los desarrollos limitados de Taylor,

$$T^n(x - \Delta x, y) = T^n(x, y) - \Delta t u \frac{\partial T^n(x, y)}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2 u^2}{2} \frac{\partial^2 T^n(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\theta^n(x, y - \Delta y) = \theta^n(x, y) - \Delta t v \frac{\partial \theta^n(x, y)}{\partial y} + \frac{(\Delta t)^2 v^2}{2} \frac{\partial^2 \theta^n(x, y)}{\partial y^2}$$

se obtiene el esquema numérico:

$$T^{n+1} - \beta_1 \Delta t \frac{\partial^2 T^{k_1}}{\partial x^2} - \alpha_1 \Delta t (\theta^{k_2} - T^{k_2}) = T^n - \Delta t u \frac{\partial T^n}{\partial x} + (\Delta t)^2 \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\theta^{n+1} - \beta_2 \Delta t \frac{\partial^2 \theta^{k_2}}{\partial y^2} - \alpha_2 \Delta t (T^{k_1} - \theta^{k_1}) = \theta^n - \Delta t v \frac{\partial \theta^n}{\partial y} + (\Delta t)^2 \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial y^2} \quad (4)$$

Distintas elecciones de k_1 y k_2 correspondientes a tiempos $t = t_{k_1}, t = t_{k_2}, t_n \leq t_{k_1}, t_{k_2} \leq t_{n+1}$, dan lugar a diferentes esquemas numéricos de resolución.

Para $t_{k_2} = t_{k_1} = t_n$ y $t_{k_1} = t_{k_2} = t_{n+1}$ da lugar a esquemas de consistencia global solo de primer orden en el análisis realizado sobre el problema escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u$$

El estudio de estabilidad deriva en acotaciones bastante restrictivas en las aplicaciones para esquemas explícitos si bien se obtienen cotas sobre el paso de tiempo más relajada para el esquema implícito, así para:

a) Esquema explícito con integración consistente en todos los términos, el factor de amortiguamiento o ganancia numérica es:

$$G = 1 - \alpha \Delta t + \frac{-4C\left(\frac{1}{p_e} + \frac{\xi}{2}\right) \sin^2 \frac{p}{2} - iC \sin p}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{p}{2}}$$

Y la cota de estabilidad: (criterio de Von-Neuman), $\alpha \Delta t \leq 2$

$$C \leq \frac{-1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{2}\right)}$$

Siendo C y p_e los números de Courant y de Peclet, $p = \xi h$, siendo ξ el número de onda y ($L = \frac{2\pi}{\xi}$ la longitud de onda).

b) Esquema implícito, b.1) Integración consistente en todos los términos:

$$G = \frac{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{p}{2} - 2C^2 \sin^2 \frac{p}{2} - iC \sin p}{\left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{p}{2}\right)(1 + \alpha \Delta t) + \frac{uC}{p_e} \sin^2 \frac{p}{2}}$$

$$C \leq \frac{1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{2}\right)}$$

b.2) Integración reducida en u^{n+1} , u^n , integración consistente en demás términos:

$$G = \frac{(1 - 2C^2 \sin^2 \frac{p}{2} - iC \sin p)}{(1 + \alpha \Delta t) + \frac{4C}{p_e} \sin^2 \frac{p}{2}} \quad C \leq \frac{1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} + 1 + \frac{\alpha \Delta t}{2}}, \quad C \geq 0$$

Es necesario, pues, considerar otros esquemas que sean al menos consistentes de segundo orden (para $\alpha \neq 0$). Veamos un método explícito tipo Lax-Wendroff que corresponde a considerar un término adicional respecto al esquema propuesto por Peraire, Zienkiewicz y Morgan (6). Para ello derivemos la ecuación de partida:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + K \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$$

En la que introducimos nuevamente la ecuación original e intercambiamos el orden de las derivadas espaciales y temporal, eliminando únicamente las derivadas de tercer orden o superiores espaciales (contexto de uso posterior de semidiscretización en espacio por métodos de elementos finitos con interpolación de grado bajo). Se obtiene así,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\alpha v \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2K\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación de partida $\frac{\partial u}{\partial t}$ y la expresión anterior $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en el desarrollo limitado de Taylor:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n$$

Obtendremos el esquema de discretización en tiempo,

$$u^{n+1} = u^n \left(1 - \alpha \Delta t + \frac{\alpha^2 (\Delta t)^2}{2} \right) + (\Delta t^2 \alpha v - \Delta t v) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\Delta t K + \frac{\Delta t^2 v^2}{2} - K\alpha (\Delta t)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Considerando un esquema en diferencias finitas equivalente a la resolución numérica por elementos finitos para casos de mallado regular y triángulo de tres nodos e interpolación lineal, utilizando integración reducida en los términos u^{n+1} y u^n quedará,

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \alpha \Delta t + \frac{\alpha^2 (\Delta t)^2}{2} \right) + \left(\frac{\Delta t C \alpha}{2} - \frac{C}{2} \right) (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \left(\frac{C}{p_e} + \frac{C^2}{2} + \alpha \frac{C}{p_e} \Delta t \right) (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Siendo para este esquema,

$$G = \frac{\left(\frac{2 + \cos p}{3} \right) \left(1 - \alpha \Delta t + \frac{\alpha^2 (\Delta t)^2}{2} \right) - 4C \left(\frac{1 - \alpha \Delta t}{p_e} + \frac{C}{2} \right) \text{sen}^2 \frac{p}{2} - iC(\alpha \Delta t - 1) \text{sen } p}{\frac{2 + \cos p}{3}}$$

Con consistencia global de orden dos

$$G = 1 - (\alpha^* + iC)p + \left[\frac{-C}{p_e} + \frac{\alpha^{*2}}{2} - \frac{C^2}{2} + \alpha^* iC \right] p^2 - p^3 \left[\frac{C}{p_e} \alpha^* + \dots \right]$$

donde $\alpha^* = \alpha C / \xi v$

Y para acotación del paso de tiempo,

$$C \leq \frac{\alpha \Delta t - 1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} (\alpha \Delta t - 1)^2 + \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} - 1 \right) \right]}$$

Para el caso $\alpha = 0$ tenemos el resultado conocido:

$$C \leq -\frac{1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} + \frac{1}{3}}$$

Si se despreciara el término $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = -K\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el esquema, la cota de estabilidad es más

$$\text{restrictiva, } C \leq -\frac{1}{p_e} + \sqrt{\frac{1}{p_e^2} + \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} - 1 \right) \right]}$$

Siendo la consistencia global también de orden dos, pues el término adicional contribuye en $O(p^3)$, precisamente $[C/p_e] \alpha^*$.

La cota de estabilidad para el esquema propuesto puede expresarse de forma equivalente

$$\frac{\left[\frac{v^2}{K} \Delta t + (1 - \alpha \Delta t) \right]^2}{(\alpha \Delta t - 1)^2 + \frac{v^2 h^2}{K^2} \cdot \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} - 1 \right) \right]} \leq 1$$

Es de interés señalar que el esquema es también consistente con el mismo orden de exactitud para el caso de sólo convección ($K=0$).

Veamos a continuación un esquema implícito basado en método de características que es equivalente, según veremos posteriormente al procedimiento de Taylor-Galerkin descrito en la referencia 10.

Consiste en la elección de: $t_{k_1} = t_{n+\nu}$, $t_{k_2} = t_{n+\frac{1}{2}}$

$$T^* = T^{n+\frac{1}{2}} = T^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^{n+\nu} \quad \theta^* = T^{n+\frac{1}{2}} = \theta^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^{n+\nu}$$

(la evaluación respecto a $t_{n+\nu}$ en las dos últimas expresiones tiene el objetivo de aproximar errores de truncamiento (resto) en los desarrollos de Taylor).

Sustituyendo $\partial T/\partial t$ y $\partial \theta/\partial t$ por sus ecuaciones de partida, el esquema resultante es:

$$\begin{aligned}
 T^{n+1} - T^n + \Delta t u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^n - (\Delta t)^2 \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \beta_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \\
 \alpha_1 \Delta t (\theta^n - T^n) + (\Delta t)^2 \frac{1}{2} (T - \theta)^{n+\frac{1}{2}} [\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2] + \\
 + \alpha_1 u (\Delta t)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_1 (\Delta t)^2 \beta_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \\
 - \alpha_1 v (\Delta t)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_1 (\Delta t)^2 \beta_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} \\
 \theta^{n+1} - \theta^n + \Delta t v \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^n - (\Delta t)^2 \frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \beta_2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \\
 \alpha_2 \Delta t (T^n - \theta^n) + (\Delta t)^2 \frac{1}{2} (\theta - T)^{n+\frac{1}{2}} [\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2] + \\
 + \alpha_2 v (\Delta t)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_2 (\Delta t)^2 \beta_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \\
 - \alpha_2 u (\Delta t)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_2 (\Delta t)^2 \beta_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Si expresamos la formulaci3n del problema en forma conservativa

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + Q = 0$$

Siendo

$$U = \begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\alpha_1 (\theta - T) \\ -\alpha_2 (T - \theta) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} uT \\ v\theta \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -\beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} \\ -\beta_2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Donde x_i , i corresponden a las coordenadas cartesianas y cantidades asociadas con estas; y el esquema num3rico anterior es equivalente a la expresi3n:

$$U^{n+1} - U^n = -\Delta t \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + Q \right]^n - \Delta t \left[\frac{\partial G_i}{\partial x_i} \right]^{n+\psi} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_i \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \right) \right] + \frac{\partial Q}{\partial U} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \right) \right\}^{n+\psi}$$

$$\text{siendo } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad 0 \leq \psi \leq 1$$

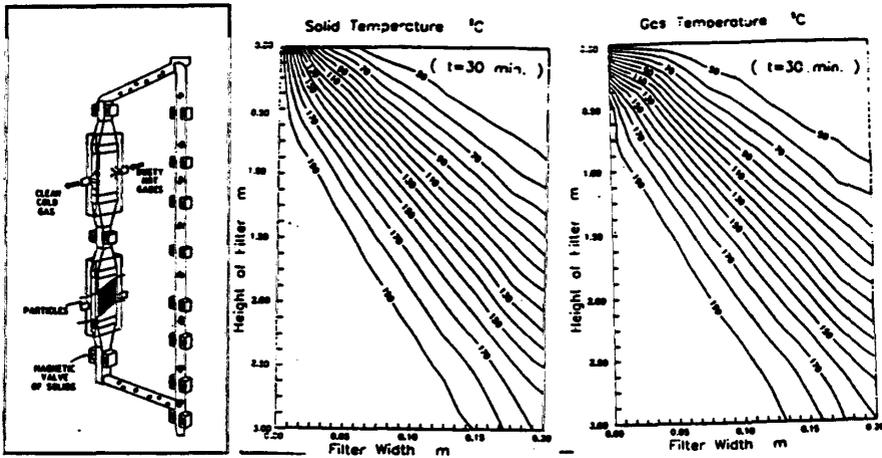
El cual coincide con el procedimiento de Taylor-Galerkin expuesto por Zienkiewicz y Taylor (10), siendo incondicionalmente estable para $\psi \geq 1/2$. La importancia de la expresión vectorial del esquema numérico es que permite añadir más cantidades físicas conservativas en el mecanismo físico de la aplicación.

APLICACIÓN NUMÉRICA

Se muestran resultados obtenidos por el método explícito propuesto para los siguientes datos:

Dimensiones	3.00m×0.20m
Área Transversal	5.49 m ²
Diámetro de partículas esféricas (dp)	2.00 mm
Fracción de huecos (ε)	0.40
Coef.convec.interpartículas (h)	150 w/m ² °K
Velocidad de la Fase Sólida (u)	0.166 cm/s
Velocidad de la Fase Gaseosa (v)	0.50 m/s
Densidad de la Fase Sólida	2.500 Kg/m ³
Densidad de la Fase Gaseosa	0.745 Kg/m ³
Calor Específico de la Fase Sólida	670 KJ/Kg°K
Calor Específico de la Fase Gaseosa	1019 KJ/Kg°K
T. de Entrada de la Fase Sólida	40 °C
T. de Entrada de la Fase Gaseosa	200 °C
Area de interfase por unid. volumen	$a = 6(1-\epsilon)/d = 1800 m^{-1}$

Se muestran las isóneas de la solución al cabo de 30 min. habiéndose alcanzado el estado estacionario.



REFERENCIAS

- 1.- R. Clift, M. Ghaidiri and K.J. Thambimuthu, 1981, "Filtration of gases in Fluidized Beds", in *Progress in Filtration and Separation 2*, R.J. Wakeman (ed.) pp. 75, Elsevier, Amsterdam.
- 2.- D. Kunii and O. Levenspiel, 1991, "Fluidization Engineering", Butterworth, Boston.
- 3.- A. Macias, G. Winter and G. Montero, 1993, "Modeling of a new heat exchanger-filter for cleaning dusty gases", World Filtration Congress, Japan.
- 4.- A. Macias-Machin, G. Winter, G. Montero, E. Jaraiz, A. Estevez and J. Cuellar, 1992, "Analysis and Modeling of a Crossflow Moving Bed Heat Exchanger-Filter. (MHEF)", *Proc. VII Meeting of Fluidization and Fluid/Particles Systems*, pp. 183, Zaragoza, Spain.
- 5.- S. Mizukami, M. Wakabayashi and H. Murata, 1987, "Interaction Between pressure drop of gas and flow of medium in a moving granular bed filter", *Particulate Science and Tech.*, Vol. 5, pp. 131.
- 6.- Péraire, Zienkiewicz and Morgan, 1986, "Shallow water problems: a general explicit formulation.", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, Vol 22, pp. 547-574
- 7.- F.W. Schmidt and A.J. Wilmott, 1981, "Thermal Energy Storage and Regeneration", Hemisphere, New York.
- 8.- J. Tsubaki and C. Tien, 1988, "Gas filtration in granular moving beds. An experimental study", *Canadian J. of Chem. Eng.*, Vol. 66, pp.271.
- 9.- G. Winter, A. Macias, G. Montero, P. Cuesta and E. Jaraiz, 1992, "Two dimensional model of a crossflow moving bed heat exchanger-filter (MHEF) using an adaptive finite element method", Annual meetinf, two-phase flow heat transfer in chemical process equipment sesion Miami, USA.
- 10.- Zienkiewicz, Taylor, 1991, "Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity, Mc Graw Hill.

* Centro de Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (CEAND), Campus Universitario, Tafira Baja, 35017 Gran Canaria, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, E-mail:gabriel@titan.ulpgc.es