

COMPORTAMIENTO DINAMICO DE MEDIOS VISCOELASTICOS TRIDIMENSIONALES

Maeso Fortuny, O. *, Dominguez Abascal, J.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Universidad de Sevilla, (* Universidad de Las Palmas)

Av. Reina Mercedes s/n, 41012-Sevilla

Resumen.— En el artículo presente se analiza el comportamiento dinámico en el dominio de la frecuencia de medios viscoelásticos tridimensionales haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. Se presentan dos tipos de elementos isoparamétricos tridimensionales y se prueba la capacidad de los mismos para el análisis dinámico en el dominio de la frecuencia. Se analizan dos problemas característicos para probar la precisión del planteamiento propuesto. Se comparan resultados con otros obtenidos con un modelo diferente.

Abstract.— In the present paper the frequency domain dynamic behaviour of three dimensional viscoelastic media is studied using the Boundary Element Method. Two different three dimensional isoparametric elements are presented. The capability of those elements for the dynamic analysis in the frequency domain is shown. Two typical problems are studied to show the accuracy of the proposed approach. The results are compared with those obtained using a different model.

1. INTRODUCCION

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) resulta muy adecuado para el análisis dinámico de medios viscoelásticos y en particular para medios infinitos en los que se produce amortiguamiento por radiación que no puede ser tenido en cuenta de forma sencilla en los métodos de dominio.

Hasta el momento presente se han realizado numerosos análisis dinámicos mediante el MEC en dominios bidimensionales, sin embargo, prácticamente no se ha realizado ninguno en dominios tridimensionales no axisimétricos. Distintos investigadores del grupo de trabajo al que pertenecen los autores han venido desarrollando aplicaciones del MEC en dinámica bidimensional tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. El presente trabajo presenta algunas aplicaciones sencillas en problemas viscoelastodinámicos tridimensionales. El estudio es parte de uno más general que incluye varias regiones y dominios infinitos y que permitirá finalmente el análisis de problemas como los de interacción dinámica suelo-estructura o suelo-agua-estructura. Estos problemas no han podido ser abordados mediante modelos tridimensionales de Elementos Finitos debido a la complicación y tamaño de los mismos.

2. ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

Definición de los elementos

Las superficies de cuerpos tridimensionales se discretizan mediante elementos de tipo cuadrilátero isoparamétrico de nueve nodos y elementos de tipo triángulo isoparamétrico de seis nodos (Fig 2.1). La combinación de estos dos tipos de elementos de doble curvatura permite una buena representación de la geometría de la práctica totalidad de superficies que pueden presentarse en la realidad. Las tracciones y desplazamientos sobre la superficie son representados a partir de los valores nodales por funciones parabólicas en dos direcciones. Las coordenadas x_j de un punto cualquiera del elemento vienen determinadas por:

$$x_j = \sum_{i=1}^{NN} \phi^i(\xi_1, \xi_2) x_j^i \quad (1.1)$$

donde NN representa el número de nodos del elemento, x_j^i las coordenadas nodales y ϕ^i las funciones de forma que son escritas en términos de las coordenadas naturales ξ_1, ξ_2 las cuales varían entre +1 y -1 en el caso del cuadrilátero y entre 0 y +1 en el caso

del triángulo (Fig 2.2). Los desplazamientos y tracciones están dados por expresiones semejantes a las de la geometría

donde \mathbf{x}^n , \mathbf{u}^n y \mathbf{p}^n representan los vectores de todas las coordenadas, desplazamientos y tracciones nodales, respectivamente, en el elemento correspondiente.

La forma explícita de las funciones de forma puede encontrarse en [Brebbia y Dominguez, 1989]

Cálculo de los coeficientes de integración

La evaluación de las integrales de las soluciones fundamentales sobre los elementos de contorno, para así calcular los coeficientes del sistema de ecuaciones, constituye el paso numericamente más elaborado del método y el que tiene mayor influencia en su precisión. Las integrales a evaluar son del tipo:

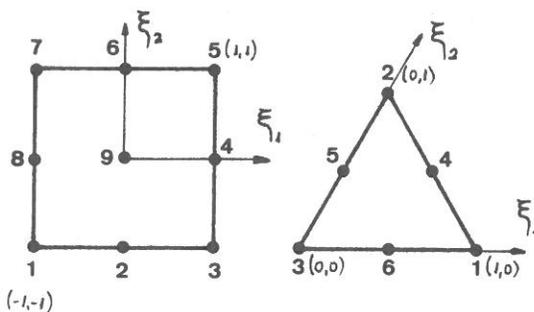
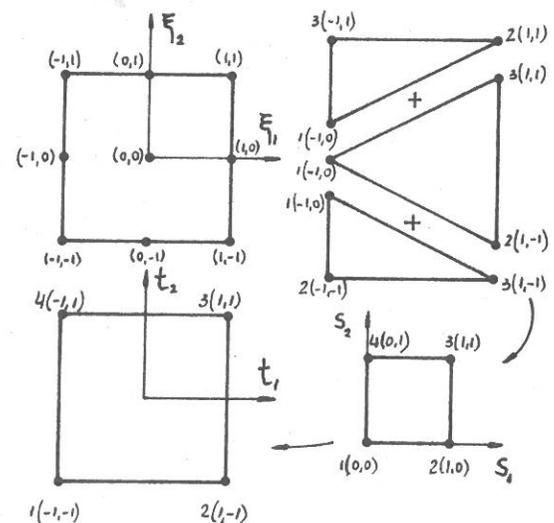
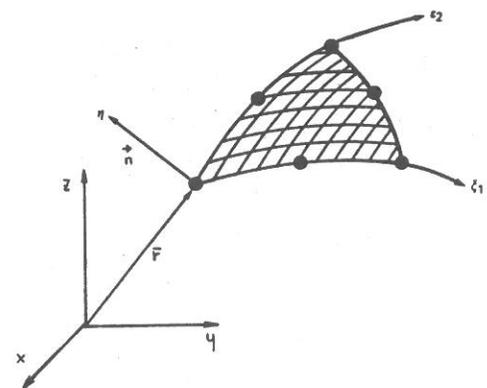
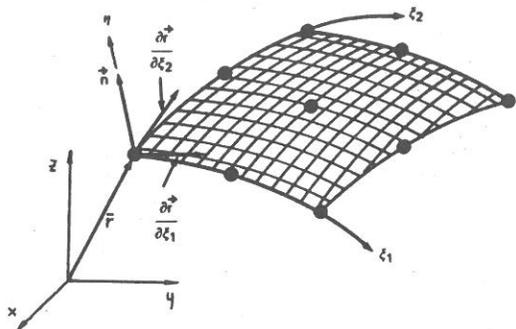


Fig. 2.2 Elementos cuadrilatero y triangulo en coordenadas naturales.

$$u_j = \sum_{i=1}^{NN} \phi^i(\xi_1, \xi_2) u_j^i$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{NN} \phi^i(\xi_1, \xi_2) p_j^i$$

(1.2)

De forma más esquemática, las tres expresiones pueden representarse como:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^n$$

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^n$$

$$\mathbf{p} = \Phi \mathbf{p}^n$$

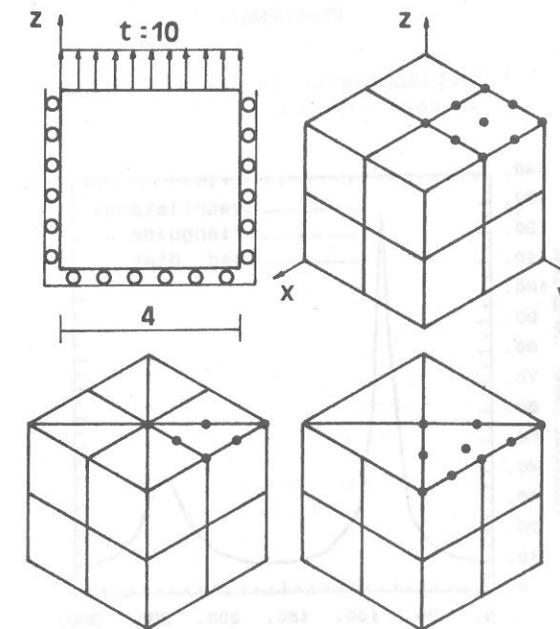
(1.3)

Acoplamiento de los distintos tipos de elementos

El acoplamiento de triángulos y cuadrilateros no presenta ninguna dificultad ya que ambos tienen el mismo número de nodos sobre cada uno de sus lados. Los cuadrilateros pueden distorsionarse en gran medida incluso llegar a colocar dos de sus lados en prolongación.

3. EXPERIMENTOS NUMERICOS

Se trata de mostrar la influencia que tiene sobre la precisión de los resultados el hecho de discretizar la misma geometría con diferentes tipos de elementos. Para ello se ha optado por resolver un problema de geometría sencilla que consiste en un hexaedro con una longitud de arista de cuatro, sometido a una tracción, armónica en el tiempo, uniformemente repartida sobre la cara superior. En las demás caras del hexaedro se impiden los movimientos normales y se dejan libres los tangenciales (Fig. 3.1). Las propiedades del material están definidas por una densidad de 8.75, un módulo de Poisson de 0.3, un módulo de elasticidad transversal de 100 y un coeficiente de amortiguamiento viscoso de 5%, todas ellas definidas sobre un sistema de coordenadas coherentes. Las caras laterales son discretizadas mediante cuadrilateros en todos los casos. Las caras superior e inferior son discretizadas sucesivamente mediante cuadrilateros, triángulos y cuadrilateros degenerados en su geometría hasta una forma triangular. Las discretizaciones indicadas pueden verse en Fig. 3.2.



Figs 3.1 y 3.2 Condiciones de contorno y discretización de un hexaedro sometido a tracción dinámica

$$HW = \int_{\Gamma} T_{ij} \phi^k d\Gamma$$

(1.4)

$$GW = \int_{\Gamma} U_{ij} \phi^k d\Gamma$$

donde T_{ij} y U_{ij} son las tracciones y desplazamientos, respectivamente, de la solución fundamental y Γ indica el elemento de contorno sobre el que se integra.

En cualquiera de las dos integrales anteriores, son bien diferentes las situaciones dependiendo de que el punto de colocación de la solución fundamental esté o no sobre el elemento sobre el que se integra. En el primero de los casos se produce una singularidad del tipo $O(1/r^2)$ en las tracciones y una del tipo $O(1/r)$ en los desplazamientos. La integración de estos núcleos se realiza empleando la estrategia diseñada por Cerrolaza y Alarcón [1989] basada en la subdivisión del elemento cuadrilatero en triángulos tomando como vértice el punto de colocación de la carga concentrada. Posteriormente estos subdominios triangulares, o el elemento triangular completo, son transformados a rectángulos mediante un cambio de coordenadas que hace nulo el Jacobiano en el vértice donde está la singularidad y que por tanto disminuye en una unidad el orden de la misma. Los cuadrilateros resultantes, son integrados mediante una doble cuadratura de Gauss.

La integración de la solución fundamental sobre un elemento en el que no se produce singularidad, se realiza mediante cuadraturas de Gauss para dominios rectangulares o triangulares respectivamente. Se ha utilizado una cuadratura con 6x6 puntos en el primer caso y una de 4x4 en el segundo.

Evaluación de los terminos de la diagonal del sistema

Los terminos de la diagonal del sistema de ecuaciones, aun cuando se trata de un problema dinámico, se evalúan haciendo uso del movimiento de sólido rígido del problema estático definido sobre la misma geometría. Este procedimiento se fundamenta en el hecho de que las singularidades de la solución fundamental del problema armónico son las mismas del problema estático. Por lo tanto, la parte no integrable de las integrales de superficie es la misma en ambos casos. Para poder utilizar este procedimiento se calculan todas las integrales de la solución fundamental dinámica como la suma de la estática más la diferencia entre ambas que no es singular.

En las figuras 3.3 y 3.4 se representan los desplazamientos en el punto central de la cara superior y las tracciones en el de la cara inferior, respectivamente, en función de la frecuencia de la excitación. La concordancia de los resultados es muy alta en los tres casos. No obstante cabe indicar que la uniformidad de los resultados sobre las caras superior e inferior es mas alta con elementos cuadrilateros que en ninguno de los otros casos. La maxima discrepancia entre los valores nodales en una de estas caras es de 0.32% en el caso de cuadrilateros, de 0.38% en el de triangulos y de 1.61% cuando se usan cuadrilateros degenerados a triangulos. Debe notarse que la discretización empleada no permite llegar con precisión a frecuencias mas altas de las aqui estudiadas ya que no podrian representarse adecuadamente las ondas que las variables tienen en el espacio.

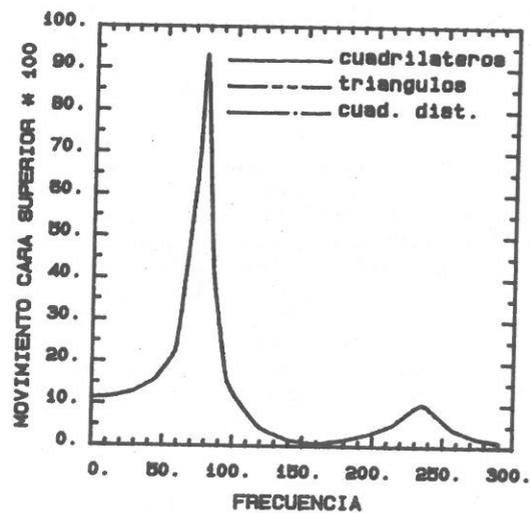


Fig. 3.3 Desplazamiento del punto central de la cara superior.

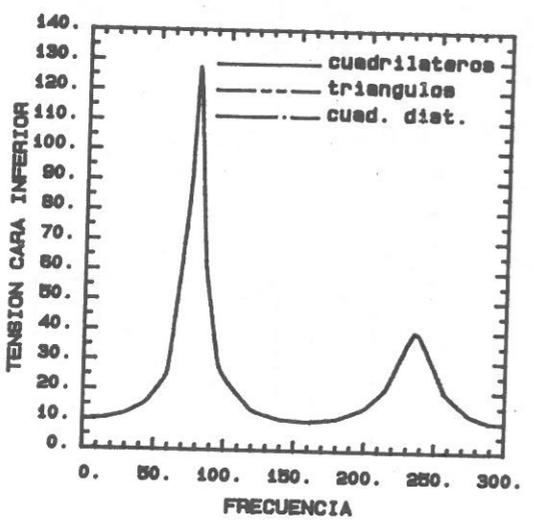


Fig. 3.4 Tracción en el punto central de la cara inferior

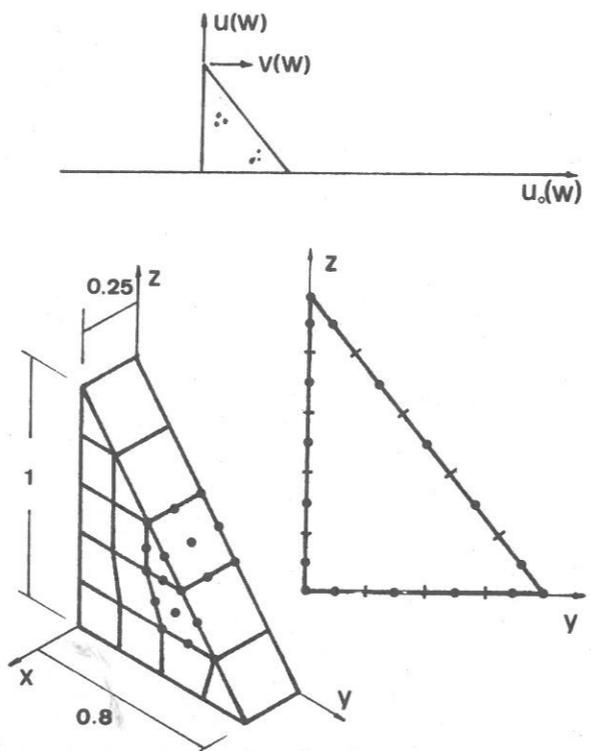


Fig. 4.1 Modelos 2-D y 3-D de una presa de gravedad.

4. RESULTADOS PARA UN MODELO SENCILLO DE PRESA DE GRAVEDAD

Se trata de analizar la respuesta dinámica de un modelo tridimensional de un cuerpo con comportamiento de deformación plana para que de esta forma los resultados puedan ser comparados con los que se obtienen con un modelo bidimensional. Se supone un cuerpo triangular como el que se muestra en la figura 4.1, en la cual se presentan los modelos de elementos de contorno parabolicos tanto bidimensional como tridimensional. El modelo está unido a una base rocosa que se supone infinitamente rígida y que se mueve armónicamente en dirección horizontal o vertical. El embalse se supone vacío. Se ha escogido este problema no solo porque existen resultados anteriores para comparar sino también porque en él se producen deformaciones de flexión y alargamiento acopladas que no son fácilmente representables con elementos finitos u otros tipos de elementos de contorno.

La geometría corresponde a una relación base/altura de 0.8. Se considera un material viscoelástico con una densidad de $2.5 \cdot 10^3$ Kg/m³, un módulo de elasticidad de 2750 MPa un módulo de Poisson de 0.2 y un amortiguamiento viscoso de 5%. Todas las dimensiones geométricas se refieren a la altura del modelo que se considera unidad. Las propiedades y geometría anteriores, así como los resultados del modelo bidimensional, han sido tomadas de [Dominguez y Medina, 1989].

La discretización del modelo tridimensional consta de 40 elementos de tipo cuadrilatero y triangulo. En las caras laterales se impiden los movimientos normales y se dejan libres los tangenciales.

En la figura 4.2 se representan los desplazamientos horizontal y vertical de la coronación de la presa cuando la base está sometida a un desplazamiento armónico amplitud unidad. La frecuencia de la excitación es variada entre cero y cinco veces el valor de la primera frecuencia natural del sistema (ω_1). La comparación con los resultados bidimensionales es muy buena y solamente se produce una ligera discrepancia a las frecuencias mas altas.

En la figura 4.3 se representan los mismos desplazamientos del caso anterior pero cuando la excitación de la base es vertical. De nuevo el acuerdo entre los resultados del modelo tridimensional y el bidimensional es casi total.

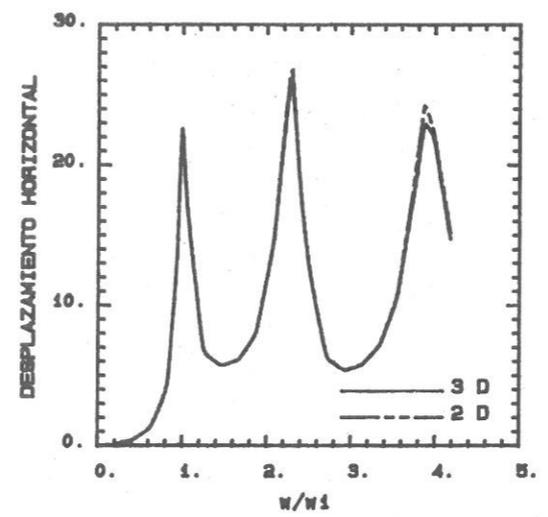


Fig. 4.2 Desplazamientos en la coronación debidos a una excitación horizontal de la base.

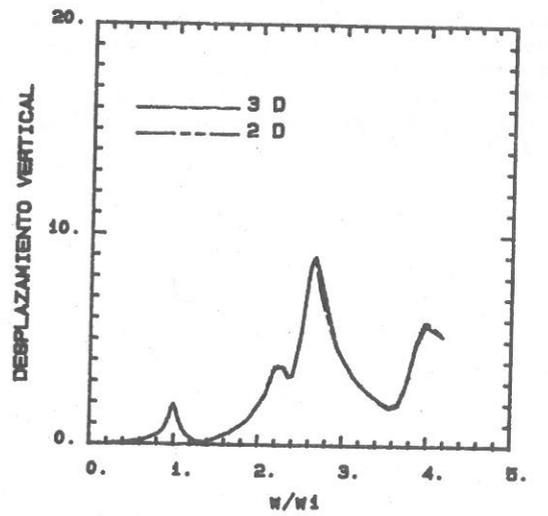
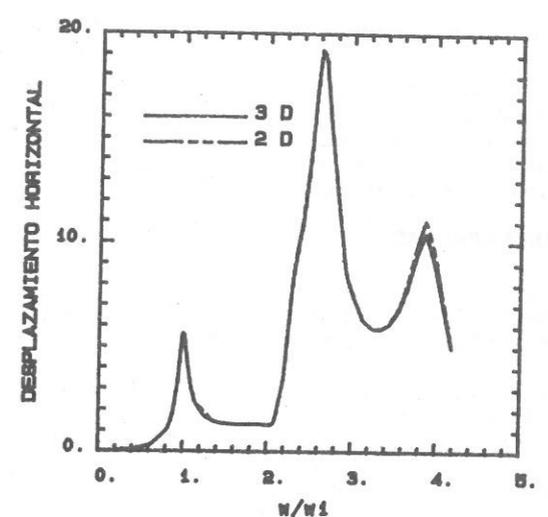
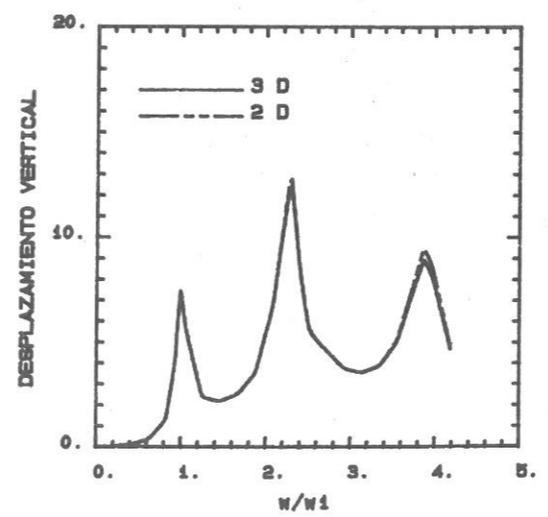


Fig. 4.3 Desplazamientos en la coronación debidos a una excitación vertical de la base.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio dinámico en régimen estacionario de problemas viscoelásticos tridimensionales haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. Se emplean elementos de tipo cuadrilatero y triangulo isoparamétricos de nueve y seis nodos respectivamente. Se muestra primero con un modelo sencillo y mas tarde con un problema mas complejo como con estos tipos de elementos se obtienen muy buenos resultados sin que represente ninguna dificultad especial la combinación de ambos. De todo ello se puede concluir que el Método tal como es aquí implementado constituye una herramienta muy adecuada para el análisis dinámico de problemas tridimensionales que de otro modo tendrían que estudiarse empleando Elementos Finitos con el consiguiente incremento del número de incógnitas y dificultad de discretización de dominios tridimensionales.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su agradecimiento a la Junta de Andalucía y a la Universidad de Las Palmas por el soporte económico que de ellas reciben para este proyecto de investigación.

7. REFERENCIAS

Brebbia C.A. y Dominguez, J. (1989), Boundary Elements: An introductory course, CMP and McGraw-Hill, Southampton- New York.

Cerrolaza, M. y Alarcón, E. (1989), A bicubic coordinate transformation for the evaluation of the Cauchy Principal Value integrals., Int. Journ. Num. Meth. Eng Vol.28, pp.987-1000.

Dominguez, J. y Medina F. (1989) Boundary Elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects,II. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.6, No.3.