

anales de ingeniería mecánica

revista de la asociación española de ingeniería mecánica

año 12 / volumen 3 / diciembre 1998

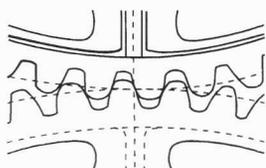


EDITORES

Dr. Francesc Astals Coma

Dr. Jaime Gibert Pedrosa

Este número de la revista recoge las ponencias presentadas en el



XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica

Terrassa, 2,3 y 4 de Diciembre de 1998



**Escuela Técnica Superior
de Ingenieros Industriales
de Terrassa**



Universitat Politècnica de Catalunya

Edita: Asociación Española de Ingeniería Mecánica

Imprime: Serafí Indústria Gràfica Publicitària, S.A.
Tel. 937 801 529. Terrassa

I.S.S.N.: 0212 - 5072

Depósito legal: B-48.378-1998

RESISTENCIA DE MATERIALES Y ESTRUCTURAS

DISEÑO ÓPTIMO DE FORMA DE LA CARCASA DE UNA BOMBA CENTRÍFUGA Ansola,R., Canales, J., Tarrago, J. A., Alcaraz, J.L.	380
ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL COMPORTAMIENTO A IMPACTO DE MATERIALES LAMINA- DOS EMPLEADOS EN ESTRUCTURAS DE VEHÍCULOS Baselga,S., Maza, M., Sanz, P.	386
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO A IMPACTO DE MATERIALES AVANZA- DOS UTILIZADOS EN LA INDÚSTRIA DEL TRANSPORTE Baselga,S., Sanz, O., Maza, M.	392
DESARROLLO DE UN DISIPADOR DE ENERGÍA POR PLASTIFICACIÓN DE METALES POR CORTANTE Cachís,X., Bozzo, L.M., Torres, Ll.	398
LA GALERIA DE SERVICIO COMO ELEMENTO COORDINADOR E INTEGRADOR DE LAS INSTALACIONES URBANAS Cano,J.J., Canto, J.	404
DISEÑO Y CALCULO INFORMATIZADO DE CUBIERTAS METALIZAS DE NAVES INDUSTRIALES Montalvá,J.M., Canto, J.	409
UN PROGRAMA EFICIENTE PARA EL DISEÑO AUTOMATICO DE ESTRUCTURAS CON PER- FILES DE CANTO VARIABLE Cardenal,J., Sanchez-Tembleque, F.	415
OPTIMIZACIÓN DEL ACONDICIONAMIENTO SISMICO EN PUENTES MEDIANTE EL AISLA- MIENTO EN LA BASE DEL TABLERO Cascón,R.	421
PROCEDIMIENTO GENERAL PARA LA INTEGRACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL TRIDIMENSIONAL EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO Chirino,F., Aznárez, J.J., Maeso,O.	427
LAUNCHING CALCULATIONS FOR VERY LARGE SHIPS Forbes,D.A., Amadas,B, Berga, X	434
CONTRIBUCIONES A LA OPTIMIZACION DEL DISEÑO DE MATRICES PARA EMBUTICION PROFUNDA, MEDIANTE SIMULACION NUMERICA CON EL CODIGO DINAMICO EXPLICITO STAMPACK Fruitos,O., Ferriz, A., Carbonell, J., Viedma, A., Oñate, E.	440
NUEVA APROXIMACION AL MODELO DE COMPORTAMIENTO MECANICO DE UNA PIEZA HELICOIDAL Gimena,F.N., Gimena, L., Gonzaga, P.	447
NUEVAS TENDENCIAS EN EL MODELAJE PARA EL DISEÑO DE CONEXIONES ESTRUCTU- RALES DE ACERO SOMETIDAS A CARGAS EXCENTRICAS González,O.	453
VIGA RETICULADA EN DOS PLANOS ORTOGONALES González,A.M., Alvarez, F.J., Marcos, M., Listan,D., O'dogerty, O.	461

Procedimiento General para la Integración de la Solución Fundamental Tridimensional en el Método de los Elementos de Contorno.

F. Chirino Godoy, O. Maeso Fortuny y J. Aznárez González
 E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
 Campus Universitario de Tafira. 35017- Las Palmas de Gran Canaria.
 E-mail: maeso@cicei.ulpgc.es

Resumen

Se presenta una estrategia para la evaluación directa de las integrales en el sentido del Valor Principal de Cauchy de la formulación elástica tridimensional del Método de los Elementos de Contorno. El procedimiento propuesto permite regularizar en coordenadas cartesianas los términos fuertemente singulares de los núcleos de integración, que finalmente se expresan como suma de integrales no singulares, evaluables numéricamente con cuadraturas estándar de bajo orden. Se analizan los distintos términos de la solución fundamental, y se extrae la singularidad mediante la aplicación del teorema de Stokes. El procedimiento es completamente general, y aplicable a elementos tridimensionales curvos de cualquier orden y tipo. Asimismo, puede extrapolarse fácilmente a elementos discontinuos y formulaciones en las que el punto de colocación no forme parte de la discretización. Se presentan distintos resultados que demuestran la validez del procedimiento.

Abstract

A direct approach for evaluation of Cauchy Principal Value integrals of Elastic Boundary Elements formulation is presented. The proposed technique allows to regularize the strong singular kernels in cartesian coordinates, which are finally written as sum of no singular integrals. The computation is then performed by standar quadratures of low order. The fundamental solution is analyzed, and the singularity is subtracted out by application of Stokes theorem. The method has general validity, and can be applied to curved boundary elements of any order and type, even in the case of discontinuous elements. To show the efficiency of the proposed method different numerical results are given.

1. Introducción

En cualquier representación integral con el Método de los Elementos de Contorno (MEC) surgen inevitablemente integrales de superficie con singularidades del orden $O(1/r)$ y $O(1/r^2)$, siendo r la distancia desde el punto de aplicación. La posibilidad de una integración analítica se limita en la práctica al caso de elementos planos, por lo que para una aplicación general con funciones de aproximación de orden superior la evaluación de las integrales singulares, que deben entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC), debe abordarse de forma numérica. Existen en la bibliografía del MEC estrategias indirectas que evitan el cálculo de las integrales del VPC. Piénsese en el movimiento de sólido rígido (MSR) para el caso elastostático, o el campo equipotencial estático para un problema de potencial (p.e. Brebbia y Domínguez, 1992). Estos procedimientos indirectos tienen la ventaja que evitan también el cálculo de los términos libres c_{ij} . Sin embargo tienen algunas desventajas que no pueden obviarse. Así por ejemplo, cuando se trata de problemas armónicos, la aplicación del MSR exige combinar las ecuaciones del problema dinámico con las del caso estático (Domínguez, 1993), y si además el dominio en estudio contiene regiones no acotadas, se hace necesario cerrar la discretización con *elementos ficticios* sobre los que integrar la solución fundamental estática.

Los antecedentes más cercanos de evaluación directa de las integrales del VPC en elementos curvos de orden superior lo constituyen los trabajos de Giugiani et al. (1987, 1990). Estos autores utilizan una estrategia de transformación a polares desde el punto singular, y una expansión asintótica del integrando, expresado en las nuevas coordenadas. Tras algunas operaciones matemáticas, las integrales singulares de superficie se expresan como suma de integrales regulares. El trabajo que aquí se presenta sigue la línea de los anteriores en el sentido de que ambos muestran cómo la dificultad de obtención del VPC es realmente ficticia, puesto que la singularidad se *desvanece* con la contribución de los elementos adyacentes. Sin embargo a juicio de los autores es una estrategia más simple y menos costosa desde el punto de vista matemático. El procedimiento es válido para elementos curvos de cualquier orden y tipo, y se basa en la identificación concreta de los términos fuertemente singulares, que son regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra lineal extendida al perímetro del elemento, ambas no singulares y evaluables con cuadraturas estándar. Este método muestra de forma clara dónde radica la contribución de los elementos adyacentes para cancelar la singularidad en el entorno cercano del punto de aplicación. La técnica permite mantener la estructura clásica de los códigos de elementos de contorno por lo que su implementación en programas ya existentes es muy directa. Para verificar la su efectividad se abordan algunos experimentos numéricos. Los resultados resultan ser muy precisos.

2. Ecuaciones básicas y Elementos de Contorno.

La formulación elástica del MEC se plantea a partir de la representación integral de desplazamientos y tracciones en el contorno Γ del medio en estudio Ω . Usando una notación vectorial, puede escribirse para cualquier punto i de Ω :

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (1)$$

donde las integrales sobre Γ han de ser entendidas en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC); u y p representan desplazamientos y tracciones respectivamente; u^* y p^* constituyen la solución fundamental; el tensor de términos libres c^i toma valores $(1/2)I$ para puntos en los que el contorno es suave, siendo I la matriz identidad. Las expresiones de c^i , u^* y p^* pueden encontrarse por ejemplo en Brebbia y Domínguez (1992).

Para el planteamiento numérico de esta ecuación, el contorno Γ se divide en un número NE de elementos. Cada elemento j contiene NJ nodos, de manera que los campos de desplazamientos u y tracciones p sobre en el mismo se pueden aproximar a partir de los valores nodales. En este trabajo se han utilizado elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente, de doble curvatura (Fig. 1). La geometría se aproxima de igual forma.

$$u = \Phi u^i \quad p = \Phi p^i \quad x = \Phi x^i \quad (2)$$

Tras el proceso de discretización, la ecuación (1) se convierte en:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} p^j \quad (3)$$

la cual puede escribirse para todos los nodos del contorno para obtener finalmente el sistema de ecuaciones:

$$H u = G p \quad (4)$$

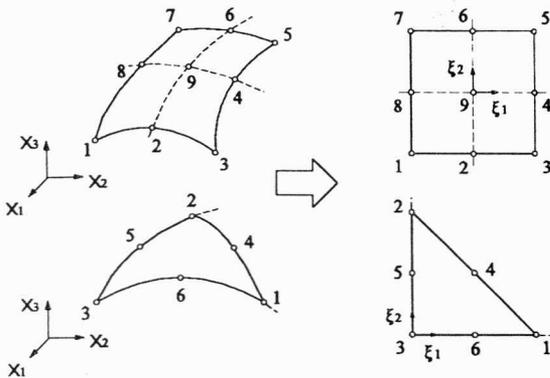


Fig.1. Elementos cuadráticos tridimensionales

La evaluación de estas integrales puede realizarse mediante una cuadratura gaussiana estandar cuando el punto de colocación i no pertenece al elemento j . En caso contrario los núcleos u^* y p^* presentan singularidades del orden $(1/r)$ y $(1/r^2)$ respectivamente. Las singularidades del primer tipo pueden ser tratadas numéricamente mediante un proceso de subdivisión del elemento en triángulos (Li et al., 1985). En el presente artículo se plantea un procedimiento para la evaluación directa de las integrales fuertemente singulares $O(1/r^2)$.

3. Evaluación de las Integrales Fuertemente Singulares.

La singularidad fuerte se encuentra en las integrales correspondientes a la solución fundamental en tensiones, que son del tipo (Brebbia y Domínguez, 1992):

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^* \phi_q d\Gamma = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 3 r_{,k} r_{,i}] \phi_q d\Gamma + (1-2\nu) \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma \right\} \quad (5)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$, \mathbf{n} es la normal exterior al contorno en \mathbf{x} , siendo μ y ν las constantes elásticas del material. Como $\partial r / \partial n = O(r)$, la primera integral es regular y puede evaluarse numéricamente. La segunda, si $l \neq k$, presenta una singularidad del tipo $(1/r^2)$ cuando $\phi_q \neq 0$ en el punto de colocación. El proceso de cancelación de esta singularidad, que representa el núcleo central de este artículo, se realiza en varias fases. En primer lugar, podemos reescribir el segundo término de (5) como sigue:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) (\phi_q - \phi_q^i) d\Gamma + \phi_q^i \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) d\Gamma = I_1 + I_2 \quad (6)$$

siendo ϕ_q^i el valor de la función de forma en el punto de colocación. Con ello, l_i es regular y puede evaluarse numéricamente. La singularidad se concentra en l_2 . La idea consiste en expresar el subintegrando de l_2 en términos del flujo del rotacional de un campo vectorial. Así, por ejemplo, para el caso $l = 1$ y $k = 2$ el campo vectorial es del tipo $Z = 1/r \mathbf{e}_3$, donde \mathbf{e}_3 representa un vector unitario en la dirección de x_3 . Llamando \mathbf{n} a la normal exterior al elemento en cualquier punto, podemos escribir:

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times Z) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{j2} \mathbf{e}_1 - r_{j1} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{j2} n_1 - r_{j1} n_2) \, d\Gamma \quad (7)$$

Aplicando el teorema de Stokes al citado campo vectorial:

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times Z) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \oint_{S_j} Z \, dS \quad (8)$$

donde S_j representa el perímetro del elemento Γ_j (la Fig. 2 muestra el caso de aplicación de carga en el nodo 1). Todas las integrales están entendidas en el sentido del VPC. Así, introduciendo (7) en (8):

$$- \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{j2} n_1 - r_{j1} n_2) \, d\Gamma = \oint_{S_j} \frac{1}{r} \mathbf{e}_3 \, dS = \oint_{S_j} \frac{1}{r} \, dx_3 \quad (9)$$

Por tanto, si $l = 1$, $k = 2$; $Z = 1/r \mathbf{e}_3$, podemos escribir:

$$l_2 = - \oint_{S_j} \frac{1}{r} \, dx_3 \quad (10.a)$$

Operando de forma análoga se obtienen el resto de términos singulares:

$$l=1 \text{ y } k=3, Z = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2 \rightarrow l_2 = \oint_{S_j} \frac{1}{r} \, dx_2 \quad ; \quad l=2 \text{ y } k=3, Z = \frac{1}{r} \mathbf{e}_1 \rightarrow l_2 = - \oint_{S_j} \frac{1}{r} \, dx_2 \quad (10.b)$$

Aún cuando estas integrales monodimensionales mantienen la singularidad, el camino para su cancelación ha quedado trazado. Consideremos el elemento Γ_j y los de su entorno tal y como aparecen en la Fig. 2. La integral curvilínea en que ha quedado transformada l_2 sobre Γ_j puede descomponerse según las curvas que constituyen el perímetro del elemento:

$$\oint_{S_j} \frac{1}{r} \, dx_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j1}} \frac{1}{r} \, dx_\alpha + \int_{S_{j2}} \frac{1}{r} \, dx_\alpha + \int_{S_{j3}} \frac{1}{r} \, dx_\alpha + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j4}} \frac{1}{r} \, dx_\alpha + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \, dx_\alpha \quad (11)$$

Las integrales sobre S_{j2} y S_{j3} (curvas que no contienen el punto de colocación) no presentan problemas y pueden ser evaluadas de acuerdo a una cuadratura estandar monodimensional. Las extendidas a lo largo de S_{j1} y S_{j4} (singulares) se cancelan con las correspondientes a los elementos Γ_k y Γ_n . Por último, para integral sobre $S_{j\epsilon}$ se verifica, si se considera la aportación de los elementos que confluyen en i ($m=j,k,l,n$):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_m \int_{S_{m\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \, dx_\alpha \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \oint_{S_i} \, dx_\alpha \right) = 0 \quad (12)$$

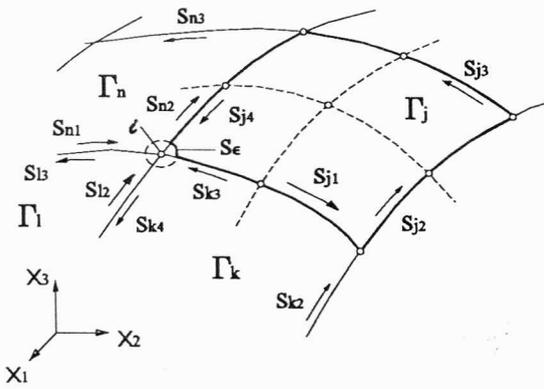


Fig.2. Cancelación singularidad.
Nodo esquina.

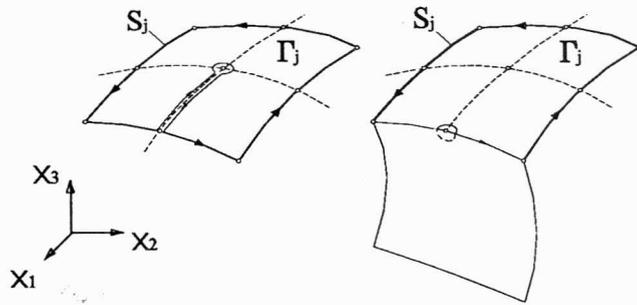


Fig.3. Cancelación singularidad.
Nodo interno o borde

Por tanto, la integral de superficie en el elemento (5) ha sido expresada como suma de dos integrales de superficie y una tercera curvilínea, todas ellas regulares. La Fig.3 representa la generalización del procedimiento para otras situaciones del punto de colocación, aunque es importante notar que la técnica es directamente aplicable aun si el punto de colocación no corresponde a ningún nodo de la discretización. También lo es para problemas que impliquen soluciones fundamentales con el mismo tipo de singularidad.

4. Resultados Numéricos.

Para validar el procedimiento de obtención de las integrales singulares en el sentido del VPC, se analiza el cuerpo tridimensional que aparece en la Fig.4 para un problema elastostático. El mismo test fue llevado a cabo por Guiggiani y Gigante (1990). La discretización consta de 16 elementos cuadriláteros de nueve nodos. El material está caracterizado por las constantes $\mu=1$ y $\nu = 0.3$.

Los núcleos de integración correspondientes a las tensiones han sido obtenidas para tres puntos de colocación (1, 2 y 3) con distintas geometrías locales. Los núcleos recogen la aportación de todos los elementos a los que cada nodo pertenece. Los resultados obtenidos se han comparado con los evaluados de forma indirecta a través de la técnica del movimiento de sólido rígido (Tablas 1, 2 y 3). Esta técnica, como ya se ha comentado, permite la obtención de la suma de las integrales en el sentido del VPC y el coeficiente c_{ik} correspondiente al término libre.

En la evaluación directa de los núcleos de integración singulares, las integrales de superficie (con singularidad débil), previa subdivisión en triángulos, se realizan mediante una cuadratura gaussiana bidimensional estándar con 6x6 puntos. Para las

integrales curvilíneas (10.a y b) se utiliza una cuadratura monodimensional con 6 puntos en cada lado del elemento. El análisis realizado requiere de la obtención del término libre para la discretización empleada. Se ha seguido el procedimiento propuesto por Hartmann (1980). Los valores obtenidos de c_{ik} como es lógico, dependen de la geometría local y de la discretización empleada a través de (2).

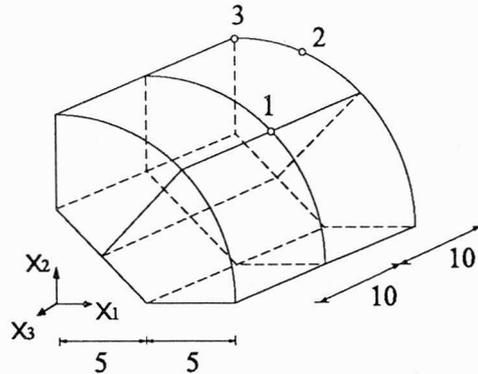


Fig.4. Sólido elástico. Geometría y discretización

Núcleo	VPC Int. (1)	C_{ik} (2)	Total (1) + (2)	MSR
$h_{11} = h_{22}$	-0.017148	0.495573	0.478425	0.478425
$h_{12} = h_{21}$	0.012660	0.003162	0.015822	0.015825
$h_{13} = h_{31}$	= 0.0	= 0.0	= 0.0	= 0.0
$h_{23} = h_{32}$	= 0.0	= 0.0	= 0.0	= 0.0
h_{33}	-0.014011	0.495573	0.481562	0.481562

Tabla 1. Núcleos de integración *nodo 1* (contorno suave).

Núcleo	VPC Int. (1)	C_{ik} (2)	Total (1) + (2)	MSR
h_{11}	-0.024929	0.25	0.225071	0.225093
$h_{12} = h_{21}$	0.008491	0.0	0.008491	0.008492
h_{13}	-0.011095	-0.043504	-0.054599	-0.054623
h_{22}	-0.007947	0.25	0.242053	0.242058
h_{23}	-0.028070	-0.105028	-0.133098	-0.133102
h_{31}	0.011561	-0.043504	-0.031943	-0.031966
h_{32}	0.029196	-0.105028	-0.075832	-0.075836
h_{33}	-0.011937	0.25	0.238063	0.238054

Tabla 2. Núcleos de integración *nodo 2* (borde del contorno).

Núcleo	VPC Int. (1)	C _{ik} (2)	Total (1) + (2)	MSR
h_{11}	-0.007452	0.123096	0.115644	0.115644
h_{12}	0.008317	-0.056830	-0.048513	-0.048513
h_{13}	-0.000717	0.056048	0.055331	0.055330
h_{21}	-0.007874	-0.056830	-0.064704	-0.064704
h_{22}	-0.001121	0.124682	0.123561	0.123562
h_{23}	-0.010433	-0.056836	-0.067269	-0.067268
h_{31}	-0.004972	0.056048	0.051076	0.051075
h_{32}	0.010691	-0.056836	-0.046145	-0.046144
h_{33}	-0.003502	0.123889	0.120387	0.120386

Tabla 3. Núcleos de integración *nodo 3* (esquina del contorno).

Como puede observarse en las tablas adjuntas (columnas 3 y 4), los resultados proporcionados por ambas técnicas son prácticamente coincidentes. Se concluye que el planteamiento directo de resolución de las integrales en el sentido del VPC presentado en este artículo es insensible a la discretización local, sencillo en su implementación y, según los resultados obtenidos, competente.

5. Conclusiones

En este artículo se ha desarrollado un procedimiento para la evaluación directa de las integrales del VPC en la formulación tridimensional del MEC. La estrategia reduce las integrales singulares en el sentido del VPC a una suma de integrales regulares evaluables de forma numérica con cuadraturas estándar de bajo orden. Es un procedimiento simple, robusto y aplicable a elementos curvos de cualquier orden y tipo. La técnica se ha aplicado a problemas elastostáticos, pero puede generalizarse a problemas elastodinámicos y poroelastodinámicos puesto que en los tres casos los términos fuertemente singulares son idénticos. La incorporación del procedimiento a los programas tridimensionales de elementos de contorno ya existentes es directa. Se han presentado resultados numéricos que validan la buena aptitud del método.

6. Agradecimientos.

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica (PB96-1322-C03-03).

7. Referencias.

- BREBBIA, C.A. y DOMÍNGUEZ, J. (1992) "Boundary elements. An introductory course", 2nd edn, C.M.P. & McGraw-Hill.
- DOMÍNGUEZ, J. (1993) "Boundary elements in dynamics", C.M.P. & Elsevier.
- GUIGGIANI, M. y CASALINI, P. (1987) "Direct computation of C. P. V. integrals in advanced boundary elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol.24, pp 1711-1720.
- GUIGGIANI, M. y GIGANTE, A. (1990) "A general algorithm for multidimensional C.P.V. integral in B.E.M.", *ASME J. Applied Mechanics*, vol.57, pp 906-915.
- HARTMANN, F. (1980) "Computing C-matrix in non-smooth boundary points", *New Developments in Boundary Element Methods*, C.A. Brebbia ed., pp 367-379.
- LI, H.B., HAN, G.M. y MANG, H.A. (1985) "A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct B.E.M.", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 21, pp 2071-2098.