GUÍA DE MECANICA DE FLUIDOS Y ONDAS

Licenciatura de Ciencias del Mar

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Prof. José Luís Pelegrí Llopart

Curso 1996 – 1997

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

1. Objetivos

El objetivo académico fundamental del presente programa es que el estudiante se familiarice con los conceptos fundamentales de la Mecánica de Fluidos y sus peculiaridades en el caso de Flujos Geofísicos, y pueda aplicarlos a los flujos oceánicos y atmosféricos. Para ello el estudiante debe desarrollar capacidades de abstracción de conceptos e idealización de problemas, de tal manera que pueda discernir los principales mecanismos que controlan el flujo y encontrar una descripción aproximada del mismo.

De modo general podemos agrupar los contenidos/habilidades que el estudiante debe comprender/manejar en dos grandes areas:

1) Fundamentos de la Mecánica de Fluidos: Cinemática, Estática y Dinámica, Termodinámica de fluidos, energía, flujo compresible/incompresible, flujo rotacional/irrotacional, teoría potencial, inestabilidad y turbulencia.

2) Aspectos fundamentales de la Mecánica de Fluidos Geofísicos: sistema de referencia rotante, soluciones sobre una esfera, estratificación, circulación estacionaria, ondas en Fluidos Geofísicos, movimientos forzados, vorticidad potencial.

Estos objetivos serán desglosados posteriormente en bloques para los principales contenidos teóricos de la asignatura En los contenidos teóricos se incluyen los conceptos básicos de todos los temas a discutir, los cuales son apoyados por los análisis realizados como parte de las prácticas de laboratorio y problemas.

Anexo a estos objetivos académicos existen otros objetivos de índole formativo personal, que consisten principalmente en el desarrollo de actitudes de trabajo individual y en grupo, de habilidades de investigación sobre un tema, y de capacidades de presentación oral y escrita de los resultados.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

2. Metodología Docente

El método docente a utilizar se basa en la motivación al estudiante durante el proceso de enseñanza, que promueva su creatividad intelectual y madurez de razonamiento. Para alcanzar estos objetivos en carreras científicas debe fomentarse la participación del estudiante en tareas concretas de investigación, utilizando así la riqueza de compartir las vivencias de su profesor/investigador. A continuación se expondrán, en forma resumida, algunas de las técnicas que pueden utilizarse para el desarrollo de estas actitudes y habilidades.

El método didáctico aquí propuesto se basa fundamentalmente en el desarrollo de técnicas activas, en donde el estudiante se esfuerza en ser el sujeto de su propio aprendizaje, en lugar de técnicas pasivas, donde el estudiante es un mero receptor de una serie de conocimientos. El profesor de la asignatura cree sinceramente que para la gran mayoría de los estudiantes el camino hacia la ilusión, creatividad y madurez sólo puede andarse mediante técnicas activas, que por encima de todo fomenten la participación e interés del estudiante en la materia. Ello se debe, principalmente, al convencimiento de que el aprendizaje real (que comprende no solo entender una idea sino también madurarla para poder aplicarla a diversas situaciones) sólo se consigue a través de un interés sincero del estudiante en la comprensión de la asignatura y no mediante su interés por superar los examenes.

El profesor de una asignatura debe ser un medio importante para que los estudiantes se interesen por esa asignatura, pero el acercamiento real debe ser realizado por los mismos estudiantes. El profesor de una asignatura no puede hacerlo por ellos, pues si lo intentase el curso carecería de vida, sería una experiencia muerta. En este caso los estudiantes tomarían notas y realizarían un examen, sin

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

plantearse la necesidad de otro tipo de aprendizaje. El resultado muy probablemente sería una comprensión muy limitada de la asignatura y la falta de interés en la misma. En un caso así el olvido de la asignatura sería con casi toda seguridad rápido e irreversible. La alternativa radica en que el estudiante se interese por la asignatura, que los estudiantes se reunan y conversen sobre ella, que el curso se llene de actitudes de expectativa, interés e ilusión. A continuación se detallan las técnicas activas propuestas para alcanzar los objetivos anteriores.

Exposición didáctica interactiva

Estas son exposiciones del profesor de la asignatura, de carácter lo más interactivo posible, que forman el esqueleto de la asignatura. En estas exposiciones el profesor desarrolla los conceptos fundamentales de la asignatura de acuerdo a los objetivos prefijados en los diversos bloques que la componen. Un aspecto fundamental de estas exposiciones es la interacción profesor-estudiante: el profesor debe continuamente mantener la atención e interés del estudiante incentivando su participación a través de preguntas relacionadas con el tema que se desarrolla y discute. Las preguntas deben permitir al estudiante proponer y examinar hipótesis, comparar diferentes alternativas, utilizar su intuición individual, comprender las conclusiones obtenidas, aplicar los formulismos a problemas concretos, y analizar la validez de los resultados obtenidos.

Revisión de literatura

Es fundamental incentivar al estudiante para que el, por su propia iniciativa, repase y amplie los conceptos presentados por el profesor en sus exposiciones. Para ello el profesor debe, primero, orientar a los estudiantes a través de una

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

variada lista de referencias de lectura y, segundo, motivar al estudiante a través de la realización de trabajos en grupo y su presentación al resto de la clase en actividades de tipo coloquio.

Trabajos en grupo

Estos trabajos combinarán aspectos teóricos, prácticos y experimentales. En estos trabajos los estudiantes revisarán uno de los temas de la asignatura, cuyos conceptos básicos hayan sido previamente discutidos por el profesor en clase. Se estimulará el análisis y reinterpretación de los conceptos a la luz de su propia experiencia (intuición), se aplicarán los conceptos a la resolución de problemas y se diseñará una experiencia práctica que esté relacionada con el tema. En todos los casos debe fomentarse que el tema sea ampliamente debatido y racionalizado dentro del grupo. Para ello se utilizará la técnica de presentación y discusión con el resto de la clase, que se elabora a continuación. Una vez debatido el trabajo en clase el grupo deberá elaborar un infórme lo más crítico posible, que incorpore su visión personal del tema discutido, evitando que sea una mera repetición de los conceptos presentados en libros. Este esfuerzo sintético y crítico es un paso fundamental para la clarificación de los conceptos, siendo además de gran valor para desarrollar las habilidades encaminadas a la preparación de informes.

Discusión dirigida

Este tipo de discusiones se llevarán a cabo una vez que los conceptos fundamentales de un tema hayan sido examinados por uno de los grupos de trabajo. En este tipo de actividad los estudiantes que han examinado el tema en cuestión ofrecen su interpretación y aplicación del mismo al resto de los estudiantes, quienes

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

podrán plantear preguntas y dudas para su debate general. En estos debates el profesor de la asignatura tendrá una actitud moderadora, de tal manera que no se pierdan de vista los objetivos de la discusión, pero deberá dejar que el peso de los razonamientos lo lleve el grupo encargado del tema.

Experiencias de laboratorio

El programa plantea una serie de trece experimentos de laboratorio, que pueden ser complementados con otros experimentos diseñados por los grupos de trabajo antes mencionados. El objetivo de estos experimentos es fundamental en una ciencia como la Mecánica de Fluidos Geofísicos. Ellos permiten visualizar e interiorizar de manera fácil y efectiva muchos de los conceptos discutidos en las clases teóricas, de mañera que nunca más se olviden. Los experimentos permiten aislar algunos de las principales relaciones entre causas y efectos y al mismo tiempo apreciar la complejidad de la naturaleza.

Los experimentos de laboratorio deben ser llevados a cabo por los mismos estudiantes a partir de una guía orientativa. En cualquier caso la guía preparada por el profesor debe servir sólo como orientación y debe estimularse la creación de nuevos enfoques y la extensión de los experimentos con nuevas variables. El papel del profesor será (1) el de incentivar el debate a través de orientar la atención hacia aquellos aspectos del experimento que puedan pasar desapercibidos, y (2) el de moderador las discusiones que puedan surgir. En caso que surjan interpretaciones erróneas el profesor debe intentar orientar la discusión de modo que estas sean cuestionadas por los propios estudiantes.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Clases de problemas

Otro aspecto del programa de la asignatura es la realización de problemas, bien planteados por el profesor o por los mismos estudiantes a través de sus grupos de trabajo. Estos problemas deben ser resueltos por todos los estudiantes, usualmente coordinados por el grupo a cargo del tema al que correspondan. El papel del profesor de nuevo será fundamentalmente incentivador y moderador.

Material audiovisual e informático

Los materiales audiovisuales e informáticos destacan entre los recursos didácticos que pueden ser importantes para la motivación del estudiante y la ilustración adecuada de los conceptos que se discutan en clase. Los videos sobre experimentos en Mecánica de Fluidos (por ejemplo, del National Committee for Fluid Mechanics Films, 1972) pueden ser muy ilustrativos. Asimismo, cada vez es posible acceder a una mayor cantidad de material a través del ordenador, tales como las bases de datos hidrográficos interactivas (por ejemplo, los programas OceanAtlas para Macintosh o ATLAST para PC). Finalmente, ahora es relativamente fácil encontrar material relacionado con las aplicaciones de la Mecánica de Fluidos Geofísicos al océano y la atmósfera en Internet. Así, por ejemplo, pueden encontrarse mapas con imágenes del satélite Meteosat en el World Wide Web, en la dirección http://www.iac.es.

Tutorías

En el enfoque docente aquí planteado el papel de las tutorías es fundamental. El profesor debe estar presente para orientar, si fuese necesario, todas las iniciativas de los estudiantes encaminadas hacia su aprendizaje activo. Estas tutorías

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

servirán de apoyo en las diversas actividades de los estudiantes: trabajos en grupo, actividades de laboratorio, resolución de problemas. Debe tenerse claro, sin embargo, que las tutorías no deben ser en modo alguno paternalistas, en el sentido de que hay que incentivar al estudiante para que enfrente y resuelva sus problemas, de manera que pueda continuamente caminar en el proceso de desarrollo de su madurez.

Actividades extracurriculares

El método docente propuesto se basa en la participación activa del estudiante, en el desarrollo de su entusiasmo e interés por la asignatura de tal manera que esta se transforme en algo motivante y digno de discusión fuera del aula. De acuerdo a este criterio es importante ofrecer al estudiante la posibilidad de continuar y profundizar el interés que se está desarrollando, a través de actividades extracurriculares tales como grupos de discusión, participación en proyectos de investigacción, realización de proyectos propios, desarrollo de talleres y jornadas estudiantiles, etc. Para ello es fundamental una actitud abierta por parte del profesor, que proyecte su interés por la enseñanza más alla de lo estrictamente requerido por el programa de la asignatura.

3. Contenido

A continuación se presenta el contenido de la asignatura de Mecánica de Fluidos y Ondas para la Licenciatura de Ciencias del Mar de la ULPGC. Se ha creido conveniente que la extensión del programa aquí presentado sea exhaustiva, a riesgo de que supere a la extensión real de la asignatura en la Licenciatura en

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Ciencias del Mar. Ello da considerable flexibilidad en la selección del nivel de los temas, adaptándose tanto a los contenidos básicos que deben discutirse como a los tópicos que sean de interés para el estudiante.

El contenido de la asignatura se ha estructurado en tres partes: teoría, experiencias de laboratorios y realización de problemas. Esta estructura está acorde con el hecho de que los créditos de la asignatura comprenden créditos teóricos, para un desarrollo teórico formal, y créditos de prácticas, que deben ser tanto de laboratorio como de resolución de problemas.

3.1 Teoría

En esta Sección se desarrolla el programa teórico de la asignatura de Mecánica de Fluidos y Ondas, correspondiente a la Licenciatura de Ciencias del Mar de la ULPGC. El programa se ha dividido en nueve bloques:

1) Interpretación Física de Conceptos Matemáticos

2) Fluidos Geofísicos

3) Cinemática

4) Estática

5) Fundamentos de Dinámica

6) Dinámica: Aplicaciones a Fluidos Geofísicos

7) Energía

8) Turbulencia

9) Vorticidad Potencial

El primer bloque consiste en un repaso de diversos aspectos del algebra vectorial y el cálculo diferencial e integral, con un claro énfasis en su aplicación a

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

problemas de Mecánica de Fluidos. El segundo bloque es una introducción a los aspectos diferenciadores de la Mecánica de Fluidos aplicada a problemas geofísicos, donde la rotación de la tierra y la estratificación juegan un papel fundamental. El tercer bloque cubre los aspectos de la Cinemática de Fluidos, que describe las características del movimiento del fluido sin entrar en sus causas. El cuarto bloque introduce los tipos de fuerzas que pueden actuar sobre un fluido y considera el caso particular en que la fuerza resultante es cero. El quinto bloque examina el cambio en el momento lineal en un flujo y las fuerzas que lo ocasionan para sistemas inerciales y en rotación. El sexto bloque comprende la aplicación de las ecuaciones de conservación de momento a diversos casos de Flujos Geofísicos. El séptimo bloque consiste en una introducción a las ecuaciones de la energía mecánica e interna, y a las distintas formas de la función de Bernoulli. El octavo bloque es una introducción a la turbulencia, los flujos turbulentos de diversas propiedades y el crecimiento de perturbaciones inestables. El noveno bloque comprende la discusión del concepto de vorticidad potencial y su aplicación a Flujos Geofísicos.

A continuación se detallan los objetivos fundamentales para cada uno de los bloques. Cada bloque a su vez se divide en temas coherentes que pueden ser discutidos en una serie de una o varias clases, para cada uno de los cuales se describe brevemente el contenido.

Bloque 1. Interpretación Física de Conceptos Matemáticos

El primer bloque consiste en un repaso de diversos aspectos de algebra vectorial y cálculo diferencial e integral, con un claro énfasis en su aplicación a problemas de Mecánica de Fluidos. Este bloque se ha considerado necesario por diversas razones: (1) la preparación del estudiante que llega a esta asignatura es muy variable

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

debido a que no existe ningún prerequisito para acceder a la misma, (2) es muy importante que el estudiante aprenda a ver los fenómenos físicos implícitos en la terminología matemática, y (3) es una buena oportunidad para dar una visión rápida e intuitiva de muchos de los conceptos que se desarrollarán a lo largo de la asignatura.

Tema 1.1 Magnitudes Físicas

- Revisión de conceptos básicos de Física y sus dimensiones: masa, densidad, momento lineal, velocidad, fuerza, presión, aceleración, trabajo, energía, potencia, momento angular, torque.

Tema 1.2 Algebra Vectorial

- Matrices y determinantes. Definición de tensores, tensores de segundo orden. Tensor delta de Kronecker y tensor alternante. Tensor esfuerzo cortante, significado físico. Notación tensorial. Productos escalar y vectorial.

Tema 1.3 Análisis Vectorial

- Operadores: gradiente (tasa y dirección del cambio máximo de una propiedad escalar), divergencia (convergencia/divergencia de magnitudes vectoriales, ilustrando el caso de la velocidad y el flujo incompresible/compresible), rotor (ilustración del caso de la velocidad y el flujo irrotacional/rotacional), laplaciano (bajo la hipótesis de fluido Newtoniano las segundas derivadas de la velocidad serán proporcionales a los esfuerzos cortantes).
- Teoremas de Gauss (de la divergencia) y de Stokes. Formas generales y casos particulares de estos teoremas. Ilustración de diversas aplicaciones, tales como el paso de fuerzas superficiales a volumétricas y el cálculo la circulación alrededor de un contorno.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 1.4 Derivadas e Integrales

- Definiciones de derivadas parcial, direccional, total y material. Polinomios y series de Taylor. Teorema del valor medio.

- Integrales simples. Resolución por cambio de variables, integración por partes y formación de un diferencial exacto.

- Integrales de línea y superficie, de primer y segundo tipo. Integrales dobles y triples. Aplicaciones de estas integrales para determinar magnitudes físicas. Relación de Leibniz en una, dos y tres dimensiones.

Tema 1.5 Ecuaciones Diferenciales

- Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden. Sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Números complejos y notación polar. Ecuaciones de Cauchy-Rieman. Ecuación de Laplace.

- Breve discusión de métodos de solución de ecuaciones diferenciales sencillas, mencionando en que aplicaciones las utilizaremos.

Tema 1.6 Sistemas de Referencia

- Sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas (polares en dos dimensiones) y esféricas. Expresiones para los operadores gradiente, divergencia, rotor y laplaciano en estos sistemas.

- Otros sistemas de coordenadas: isobáricas, isentrópicas e isopícnicas. Sistemas de coordenadas naturales. Discusión e ilustración de la importancia en la selección del sistema de coordenadas para la resolución más sencilla y física de los problemas.

Tema 1.7 Análisis de Series Temporales

- Conceptos de función correlación y autocorrelación, funciones normalizadas, tiempo característico, procesos estacionario, homogéneo, ergódico, isotrópico.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

- Series de Fourier. Representación de una señal periódica como la suma de una serie infinita de Fourier. Discusión de diversas aplicaciones.

Bloque 2. Fluidos Geofísicos

El segundo bloque es una introducción a los aspectos diferenciadores de la Mecánica de Fluidos aplicada a problemas geofísicos, donde la rotación de la tierra y la estratificación juegan un papel fundamental. Este es un apartado esencial para que el estudiante tenga una visión global de los fundamentos de la Mecánica de Fluidos y de las importantes peculiaridades en su aplicación a los Fluidos Geofísicos.

Tema 2.1 Medio Continuo

- La hipótesis de medio continuo. Movimientos moleculares y turbulentos. Características de los instrumentos de medición. Isotropía y anisotropía del medio.

Tema 2.2 Rotación

- Peculiaridades de los Fluidos Geofísicos: importancia de la rotación y la estratificación. La tierra como sistema de referencia rotante.

- Estudio de las desviaciones con respecto a un sistema rotante en equilibrio. Concepto de leyes de conservación. Leyes de conservación aplicadas a Fluidos Geofísicos: masa, momento lineal, energía y momento angular.

- Ligaduras impuestas por la rotación de la tierra. Fuerzas que aparecen al describir el balance de momento lineal en un sistema en rotación. Tendencia de los Fluidos Geofísicos a conservar su momento angular.

Tema 2.3 Una Capa Delgada en Coordenadas Esféricas

- Descripción de los fenómenos sobre un plano tangente a la tierra. Aproximaciones

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

del plano f y plano β. Descripción en coordenadas esféricas de las coordenadas sobre una capa (relativamente) delgada.

Tema 2.4 Estratificación

- Ecuación de estado para el océano. Efectos debidos a la alta no linealidad de esta ecuación de estado. Importancia de la salinidad.
- Ecuación de estado para un gas perfecto. Efectos debidos a la compresibilidad. Estructura de la atmósfera. Importancia de la humedad relativa.
- Densidad *in situ* y densidad a una presión de referencia. Temperatura potencial y densidad potencial. Sigma-t y sigma-theta. Superficies isopícnicas, superficies isentrópicas y superficies neutras. Importancia de la descripción del flujo con referencia a estas superficies.

Tema 2.5 Ciencias Atmosféricas y Oceanografía Física

- La Oceanografía y las Ciencias Atmosféricas como aplicaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos Geofísicos. Similitudes y diferencias entre ambos sistemas.
- Acoplamiento entre el océano y la atmósfera. Flujos de calor y el clima terrestre. Importancia del estudio de los Fluidos Geofísicos.

Bloque 3. Cinemática

El tercer bloque cubre los aspectos de la Cinemática de Fluidos, que describe las características del movimiento del fluido sin entrar en sus causas. Para ello se desarrollan diversas técnicas de descripción del flujo y se analiza el movimiento relativo alrededor de un punto. Se introducen los conceptos de rotación y deformación, las condiciones de flujos rotacionales e irrotacionales y flujos compresibles e incompresibles, y la función de flujo y función potencial para la descripción del

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

flujo. Adicionalmente se derivan las ecuaciones de conservación de masa y las ecuaciones de conservación de propiedades pasivas del fluido, y se introduce el concepto de difusión molecular.

Tema 3.1 Descripción del Movimiento

- Cinemática y Dinámica de los fluidos. Descripciones Euleriana y Lagrangiana del movimiento. Ventajas e inconvenientes de estas descripciones. Instrumentos de medida utilizados para estas descripciones. Flujo estacionario. Líneas de flujo, trayectorias y líneas de trazador.

Tema 3.2 Circulación y Vorticidad

- Relación entre vorticidad y velocidad angular. Caso de rotación como sólido rígido. Ilustración para elemento cilíndrico infinitesimal.
- Vorticidad y velocidad angular para un flujo en rotación sobre si mismo y alrededor de un punto. Vorticidad en los sistemas inercial y rotante.
- Circulación y vorticidad. Líneas y tubos de vorticidad. Intensidad de un tubo de vorticidad.

Tema 3.3 Análisis del Movimiento Relativo

- Analisis del movimiento relativo alrededor de un punto. Expresión del movimiento de un punto vecino como la combinación de traslaciones, deformaciones y rotaciones.
- Tensores de deformación y rotación. Relación entre componentes del tensor rotación y componentes del vector vorticidad. Relación entre componentes del tensor deformación y la convergencia/divergencia del flujo.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 3.4 Flujo Incompresible/Compresible

- Flujo incompresible bidimensional o axisimétrico. Función de flujo y su relación con el caudal. Puntos de estancamiento. Diversos modelos de flujo. El método de las imágenes.

- Flujos compresibles. Tasas de expansión. Fuentes y sumideros.

Tema 3.5 Flujo Irrotacional/Rotacional

- Flujo irrotacional. Función potencial. Modelos de flujo. Ejemplos de vórtices irrotacionales.

- Flujo rotacional. Distribuciones de vorticidad. Modelos de vórtices. Vórtices de Rankine. Interacción entre vórtices.

Tema 3.6 Flujo Incompresible e Irrotacional

- Ecuación de Laplace para las funciones de flujo y potencial. Condiciones de contorno cinemáticas. Propiedades de la ecuación de Laplace. Resolución por separación de variables.

- Condiciones de Cauchy-Riemann. Potencial complejo.

Tema 3.7 Flujo Compresible y Rotacional

- Flujo compresible e irrotacional. Flujo incompresible y rotacional. Ecuación de Poisson. Flujo resultante de esas componentes y de una traslación.

Tema 3.8 Ecuación de Conservación de Masa

- Derivación de la ecuación de conservación de masa para un volumen infinitesimal en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

- Derivación de la ecuación de conservación de masa (notación vectorial) para un volumen finito de forma arbitraria, por medio del teorema de Leibniz en tres

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

dimensiones. Definición del vector velocidad consistente con la ausencia de difusión molecular de densidad.

- Conversión de la expresión vectorial de la ecuación de conservación de masa en las expresiones correspondientes a cada sistema de coordenadas (para ello recordar como opera la divergencia de un vector en esos sistemas de coordenadas).

- Interpretación de la ecuación de conservación de masa: convergencia cero o cambio material de la densidad es nulo. Caso particular de flujo incompresible. Implicaciones en cuanto a la ganancia de calor a partir de la ecuación de estado. Aproximación de Boussinesq en la ecuación de conservación de masa.

- Derivación de la ecuación de conservación de masa para un océano homogéneo. Condiciones de contorno en el fondo y la superficie libre.

Tema 3.9 Conservación de Propiedades

- Derivación de las ecuaciones de conservación de otras propiedades pasivas. Difusión molecular y la ley de Fick. Aplicación a propiedades tales como la salinidad (conservativa), nutrientes y trazadores radioactivos (no conservativos). Anticipar la posibilidad de difusión turbulenta.

Bloque 4. Estática

El cuarto bloque introduce los tipos de fuerzas que pueden actuar sobre un fluido y considera el caso particular en que la fuerza resultante es cero, bien en un sistema inercial o en un sistema no inercial. Se demuestra que las fuerzas de deformación son cero en flujos que mantengan su inercia y se introduce la ecuación hidrostática y el concepto de estabilidad estática. Se discute el **balance** de fuerzas en un fluido sobre la tierra y se introduce el concepto de **balance geostrófico**.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 4.1 Fuerzas Superficiales y Volumétricas

- Fuerzas superficiales y volumétricas. Diferentes tipos de fuerzas volumétricas. Fuerza superficial de presión. Gradientes de presión, conversión de la fuerza superficial en volumétrica.

- El tensor esfuerzo cortante. Significado físico de las fuerzas superficiales tangenciales como transferencia de momento de una parte a otra del fluido.

- Convención para la notación del tensor esfuerzo cortante. Comparación con la notación para la fuerza producida por la presión.

Tema 4.2 Análisis de un Tetrahedro Elemental

- Fuerzas superficiales sobre una superficie de orientación arbitraria. Justificación de que las fuerzas de deformación son cero para un fluido en reposo (o cuyo momento es constante). Isotropía de la presión.

Tema 4.3 Fluido en Equilibrio

- Equilibrio mecánico de un fluido. Potencial de fuerzas conservativas. Fluido en rotación constante.

- Balance de fuerzas sobre una columna de agua de altura dz en un oceano en reposo. Concepto de estabilidad estática en un medio incompresible. Ecuación hidrostática.

- Estabilidad de un medio compresible. Estabilidad de una atmósfera saturada.

Tema 4.4 Balance de Fuerzas sobre la Tierra en Rotación

- Balance de fuerzas sobre una columna de agua de altura dz en un océano sobre la tierra en rotación. Efecto de la fuerza centrífuga como modificador de la gravedad resultante. Forma elipsoidal de la superficie libre.

- Balance de fuerzas sobre una columna de agua que experimenta un gradiente de

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

presión horizontal, resultado de una pendiente en la superficie libre. Modificación de la velocidad relativa de una partícula para que cambie la fuerza centrífuga y pueda existir balance estático. Interpretación del cambio en la fuerza centrífuga como la fuerza de Coriolis. Introducción al balance geostrófico.

- Fuerzas generadoras de la marea. El elipsoide de equilibrio para las mareas.

Bloque 5. Fundamentos de Dinámica

El quinto bloque examina el cambio en el momento lineal en un flujo y las fuerzas que lo ocasionan. Se examinan las características de las fuerzas que pueden trasladar, rotar y deformar un fluido, y se consideran todas las fuerzas actuantes sobre un volumen arbitrario para determinar la ecuación vectorial de conservación de momento lineal (ecuación de Cauchy). Se examina la forma de esta ecuación para volúmenes de control en diversos sistemas de coordenadas. Se utiliza la hipótesis de fluido newtoniano para determinar las fuerzas superficiales tangenciales y se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones son generalizadas para la descripción del flujo en un sistema rotante. A continuación se discuten diversas posibilidades para adimensionalizar las ecuaciones y se muestra la aparición de los números de Rossby, Reynolds, Ekman, Richardson y Rayleigh. Finalmente se discute la importancia de los parámetros adimensionales para la resolución de las ecuaciones y su simulación en experimentos de laboratorio.

Tema 5.1 Ecuación de Conservación de Momento

- Derivación de las ecuaciones de conservación de las componentes del momento para volúmenes infinitesimales en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
- Derivación de la ecuación vectorial de conservación de momento para un volu-

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

men finito (constante, material o en movimiento) con forma arbitraria, utilizando el teorema de Leibniz en tres dimensiones. Ecuación de Cauchy. Transformación de las fuerzas superficiales en fuerzas volumétricas mediante el teorema de Gauss: gradientes de las componentes del tensor esfuerzo cortante.

- Utilización de la expresión vectorial de conservación de momento para derivar las expresiones correspondientes a los distintos sistemas de coordenadas. Para ello recordar como opera la divergencia de un vector, el laplaciano de un vector y el gradiente de un escalar en esos sistemas de coordenadas.

Tema 5.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

- Discusión sobre fuerzas superficiales para un fluido que puede deformarse: como se modifica la fuerza de presión y aparición de las fuerzas superficiales tangenciales.
- Justificación y formulación de la hipótesis de fluido newtoniano. Condición de medio isotrópico. Parametrización del tensor esfuerzo cortante. Simetría del tensor esfuerzo cortante para fluido isotrópico. Ecuaciones de Navier-Stokes. Ecuaciones de Euler.
- Obtención de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Tema 5.3 Ecuaciones en un Sistema en Rotación

- Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema rotante (no inercial). Justificación de los términos adicionales a partir del cálculo de las componentes de aceleración de una partícula sobre la tierra.
- Aceleracion centrífuga debida a la rotación de la tierra y su interpretación como una modificación de la gravedad terrestre.
- Fuerza de Coriolis. Interpretación de la fuerza de Coriolis en términos de una

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

modificación de la velocidad tangencial debida a un cambio en la posición. Justificación de que el cambio es totalmente independiente de la selección del punto alrededor del cual gira el sistema. Relación con la aproximación de un plano tangente a la tierra, considerando en este caso sólo la componente del vector velocidad angular de la tierra normal al plano. Implicaciones para modelaje físico con mesas rotatorias.

Tema 5.4 Adimensionalización de las Ecuaciones

- Adimensionalizacion de las ecuaciones de Navier-Stokes. Haciendo $p = Pp' = \rho U^2 p'$ aparecen los números de Rossby y Reynolds en las ecuaciones horizontales y de Richardson (superficie libre) en la ecuación vertical (y si $z = Dz'$ entonces también aparece la proporción altura/longitud en la componente vertical).
- Haciendo $p = Pp' = \rho U f L p'$ aparecen los números de Rossby y Ekman en las tres ecuaciones (y si $z = Dz'$ entonces también aparece la proporción altura/longitud en la componente vertical).
- Adimensionalización de las ecuaciones horizontales para flujo estratificado no viscoso. Obtención de los números de Rossby y Richardson (o Froude) para los casos de dos capas y flujo continuamente estratificado.
- Teorema Pi de Buckingham. Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes. Obtención de la expresión adimensional para el dragado de un flujo sobre un cuerpo.

Tema 5.5 Números Adimensionales

- Discusión de los numeros de Richardson y Rayleigh previo a los experimentos a realizarse en el laboratorio. Anticipación de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz e inestabilidad térmica, a tratarse de nuevo en el tema de turbulencia.
- Experimentos de laboratorio. Importancia de la selección de los números adi-

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

mensionales. Teoría de la similaridad dinámica.

- Ejemplo de experimentos en mesa rotatoria. Selección de los números de Rossby y Reynolds. Importancia potencial de la fuerza centrífuga. Significado de la fuerza de Coriolis.

Tema 5.6 Soluciones Particulares de las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Flujos de Couette (placa en movimiento) y Poiseuille (gradiente de presión). Caso general donde existen ambos. Flujo circular de Couette (flujo anular entre dos cilindros).

- Ecuación de difusión. Suavizado de una discontinuidad en velocidad o en concentración de una propiedad. Efecto de un contorno sólido en movimiento. Contorno sólido oscilante.

- Flujo ocasionado por un cuerpo en movimiento, bajo la suposición de que los términos inerciales son despreciables (número de Reynolds pequeño). Cálculo del dragado sobre el cuerpo. Solución de Stokes y corrección de Oseen. Modificaciones en el flujo al aumentar el número de Reynolds.

Bloque 6. Dinámica: Aplicaciones a Fluidos Geofísicos

El sexto bloque comprende la aplicación de las ecuaciones de conservación de momento a diversos casos de Flujos Geofísicos. Las ecuaciones de momento son idealizadas para diversos flujos oceánicos y atmosféricos, en base a observaciones y criterios de números adimensionales, con el fin de obtener soluciones exactas. En primer lugar se pone particular énfasis en la descripción del problema de circulación cuasi-estacionario. A continuación se pasa a la solución de los transientes en situaciones sin forzamiento externo, descrita en forma de ondas de diversos tipos.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Finalmente se describen las ecuaciones y soluciones estacionarias y transientes para problemas con diversos tipos de forzamiento externo.

Tema 6.1 Derivación de las Ecuaciones de Momento para un Océano Homogéneo

- Derivación de las ecuaciones de conservación de momento para una columna de agua a partir de principios básicos: aplicación a un océano homogéneo. El modelo de aguas someras.
- Importancia de interpretar los Flujos Geofísicos como soluciones idealizadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Tema 6.2 Flujo Geostrófico

- Flujo geostrófico en coordenadas cartesianas y polares. Flujo geostrofico como flujo real a través de una sección. Importancia de escoger secciones que permitan establecer balances cerrados de flujo.
- Flujo geostrófico en la atmósfera (a nivel de superficie). Flujo en ciclones o huracanes y anticiclones. Las isóbaras como líneas de flujo. Expresiones y soluciones en coordenadas cartesianas y cilíndricas.
- Flujo geostrófico en un océano homogéneo. Coincidencia de las isolíneas de elevación de la superficie libre con las isóbatas. Teorema de Taylor-Proudman.
- Flujo geostrófico en el océano estratificado. Importancia de la selección de un nivel de referencia. Justificación histórica de la selección de un nivel de referencia. Justificación más moderna para cerrar los balances oceánicos de flujos de agua, nutrientes y otros trazadores. Ecuación del gradiente térmico.
- Flujo geostrófico en coordenadas isopícnicas e isentrópicas. Función de Montgomery.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 6.3 Otras Soluciones Particulares

- Aproximación de Boussinesq para las ecuaciones de conservación de momento.

- Transporte de Ekman. Importancia del transporte por su independencia de la parametrización de la viscosidad. Aplicaciones oceánicas (afloramiento costero, afloramiento ecuatorial, capa superfical y de fondo de Ekman) y atmosféricas (capa de Ekman).

- Flujo tipo tornado. Expresiones y soluciones en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

- Oscilaciones inerciales. Expresiones y soluciones en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Interpretación de las oscilaciones inerciales. Oscilaciones inerciales forzadas por el viento.

- Combinación de los términos centrífugo, de Coriolis y de gradiente de presión. Expresión y solución en coordenadas cilíndricas. Estimación de la importancia relativa de los términos a partir de su adimensionalización.

Tema 6.4 Circulación Oceánica en los Giros Subtropicales

- Acoplamiento entre el transporte de Ekman y el flujo en el océano interior. Expresión de la divergencia/convergencia interior en términos de la componente vertical del rotor de los esfuerzos cortantes del viento en superficie. Relación de Sverdrup.

- Circulación termoclina: flujo geostrófico que satisface la ecuación de continuidad. Teoría de Luyten-Pedlosky-Stommel.

Tema 6.5 Ondas en un Sistema Inercial

- Ondas cortas en un sistema inercial. Obtención de la ecuación de Laplace para perturbaciones en la presión. Ondas gravitatorias. Ondas viajeras y estacionarias.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Caso de un fluido continuamente estratificado. Ondas gravitatorias internas.

- Ondas largas en un sistema inercial. Ecuación de onda para un flujo homogéneo. Propagación de perturbaciones, soluciones en forma de ondas. Flujo de dos o más capas.. Modos barotrópico y baroclínico. Estratificación continua y descomposición en modos.

Tema 6.6 Ondas en un Sistema Rotante

- Ondas cortas en un sistema rotante: ondas internas modificadas. Solución WKB.
- Ondas largas en un sistema rotante. Soluciones en formas de onda para rotación con velocidad angular constante (aproximación del plano f): ondas de Kelvin y Poincaré. Ondas de Kelvin ecuatoriales y costeras. Propagación de ondas de Poincaré. Modificaciones producidas por forzamiento externo.
- Soluciones en forma de onda para rotación con velocidad angular variable con la latitud: ondas de Rossby. Analogía con el caso de profundidad variable.

Bloque 7. Energía

El séptimo bloque consiste en una introducción a las ecuaciones de la energía mecánica e interna, y a las distintas formas de la función de Bernoulli. Se derivan las ecuaciones de conservación para la energía mecánica (potencial más cinética) incluyendo los términos conservativos, fuente/sumidero y de transferencia. A continuación se hace una breve revisión de los fundamentos de la Termodinámica aplicada a fluidos, trás lo cual se derivan las ecuaciones de la energía interna y de la energía total. Finalmente para el caso de fuerzas viscosas despreciables se obtienen las dos formas de la función de Bernoulli, para flujo estacionario o irrotacional.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 7.1 Trabajo y Energía

- Definiciones e interpretación de las energías cinética, potencial, mecánica, total e interna, por unidad de masa y unidad de volumen. Energías por unidad de area y tasas temporales de cambio. Trabajo realizado por unidad de tiempo.

Tema 7.2 Ecuación de Energía Mecánica

- Derivación de la ecuación de energía mecánica (por unidad de masa) a partir de las ecuaciones de conservación de momento. Utilización de la ecuación de conservación de masa para obtener una ecuación de energía mecánica (por unidad de volumen) en términos de cambio local más advección. Discusión del término de disipación viscosa. Forma integral de esta última ecuación.

Tema 7.3 Termodinámica de un Fluido

- Estado de un fluido y variables termodinámicas. Relación entre las variables a través de la ecuación de estado. Revisión de la primera y segunda ley de la Termodinámica. Procesos reversibles e irreversibles. Calor específico. La temperatura potencial como una variable termodinámica. Temperatura potencial y entropía. Procesos adiabáticos e isentrópicos.

Tema 7.4 Ecuaciones de Energía Total e Interna

- Derivación de la ecuación de calor (por unidad de masa) para un volumen constante. Expresión de la derivada material de la cantidad de calor por unidad de volumen, en términos de flujo de calor no advectivo (radiativo, difusivo, latente y sensible) por unidad de area. Expresión para el trabajo realizado por unidad de tiempo y de volumen.

- Expresión del diferencial de energía interna para fluidos, en términos de la suma de las energías de los movimientos molecular y macroscópico. Derivación de la

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

ecuación de energía total (por unidad de masa y de volumen) para fluidos, a partir de la segunda ley de la Termodinámica, la ecuación de calor y el trabajo realizado por unidad de tiempo y volumen.

- Obtención de la ecuación de energía interna (por unidad de masa y de volumen) como resultado de restar la ecuación de energía total menos la ecuación de energía mecánica. Ganancia de calor por disipación viscosa.

Tema 7.5 Ganancia, Transferencia y Disipación de Energía

- Ganancia y disipación de energía. Tasas de transferencia de energía. Transferencia de energía entre diferentes escalas: concepto de cascada de energía.

- Balance de energía terrestre: media temporal sobre un punto y media espacial en un instante de tiempo deben ser constantes. La máquina calórica terrestre: radiación, intercambio de energía entre el océano y la atmósfera, flujos de energía dentro del océano y la atmósfera. Estimación de la disipación por unidad de area. Comparación de este valor con la radiación media incidente por unidad de area.

- Aplicación de la ecuación de energía interna a la capa superficial de mezcla oceánica. Características de diferentes regiones oceánicas. Comparación de las tasas de ganancia, almacenamiento y pérdida de calor con los flujos advectivos de calor.

Tema 7.6 Teorema de Bernoulli para Flujo Estacionario

- Derivación del teorema de Bernoulli a partir de principios fundamentales para el caso de flujo no viscoso y estacionario. Conservación de la función de Bernoulli a lo largo de líneas de flujo.

- Derivación del teorema de Bernoulli a partir de la ecuación de energía para el caso de fuerzas viscosas despreciables. Particularización para flujo estacionario y

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

adiabático.

- Ejemplos de aplicación en Hidráulica. Cálculo de la onda forzada de marea.

Tema 7.7 Teorema de Bernoulli para Flujo Irrotacional

- Derivación de la forma particular del teorema de Bernoulli para el caso de flujo no viscoso e irrotacional. Conservación de una forma especial de la función de Bernoulli sobre todo el fluido.

- Breve discusión de la teoría de ondas superficiales gravitatorias, como flujo irrotacional. Ecuación de Laplace para la función potencial. Condiciones cinemáticas de contorno. Condición dinámica: utilización de la constancia de la función de Bernoulli sobre todo el fluido. Solución para los casos de aguas profundas y someras.

- Energía potencial y cinética de una onda superficial gravitatoria. Velocidad de fase y velocidad de grupo.

Bloque 8. Turbulencia

El octavo bloque consiste en una introducción a la turbulencia, los flujos turbulentos de diversas propiedades y el crecimiento de perturbaciones inestables. Se discuten las características de la turbulencia, las ecuaciones turbulentas de masa, momento y energía, y la parametrización de la difusión turbulenta de estas propiedades. Se discuten también el concepto de capa límite, el papel de la turbulencia en la cascada de energía, y las condiciones necesarias para la transición a la turbulencia en términos de números adimensionales y crecimiento de perturbaciones ondulatorias.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 8.1 Propiedades del Flujo Turbulento

- Propiedades del flujo turbulento: aleatoriedad, nolinealidad, difusivo, alta vorticidad, disipativo. Transición a la turbulencia, en particular cuando el número de Richardson se hace subcrítico y/o el número de Reynolds se hace supercrítico ($Ri < Ri_c$, $Re > Re_c$).

- Descomposición de las variables en valor medio (que varía en una escala temporal lenta) más fluctuación (que varía con una escala temporal más rápida). Concepto de fluctuaciones en término del problema que se quiere describir. Escalas temporal y de longitud de los procesos a describir. Método de las escalas múltiples.

Tema 8.2 Ecuaciones Media y Turbulenta de Masa y Momento

- Derivación de las ecuaciones turbulentas de conservación de masa y momento. Ecuación turbulenta de conservación de masa en coordenadas isopícnicas. Valor medio de la derivada material de la densidad.

- Flujos turbulentos de Reynolds (masa y momento). Interpretación física, concepto de longitud de mezcla y analogía con el caso molecular. Parametrización como proporcional (con signo menos) a los gradientes de la propiedad.

- Coeficientes de difusión y viscosidad turbulenta. Anisotropía producida por diferencias entre las escalas horizontales y verticales, y por diferencias entre la estratificación horizontal y vertical.

Tema 8.3 Capa Límite

- Concepto de capa límite. Separación del flujo. Adimensionalización de las variables en la capa límite. Diversos métodos de medida de la capa límite.

- Capa límite sobre una placa. Solución de Blasius. Integral de momento de Karman. Flujo turbulento en un conducto, diferencia con respecto al caso laminar.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

- Capas límite en Flujos Geofísicos. Ejemplos de capas límite en modelos de circulación oceánica: corrientes de frontera, capas de Stommel y Munk, capas de Ekman. Capa límite atmosférica.

Tema 8.4 Ecuaciones Media y Turbulenta de la Energía

- Derivación de las ecuaciones turbulentas de la energía. Términos fuente, sumidero y de transferencia de energía. Parametrización de la disipación. Comparación con la ecuación de energía total.

- Escalas de disipación de la energía. Definición de la microescala de Kolmogorov en términos de comparar la magnitud de los términos de transferencia y disipación de energía.

Tema 8.5 Inestabilidades

- El método de los modos normales. Estado base y estado perturbado. Superposición de una perturbación sinusoidal. Velocidad de fase compleja. Condiciones neutra, estable e inestable.

- Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Aplicación de la teoría potencial para estudiar la propagación de una perturbación sinusoidal entre dos fluidos con diferente densidad y velocidad. Velocidad de fase. Condición de inestabilidad y el número de Richardson. El criterio del número de Richardson a partir de argumentos energéticos.

- Otras inestabilidades. Inestabilidad térmica. El número de Rayleigh. Problema de Benard. Doble difusión. Régimen de dedos y régimen convectivo.

Bloque 9. Vorticidad Potencial

El noveno bloque comprende la discusión del concepto de vorticidad potencial

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

y su aplicación a Flujos Geofísicos. Se derivan las ecuaciones de vorticidad y vorticidad potencial, y se discuten las condiciones para la definición de esta última cantidad. Se pone un especial énfasis en analizar las analogías y diferencias entre el momento angular y la vorticidad potencial. Se derivan las ecuaciones de vorticidad potencial para flujos oceánicos y atmosféricos homogéneos y estratificados y se analizan los factores que pueden modificar la vorticidad potencial. Finalmente se aplica la idea de conservación de vorticidad potencial a diversos casos de Flujos Geofísicos.

Tema 9.1 Ecuaciones de Vorticidad y Vorticidad Potencial

- Factores que controlan el cambio material de la circulación: baroclinicidad y fuerzas no conservativas. Teorema de circulación de Kelvin. Aplicación del teorema a un tubo de vorticidad para determinar bajo que condiciones los tubos (o líneas) de vorticidad se mueven con el fluido.
- Derivación de la ecuación vectorial de vorticidad a partir de las ecuaciones de momento. Factores que modifican la vorticidad: baroclinicidad, fuerzas no conservativas, convergencia, transferencia entre componentes.
- Derivación de la ecuación general de vorticidad potencial a partir de la ecuación de vorticidad y una ecuación de conservación de una propiedad. Definición de la vorticidad potencial como propiedad integral (versus vorticidad como propiedad puntual). Justificación del nombre de vorticidad potencial.

Tema 9.2 Significado Físico de la Vorticidad Potencial

- Revisión de conceptos básicos de momento angular. Dificultades para utilizar el concepto de momento angular para fluidos. Contribuciones a la ecuación de vorticidad de torques aplicados sobre un volumen fijo.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

- Explicación intuitiva de la analogía entre momento angular alrededor del eje principal de un cilindro y vorticidad potencial. Formalización de la analogía para un volumen cilíndrico infinitesimal limitado por dos superficies materiales. Aplicación a los casos de océano homogéneo y océano/atmósfera estratificados sobre la tierra.

- Interpretación física discutida por Helmholtz para fluidos homogéneos. Extensión de Pedlosky y Gill para flujos estratificados.

Tema 9.3 Ecuación de Vorticidad Potencial para un Océano Homogéneo

- Ecuaciones de vorticidad y vorticidad potencial en un océano homogéneo sin fuerzas externas. Expresión de la vorticidad potencial para el caso de flujo geostrófico. Expresión de la vorticidad potencial para el caso de las ecuaciones completas sin fuerzas externas. Propiedad material para la definición de vorticidad potencial.

- Modificación de la vorticidad potencial por fuerzas no conservativas (externas o internas). Generación de vorticidad potencial en la superficie o contornos del océano. Relación de Sverdrup, modelos de Stommel y Munk.

- Ecuaciones cuasigeostróficas de conservación de vorticidad y vorticidad potencial. Aplicación a modelos de varias capas.

Tema 9.4 Ecuación de Vorticidad Potencial para un Océano Estratificado

- Ecuaciones de vorticidad y vorticidad potencial para un océano estratificado sin fuerzas externas. Forzamiento del océno interior. Continuidad de la vorticidad potencial para describir la circulación termoclina. Teoría de Luyten-Pedlosky-Stommel.

- Generación de vorticidad en contornos sólidos. Cambios en la vorticidad potencial por procesos de mezcla y por transferencia entre componentes de vorticidad.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Tema 9.5 Aplicaciones de la Conservación de Vorticidad Potencial

- Flujo estacionario sobre topografía irregular. Implicaciones del cambio de velocidad sobre la presión a partir de la función de Bernoulli.

- Problema de ajuste de Rossby. Radio de deformación de Rossby. Casos de superficie libre y de dos capas. Partición de energía.

- Ecuación de vorticidad para las ondas de Rossby (planetarias o atrapadas). Mecanismo de propagación en términos de conservación de vorticidad potencial.

3.2 Experiencias de Laboratorio

Un elemento fundamental de la asignatura es la realización de Prácticas de Laboratorio, por cuanto son una forma muy ilustrativa para comprender, madurar y extender los conceptos discutidos en clase, permitiendo además desarrollar la creatividad del estudiante. A continuación se propone una serie de trece experiencias prácticas que intentan reproducir algunos elementos importantes que caracterizan a los Flujos Geofísicos. Estas son:

1) Formación de aguas profundas.

2) Propagación de ondas.

3) Ondas estacionarias.

4) Decaimiento de remolinos.

5) Doble difusión.

6) Difusión vertical en fluidos estratificados.

7) Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

8) Inestabilidad térmica.

9) Corrientes de gravedad.

10) Corrientes de talud.

11) Circulación anticiclónica.

12) Columnas de Taylor-Proudman.

13) Calle de remolinos.

En esta sección se ofrece una discusión de cada una de estas prácticas, la cual incluye una breve introducción teórica y una descipción del método experimental sugerido. Para cada práctica también se ha incluido una relación de las referencias que se consideran adecuadas para su preparación, las cuales se encuentran al final de esta guía.

Dada la notable ausencia de este tipo de experiencias en libros de texto se ha dedicado especial empeño en presentar una descripción cuidadosa de las mismas, intentando ilustrar su aplicabilidad a Flujos Geofísicos. Las nueve primeras prácticas pueden realizarse con instrumental bastante sencillo: tintes de varios colores, termómetros, un calentador de recipientes, un calentador de resistencia que pueda sumergirse en el agua, un agitador de bajas revoluciones, cronómetro con memoria, una pequeña base que pueda girar libremente, recipientes de "pyrex" y plástico de diferentes tamaños (0,5 a 2 litros), un recipiente cilíndrico de tamaño pequeño (10 - 20 litros) y una pecera de tamaño mediano (50 - 200 litros).

Para la realización de la séptima práctica se ha propuesto una metodología considerablemente sencilla, basada en la única disponibilidad de los materiales antes descritos. Una alternativa que daría resultados mucho mejores se basa en la utilización de un recipiente de vidrio rectangular de aproximadamente 3 m de largo, 0,1 m de ancho y 0,3 m de alto, que pueda llenarse completamente con dos o más fluidos de distinta densidad e inclinarse un ángulo pequeño (5 a 10 grados),

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

el cual se encuentra en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos.

Para la realización de las cuatro últimas prácticas es necesario además disponer de una mesa rotatoria capaz de poner un volumen considerable de fluido (hasta 1000 litros) en rotación a una velocidad angular relativamente alta (usualmente una revolución en un período que puede oscilar entre unos 5 y 15 segundos) y con un alto grado de estabilidad. Un instrumento de estas características se encuentra también en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos. Cabe destacar que sería relativamente fácil proponer otras varias prácticas para fluidos en rotación, lo cual se ha dejado a la iniciativa de los estudiantes.

Practica 1: Formación de Aguas Profundas

Teoría

El ejemplo posiblemente más característico de convección vertical ocasionada por boyancia (o empuje causado por diferencias de densidad) es el de la advección en las capas bajas de la atmósfera. Estas capas se calientan principalmente debido a la radiación reflejada de la tierra (en forma de ondas con longitud de onda larga) y por el calor latente que se libera durante la evaporación, ocasionando la existencia de movimientos verticales ascendentes.

En el océano suele ocurrir, a altas latitudes, otro ejemplo de circulación vertical. A estas latitudes llegan aguas relativamente cálidas, provenientes de latitudes menores, que pierden su calor hacia la atmósfera (se enfrían cuando son expuestas a las bajas temperaturas del aire). Estas aguas superficiales frías, y por tanto marginalmente estables, son con cierta frecuencia sujetas a la acción de tormentas que ocasionan mezcla hasta profundidades considerables ("convective overturning") y por tanto son responsables de la formación de aguas profundas.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

En el Atlántico Norte hay varias zonas donde puede ocurrir la formación de aguas profundas, específicamente el mar del Labrador, y las zonas al este de Groenlandia y oeste de Noruega. La formación de agua Noratlántica Profunda ("North Atlantic Deep Water") puede tener gran importancia en el control de clima terrestre. Así pues, se ha hipotetizado que la formación de agua profunda es un sumidero para las aguas del Atlántico Norte y, por tanto, mantiene una entrada constante de aguas relativamente cálidas sobre la zona, provenientes de la Corriente del Golfo.

Otro ejemplo de agua superficial que se hunde ocurre en el Océano Antártico, en zonas cercanas al continente Antártico caracterizadas por salinidades relativamente bajas. En este caso podemos observar la formación de agua Antártica Profunda ("Antarctic Deep Water", temperaturas cercanas a 0°C), que fluye por debajo del agua Noratlántica Profunda, y de agua Antártica Intermedia ("Antarctic Intermediate Water", temperaturas alrededor de 3°C), que fluye por encima del agua Noratlántica Profunda. Las características del agua Antártica Intermedia suelen ser visibles incluso en latitudes medias del Océano Atlántico Norte.

Las referencias que se sugiere revisar para esta práctica son Gill (1982), Pickard y Emery (1982), Tomczak y Godfrey (1994) y Cushman-Roisin (1994).

Método Experimental

Utilice un acuario o recipiente lleno con agua a temperatura ambiente. A continuación coloque un bloque de hielo (con colorante) en la superficie del recipiente, sujeto en un extremo mediante una rejilla o contenedor poroso, y deje que este deshiele lentamente. Observe la evolución del agua que se deshiela y la circulación que ello induce sobre el resto del agua en el recipiente.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Para tratar de cuantificar lo que está ocurriendo coloque una tapa (como un corcho o una cartulina) sobre el recipiente con varios agujeros apropiadamente distribuidos por donde pueda introducir termómetros. Trate de leer la temperatura evitando al máximo generar movimientos o turbulencia. Asimismo, recuerde que para realizar una medición con el termómetro requerirá un cierto tiempo, de forma tal que será difícil obtener una visión simultánea de los varios niveles verticales donde se realicen las mediciones. Intente centrar las mediciones sobre tiempos determinados (por ejemplo cada 5 minutos), para así poder realizar planos horizontales cuasi-simultáneos de la evolución del campo de temperaturas.

Repita el experimento pero ahora con el agua congelada en un recipiente cerrado. En este caso no ocurrirá advección de manera directa (por el paso del agua de estado sólido a estado líquido) sino indirectamente, a través del enfriamiento del agua circundante. Sin el efecto de la gravedad este enfriamiento debería ocurrir solo por difusión y, por tanto, ser practicamente isotrópico dentro del fluido. Sin embargo, la gravedad ocasionará que el fluido más frío se desplace hacia el fondo, y tenderá a reproducir el mecanismo de advección observado para el caso del hielo en un recipiente no cerrado. Utilice los mapas creados para discutir la circulación existente, la circulación vertical cerca del hielo y la recirculación horizontal cerca del fondo y vertical en el extremo opuesto del recipiente.

Se pueden hacer diversas modificaciones a estos experimentos. Por ejemplo, repita la experiencia con una capa de agua salada en el fondo (introducida con cuidado mediante un embudo y tubo cuyo extremo llegue al fondo) de manera que la propagación del agua fría dulce ocurra entre las dos capas. Realice de nuevo la experiencia manteniendo ahora un calentamiento diferencial en la superficie del

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2009

acuario, para ello puede utilizar una lámpara calentando un extremo del acuario (o simplemente introducir una botella con agua caliente y reemplazar el agua cada cierto tiempo para mantener una fuente aproximadamente constante de calor). Ponga algunos pedazos de anime en la superficie y observe el movimiento que se produce. Discuta la razón por la cual la extensión horizontal del agua fría ahora es limitada, a diferencia del caso donde no había calentamiento. Discuta las similaridades y diferencias con los casos anteriores, y explique la similaridad existente con la circulación profunda oceánica.

Otra posibilidad es llenar inicialmente todo el recipiente con agua algo salada (calcule la cantidad de sal que necesitaría para que esta agua sea sólo algo más densa que el agua dulce a cero grados). Introduzca de nuevo un bloque de hielo en la superficie y observe que ahora el agua salada inhibe los movimientos convectivos verticales del fluido. Intente a continuación simular el proceso de mezcla que ocurriría debido a una tormenta invernal, utilizando un agitador actuando sobre la capa superficial. Si el agua en la capa inferior es apenas un poco más densa que la de la superficie entonces debería ocurrir un proceso rápido de mezcla vertical, similar al que ocurre en altas latitudes del Atlántico Norte.

Práctica 2: Propagación de Ondas

Teoría

En el caso de movimientos con una escala horizontal mucho mayor que la escala vertical la ecuación de momento vertical puede aproximarse por el balance hidrostático:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

En esta situación y en el caso de fluidos homogéneos tenemos que los gradientes horizontales de presión se pueden expresar en función de los gradientes horizontales de la elevación de la superficie libre η, por ejemplo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Bajo suposiciones de perturbaciones de pequeña amplitud y despreciando los términos no-lineales, de rotación y viscosos, las ecuaciones de momento y continuidad tienen la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

siendo H la profundidad del fluido en la ausencia de perturbaciones, que se supone constante en x, y.

Estas ecuaciones combinadas producen la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)$$

donde $c^2 = gH$. La solución de esta ecuación depende de la forma inicial de la perturbación. En el caso en que la perturbación inicial es independiente de una coordenada, $G(x) = \eta(x, t = 0)$, entonces la solución tiene una forma muy sencilla:

$$\eta(x,t) = (1/2)[G(x + ct) + G(x - ct)]$$

$$u(x,t) = -(1/2)(g/c)[G(x + ct) - G(x - ct)]$$

De esta manera se obtiene que la velocidad de propagación de una perturbación en la superficie libre viene dada por $c = (gH)^{1/2}$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Consideremos ahora el caso de un flujo con dos capas, y supongamos que la capa inferior esta en reposo. Esto corresponde al modelo de gravedad reducida o de una capa y media, el cual puede justificarse formalmente como la solución dominante en la capa superior cuando el espesor de esta capa es mucho menor que el de la capa inferior. En este caso la condición de que el gradiente de presión en la capa inferior se haga nulo permite escribir:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

siendo ρ_1 y ρ_2 las densidades del fluido superior e inferior, respectivamente, y η_1 y η_2 las perturbaciones de la superficie libre y de la interfase, respectivamente. Este resultado muestra que las perturbaciones en la interfase serán mucho mayores que en la superficie libre. El gradiente de presión en la capa superior toma la forma:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} = g' \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

donde η es ahora la amplitud de la perturbación en la interfase, y $g' = (\rho_2 - \rho_1)g/\rho_2$ es la gravedad reducida.

Despreciando los términos no-lineales, de rotación y viscosos, y bajo la suposición de perturbaciones de pequeña amplitud, las ecuaciones de momento unidimensional y de continuidad son:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g' \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -g' \frac{\partial \eta_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + H_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0$$

siendo H_1 la profundidad de la capa superior de fluido en la ausencia de perturbaciones.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Estas ecuaciones combinadas producen la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = c\left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2}\right)$$

donde $c^2 = g'H_1$. En el caso de una perturbación que dependa de una sola coordenada la solución de esta ecuación tiene la forma:

$$\eta_2(x,t) = (1/2)[G(x+ct) + G(x-ct)]$$

$$u_1(x,t) = -(1/2)(g/c)[G(x+ct) - G(x-ct)]$$

donde $G(x)$ es ahora la forma inicial de la perturbación introducida en la interfase entre ambos fluidos, $G(x) = \eta_2(x, t = 0)$. De esta manera se obtiene que la velocidad de propagación de una perturbación en la interfase viene dada por $c = (g'H_1)^{1/2}$. Esta velocidad es un factor $[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2]^{1/2}$ menor que la velocidad del caso anterior.

Los Capítulos 5 y 6 de Gill (1982) son una excelente discusión de este tópico. Algunas aplicaciones a casos más detallados se encuentran en los Capítulos 2 y 3 de Csanady (1982).

Método Experimental

Para esta práctica es conveniente utilizar un recipiente con divisiones, de tal manera que pueda inicialmente separar fluidos con diferentes densidades. Una posibilidad es un acuario, similar al utilizado en la práctica anterior, con una compuerta central que pueda bloquear parcialmente el paso de fluido de una parte a otra. Llene el acuario con agua y cierre la compuerta de tal manera que pueda haber intercambio libre por encima de ella. Ahora introduzca un fluido más denso (agua con sal) en la parte inferior de ambos lados del recipiente, pero dejando

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

una diferencia en el nivel del fluido denso. Evite al máximo que ocurra mezcla al introducir el fluido más denso y asegúrese que la diferencia en el nivel de este fluido es bastante menor que su altura media.

Abra rápidamente la compuerta y observe la propagación de ondas en ambas direcciones. Calcule la velocidad de propagación utilizando un cronómetro y marcas en el recipiente, y compare con el valor teórico esperado. Repita este ejercicio para varias diferencias en altura. Vea como a medida que la altura de la perturbación crece en comparación con la altura media del fluido más denso entonces la comparación entre teoría y observaciones empeora.

Intente repetir el ejercicio pero ahora con tres compartimientos (dos compuertas) y con un nivel distinto del fluido más denso en cada compartimiento. Haga diferentes pruebas y observe la simetría en la propagación de las perturbaciones.

Práctica 3: Ondas Estacionarias

Teoría

Para la introducción a este caso utilizaremos las mismas ecuaciones discutidas en la práctica anterior, aplicadas ahora a un canal (o golfo) largo (en la dirección x), cuya profundidad y ancho son constantes en esta dirección. Así obtenemos un caso particular de la ecuación de onda anterior:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Una posible solución de esta ecuación es una onda estacionaria, correspondiente a la superposición de dos ondas progresivas que viajan en direcciones opuestas:

$$\eta = \eta_0 cos(kx)\, cos(\omega t)$$

$$u = \frac{c\eta_0}{H} sin(kx)\, sin(\omega t)$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

La forma particular de esta solución que satisface la condición de flujo cero en los extremos del canal ($x = 0, l$) es

$$\eta = \eta_0 cos(nkx)\, cos(\omega t)$$

$$u = \frac{c\eta_0}{H} sin(nkx)\, sin(\omega t)$$

donde el número de onda $k = 2\pi/L = \pi/l$ y la velocidad angular $\omega = 2\pi/T$ están relacionados por medio de la relación de dispersión $\omega = nkc$. El modo uninodal de oscilación corresponde a $n = 1$, el bimodal a $n = 2$, y así sucesivamente. A partir de la relación de dispersión se obtiene la denominada fórmula de Merian que relaciona el período de la oscilación con la profundidad del canal (y con el modo de oscilación):

$$T = \frac{2l}{n(gH)^{1/2}}$$

Consideremos ahora el caso de un golfo, cerrado por un extremo y abierto por el otro, forzado por oscilaciones afuera del mismo. Este caso es distinto en dos aspectos. Primero, las condiciones de contorno son que el flujo sea cero, $u = 0$, en el extremo cerrado ($x = 0$) y que la amplitud en el lado abierto ($x = l$) venga impuesta por la amplitud fuera del mismo, A, tal como sigue:

$$\eta(x = l) = \eta_0 cos(nkl)\, cos(\omega t) = A cos(\omega t)$$

Y segundo, el período de oscilación está impuesto por el movimiento exterior, $\omega = 2\pi/T$.

En este caso la solución tiene la forma

$$\eta = B cos(nkx)\, cos(\omega t)$$

$$u = \frac{cB}{H} sin(nkx)\, sin(\omega t)$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

donde $B = A/[cos(nkl)]$. Esta solución tiene consecuencias muy importantes en lo que se refiere a mareas forzadas en golfos. En particular, puede apreciarse que si la longitud del golfo L coincide aproximadamente con $T(gH)^{1/2}/4$ entonces se obtiene una condición de resonancia. Este es el caso de la Bahía de Fundy, en la costa este de Norteamérica, donde las mareas alcanzan las amplitudes máximas de nuestro planeta.

Tal como se hizo con la práctica anterior esta discusión podría extenderse a ondas interfaciales. En el caso de dos capas, siendo la profundidad media de la capa superior mucho menor que la de la capa inferior, existe una solución prácticamente análoga pero con la gravedad g sustituida por la gravedad reducida $g' = (\rho_2 - \rho_1)g/\rho_2$. Esta solución correspondería al modo baroclínico de oscilación antes mencionado, en el cual la capa inferior está prácticamente en reposo y los desplazamientos de la interfase se encuentran en oposición de fase con los desplazamientos de la superficie libre, siendo sus amplitudes mucho mayores. En el otro modo posible, o modo barotrópico, toda la columna de agua se mueve prácticamente al unísono, siendo los desplazamientos de la superficie libre y la interfase de igual amplitud y en fase.

De nuevo se recomiendan ampliamente los Capítulos 5 y 6 de Gill (1982). Otra excelente referencia para la aplicación a mareas es el Capítulo 11 de Proudman (1953). Otras referencias recomendables son Ippen (1966) y Csanady (1982).

Método Experimental

Para esta práctica es conveniente utilizar recipientes rectangulares, con una lado bastante más largo que el otro. Primero llene el recipiente con agua dulce y ponga el fluido en oscilación simplemente levantándolo por un extremo. Después de

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

varios intentos verá que es bastante fácil conseguir una onda estacionaria unimodal, que lentamente decae en amplitud con el tiempo. Cronometre el período de la oscilación y compárelo con el esperado teóricamente. Después de cierta práctica verá que también puede obtener una onda bimodal. Observe y describa el movimiento para la onda estacionaria unimodal y bimodal.

Ahora repita la experiencia pero con dos capas de fluido de distinta densidad, con algún colorante en el fluido más denso con el fin de observar fácilmente la interfase (obtenga las dos capas introduciendo primero el fluido menos denso y después el fluido más denso con un embudo y tubo hasta el fondo). Observará que en la oscilación que se obtiene la superficie libre y la interfase normalmente están en fase y tienen idéntica amplitud. Este es el modo barotrópico de oscilación. Siga haciendo intentos para ver si puede obtener el modo baroclínico, en el cual la oscilación de la superficie libre y la interfase están en oposición de fase, y la amplitud de la oscilación en la interfase es mucho mayor. Para ello intente perturbar directamente la interfase, manteniendo el recipiente fijo e introduciendo con cuidado una placa directamente sobre la interfase.

Una manera de reproducir el modo baroclínico es utilizando un recipiente cerrado. Llénelo completamente con dos fluidos de distinta densidad y color. Una vez lleno y cerrado perturbe el recipiente levantándolo de un lado y volviéndolo a su posición original. En este caso verá que puede obtener una considerable oscilación en la interfase, mucho mayor que en el caso anterior. En esta experiencia la superficie libre no puede desplazarse debido a la presencia del recipiente. Sin embargo, el problema es totalmente equivalente pues la superficie rígida introduce presiones que son dinámicamente equivalentes a las que ocurrirían si la superficie

libre pudiese oscilar.

Práctica 4: Decaimiento de Remolinos

Teoría

Considere un flujo bidimensional (movimiento en el plano horizontal) sujeto a fricción con el fondo. La fricción en el fondo se puede simplificar suponiéndola proporcional a la velocidad del fluido inmediatamente encima de este (en el caso de un flujo aproximadamente bidimensional este corresponde a la velocidad de toda la columna de agua), con un signo negativo para indicar que la fricción es un sumidero de momento. En este caso las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{du}{dt} = -ku - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Tomando la derivada cruzada de las dos primeras ecuaciones y restando la primera de la segunda se obtiene:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -k\zeta$$

donde $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ es la vorticidad relativa del fluido. La solución de esta ecuación es $\zeta = \zeta_0 exp(-kt)$, donde $\zeta_0 = \zeta(t = 0)$ es la vorticidad relativa inicial del fluido. Conviene destacar que la solución obtenida es válida solo en el caso de un sistema de referencia fijo.

Uno de los ejemplos donde podemos aplicar estas ideas de forma más inmediata es para una columna de agua rotando como un sólido rígido. En este caso la vorticidad relativa es dos veces la velocidad angular del fluido, ω, la cual relaciona la coordenada radial r con la velocidad tangencial v_θ mediante la expresión $v_\theta =$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

ωr. Así pues, para un remolino que decae debido a fricción podemos medir la evolución de v_θ en función del tiempo y así llegar a determinar la constante k.

Para referencias adicionales en este tema se puede consultar a Gill (1982), Dutton (1986), Pedlosky (1987) o Kundu (1990).

Método Experimental

Para realizar este experimento necesitamos un recipiente cilíndrico que deberá llenar parcialmente de fluido. Ponga el fluido a rotar hasta que alcance una velocidad uniforme; puede utilizar varios métodos para poner el fluido a rotar: mecánicamente con una pala, mediante fricción en la parte superior, mediante una base rotatoria, etc. Una vez alcanzada la velocidad uniforme detenga la acción de transmisión de momento angular y cronomete la diminución de la velocidad tangencial del fluido con el tiempo. Para ello quizás necesite poner algunas bolitas de anime en el fluido que le sirvan de trazadores. Grafique la evolución de la velocidad angular contra el tiempo (en papel logarítmico) y determine el coeficiente de fricción.

Repita la experiencia para varios fluidos (agua, detergente, aceite, kerosene, etc.) y con varias texturas en las paredes y el fondo (fondo liso, rugoso, con piedras de diversos tamaños, etc). Trate de obtener dependencias del coeficiente de fricción con el tipo de fluido (viscosidad) y textura de los contornos.

Práctica 5: Doble Difusión

Teoría

La densidad en el océano aumenta con la salinidad y disminuye con la temperatura. Los gradientes verticales de densidad, por tanto, dependen de los gradien-

tes verticales de la salinidad y la temperatura. Así pues, puede perfectamente ocurrir que una columna de fluido sea (estáticamente) estable debido a un gradiente de temperatura positivo (T aumenta hacia la superficie del océano), a pesar de que el gradiente de salinidad sea desestabilizante (S también aumenta hacia la superficie).

Supongamos ahora una situación como la antes descrita: agua en la superficie más caliente y salada que el agua en el fondo. Consideremos la posibilidad de que una parcela de agua sufra un pequeño desplazamiento vertical. En este caso la diferencia entre los coeficientes de difusión de la salinidad y la temperatura es de extrema importancia, estos coeficientes siendo una medida de la rapidez con la cual cambiará la salinidad y temperatura de un fluido por intercambio con el medio que le rodea. El factor clave está en que el coeficiente de difusividad de la temperatura es unas 100 veces mayor que el de la sal, lo que quiere decir que una partícula modificará su temperatura mucho más rápido que su salinidad.

Pensemos primero en una parcela de agua que se desplaza hacia arriba, hacia zonas más calientes y saladas. Trás un pequeño desplazamiento la parcela aumentará rápidamente su temperatura, pero su salinidad casi no se modificará, lo que ocasionará que tenga una densidad menor que la del medio circundante; esto permitirá que la parcela de agua continue su movimiento ascendente. Si consideramos ahora una parcela que se desplaza hacia abajo veremos que ajusta rápidamente su temperatura pero mantiene su mayor salinidad, lo que ocasiona que aumente la densidad y continúe descendiendo. Este fenómeno es responsable de los denominados dedos de sal ("salt fingers"), cuyo espesor es usualmente de unos milímetros y su extensión vertical en el océano es de hasta varios metros.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

La extensión vertical está usualmente limitada por la existencia de procesos de difusión lateral y vuelco vertical ("convective overturning"), que ocasionan zonas mezcladas de varios metros de espesor, limitadas por fuertes gradientes verticales en el campo de densidad (denominadas escaleras). Uno de los efectos de la doble difusión oceánica es el de intensificar considerablemente los procesos de mezcla vertical, lo que se refleja en un incremento del coeficiente efectivo de difusión.

Dos referencias excelentes sobre los procesos de Doble Difusion son Turner (1973) y Brandt et al. (1996).

Método Experimental

Para realizar este experimento intentemos primero reproducir el caso oceánico. Para ello introduzca agua caliente salada en un recipiente, mantenga la temperatura caliente mediante una lámpara de bastante potencia (por ejemplo de 150 Vatios) enfocada hacia la superficie del fluido, o con un calentador de resistencia del tipo que se utiliza para mantener una temperatura estable en peceras. A continuación, y con cuidado de no producir mezcla, introduzca agua fresca y fría (con un colorante) mediante un embudo y tubo delgado que llegue al fondo del recipiente. El tiempo de formación de los dedos de sal dependerá de las diferencias en temperatura y sal utilizadas, pero en general será considerablemente rápido debido a la gran diferencia entre los coeficientes de difusión de la temperatura y la sal. Para diferencias de sal de 1 - 3 partes por mil y diferencias de temperatura de 5 - 15°C, estos se apreciarán en pocos minutos. En cualquier caso debe asegurarse que las mezclas utilizadas son inicialmente estables.

Si el gradiente de temperatura es grande los dedos de sal se extenderán hasta la superficie del recipiente. En este caso puede introducir un tubo fino de cristal

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

que conecte las partes profunda y superficial del recipiente, con el fin de obtener lo que sería una fuente de agua relativamente dulce. En caso de que el gradiente de temperatura sea relativamente pequeño en comparación con el gradiente de salinidad (pero estable) los dedos de sal tendrán una extensión vertical limitada, por encima de la cual se vuelven inestables y se produce una zona de mezcla.

El procedimiento anterior tiene la dificultad de que el fluido superior debe mantenerse a mayor temperatura durante un período prolongado de tiempo. Otra alternativa es la de substituir la dependencia de la densidad en la temperatura por otra propiedad más fácil de controlar y cuyo coeficiente de difusividad difiera significativamente del de la sal. En este caso es necesario que el coeficiente de difusión de la propiedad desestabilizante sea menor. Una posibilidad es utilizar sal y azucar en lugar de temperatura y sal, respectivamente. El azucar toma el papel de la sal, con su concentración aumentando hacia la superficie, mientras que la sal toma el papel estabilizante de la temperatura, su concentración aumentando hacia el fondo. El coeficiente de difusión del azucar es aproximadamente la tercera parte del coeficiente de la sal, por lo que los dedos de "azucar" tardarán mucho más en formarse que los dedos de sal.

Deje el sistema en reposo durante varias horas, preferiblemente un día completo, para apreciar la aparición de dedos de azucar. Intente que el sistema este en el máximo reposo para que los dedos de azucar se hagan lo más largos posible. Se deja al estudiante intentar con otras substancias distintas. Estime el coeficiente de difusión efectivo debido a la doble-difusión utilizando el método sugerido en la siguiente práctica.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Práctica 6: Difusión Vertical en Fluidos Estratificados

Teoría

Para esta práctica debemos crear un gradiente espacial de una substancia y estudiar su evolución en el tiempo bajo diversas condiciones. Posiblemente lo más sencillo consista en crear un gradiente vertical de salinidad en un recipiente, y suponer que el problema es independiente de la dirección horizontal. En principio consideraremos que no existe advección dentro del fluido (salvo aquella asociada a la posible existencia de turbulencia), por lo que la ecuación que rige la evolución temporal de la distribución de la substancia es la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = K \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

donde S es la salinidad y K su coeficiente de difusión.

Esta ecuación puede reescribirse en forma adimensional de la siguiente forma:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \left(\frac{K\tau}{l^2} \right) \frac{\partial^2 S'}{\partial z'^2}$$

Su solución depende de un solo parámetro adimensional de orden uno, $K\tau/l^2$, donde τ y l son escalas de tiempo y distancia (cuyos valores son intrínsicos de la solución en el sentido de que corresponden a la distancia que alcanza un cierto valor de concentración en un tiempo dado). La solución para S es "similar" pues sólo depende de la combinación $K\tau/l^2$; así pues, por ejemplo, la salinidad será la misma en una posición cercana para un tiempo menor ($l_0 \simeq (K\tau_0)^{1/2}$), que en otra posición más alejada para un tiempo posterior ($l_1 \simeq (K\tau_1)^{1/2}$).

Un modo más riguroso de ver esto es adimensionalizar sólo la variable dependiente, $S = S_0 S'$, de tal manera que la ecuación resultante es

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = K \frac{\partial^2 S'}{\partial z^2}$$

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Como la solución no depende de las unidades utilizadas entonces debe poder expresarse en función de la combinación $\eta = z/(Kt)^{1/2}$. De hecho la ecuación diferencial parcial anterior puede reescribirse en función de η como una ecuación diferencial ordinaria:

$$2\frac{\partial^2 S'}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial S'}{\partial \eta} = 0$$

Considerando la dirección vertical positiva hacia arriba, y con el origen de coordenadas en la posición de la discontinuidad inicial, la condición inicial ($S(z, t = 0) = 0$ para $z \geq 0$) se convierte en $S'(\eta \to \infty) = 0$, mientras que la condición de contorno ($S(z \to -\infty) = S_0$ para $t > 0$) se torna en $S'(\eta \to -\infty) = S_0$. La solución de este problema es

$$S(z,t) = \frac{S_0}{2}\left(1 - erf[\frac{z}{(4Kt)^{1/2}}]\right)$$

donde $erf(x)$ es la función error del argumento x.

Conocida la solución anterior, el coeficiente de difusión podrá obtenerse si podemos determinar la distribución espacial o temporal de la concentración. En realidad basta con saber como se mueve con el tiempo un valor prefijado de concentración; en particular, esta solución muestra que para $\eta = 3/2$ el valor de S es $0,02S_0$, es decir apenas empieza a modificarse el valor inicial cero.

Finalmente, cabe destacar la gran diferencia entre el coeficiente de difusión molecular y el coeficiente de difusión turbulento. El coeficiente molecular está asociado al movimiento libre (Browniano) de las moléculas del fluido. Su valor para el agua depende de la temperatura, pero su orden de magnitud característico es de $10^{-9}\, m^2/s$. El coeficiente de difusión turbulento es el resultado de la turbulencia del flujo y es, por tanto, una propiedad del flujo y no del tipo de fluido que se utiliza. El coeficiente turbulento puede imaginarse como el transporte de parcelas

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

macroscópicas de fluido en la dirección contraria al gradiente de la substancia, o el resultado de la correlación de las fluctuaciones de velocidad vertical w' y densidad ρ', es decir $\overline{w'\rho'}$. Su valor es mucho mayor que el del coeficiente molecular, típicamente cuatro o cinco ordenes de magnitud mayor.

Dos referencias que discuten soluciones similares a la antes presentada son Batchelor (1967) y Currie (1973). El proceso de formación de la interfase en la presencia de turbulencia está discutido en detalle en Turner (1973). Diversas aplicaciones pueden encontrarse en Gill (1982), Pickard y Emery (1982) y Cushman-Roisin (1994). También se recomienda el artículo de Turner y Kraus (1967).

Método Experimental

Llene parte de un recipiente (envase, acuario, etc.) con agua dulce, déjese reposar. Después introduzca lentamente agua salina, con 30 - 40 partes de sal por mil de agua, por medio de un embudo conectado a un tubo delgado que llegue al fondo. Deje reposar, debe lograrse una interfase muy bien definida entre ambos fluidos. Deje el recipiente en un sitio alejado de vibraciones durante varios días; tome nota cada 12 - 24 horas de la evolución de la interfase (para ello es conveniente dibujar marcas en el recipiente). La interfase debe difundirse lentamente, del orden de 1 cm por día.

Para poder visualizar la evolución de la interfase es necesario que previamente haya introducido algún tinte en la solución salina. Bajo la suposición de que el coeficiente de difusión de la salinidad es el mismo que el del colorante que utilicemos, y suponiendo que visualmente puede siempre determinar el mismo valor de concentración de salinidad (colorante), se podrá estimar el coeficiente

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

de difusión de la sal (colorante). Para ello se sugiere utilizar la condición $\eta = 3/2$, es decir suponer que el agua empieza a colorearse cuando hay un 2% de la concentración inicial de colorante (el valor para z debe tomarse como la distancia hasta el punto donde se encontraba inicialmente la interfase).

Despues de varios días la interfase se habrá hecho muy difusa. Ahora introduzca turbulencia en la capa superior (o inferior), por medio de algun agitador mecánico. La difusión se hará rápida, teniendo lugar a través de parcelas de agua englobadas por el fluido más turbulento, pero la interfase rápidamente se hará bien definida y se moverá hacia abajo. Discuta la razón por la cual esto ocurre y sugiera algún método para determinar el coeficiente de difusión turbulenta (recuerde la relación antes propuesta $K \sim l^2/\tau$). Si la fuente de turbulencia (el agitador) se coloca ahora en el fluido inferior la interfase se desplazará hacia arriba. El rápido movimiento de la interfase y los cambios en el tono del colorante muestran que la mezcla es intensa; si la turbulencia se deja durante tiempo suficiente el fluido en todo el recipiente se tornará homogéneo.

Práctica 7: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Teoría

Dos fluidos en reposo, de diferente densidad, se encuentran establemente estratificados cuando el de mayor densidad está por debajo del de menor densidad. Esto es lo que se denomina una situación estáticamente estable. Si estos fluidos se encuentran en movimiento, con velocidades distintas, entonces se establece un gradiente vertical de celeridad que puede ocasionar que el flujo sea dinámicamente inestable. En este caso una perturbación muy pequeña en la interfase entre ambos fluidos tenderá a crecer con el tiempo. Esta perturbación, que nace de alguna

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

vibración del sistema, puede representarse como la superposición de infinitas ondas. Así pues, desde un punto de vista teórico el estudio se reduce a analizar el comportamiento de una onda sinusoidal genérica en la interfase entre ambos flujos.

Teóricamente se puede demostrar que el flujo es dinámicamente inestable bajo ciertas condiciones. Estas condiciones dependen de las características del flujo, en particular de la estratificación y del dominio donde tiene lugar. En el caso de un flujo linealmente estratificado en un medio infinito se puede demostrar que las perturbaciones crecen cuando el numero de Richardson Ri es inferior a 0,25. El número de Richardson está definido por

$$Ri = \frac{g(\partial\rho/\partial z)}{\rho(\partial v/\partial z)^2}$$

donde g es la constante de gravedad, ρ es la densidad y v el valor absoluto de la velocidad. En el caso de un flujo compuesto por dos fluidos superpuestos con densidades ρ_1, ρ_2, y velocidades $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$, entonces podemos utilizar el número global de Richardson definido por

$$Ri_o = \frac{g'h}{\rho_2 {v_1}^2}$$

donde $g' = (\rho_2 - \rho_1)g/\rho_2$ es la gravedad reducida y h es el espesor de la capa superior que se encuentra en movimiento. En este caso el valor crítico corresponde a uno, por debajo del cual el flujo es dinámicamente inestable.

El criterio de flujo inestable bajo condiciones de un número de Richardson subcrítico también puede deducirse a partir de argumentos energéticos. En este caso basta con analizar el incremento en energía potencial asociado al intercambio entre dos partículas separadas verticalmente por una cierta distancia, y requerir que este incremento pueda provenir del cambio que ocurre en la energía cinética.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Diversas referencias que discuten la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz son Turner (1973), Kundu (1990) y Cushman-Roisin (1994). El artículo que describe los experimentos originales realizados en un recipiente rectangular alargado es Thorpe (1971). Una discusión del criterio de inestabilidad en base a argumentos energéticos corresponde a Miles (1986).

Método Experimental

Este experimento puede realizarse en dos tipos de recipientes transparentes: rectangular alargado o cilíndrico. En ambos casos deben introducirse dos fluidos de distinta densidad. Una posibilidad es introducir dos fluidos inmiscibles, tales como agua (con un tinte) y kerosene. La ventaja de esto es que puede repetirse el experimento sin necesidad de cambiar los fluidos. La otra posibilidad, más realista en cuanto a su semejanza con el océano, es la de utilizar agua dulce y agua salada (esta también con un tinte).

En el caso del recipiente rectangular este debe ser considerablemente largo (unos 2 o 3 metros) y estrecho (10 cm de ancho por 15 - 30 cm de alto). Si se utiliza un recipiente de vidrio será necesario reforzar la parte inferior del mismo para evitar que se rompa. Para introducir los fluidos el recipiente debe tener aberturas en su parte superior. Introduzca primero el agua dulce y después el agua salada, por medio de un embudo y un tubo delgado que llegue hasta el fondo, lentamente de manera que se ocasione la menor mezcla posible. Llene completamente el recipiente y cierre las aberturas. Deje reposar los fluidos hasta que estén completamente horizontales y en reposo. Una vez alcanzado el reposo levante uno de los extremos y manténgalo en esta posición, los fluidos se desplazarán en direcciones opuestas y en la interfase se producirán ondas que, si la inclinación es suficiente, crecerán y

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

se harán inestables. El inconveniente de este tipo de experiencia es que se requiere un tanque hecho a la medida, de considerable longitud y lo bastante estrecho como para que sea manejable.

En el caso de que se utilice el recipiente cilíndrico llénelo de la misma forma antes descrita. Una vez alcanzado el reposo inicial debe poner en movimiento uno de los dos fluidos. Normalmente es más fácil poner en movimiento el fluido superior, tipo sólido rígido en rotación. Para ello puede utilizarse una pala mecánica rotatoria introducida en este fluido. En este caso la velocidad tangencial dependerá de la posición radial pero la velocidad mayor, donde primero puede ocurrir inestabilidad, estará cerca del extremo exterior del recipiente y será la que se observe desde afuera. Note que en este caso la longitud de onda λ no puede tomar un valor arbitrario por estar restringida a ser un divisor exacto de la circunferencia del cilindro, dependiendo por tanto de la posición radial. En general deberá cumplirse que $\lambda(r) = 2\pi r/n$, donde n es el número de ondas que se forman. El inconveniente de realizar el experimento con un recipiente cilíndrico es que la rotación del fluido crea una zona de baja presión en el centro del mismo y normalmente la mezcla es más activa en esta zona que en el extremo del mismo, donde primero se desarrollan las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz.

Práctica 8: Inestabilidad Térmica

Teoría

La inestabilidad térmica (o de Rayleigh) tiene lugar cuando un fluido que se encuentra establemente estratificado es calentado por debajo. Este calentamiento inducirá una diferencia en densidad la cual puede ocasionar la aparición de movimientos convecticos verticales en el fluido. Si la diferencia de temperatura es

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

pequeña estos movimientos estarán inhibidos debido a la viscosidad del fluido, pero si es lo suficientemente grande entonces el fluido se vuelve inestable y los movimientos convectivos verticales se desarrollan.

El parámetro que mide la inestabilidad vertical del fluido representa la proporción entre los efectos desestabilizantes de boyancia y los efectos estabilizantes de las fuerzas viscosas, y se denomina número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\alpha\Gamma d^4}{k\nu}$$

donde g es la aceleración de gravedad, α el coeficiente de expansión térmico, $\Gamma = -dT/dz$ es el gradiente de temperatura, d es el espesor del fluido (o de la capa de fluido originalmente estable que está siendo calentada por debajo), k es el coeficiente de difusividad térmica y ν es el coeficiente de viscosidad cinemática.

Cuando Ra excede un valor crítico el sistema se vuelve inestable. Los valores teóricos críticos para Ra son 1780 para el caso de fluido entre dos placas rígidas y 1101 para el caso de un fluido entre una placa rígida en el fondo y una superficie libre superior. Estos números críticos son fácilmente excedidos cuando calentamos un fluido aproximadamente homogéneo por su parte inferior. Un ejemplo de ello es el calentamiento en capas inferiores de la atmósfera, que ocurre principalmente a través de radiación de onda corta emitida desde la superficie de la tierra (o mar). Los movimientos convectivos verticales en el aire se desarrollan rápidamente, siendo el vapor de agua el trazador visible que nos permite observarlos.

Para nuestro experimento con agua es conveniente inducir una cierta estratificación vertical mediante la introducción de algo de sal en la parte inferior del fluido. En el caso sin sal teníamos $-(1/\rho)d\rho/dz = \alpha dT/dz$. Con la presencia de un gradiente vertical de sal el gradiente de densidad toma la forma

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

$-(1/\rho)d\rho/dz = \alpha dT/dz - \beta dS/dz$, siendo β el coeficiente de expansión por salinidad. Esto puede interpretarse como un gradiente de temperatura reducido, dado por $\alpha[dT/dz - (\beta/\alpha)dS/dz]$. En este caso la ventaja radica en que la convección vertical no se produce tan rápidamente, lo que permite determinar más fácilmente el gradiente vertical de temperatura. Al mismo tiempo, mediante la introducción de colorante limitada a la parte inferior del fluido, podremos visualizar mejor los movimientos convectivos verticales.

Un situación algo distinta es la que se denomina inestabilidad de Bénard. En este caso a la fuerza de viscosidad se suma otra fuerza estabilizadora dominante que es la tensión superficial en la superficie libre del fluido, de tal manera que al desarrollarse la convección se forman células hexagonales. Para que la tensión superficial sea dominante usualmente se requiere que el espesor del fluido sea muy pequeño, del orden de 1 mm en el caso de agua. Otra alternativa es utilizar un fluido que desarrolle mucha mayor tensión superficial, tal como el aceite.

Una excelente referencia para la descripción de los diversos aspectos de este tipo de inestabilidades viene dada en Turner (1973). Una descripción más breve pero que contiene el desarrollo matemático para determinar la condición de inestabilidad se encuentra en Kundu (1990).

Método Experimental

Realice dos experimentos tratando de reproducir las inestabilidades de Rayleigh y Bénard. En el primero utilice un recipiente de vidrio que aguante el calor. Llénelo con un fluido estratificado en dos capas, por ejemplo agua dulce sobre agua ligeramente salina (1 - 2 partes por mil de sal). Introduzca un colorante en el agua con sal para poder así observar los movimientos verticales. La cantidad

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

de sal en el agua inferior debe ser adecuada para que se pueda obtener un número de Rayleigh crítico con un moderado gradiente vertical de temperatura (unos 5 - 10 °C en la altura de un recipiente de unos 10 - 20 cm). Caliente el recipiente por su parte inferior al mismo tiempo que mide la temperatura a varios niveles con termómetros. Observe el desarrollo de movimientos verticales y calcule el número de Rayleigh al cual estos parecen máximos.

Evite introducir un exceso de sal en el fluido inferior, pues ello ocasionaría que los movimientos convectivos estén muy limitados verticalmente. Esta limitación se debe a que el coeficiente de difusión de la temperatura es mucho mayor que el de la sal. Esto ocasiona que el intercambio de calor es mucho más rápido que el intercambio de sal: el fluido ascendente se ajusta a la temperatura ambiente pero mantiene el exceso de sal, desarrollando una boyancia negativa.

En el segundo experimento utilice un aceite muy viscoso, tal como aceite de silicona. Llene un recipiente con una capa relativamente pequeña de fluido, de menos de 1 cm de espesor. Caliéntelo por debajo lentamente: para ello es conveniente no calentarlo directamente con fuego o una resistencia, sino hacerlo indirectamente, a través de otro fluido (tal como otro aceite) donde se encuentre apoyado el recipiente superior. Para poder observar la formación de células hexagonales necesitará de un trazador, pues el aceite de silicona es transparente. Un posible candidato es polvo de aluminio: échelo sobre el aceite y déjelo un rato para que sedimente antes de comenzar a calentar.

Práctica 9: Corrientes de Gravedad

Teoría

Un fluido con densidad distinta a la del medio que le rodea se propaga en este

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

como una corriente de gravedad (o corriente de densidad). Existen numerosos casos de corrientes de gravedad en la naturaleza, tales como las nubes cargadas de lluvia avanzando sobre una zona más seca, las avalanchas de nieve o barro (estas últimas ocasionan las corrientes de turbidez en el fondo marino), el agua propagándose tras la rotura de una presa, el agua salada penetrando en un estuario, o la descarga de agua dulce sobre el océano.

Consideremos una corriente de gravedad unidimensional, como podría ser agua salada propagándose por el fondo de un canal. Una forma sencilla de estimar la velocidad de propagación de la corriente de gravedad es utilizando la condición de que la función de Bernoulli debe ser constante a lo largo de la línea de flujo que sigue la interfase (entre dos puntos A y B, el punto A situado en la cabeza de la corriente de gravedad, y el punto B alejado aguas arriba). En un sistema de referencia moviéndose con la cabeza de la corriente de gravedad tenemos que $v_A = 0$ y que v_B es la velocidad de la corriente de gravedad. En este caso:

$$p_A = p_B + \rho_1 g H + \frac{v_B^2 \rho_1}{2}$$

donde H es el espesor de la corriente de gravedad que avanza sobre el fluido circundante, y ρ_1 y ρ_2 son las densidades del agua en la capa superior e inferior, respectivamente. Además de esta expresión debe satisfacerse la siguiente relación hidrostática:

$$p_A = p_B + \rho_2 g H$$

que indica que no existe gradiente de presión a lo largo del fondo del canal: en caso contrario la ausencia de fuerzas de fricción obligaría a que la corriente de gravedad se acelerase. Ambas relaciones conducen a la siguiente expresión para la

velocidad de propagación de la corriente de gravedad

$$v_B = (2g'H)^{1/2}$$

donde $g' = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$. En el caso de dos corrientes de gravedad superpuestas cada una de ellas viajará con la velocidad v_B pero en dirección opuesta.

Considere el caso en que la densidad del fluido ambiente es mucho menor que la del fluido que avanza como corriente de gravedad (tal como en el caso de agua avanzando trás una rotura de presa). Discuta que ocurre con la expresión anterior y a que se puede deber. Busque una solución alternativa considerando que la presión es constante a lo largo de la línea que sigue la interfase (en el caso del agua propagándose en aire sería igual a la presión ambiente). Nótese también que si la pendiente sobre la cual se desliza la corriente de gravedad está inclinada la discusión anterior puede modificarse para mostrar que la velocidad paralela a la pendiente aumenta conforme a

$$v_B = \left(\frac{2g'H}{cos\theta}\right)^{1/2}$$

donde θ es la inclinación del fondo.

En las aproximaciones anteriores puede apreciarse que se han ignorado sumideros de energía por fricción con el fondo o por pérdidas en la parte frontal (o cabeza) de la corriente de gravedad. También se han ignorado los procesos de mezcla que reducen la diferencia de densidad entre ambos fluidos. Una expresión semiempírica que toma en cuenta estos factores y la pendiente del fondo surge si consideramos que el gradiente de presión viene dado por $(g'/\rho_2)dH/dx = (g'sin\theta)/\rho_2$. Por tanto el balance de momento en la dirección de avance de la corriente de gravedad, paralela al fondo, puede aproximarse por:

$$0 = \frac{g'}{\rho_2} sin\theta - \mu v$$

donde el segundo término es una fuerza friccional, que se toma como proporcional a la velocidad, y μ es una constante de proporcionalidad. De aquí se obtiene que la velocidad de avance de la corriente será

$$v = \frac{g' \sin\theta}{\rho_2 \mu}$$

Algunas referencias sobre este tema son Batchelor (1967), Turner (1973), Yih (1977) y Kundu (1990). Un artículo clave en el desarrollo de la teoría de corrientes de gravedad es Benjamin (1968). Un artículo de aplicación a estuarios corresponde a Pelegrí (1988).

Método Experimental

Para realizar este experimento se necesita un recipiente alargado (tipo canal) el cual inicialmente separamos en dos mediante una compuerta (esta compuerta debemos tratar que cierre lo mejor posible, aun cuando algo de pérdida a través de ella no es crítica). Una manera de realizar esta separación inicial es la siguiente: llene todo el recipiente con un único fluido y a continuación sepárelo en dos mediante la compuerta que cierra a lo largo de las ranuras previamente instaladas. En uno de los dos lados introduzca sal (con colorante), homogeneice la mezcla tratando de minimizar las pérdidas a través de la compuerta, y deje reposar por un espacio corto de tiempo. Finalmente levante la compuerta y observe como el fluido más denso se propagará por debajo del fluido más liviano (o también se podría decir que el fluido más liviano se propagará por encima del otro más denso, de forma completamente simétrica).

Utilice un cronómetro y marcas en el recipiente para medir la velocidad de propagación de la corriente. Puede regular la velocidad de propagación disminuyendo el nivel inicial del agua en el estanque y la diferencia de densidad entre

ambos fluidos. Compare con el estimado teórico y discuta las posibles causas de las diferencias observadas. Repita el experimento cambiando el tipo de fondo para apreciar el efecto de la fricción. Finalmente incline el recipiente para apreciar si la corriente aumenta su velocidad, compare con la expresión semiempírica propuesta en la teoría y calcule el coeficiente de proporcionalidad.

Prácticas 10 a 13: Experimentos en un Sistema de Referencia Rotante

El objetivo de estas cuatro últimas prácticas consiste en una introducción a la realización de experiencias con una mesa rotatoria de alta precisión. Esta mesa ha sido diseñada para rotar recipientes de formas diversas que contengan fluidos (de densidad constante o no), con el fin de simular el comportamiento físico del fluido en diversas regiones acuáticas. Cabe mencionar que en la actualidad en el Departamento de Física de la ULPGC se dispone de la única mesa rotatoria en España capaz de poner a rotar volumenes de fluido de más de 500 litros con un alto grado de precisión y estabilidad, la cual ha sido diseñada y construida bajo la dirección del autor de este Proyecto Docente. La mesa se encuentra actualmente ya operativa pero en fase de continuo desarrollo, que incluye la compra y adaptación de sensores de diversas variables (temperatura, conductividad y velocidad) y la transmisión de estos datos y las imágenes de vídeo en tiempo real.

La mesa consta de diversos materiales, destacando los siguientes:

1) Un sistema megatorque de alta precisión, que incluye un motor, una interfase, un terminal y cables conectores.

2) Un ordenador capaz de controlar la mesa rotatoria y recibir y procesar los datos que se vayan adquiriendo, tales como imágenes y datos de temperatura y conductividad. Este incluye un CPU adecuado para recibir los datos en tiempo

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

real, unidades de almacenamiento de datos, tarjetas de video y terminal de alta resolución.

3) Un sistema eléctrico para garantizar una fuente estable de potencia al motor rotatorio, así como para protegerlo de cualquier sobrecalentamiento, que incluye palancas de conexión, sensores de temperatura, relé trifásico, un transformador-separador trifásico, un estabilizador de corriente y filtros de corriente.

4) Recipientes de varias formas y tamaños, entre ellos cabe destacar un tanque cilíndrico de metacrilato transparente, de un metro de diámetro y 0,40 metros de altura. Este es el recipiente que se considerará en la descripción presentada para estas prácticas.

5) La estructura metálica que forma la base del sistema, diseñada para un máximo de estabilidad y un mínimo de vibraciones. Por encima de esta base se encuentra la parte de la estructura que actualmente lleva un sistema de iluminación y la cámara de video, y que en un futuro incluirá también sensores de conductividad y velocidad.

Uno de los aspectos fundamentales en los experimentos con la mesa rotatoria es la selección de la velocidad angular de la mesa. Ello se realiza bajo el criterio de obtener un número de Rossby similar al que se obtendría en el flujo oceánico. El número de Rossby, Ro, compara las isguientes fuerzas:

$$Ro = \frac{Fuerzas\ de\ Inercia}{Fuerza\ de\ Coriolis} \sim \frac{u\partial u/\partial x}{fv} \sim \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL}$$

donde U y L son escalas características de velocidad y longitud, y f es el parámetro de Coriolis definido como $f = 2\Omega_z = 4\pi/T$, siendo Ω_z la componente perpendicular local de la velocidad angular de la tierra. Como ilustración consideremos dos casos en los que el número de Rossby del flujo oceánico es mucho menor que uno.

Ejemplo 1: Corrientes de Gravedad

Consideremos una corriente de gravedad producida por una diferencia de densidad de $\delta\rho = 0.1$ kg/m^3 y profundidad $H = 50$ m. En este caso la velocidad de avance será de orden $(g'H)^{1/2} \sim 0.1$ m/s. Sobre escalas de longitud $L = 10$ km el número de Rossby correspondiente sera $Ro \sim 0.1$. En el laboratorio una selección posible sería $\delta\rho = 10$ kg/m^3 y profundidad $H = 0,1$ m, lo que produciría $U \sim 0.1$ m/s. En este caso para obtener un número de Rossby similar requerimos $U/(2\Omega L) = (UT)/(2\pi L) \sim 10^{-3}$, por lo que el período de rotación debe ser $T \sim 60$ seg.

Ejemplo 2: Agua Antártica Intermedia

Las velocidades de las masas de Agua Antártica Intermedia son considerablemente pequeñas, $U \sim 10^{-2}$ m/s, y esta se extiende desde el continente Antártico sobre todo el océano Atlántico Sur, $L \sim 8000$ km. En este caso se obtiene $Ro \sim 10^{-3}$. La escala características de longitud en el laboratorio es el tamaño del recipente, $L = 1$ m, y podemos anticipar velocidades típicas de $U \sim 10^{-3}$ m/s. Para obtener de nuevo un número de Rossby similar requerimos $U/(2\Omega L) \sim 10^{-3}$. Puesto que $\Omega = 2\pi/T$ obtenemos que el período de rotación $T \sim 10$ seg.

Además del número de Rossby es muy probable que sea necesario ajustar otros parámetros adimensionales, tales como los número de Reynolds, Richardson y Ekman, para reproducir ciertos flujos oceánicos. La dificultad estriba en ajustar todos los parámetros al mismo tiempo, lo cual es particularmente complicado cuando se introduce estratificación vertical (y el número de Richardson juega un papel importante). Bajo estas circunstancias es normalmente necesario decidir cuales son los aspectos que se desean estudiar con el modelo físico, lo que permite

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

seleccionar los números adimensionales a ajustar.

Práctica 10: Corrientes de Talud

Teoría

Por corrientes de talud entenderemos aquellas que se desplazan limitadas por el talud continental (bien en superficie o a profundidad), y cuyo origen se debe fundamentalmente a la existencia de diferencias en densidad a lo largo del talud. Un primer enfoque de este problema consiste en considerar que la diferencia en densidad ocasiona una corriente de gravedad. Visto así este puede considerarse como un caso similar al de la Práctica 9, con la importante salvedad que la extensión lateral y la velocidad de propagación de la corriente de gravedad están ahora controladas en gran medida por el gradiente de presión transversal al movimiento. Las escalas de longitud y velocidad normal a la costa son ahora mucho menores, por lo que en este caso las ecuaciones de de conservación de momento (en las direcciones tangencial x y normal a la costa y) y masa pueden aproximarse como sigue:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - F_x$$

$$fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0$$

donde todas las variables dependientes corresponden al flujo dentro de la corriente de talud, siendo F_x el término de fricción en la dirección x.

El problema es usualmente simplificado despreciando los términos de fricción y suponiendo que la velocidad de la corriente de gravedad es mucho mayor y su espesor mucho menor que el del fluido circundante. En este caso los gradien-

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

tes de presión pueden ser substituidos por los gradientes de la elevación de la interfase (tal como hicimos en las Prácticas 2 y 3) con la gravedad sustituida por la gravedad reducida. Otra simplificación alternativa, que no utiliza el modelo de gravedad reducida, puede obtenerse bajo la suposición de ausencia de fricción y flujo estacionario, requiriendo que el flujo de momento integrado sobre toda la columna de agua se mantenga constante (antes y después de la corriente de gravedad). En este caso se utilizan también principios de continuidad de flujo, conservación de energía y vorticidad potencial, y se debe suponer la existencia de un punto de estancamiento en la cabeza de la corriente de gravedad.

Otro posible enfoque del problema, para el caso estacionario y con fricción, consiste en considerar un campo de densidades diagnóstico y obtener una ecuación de vorticidad que pueda ser resuelta numéricamente. A estas corrientes se les suele denominar picnobáticas, por cuanto son esencialmente barotrópicas y están orientadas paralelas a las isóbatas.

Tres artículos clave referentes a este tema son Stern et al. (1982), Csanady (1985) y Nof (1987).

Método Experimental

Para realizar esta experiencia necesitamos la mesa rotatoria con un recipiente y una garrafa sobre la misma, de manera tal que en cualquier momento podamos verter fluido desde la garrafa hacia el recipiente a través de una manguera. Pongamos el recipiente con agua salada (un volumen del orden de 100 litros, con una concentración de unas 10 partes por mil) a rotar. Seleccionemos un período de rotación apropiado, por ejemplo una vuelta cada diez segundos. Se deja el recipiente rotando durante tiempo suficiente para que el volumen de fluido se ponga

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

completamente en rotación con la mesa, como si fuera un sólido rígido. Esto tardará más o menos dependiendo del tipo de recipiente. Así pues para un recipiente rectangular es bastante rápido (unos pocos minutos) pero para un recipiente cilíndrico con fondo liso y bastante volumen de agua puede tardar 15 minutos o más.

Una vez todo el fluido esté rotando a una tasa constante podemos abrir el grifo de la garrafa y verterlo lentamente hacia el borde del recipiente a través de una manguera cuyo extremo esté colocado en esa posición; en el extremo final de la manguera es conveniente poner una goma espuma que evite que el fluido caiga demasiado rápido. El fluido en la garrafa puede ser más o menos denso que el fluido en el recipiente, pero es conveniente que tenga un tinte de manera tal que podamos visualizar fácilmente su evolución. En una primera experiencia utilice un fluido más denso, de manera tal que el fluido caiga lentamente hasta el fondo del recipiente. Observará que el fluido no se dispersa de manera simétrica, sino que por el contrario se propaga hacia la derecha (en sentido de rotación ciclónico para un observador montado sobre la mesa) junto a la pared del recipiente. Estime la velocidad de propagación y compárela con la velocidad de propagación de una corriente de gravedad en un sistema no rotante.

Justifique sus observaciones en términos del sentido inicial de propagación, el sentido de los gradientes de presión, el efecto de la fuerza de Coriolis, y el balance transversal alcanzado. Repita el experimento pero ahora utilizando un fluido menos denso que el fluido en el recipiente, de tal manera que ahora la corriente se propage por la superficie. Compare con el caso anterior y discuta las analogías y diferencias.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Práctica 11: Circulación Anticiciclónica

Teoría

La descripción del flujo estacionario en zonas aproximadamente circulares de alta/baja presión se simplifica notablemente utilizando coordenadas cilíndricas. En este caso el balance de fuerzas se reduce a:

$$fv + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Para bajos números de Rossby el término de la aceleración centrífuga es mucho menor que la aceleración de Coriolis y el balance se torna geostrófico:

$$fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Este resultado muestra que en el caso de zonas de baja presión tendremos un flujo ciclónico (en el sentido de rotación de la tierra, o contrario al sentido de rotación de las agujas del reloj) mientras que en las zonas de alta presión el flujo será anticiclónico (en el sentido de rotación de las agujas del reloj). Ejemplos de flujo ciclónico son las borrascas en la atmósfera y los remolinos ciclónicos (de agua relativamente cálida en el centro) en el océano. Ejemplos de flujo anticiclónico son los grandes anticiclónicos atmosféricos (por ejemplo el anticiclón de Azores) y para el océano son los remolinos anticiclónicos (de agua central relativamente fría) y los giros subtropicales.

Una extensión inmediata de estas ideas ocurre para el caso de flujo de dos capas, cuando el espesor de la capa superior es mucho menor que el de la capa inferior. En este caso se pueden utilizar las ideas del modelo de gravedad reducida discutidas en las Prácticas 2 y 3, de tal manera que el balance en la capa superior

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

puede expresarse como sigue:

$$fv = g' \frac{\partial h}{\partial r}$$

donde g' es la gravedad reducida y $h = h(r)$ es la profundidad de la interfase. Esto implica que, conocida la diferencia de densidad entre ambas capas, si podemos medir la pendiente de la interfase entonces podremos estimar la velocidad del flujo.

Finalmente cabe mencionar que la distancia transversal sobre la cual el espesor de la corriente de gravedad se torna cero es del orden del radio interno baroclínico, o radio interno de deformación de Rossby. Esta distancia viene dada por

$$a = \frac{(g' H_1)^{1/2}}{|f|}$$

siendo g' la gravedad reducida. Esto puede demostrarse combinando la ecuación de balance geostrófico con la condición de conservación de vorticidad potencial, lo cual se deja como ejercicio para el estudiante.

Las referencias recomendadas para este tema son Dutton (1976), Csanady (1982), Gill (1982) y Cushman-Roisin (1994). Para la discusión sobre el radio interno de deformación de Rossby se recomienda el Capítulo 7 de Gill (1982).

Método Experimental

Para realizar esta práctica se sugiere seguir los mismos preparativos experimentales utilizados en la práctica anterior. En esta ocasión se verterá agua dulce desde la garrafa hacia el recipiente, pero con la manguera dirigida hacia una zona alejada de los bordes del mismo. Se sugiere también aumentar la concentración de sal (por ejemplo a 20 partes por mil), con el fin de que el agua vertida se quede fácilmente en superficie, minimizando la mezcla con el agua del recipiente.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

El agua vertida tenderá inicialmente a formar una anomalía en el nivel del agua, creando un gradiente de presión hacia el exterior. El flujo inicial será por tanto en la dirección radial hacia el exterior. Este flujo, sin embargo, rápidamente sentirá los efectos de la rotación terrestre (fuerza de Coriolis), lo que lo desviará progresivamente hacia la derecha. El flujo final resultante será anticiclónico, alrededor de la zona de máxima elevación (la boca de la manguera). El agua dulce se mantendrá centrada alrededor de la boca de la manguera debido al efecto de rotación de la mesa, en clara oposición a la completa dispersión que ocurriría en ausencia de rotación.

El tinte del agua dulce le permitirá estimar la pendiente de la interfase. Utilice este estimado para calcular la velocidad del flujo anticiclónico en la capa superficial. Compare este valor con el que se puede observar mediante el lanzado de pequeños flotadores (tales como corchos) sobre la zona de agua dulce.

Práctica 12: Columnas de Taylor-Proudman

Teoría

Las ecuaciones de momento para un fluido homogéneo en balance geostrófico son:

$$fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0$$

donde η es la elevación de la superficie libre, $z = -h$ es la profundidad del fondo marino, p es la presión, y (u, v) son las componentes horizontales de la velocidad en las direcciones (x, y), respectivamente. Para obtener la ecuación de conservación

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

de flujo se ha utilizado la condición $|\nabla\eta| \ll |\nabla h|$.

Para el caso en que el parámetro de Coriolis f es constante podemos definir una función de flujo como $\psi = g\eta/f$, pues se satisface

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ello indica que el vector velocidad será paralelo a las líneas de elevación constante. En este caso la ecuación de conservación de flujo se reduce a

$$u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

que en notación vectorial equivale a $\vec{u} \cdot \nabla h = 0$. Esto implica que las líneas de elevación constante serán paralelas a las de profundidad constante, siendo el vector velocidad tangente a ambas.

Estas ideas también podrían inferirse de la conservación de vorticidad potencial. Tomando la derivada cruzada de las ecuaciones de momento y utilizando la ecuación de conservación de flujo se obtiene

$$\frac{d(f/h)}{dt} = 0$$

Esta ecuación implica que sobre zonas relativamente reducidas, dentro de las cuales el cambio de f sea pequeño, las partículas se moverán a lo largo de las isóbatas. Otra manera de interpretar esto es diciendo que si los gradientes de profundidad son relativamente grandes entonces el flujo será aproximadamente paralelo a las isóbatas.

Este fenómeno tiene consecuencias potencialmente muy importantes en lo que se refiere a los tiempos de residencia de aguas en zonas poco profundas. Así pues, debido a este efecto el intercambio de aguas en la plataforma continental o

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

insular puede estar muy limitado, con el impacto consecuente en caso de vertidos de substancias residuales o tóxicas sobre estas zonas. Ello apunta a la necesidad de estudios serios sobre el grado de intercambio entre aguas de la plataforma y el océano abierto, para poder así seleccionar las zonas más idóneas para vertidos.

Algunas referencias sobre este tópico son Pedlosky (1987), Gill (1982) y Csanady (1982).

Método Experimental

El procedimiento a seguir es exactamente el mismo del problema anterior, pero se sugiere utilizar dos garrafas (ambas conectadas a la manguera de salida por medio de un empalme con forma de Y), una sin tinte y otra con tinte. En este caso es conveniente utilizar un volumen de agua bastante mayor, de manera que tengamos al menos 0,2 - 0,3 m de altura de agua. La razón para ello radica en que es conveniente inducir un modo baroclínicio bien definido (la capa superior debe ser relativamente delgada en comparación con la profundidad total del fluido), de modo que el fluido en movimiento (relativo al sistema rotante) sea fundamentalmente el de la capa superior. Además debe introducir varios objetos dentro del recipiente, no muy alejados de la boca de la manguera, que queden completamente sumergidos pero que su parte superior quede cercana a la superficie.

Deje fluir bastante agua de la garrafa, de tal manera que la parte superior de los objetos sumergidos quede dentro de la capa de agua dulce. Ahora puede abrir la garrafa que contiene el tinte para apreciar con mayor facilidad las características del flujo. Podrá observar que la parte superior de los objetos sumergidos permanece prácticamente aislada del flujo exterior. Lance un flotador sobre el objeto sumergido y observe como este permanece sobre el mismo, usualmente girando

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

asociado a algún remolino que se ha formado en esta zona.

El procedimiento antes descrito tiene la ventaja que no requiere ningún tipo de instalación eléctrica sobre la mesa en rotación. El inconveniente de este procedimiento radica en que el flujo se forma básicamente sobre la capa superior. Otras alternativas consistirían en inducir el movimiento relativo mediante un ventilador o con calentamiento diferencial, con instrumentos eléctricos montados sobre la mesa en movimiento.

Práctica 13: Calle de Remolinos

Teoría

Consideremos un flujo uniforme incidente sobre un obstáculo, tal como un cilindro. En este caso las características del flujo que se desarrolla detrás del obstáculo dependerán principalmente del número de Reynolds, Re, que surge de comparar la aceleración de las partículas con los términos de fricción horizontales

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

donde U y L son las escalas de velocidad y distancia características del flujo, tales como la velocidad del flujo incidente y el diámetro del cilindro, y ν es el coeficiente de viscosidad cinemática horizontal.

Si Re es del orden de uno entonces el flujo es completamente laminar y simétrico alrededor del cilindro. Al aumentar Re aparecen unos vórtices (o remolinos) detrás del cilindro, que para $Re < 40$ son laminares y estacionarios, pero que por encima de este valor empiezan a despegarse del cilindro en forma de estela oscilante, compuesta por dos filas de vórtices de rotación opuesta que son transportados a velocidades inferiores a la del flujo medio. La aparición de estos vórtices

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

y su sentido de rotación se debe a la creación de vorticidad por el contorno sólido (condición de no deslizamiento) y su transferencia hacia el interior del fluido. Para valores superiores a 200 la calle de vórtices se torna turbulenta e inestable, aún cuando se mantiene una periodicidad en la emisión de los mismos. Para valores superiores a 5000 la periodicidad se destruye y la estela se torna completamente turbulenta.

La calle de vórtices antes discutida se denomina calle de vórtices de Karman. Su importancia para los Fluidos Geofísicos radica en que muchos de estos poseen valores de Re apropiados para que, en caso de superar un obstáculo, se forme dicha calle de vórtices o remolinos. Así pues, para el caso oceánico de una isla de diámetro 100 km sobre la que incide un flujo de 0,1 m/s, y utilizando un coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu = 100$ m^2/s, se obtiene $Re = 100$. Para el caso atmosférico de una isla similar sobre la que incide un flujo de 5 m/s, y utilizando un coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu = 5000$ m^{2}s, también se obtiene $Re = 100$.

La rotación del sistema de referencia (cuya importancia relativa está cuantificada mediante el número de Rossby, Ro) tiene dos efectos principales sobre la calle de remolinos: variar la tasa de desprendimiento de remolinos y producir una asimetría entre los remolinos anticiclónicos y ciclónicos, siendo estos últimos más intensos y mejor definidos. De esta manera para reproducir apropiadamente el flujo alrededor de un obstáculo en sistemas en rotación ahora debemos ajustar al menos ambos números: Ro y Re.

Otra alternativa para visualizar el efecto de la rotación es a partir de la ecuación de vorticidad. Las ecuaciones de momento para un flujo homogéneo

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

tienen la forma:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Tomando la derivada cruzada de las dos primeras ecuaciones y utilizando la tercera ecuación se obtiene la ecuación de vorticidad:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Re}\nabla^2 \zeta$$

donde $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ y todas las variables son adimensionales. El valor de $\partial w/\partial z$ depende de la existencia de capas friccionales cercanas a la superficie libre y al fondo (denominadas capas de Ekman), y su valor puede reescribirse como $-r\zeta$, donde $r = {E_v}^{1/2}/(2Ro)$. El número de Ekman vertical, E_v, está definido en función de la viscosidad vertical turbulenta ν_v y la escala vertical característica del fluido D, $E_v = 2\nu_v f/D^2$.

La anterior ecuación es válida sólo para el caso de un sistema de referencia con rotación constante ($f = const$). Si la rotación del sistema no es constante (por ejemplo, $f = f(y)$) entonces aparecerá un término adicional ($v\partial f/\partial y$), similar al que se obtiene en la relación de Sverdrup para los problemas de circulación oceánica a gran escala.

Una buena discusión de la formación de la calle de remolinos se encuentra en Kundu (1990). Para la discusión de la ecuación de vorticidad se recomienda a Pedlosky (1987).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Método Experimental

La parte experimental de esta práctica es similar a la de las anteriores, con la salvedad de que ahora los objetos deben sobresalir por encima de la superficie libre con el objeto de simular islas. El objeto seleccionado para simular la isla debe ser lo bastante pequeño como para que el flujo incidente sea similar a ambos lados del mismo, pero lo suficientemente grande para obtener un número de Reynolds adecuado. Observe la formación de vorticidad (remolinos ciclónicos y anticiclónicos) por medio de la isla. Trate de apreciar si existen diferencias entre la intensidad y características de ambos tipos de remolino. Para apreciar el efecto de la rotación repita el experimento cambiando el sentido de rotación de la mesa.

3.3 Problemas

Los libros de referencia existentes sobre Mecánica de Fluidos Geofísicos ofrecen un número muy limitado de problemas donde se puedan aplicar los conceptos desarrollados en las cláses teóricas. El planteamiento y resolución de problemas es, junto con las experiencias de laboratorio, un aspecto muy importante para interiorizar y madurar los conceptos teóricos. Por esta razón en la preparación de este Proyecto Docente se ha realizado un esfuerzo considerable para presentar una considerable selección de problemas que cubra todos los tópicos de la Mecánica de Fluidos, con un énfasis muy especial en las aplicaciones geofísicas. El grado de dificultad de los problemas es variable, en general acorde al grado de maduración que se desea del estudiante.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Bloque 1. Interpretación Física de Conceptos Matemáticos

1) Pruebe que $\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k = 0$ es la condición para que los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ estén en un mismo plano.

2) Pruebe las siguientes relaciones

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = 3,$$

$$\epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} = 6,$$

$$\epsilon_{pqi}\epsilon_{pqj} = 2\delta_{ij}.$$

3) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores con componentes u_i y v_i, respectivamente. Pruebe que los productos de sus componentes, u_iv_j satisfacen la regla de transformación $t'_{mn} = c_{im}c_{jn}t_{ij}$ y por tanto son un tensor de segundo orden.

4) Sean (r, θ, ψ) los componentes del vector posición de un punto en coordenadas esféricas, y $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\psi})$ los vectores unitarios en esas direcciones. Calcule $\partial\hat{r}/\partial\theta$, $\partial\hat{\theta}/\partial\theta$ y $\partial\hat{\psi}/\partial\psi$, expresando su respuesta en términos de $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$.

5) Sea ϕ una función escalar que depende de tres variables, $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$, escriba la serie de Taylor para $\phi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ con términos de primer orden más residuos de orden dos. Muestre que el resultado puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x} + \vec{h}) &= \phi(\vec{x}) + \vec{h} \cdot (\nabla\phi)(\vec{x}) + O(\vec{h} \cdot \vec{h}) \\ &= \phi(\vec{x}) + h_j(\frac{\partial\phi}{\partial x_j})(\vec{x}) + O(h_kh_k)\end{aligned}$$

¿Cómo generalizaría este resultado para una función vectorial $\vec{v}(\vec{x}, t)$?

6) ¿Qué se entiende por derivada material? Obtenga la expresión para la derivada material de una propiedad, por ejemplo la densidad ρ.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

7) Derive la expresión para el Laplaciano de una función escalar en coordenadas cilíndricas y esféricas.

8) Sea la función escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1$. Calcule las expresiones para el gradiente y el laplaciano de esta función. Repita el problema utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.

9) Sea la función vectorial $\vec{v} = ay\hat{i} + bx\hat{j} + c\hat{k}$. Calcule la divergencia de ese vector. Repita el problema utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.

10) Evalue la integral de superficie

$$I = \int_S \int (x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy)$$

donde S es la superficie cerrada que consiste en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(0 \leq z \leq b)$ y los discos circulares $z = 0$ y $z = b$ $(x^2 + y^2 \leq a^2)$ (sugerencia: utilice el teorema de Gauss).

11) Sea la función vectorial $\vec{v} = y\hat{i} + xz^3\hat{j} - zy^3\hat{k}$. Evaluar la integral de línea:

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{dr}$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = -3$, orientada en el sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj (visto desde el origen y con un sistema de referencia que siga la regla de la mano derecha) (sugerencia: utilice el Teorema de Stokes).

Bloque 2. Fluidos Geofísicos

1) Diga cuales son las cuatro leyes de conservación que se utilizan en hidrodinámica, indicando en cada caso la propiedad cuya conservación o variación en el tiempo

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

se estudia. ¿Cuáles de ellas son magnitudes escalares y cuales son vectoriales? ¿Cuál de estas propiedades es la que usualmente peor se conserva y porqué?

2) Considere una parcela de aire situada en la troposfera, a varios kilómetros de altura sobre la tierra. Diga cual de las siguientes frases es más correcta: "la viscosidad del aire permite que la parcela de aire se mueva conjuntamente con el movimiento de rotación de la tierra" o "la viscosidad del aire es tan pequeña que ocasiona que la parcela de aire casi no sienta la fricción con la superficie de la tierra, permaneciendo inmóvil en un sistema inercial". Justifique con claridad su respuesta.

3) Calcule las celeridades de objetos que se muevan con la tierra a latitudes de 0°N, 30°N, 60°N y 90°N. ¿En que fluido terrestre pueden observarse celeridades del mismo orden y porqué?

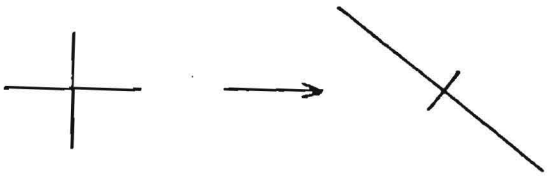
4) Calcule una expresión para la tasa de rotación de un objeto que gira sobre si mismo en un tiempo T_1 y que simultáneamente se desplaza alrededor de un punto central tardando un tiempo T_2 en dar la vuelta completa.

5) Calcule la densidad de una partícula de agua de salinidad 35 ppt y temperatura 5°C cuando se encuentra a profundidades de 0, 1000, 2000, 3000 y 4000 m (para ello deberá recurrir a algoritmos de la ecuaci'on de estado del agua de mar, vea por ejemplo Gill, 1982). ¿Cuál es la implicación sobre la representación de isolíneas de densidad *in situ* y densidad potencial?

6) Considere una parcela de aire muy pequeña, cuyo tamaño y orientación en primera aproximación se puede caracterizar por medio de la cruzeta en la parte izquierda de la figura (por claridad esta se muestra en dos dimensiones). Al cabo

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

de un tiempo corto la parcela de aire cambia de forma de tal manera que se representa por medio de la cruzeta en la parte derecha de la figura. Muestre como dicha evolución puede representarse como el resultado de combinar una traslación con una rotación y una o más deformaciones.



7) Dé valores característicos de los gradientes de densidad, velocidad, energía y momento angular en un fluido oceánico que se encuentra sobre la superficie de la tierra. Repita el ejercicio para un fluido atmosférico tmabién en superficie.

Bloque 3. Cinemática

1) Calcule las líneas de flujo y trayectorias para un flujo estacionario cuyo vector velocidad es $\vec{v} = (x, y, 0)$.

2) Calcule las líneas de flujo y trayectorias para un flujo estacionario cuyo vector velocidad es $\vec{v} = (ax, -ay, 0)$.

3) Calcule las líneas de flujo y las trayectorias para un flujo no estacionario sobre el plano x-y, cuyas componentes de velocidad son $[u, v] = [x/(1+t), 2y/(2+t)]$.

4) Considere un flujo bidimensional caracterizado por el siguiente campo de velocidades $(u, v) = (v/(1+t), 1)$. Calcule: (a) la línea de flujo que pasa a través del punto (1,1) en $t = 0$, (b) la trayectoria de la partícula solatada en (1,1) en $t = 0$, (c) la línea de trazador en $t = 0$ que pasa por (1,1).

5) Encuentre la función de flujo para un flujo paralelo con velocidad uniforme v, que forma un ángulo de β con el eje x.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

6) Considere la función de flujo $\psi = axy$, donde $a > 0$. (a) Diga si se trata de un flujo irrotacional. (b) Dibuje, esquemáticamente, varias líneas de flujo. (c) Encuentre las componentes de velocidad horizontal en los puntos $(0,0), (1,1), (\infty,0)$, $(4,1)$. (d) Calcule el flujo entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$; entre $(1,3)$ y $(7,5)$.

7) Mostrar que el flujo representado por la función de flujo

$$\psi = \frac{ua^3}{2r} sin^2\theta - \frac{ur^2}{2} sin\theta$$

es irrotacional.

8) Mostrar que $\psi = ax/r^3$, donde $x = rsin\theta\, cos\varphi$, representa un caso posible de flujo incompresible. ¿Es el flujo irrotacional?

9) Dada la función de flujo $\psi = 2x_1x_2$, encontrar la función potencial de velocidad ϕ.

10) Considere el caso de un avión que se desplaza a gran altura, con velocidad de 1000 km/hora, de forma tal que el vapor de agua expelido por sus turbinas se condensa y forma una "línea" de nubes. Suponga que el avión se encuentra con un viento cruzado que varía sinusoidalmente sobre una distancia de 100 km, con intensidad máxima 50 m/s. Calcule las líneas de flujo y trayectorias. ¿Cuál sería la línea de trazador para un observador subido al avión? Suponga que el vapor de agua producido por el avión queda inmediatamente en reposo (como si las turbinas le diesen una velocidad inversa a la que lleva el avión).

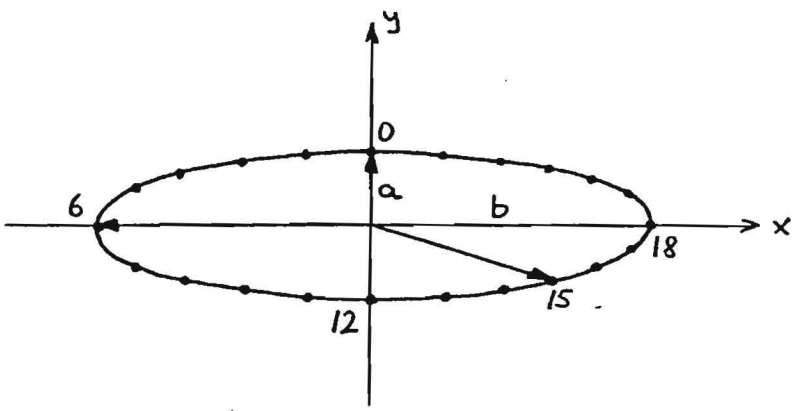
11) Considere el caso de partículas de aire en una zona costera (una costa rectilínea, en la dirección norte-sur, con el océano al oeste de la costa), sujetas a la acción de (a) vientos alisios provenientes del noreste de 10 m/s, y (b) brisas mar-tierra, en la dirección este-oeste de intensidad máxima 5 m/s. Calcule las trayectorias y

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

líneas de flujo.

12) Suponga que la corriente al norte de las Islas Canarias puede representarse mediante la combinación de una corriente constante hacia el Suroeste de magnitud a, y una corriente de marea semidiurna (con frecuencia ω_0) de amplitud b que oscila en la dirección Norte-Sur. Escriba expresiones para las componentes de la corriente y, a partir de estas, calcule las líneas de flujo y las trayectorias.

13) Imagine una corriente de marea de período 24 horas, que varía tal como muestra la elipse del dibujo (los vectores velocidad van desde el centro de la elipse hasta la misma, los numeros indican las horas en que tiene lugar esa corriente). Dibuje esquemáticamente: (a) la trayectoria que describe una particula durante 24 horas, suponiendo que inicia su recorrido en el tiempo $t = 0$, y (b) la línea de trazador que se produciria si se soltasen particulas en un punto dado durante 24 horas, suponiendo que la primera particula se soltó al tiempo $t = 0$.



14) Considere de nuevo la elipse de marea del problema anterior, donde el movimiento es bidimensional (en el plano xy). Escriba una expresión matemática para las componentes (u, v) del vector velocidad. Para ello no debe tener dificultades si considera el comportamiento de cada una de las componentes por separado.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Para simplificar la solución suponga que en el tiempo $t = 0$ la velocidad es en la dirección y. Calcule las expresiones para las líneas de flujo y las trayectorias.

15) Considere un océano de espesor $h(x, y, t)$ y densidad constante. Deduzca las ecuaciones de conservación de masa y de conservación de un trazador que llamamos $s(x, y, t)$. Simplifique esta segunda expresión utilizando la primera. ¿Cuál es el significado de la expresión resultante?

16) Derive la ecuación de conservación de la masa en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) utilizando un elemento de volumen constante con lados $dr, r\, d\theta, dz$.

17) Derive la ecuación de conservación de masa en coordenadas esféricas (r, θ, ζ) utilizando un elemento fijo de volumen con lados dr, $r\, d\theta$, $r\, sin\theta\, d\zeta$.

18) La ecuación de conservación de la masa en notación vectorial es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Obtenga la forma de esta ecuación en coordenadas cilíndricas. Para ello utilice la definición del operador ∇ en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

y los siguientes resultados

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta},\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r},\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0$$

19) Derive la ecuación de conservación de masa en coordenadas rectangulares (x, y, z) considerando un volumen infinitesimal fijo (constante en el tiempo) de lados dx, dy, dz.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

20) Consideremos cierto volumen (fijo) de agua, V, de la cuenca de Canarias, cuya superficie es S, y llamemos $n(\vec{r}, t)$ a la densidad de peces en esa zona (como si fuesen una propiedad continua). Construya la ecuación diferencial que describe el comportamiento del número de peces en la región (recuerde que los peces no se conservan: piense cuales son las causas "biológicas" para que cambie la población de peces).

21) Considere un flujo unidimensional en la dirección x (velocidades $u = u(x,t)$, $v = w = 0$). La densidad varía de la forma $\rho = \rho_0[2 - cos(\omega t)]$. Encuentre una expresión para $u(x,t)$ que satisfaga la condición $u(0,t) = U$.

22) Considere un flujo bidimensional, incompresible, en el plano x-y. El campo de densidades y la componente de la velocidad en la dirección x vienen dados por:

$$\rho = \rho_0 sin(kx + ly - \omega t),$$

$$u = u_0 cos(kx + ly - wt).$$

Calcule la componente de la velocidad en la dirección y, $v = v(x,y,t)$.

23) Un gas fluye por un ducto de area variable. Suponga que la densidad es constante en cada sección del tubo, y considere el caso de flujo permanente. Demuestre que

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

24) Considere la ecuación de conservación de calor:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\theta) = \frac{Q}{h\rho C_p}$$

donde θ es la temperatura. Fíjese que es similar a la ecuación de conservación de masa, pero que tiene un término adicional proporcional a Q (considere C_p, h y ρ

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

como constantes). Diga que puede representar este término. Considere (a) estado estacionario y (b) que el flujo es incompresible y unidimensional (en la dirección O-E) con celeridad constante a. Obtenga una expresión para θ (utilice la condición $\theta(x = 0) = \theta_0$).

25) De ejemplos de flujos irrotacional y rotacional en dos y tres dimensiones. Demuestre que efectivamente verifican que $\nabla \times \vec{v}$ es igual y distinto de cero, respectivamente.

26) Demuestre que la ecuación que define las líneas de vorticidad es

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

27) Calcule la vorticidad para un fluido en rotación de sólido rígido ($\vec{\omega} = \omega\hat{k}$). Recuerde que en este caso $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

28) Considere un flujo en el plano, cuya función de flujo es $\psi = (1/2)\alpha y^2$. Calcule los componentes de la velocidad en el plano: u, v. Calcule la vorticidad y diga si el flujo es rotacional.

29) Considere la rotación de cuerpo sólido definida por $(u_r, u_\theta) = (0, \omega_0 r)$. Verifique que la circulación es igual a la vorticidad multiplicada por el area utilizando (1) un elemento infinitesimal circular alrededor del origen, y (2) un elemento polar de dimensiones $rd\theta$ y dr.

30) Muestre que el potencial $w = \mu/z$ se puede obtener como el resultado de la superposición de un vórtice anticiclónico con circulación $-\Gamma$ localizado en el eje y, en $y = \epsilon$, y de un vórtice ciclónico con circulación Γ localizado en el eje y, en $y = -\epsilon$, en el límite cuando $\epsilon \to 0$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

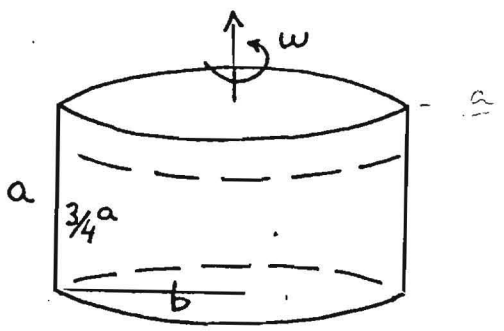
31) Considere una fuente puntual de intensidad Q (m^3/s). Justifique que las componentes de la velocidad en coordenadas esféricas son $v_\theta = 0$ y $v_r = Q/(4\pi r^2)$, y que el potencial de la velocidad y la función de flujo deben tener la forma $\phi = \phi(r)$ y $\psi = \psi(\theta)$. Integre la velocidad y demuestre que $\phi = -Q/(4\pi r)$ y $\psi = -Qcos\theta/(4\pi)$.

32) Considere el doblete que se obtiene como el caso límite de una fuente y un sumidero cuando la separación entre ellos tiende a cero. Muestre que el potencial de la velocidad y la función de flujo en coordenadas esféricas son $\phi = mcos\theta/r^2$ y $\psi = -msin^2\theta/r$, donde m es el valor límite de $Q\delta s/(4\pi)$, siendo Q la intensidad de la fuente y δs la separación entre fuente y sumidero.

33) Utilice el potencial de velocidad del doblete del problema anterior, para obtener la función de corriente. Grafíquela en varios puntos.

Bloque 4. Estática

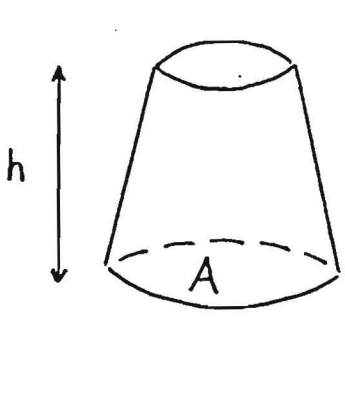
1) Un recipiente cilíndrico de altura a y radio b, se llena con agua hasta una altura $3a/4$, y a continuación se pone a rotar con una velocidad angular ω alrededor de su eje. ¿Cuál es el valor máximo de ω (ω_{max}) para el cual el agua no salga del recipiente? Con esta velocidad angular, ω_{max}, ¿cuál es la altura mínima de agua en el recipiente?



© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

2) Un recipiente cilíndrico de 4 m de altura y 2 m de diámetro en reposo contiene 3 m de agua. Suponga ahora que el cilindro se mantiene en rotación con velocidad angular de 40 rad/s, hasta que se alcanza un estado estacionario. Mostrar que 0.71 m^2 del fondo del cilindro quedan al descubierto.

3) El recipiente que se muestra en la figura, con la forma de parte de un cono, está lleno de agua. La altura del recipiente es h y el area de su base es A, de forma tal que la presión del agua sobre la base es ρgh, y la fuerza total sobre la base es ρghA, la cual excede el peso del agua en el recipiente. Resuelva con detalle esta aparente paradoja.



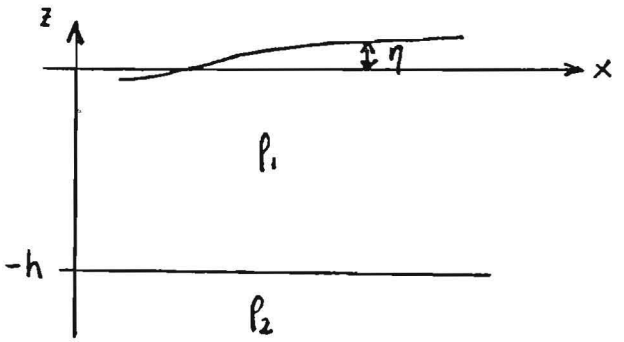
4) Un tanque rectangular es colocado sobre ruedas y acelerado sobre una superficie horizontal (con aceleración constante a). Calcule, para estado estacionario, el ángulo entre la superficie libre y la horizontal (en función de a y g).

5) Suponga una represa de agua dulce (densidad constante), sobre la cual el viento sopla en la dirección perpendicular a la presa (dirección x), con esfuerzo cortante τ, de tal manera que la superficie del agua $\eta(x)$ esta inclinada. Suponga estado estacionario y que el agua no esta en movimiento. (a) Muestre esquemáticamente las fuerzas que actuan sobre una columna cualquiera. Deduzca la expresión que muestra el balance existente en la dirección x. (b) Suponga que en la presa la

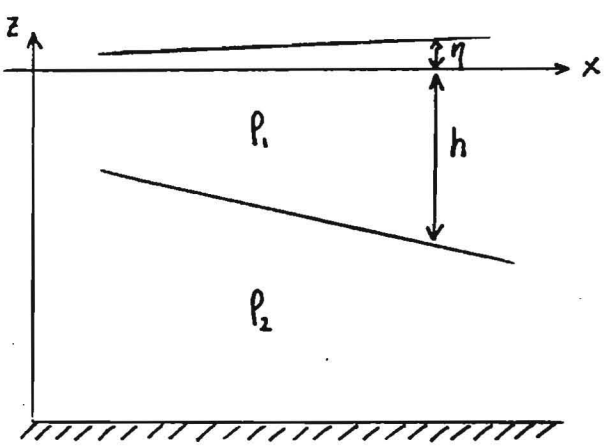
© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

profundidad total del agua es h_0. Obtenga una expresión para la fuerza que la presa debe sostener en un ancho l.

6) Considere el problema bidimensional de dos capas que se muestra en la figura (no hay cambios en la dirección y). La interfase entre ambos capas es horizontal (a una profundidad $-h$) y la capa inferior está en reposo. La presión en la superficie libre del agua es la presión atmosférica, p_0, la cual se supone constante en la dirección x. La densidad de la capa superior es independiente de su posición vertical, pero tiene una distribución en x que viene dada por $\rho_1 = \rho_0 + \Delta\rho\, x/L$. Calcule la inclinación de la superficie libre del agua, $\partial\eta/\partial x$ (desprecie fricción).



7) Considere el problema representado en la figura. Este consiste en un fluido de densidad ρ_2, sobre el cual se encuentra otro fluido de densidad menor, ρ_1. Suponga que la velocidad del fluido en la capa inferior es cero, es decir que este se encuentra en equilibrio. Calcule la relación entre la pendiente de la superficie y la pendiente de la interfase entre ambos fluidos, en términos de ρ_1 y ρ_2.



© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

8) Considere un remolino oceánico al sur de la isla de Gran Canaria, dentro del cual la distribución de densidad puede representarse en coordenadas cilíndricas (con el eje z pasando por el centro del remolino, su origen en la superficie no perturbada del océano) mediante la expresión $\rho = \rho_0 + \delta\rho_1 r/R - \delta\rho_2 z/D$. Suponga que la presión es constante en la superficie libre del agua (p_a) y a una profundidad $z = -d$ ($p(z = -d) = p_d$). Obtenga una expresión para la elevación de la superficie libre en función de r, y de las constantes $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, R, D (utilice la condición $\eta(r = 0) = 0$).

9) Considere la propagación de un fluido sobre un plano inclinado en un ángulo α con respecto a la horizontal. Suponga que la fuerza de fricción se parametriza como linealmente proporcional a la velocidad de avance de la corriente de gravedad. Escriba el balance de fuerzas y resuelva para la velocidad.

Bloque 5. Dinámica: Fundamentos

1) Repita el procedimiento del problema 3.16, pero ahora para la conservación de una componente del momento por unidad de masa (por ejemplo ρv_θ en lugar de ρ), ignorando cualquier fuerza externa, interna o ficticia (utilice la ecuación de conservación de masa para simplificar el resultado). ¿Qué interpretación tiene la expresión obtenida? Incluya ahora las fuerzas producidas por la gravedad y los gradientes de presión.

2) Repita el problema anterior en coordenadas esféricas.

3) Para el caso de movimiento circular uniforme ($\vec{v} = v_\theta\hat{\theta}, v_\theta = constante$), muestre como aparece el término de la fuerza centrífuga al expresar la ecuación de momento

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

en coordenadas polares. Recuerde que $d\hat{\theta}/dt = -d\theta/dt\,\hat{r}$.

4) Diga lo que representan cada uno de los términos de la ecuación de la pregunta anterior. Muestre las cuatro posibles combinaciones de estos tres términos y discuta el balance que representan.

5) Discuta brevemente que representan los números adimensionales de Rossby, Ekman, Richardson y Reynolds. De ejemplos de flujo caracterizados por valores altos y bajos de (a) número de Rossby, (b) número de Richardson y (c) número de Reynolds.

6) Para movimientos con escalas de longitud que varien entre 10^0 y 10^6 m, estime (a una latitud de 30°N) las velocidades máximas para las cuales los efectos de rotación son importantes. En cada caso de un ejemplo del tipo de movimiento al que puede corresponder.

7) En clase interpretamos el número de Froude (externo), $Fr^2 = U^2/(gL)$, como el resultado de comparar el término de gravedad con los términos de inercia en la ecuación de momento en la dirección vertical. Muestre cómo aparece el número de Froude interno, $Fr^2 = (\rho U^2)/(\delta\rho\, gD)$, al comparar el término de gradiente de presión (en un fluido estratificado) con los términos de inercia en las ecuaciones horizontales de momento. Muestre que este mismo número puede obtenerse al comparar el trabajo necesario para intercambiar dos partículas de densidades ρ_0 y $\rho_0 + \delta\rho$ ubicadas a profundidades z y $z + \delta z$, respectivamente, con la energía cinética que se libera en el intercambio.

8) Obtenga una expresión para L (escala de longitud) en el caso en que tanto rotación como estratificación son importantes (pero no dominantes). Para ello

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2006

suponga que L viene dado en función de la velocidad angular de rotación, Ω, densidad, ρ, gravedad, g, y el cambio en densidad, $\delta\rho$, sobre una distancia vertical H. Utilice valores característicos de Ω, ρ, g, $\delta\rho$ y H, para el océano y la atmósfera, y obtenga en cada caso los valores característicos de L y U (escala de velocidad).

9) Suponga que en el flujo alrededor de un objeto (por ejemplo un cilindro) los parámetros que afectan el flujo son: el tamaño del objeto (d), la velocidad del flujo (U), la densidad del fluido (ρ), la viscosidad del fluido (μ), y el dragado sobre el cuerpo (D). Obtenga los parámetros adimensionales de los cuales depende el problema, haga que uno de ellos sea el coeficiente de dragado $C_d = D/(\rho U^2 d^2)$. Estime la forma de la dependencia de C_d con el otro parámetro adimensional.

Bloque 6. Dinámica: Aplicaciones a Fluidos Geofísicos

1) Considere las ecuaciones de momento, con las fuerzas de fricción parametrizadas de la forma $\vec{F} = -k\vec{u}$, donde k es un coeficiente constante. Encuentre una expresión que muestre que la componente vertical de la vorticidad, $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, decae exponencialmente con el tiempo.

2) Considere el caso de flujo homogéneo en balance geostrófico, sujeto al siguiente campo de presión:

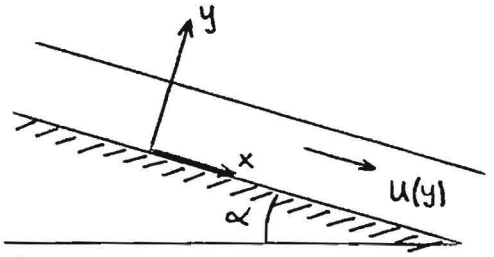
$$p = p(y) = p_0 + \frac{ax}{l}$$

Suponiendo que el parámetro de Coriolis, f, es constante, diga si existe una función de flujo y, en caso afirmativo, cuál es. Calcule el campo de velocidades.

3) Considere el flujo de la figura: un líquido de densidad constante fluye a lo largo de un plano que se encuentra inclinado con un ángulo α con respecto a la horizontal. En la superficie libre no hay esfuerzo cortante (es decir, asumimos

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

que el aire se desplaza a la misma velocidad que el agua de la superficie), y la distancia entre la superficie y el fondo inclinado es uniforme. Construya y resuelva las ecuaciones para la velocidad del fluido $U(y)$, y verifique que existe un balance de fuerzas sobre una columna de fluido de longitud l. Compare el resultado con el obtenido para el problema 4.9.



4) Describa (mediante ecuaciones y un dibujo esquemático) las oscilaciones inerciales que existen a 10°N de latitud. Como condición inicial utilice $u(t = 0) \equiv u_0 = 0.2$ m/s, $v(t = 0) = 0$. Ahora suponga que la parcela de agua se desplaza al mismo tiempo debido a una corriente media $V = 0.1$ m/s hacia el este. Describa el movimiento. Repita esta segunda parte si $V = 0.4$ m/s.

5) Compare la velocidad tangencial y el período de los círculos descritos por los siguientes tipos de movimiento: a) Corrientes inerciales (fuerza centrífuga = fuerza de Coriolis) para latitud 30°N, con $R = 20$ km. b) Corrientes ciclónicas (fuerza centrífuga = gradiente de presión) para una superficie del agua con pendiente $\partial\eta/\partial r = 1$ m / 100 km, con $R = 20$ km. c) Corrientes en balance geostrófico (fuerza de Coriolis = gradiente de presión), para una superficie del agua con pendiente $\partial\eta/\partial r = 1$ m / 100 km, con $R = 20$ km y para una latitud 30°N. d) Corrientes que corresponden a un balance entre los tres términos (fuerza centrífuga + fuerza de Coriolis = gradiente de presión), considere la superficie del agua con pendiente $\partial\eta/\partial r = 1$ m / 100 km, con $R = 20$ km y para una latitud 30°N. Para los casos

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

c) y d) considere las posibilidades de circulacion anticiclónica (en el sentido de las agujas del reloj) y ciclónica (contraria a las agujas del reloj, note que esto cambia la dirección en que actua la fuerza de Coriolis). Para todos los casos suponga la densidad del agua como constante.

6) En el artículo de Nof y Paldor (1992) las ecuaciones de partida son:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - u_s \frac{\partial \eta}{\partial t} - fV = -g(H+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - v_s \frac{\partial \eta}{\partial t} + fU = -g(H+\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}}{\rho}$$

Recuerde que U, V, u_s, v_s, η, H son los flujos en las direcciones x e y integrados verticalmente, las velocidades superficiales en las direcciones x e y, la elevación de la superficie libre del agua y la profundidad del fondo. (a) Derive estas ecuaciones indicando las aproximaciones utilizadas. (b) El autor finalmente consideró una sola ecuación con dos términos. Diga cuál es esa ecuación y cómo la obtuvo.

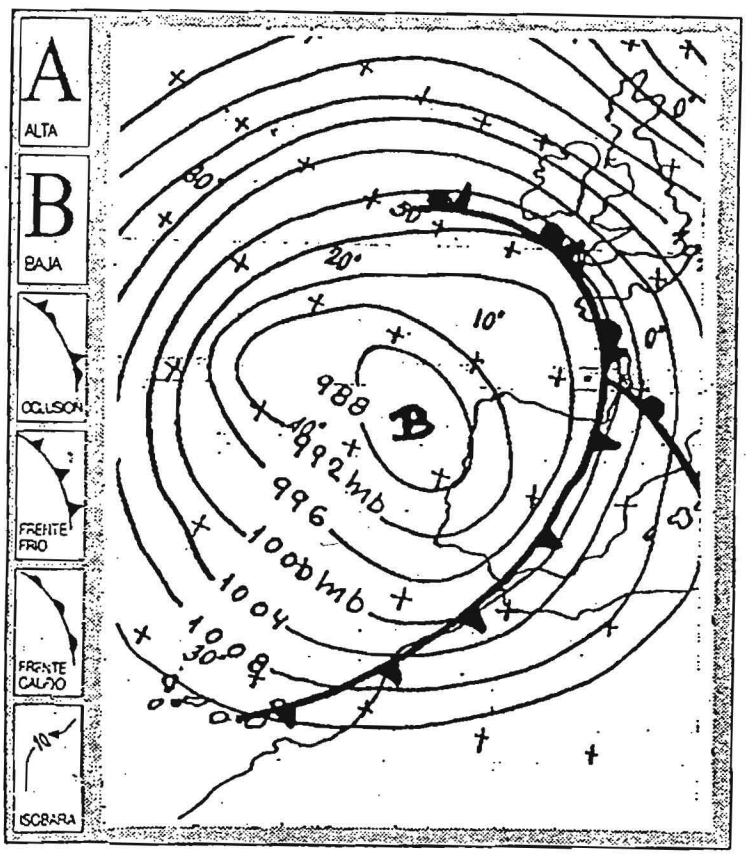
7) Considere una zona de alta presión sobre el Atlántico Noreste. (a) Calcule la circulación oceánica asociada, bajo la suposición de que el océano actua como un barómetro invertido. Ignore el efecto de fricción del viento. (b) Determine la circulación oceánica para el caso opuesto, en el cual la elevación de la superficie del agua no es afectada por los cambios de presión atmosférica. Ignore el efecto del viento. (c) Discuta cual puede ser el resultado de la fuerza de fricción del viento. Para ello estime la intensidad y dirección del viento suponiendo que este se encuentra en balance geostrófico.

8) Considere un remolino ciclónico cuya velocidad es $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z) = (0, v, 0)$ (es decir, todos las componentes de la velocidad son cero salvo la velocidad tangencial $u_\theta = v$). Suponga que la distribución de la velocidad tangencial en la superficie

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

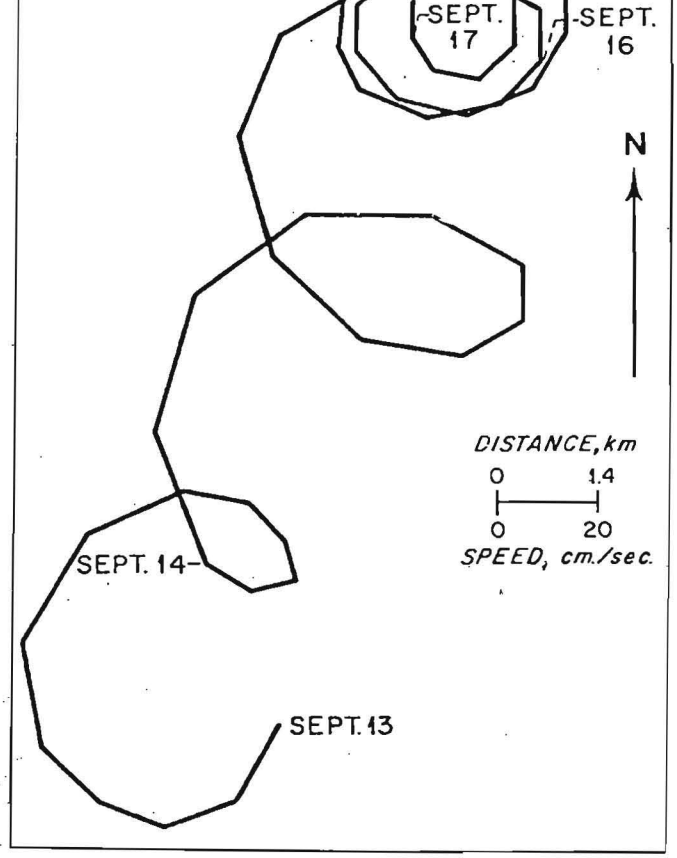
del agua es tal que el remolino gira como un sólido rígido: $v = \omega r$, donde r es la distancia radial y ω es la velocidad angular de rotación. Considere un balance entre las fuerzas de Coriolis, centrífuga y el gradiente de presión (es decir, suponga estado estacionario y desprecie fricción). Obtenga una expresión para la pendiente de la superficie del agua en la zona del remolino.

9) Considere el mapa de presión en superficie de la figura. (a) Considere balance geostrófico y calcule la velocidad del viento en la zona de las Islas Canarias. Haga un esquema indicando la dirección del flujo y el balance de fuerzas. (b) Calcule el número de Rossby para este problema y justifique el balance antes utilizado. (c) Justifique que en el balance geostrófico las líneas de presión aproximadamente corresponden con líneas de flujo. ¿Porqué incluso aquí debemos utilizar la palabra "aproximadamente"?



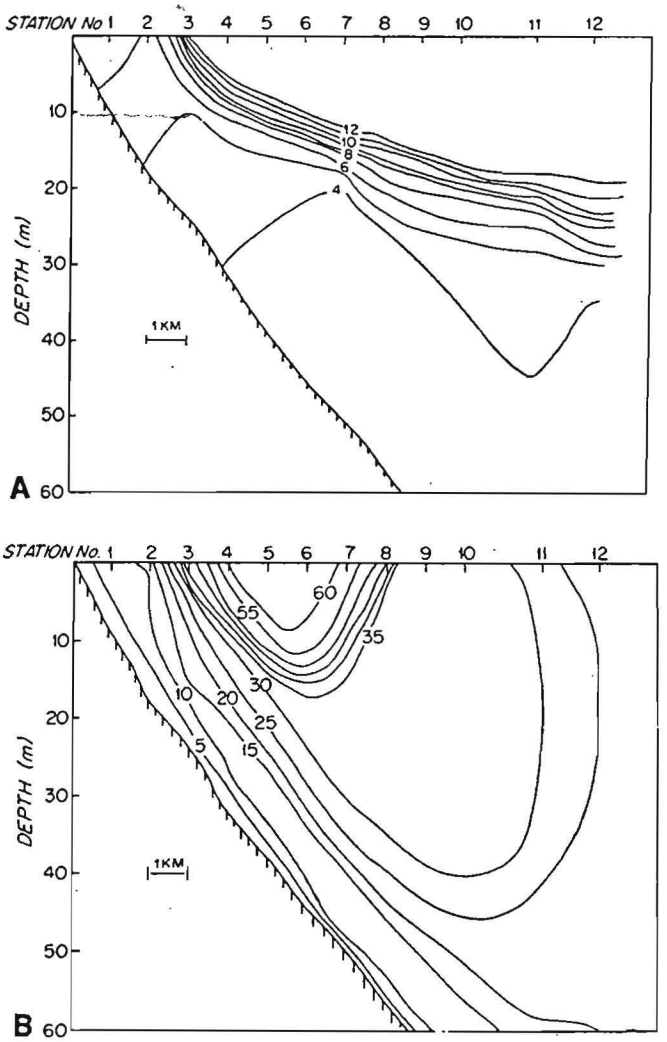
© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

10) Considere la figura (reproducida de Csanady, 1982) donde se muestra un diagrama de vectores progresivos (para los efectos de esta pregunta considere que esto es equivalente a la trayectoria de una partícula). Utilice sus conocimientos y buen criterio para discutir los siguientes aspectos de esta trayectoria: (a) Estime el período de la rotación dominante y demuestre que corresponde al período de las oscilaciones inerciales (latitud 45°N). (b) Estime la velocidad media (residual) del movimiento (magnitud y dirección) hasta el 15 de septiembre. (c) Considere la rotación que ocurre entre el 15 y el 16 de septiembre y estime la velocidad tangencial media del movimiento, compare la magnitud de esta velocidad con la que corresponde a oscilaciones inerciales. (d) Escriba unas expresiones matemáticas que aproximadamente describan el movimiento observado (para ello es conveniente que divida el movimiento entra antes y después del 15 de septiembre).



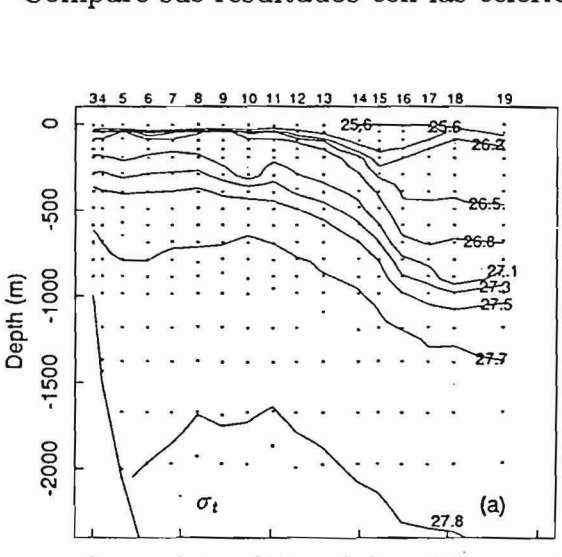
© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

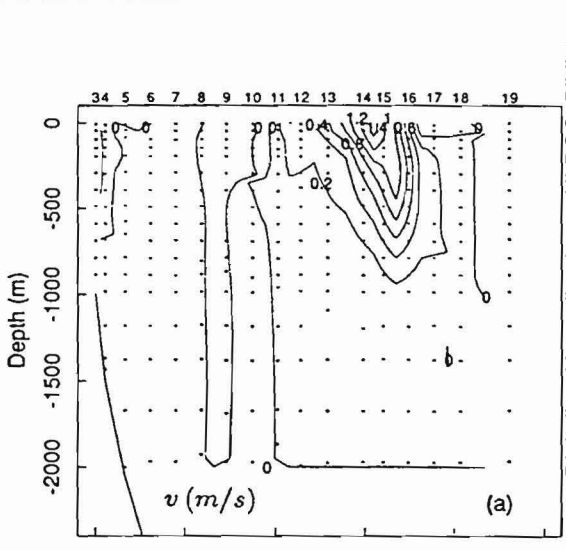
11) Considere la figura reproducida Csanady (1982) donde se muestra la estratificación existente en un lago durante un afloramiento costero. Utilice sus conocimientos y buen criterio para: (a) Representar la estratificación existente mediante un modelo muy simple de dos capas. (b) Suponiendo que la capa inferior está en reposo, calcule la pendiente de la superficie del mar. (c) Suponiendo que existe balance geostrófico, calcule la velocidad (celeridad y dirección) del agua en la capa superior (latitud 45°N). (d) Compare sus resultados con las celeridades observadas. Utilice las siguientes valores de densidades para el agua dulce: $\rho(12°C) = 995.0$ kg/m^3, $\rho(10°C) = 997.0$ kg/m^3, $\rho(8°C) = 998.5$ kg/m^3, $\rho(6°C) = 999.4$ kg/m^3, $\rho(4°C) = 999.8$ kg/m^3.



© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

12) Considere la sección hidrográfica que se muestra en la figura, correspondiente a una sección que corta la Corriente del Golfo (reproducida de Pelegrí y Csanady, 1991). Utilice sus conocimientos y buen criterio para: (a) Representar la estratificación existente mediante un modelo simple de tres capas. (b) Suponiendo que en la capa inferior los gradientes horizontales de presión son cero, calcule la pendiente de la superficie del mar. (c) Suponiendo que existe balance geostrófico, calcule la velocidad (celeridad y dirección) del agua en la capa superior (latitud 37°N). (d) Compare sus resultados con las celeridades observadas.

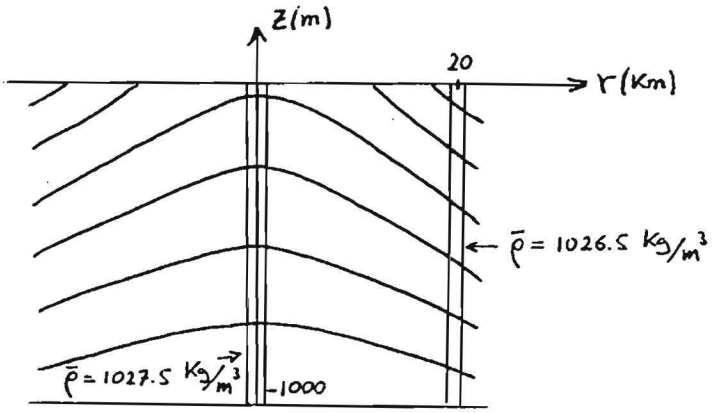




13) Considere los remolinos oceánicos que se forman al sur de la isla de Gran Canaria, unos ciclónico y otros anticiclónicos, con radio característico $R = 20$ km. La figura muestra un esquema de la sección hidrográfica a través de uno de ellos. Bajo las suposiciones de que el agua a 1000 m está en reposo y de que el fluido está en balance geostrófico, diga si se trata de movimiento ciclónico o anticiclónico y porque. La densidad media de la columna de agua entre 0 y 1000 m toma valores $\bar{\rho}(r = 0 \text{ km}) = 1027.5 \text{ kg/m}^3$, $\bar{\rho}(r = 20 \text{ km}) = 1026.5 \text{ kg/m}^3$. Obtenga la

© Del documento de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2009

distribución de la velocidad superficial. Utilizando este valor estime la magnitud de la fuerza centrífuga y compárela con los términos del balance geostrófico. Utilice $f = 7.3 \times 10^{-5}$ s^{-1}.



14) Considere el balance de Ekman a 45°N. Utilice el coeficiente de viscosidad turbulenta igual a 0.1 m^2/s. Calcule el transporte de Ekman, la profundidad de la capa de Ekman y haga un dibujo (esquemático) de la espiral de Ekman.

15) Considere una región rectangular de ancho a y largo b, con agua de profundidad h. Obtenga las ondas estacionarias que pueden existir en dicha región.

16) Generalice el caso del flujo plano de Couette si el gradiente de presión en la dirección del canal es distinto de cero, $\partial p/\partial x \neq 0$.

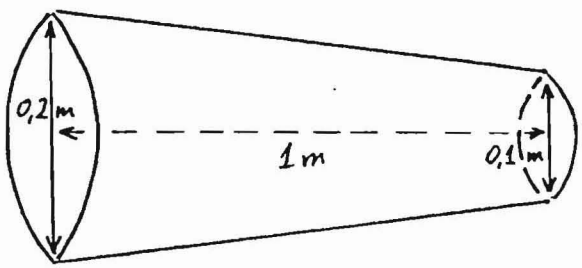
17) Obtenga la solución para el flujo estacionario entre dos cilíndros concéntricos rotando con velocidades angulares distintas (flujo circular de Couette).

Bloque 7. Energía

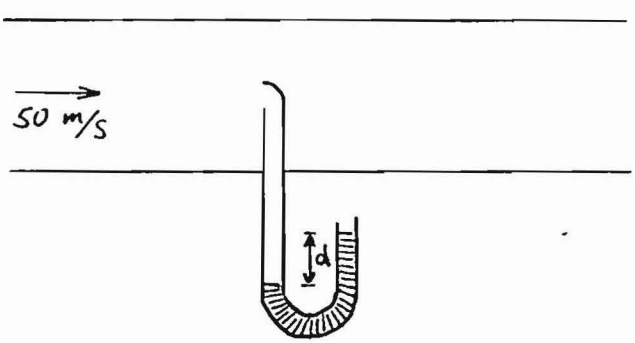
1) El agua fluye de forma constante (independiente del tiempo), con un caudal de 0.1 m^3 s^{-1}, por una tubería horizontal como la que se muestra en la figura (la forma de esta tubería es conoidal: su radio se contrae de 0.2 m a 0.1 m en una distancia de 1 m). Bajo la suposición de que las condiciones son uniformes sobre

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

cualquier sección de la tubería (la velocidad es la misma en el centro o en un lado de la tubería), encuentre una expresión para la tasa de cambio de la presión con la distancia a lo largo de la tubería, dp/dx. Sugerencia: una de las dos ecuaciones que debe utilizar es la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de flujo horizontal que pasa por el centro de la tubería.



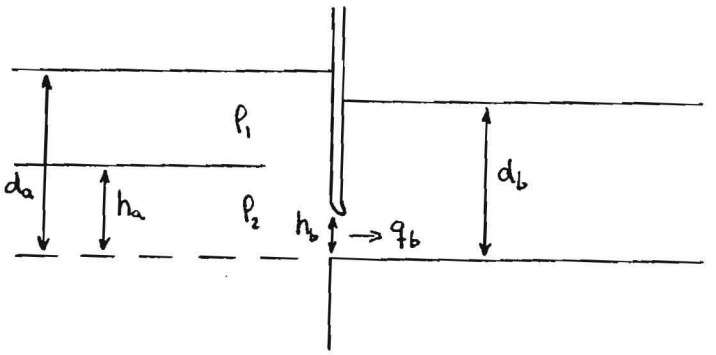
2) Por un tunel de viento fluye aire ($\rho = 1.33 \times 10^{-3}$ gr cm^{-3}) a presión atmosférica. A este tubo se le conecta una probeta con agua de densidad 1 gr cm^{-3} (la probeta tiene forma de U, con un extremo conectado al tubo y el otro abierto a la atmósfera, ver la figura). Para una velocidad del aire de 50 m s^{-1}, encuentre la diferencia entre los niveles del agua en los dos extremos de la probeta.



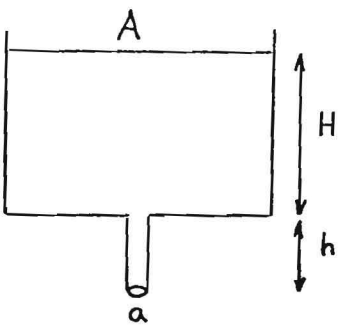
3) Durante el verano una represa se encuentra termalmente estratificada, con dos capas bien diferenciadas. Esta represa tiene un orificio de salida (ver figura) de manera que descarga agua de la capa inferior. Suponga que la interfase coincide con la línea de flujo que sale por el extremo superior del orificio de salida y calcule la relación entre el caudal de descarga (q_b) y la diferencia de nivel entre la represa

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

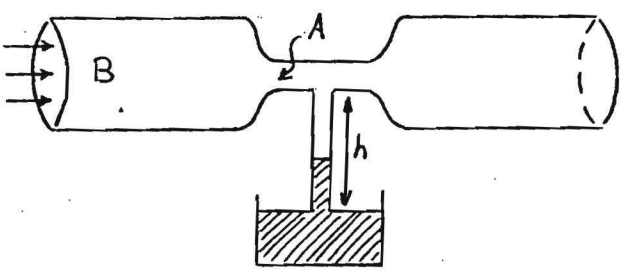
y el canal de descarga (h_a, d_a, ρ_1 y ρ_2 son valores conocidos).



4) El agua escapa del embalse que se muestra en la figura, cuya sección tiene area A, a través de un tubo cuya sección tiene area a. ¿ Cuál es la velocidad del agua que sale por la tubería? Calcule el tiempo necesario para que embalse se vacíe.

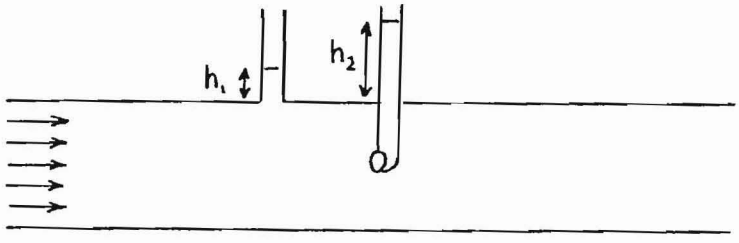


5) El agua fluye a lo largo de una tubería horizontal de area B, pasando por una constricción de area A, para rápidamente luego salir al aire (ver figura). El flujo del agua (volumen por unidad de tiempo) es Q. Calcule la condición necesaria para subir agua desde un embalse que se encuentra a una altura h por debajo de la tubería (dicho embalse está abierto a la atmósfera).

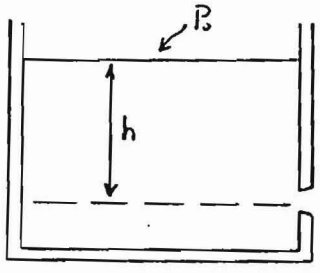


© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

6) La velocidad del fluido en un tubería puede determinarse mediante el denominado tubo de Pitot, el cual consiste en un tubito en la pared de la tubería seguido de otro tubito que se sumerge dentro del fluido (véase la figura). Obtenga una expresión para la velocidad de fluido en función de la altura que alcanza el agua en ambos tubitos. ¿Podría utilizarse este método para medir la velocidad de flujos en canales? ¿Qué ocurriría si aumentamos mucho la distancia entre ambos tubitos?



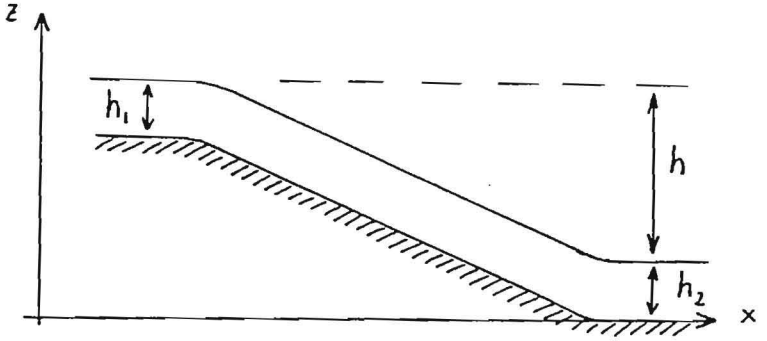
7) Considere el agua que sale de un tanque por un orificio (ver la figura). Suponga que el tanque es lo suficientemente grande como para que no se note el cambio en el nivel del agua (problema estacionario) y desprecie los efectos de fricción. Calcule la velocidad de salida del agua. Comparela con la velocidad que adquiriría una partícula de agua en caida libre desde la superficie del tanque.



8) Considere el flujo de la figura. Suponga que las velocidades son verticalmente uniformes (sobre toda la sección por la que fluye el fluido), y que la velocidad (v_1) y altura del fluido (h_1) en el punto 1 son conocidas. Dadas la densidad del fluido (ρ) y el desnivel en la superficie libre entre ambos puntos (h), obtenga la

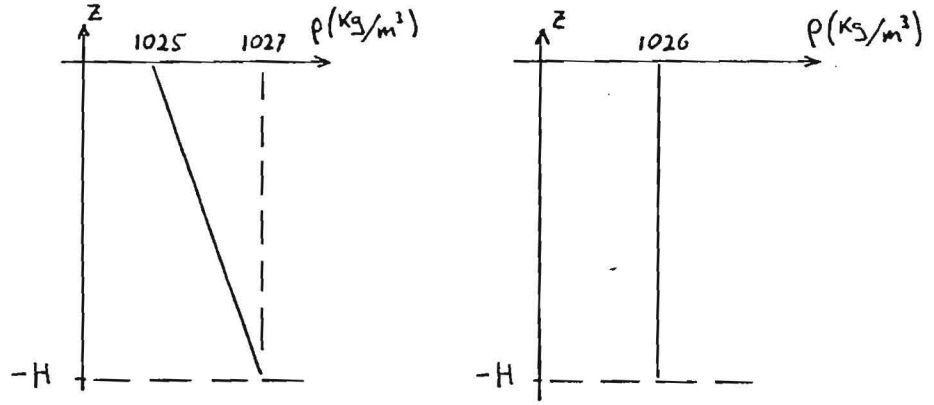
© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

velocidad (v_2) y altura del agua (h_2) en el punto 2.



9) Explique el concepto de "cascada de energía". De ejemplos de mecanismos productores, transmisores y disipadores de energía.

10) Considere una columna de agua de profundidad H, con la distribución inicial de densidad que se muestra en la parte izquierda de la figura y con velocidad (constante en la dirección vertical) $q = (u^2 + v^2)^{1/2} = q_i$. Esta columna aparece mezclada varios días después (ver parte derecha de la figura). Suponiendo que la energía mecánica se conserva, obtenga una expresión para la velocidad final de la columna de agua (supóngala constante sobre toda la columna de agua).

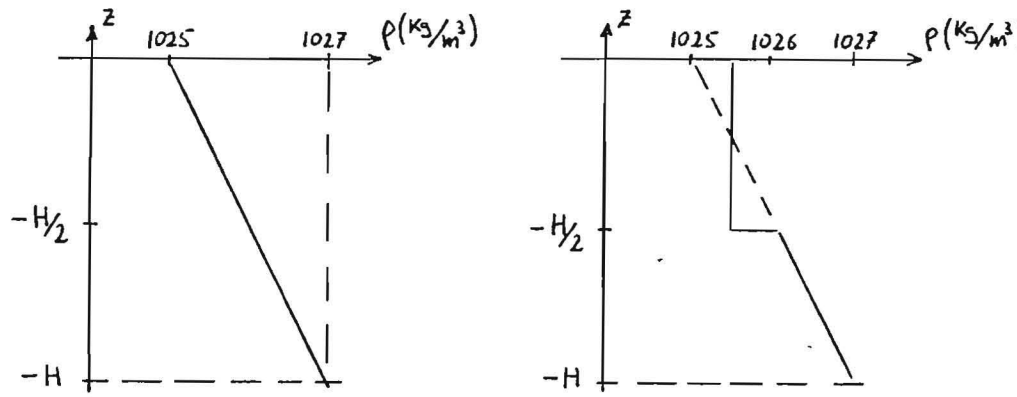


11) Considere de nuevo el problema anterior, pero ahora suponga que la energía mecánica no se conserva debido a la transferencia de momento a través del viento actuando sobre la superficie del océano. Calcule la velocidad final del sistema para un viento de 10 m/s soplando durante tres días. Para calcular el esfuerzo cortante

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

del viento sobre el océano utilice $\tau = \rho_{air} C_d |W| W$, donde W es la velocidad del viento, $\rho_{air} = 1.3 \times 10^{-3}$ gr cm^{-3} es la densidad del aire y $C_d = 2 \times 10^{-3}$ es el coeficiente de dragado para unidades MKS. Utilice la aproximación de que el trabajo realizado por el viento por unidad de area es τv_f.

12) Considere un océano uniforme en la dirección horizontal. Considere ahora una columna de agua de profundidad H, inicialmente en reposo, cuya densidad aumenta linealmente con la profundidad de acuerdo a la expresión $\rho = \rho_0 - \delta\rho\, z/H$. Durante un día entero el viento sopla con velocidad W, de tal manera que el esfuerzo cortante realizado por el viento en la superficie del océano es $\tau = \rho_{air} C_d W|W|$. Al cabo de un día la mitad superior de la columna de agua ($0 > z \geq -H/2$) aparece mezclada, con densidad $\rho_0 + \delta\rho/4$ y con velocidad v_f constante, mientras que la mitad inferior mantiene el estado de reposo y la estratificación inicial. Obtenga una expresión para v_f. Utilice la aproximación de que el trabajo realizado por el viento por unidad de area es τv_f.



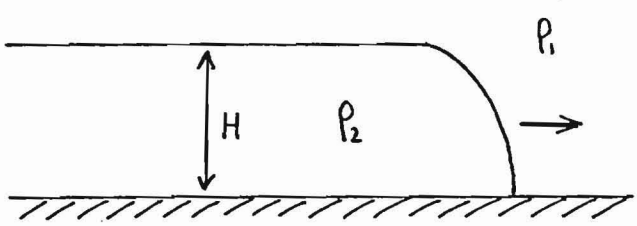
13) Considere una columna de agua de profundidad H, con densidad constante ρ_0, inicialmente con velocidad $q(t = 0) = q_0 = 1$ m/s (constante en la dirección vertical). Suponga que la densidad de la columna se mantiene constante (ρ_0), pero que la energía cinética disminuye debido a fricción con el fondo (trabajo realizado

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

por la fuerza superficial actuando en el fondo). Parametrice esta fuerza mediante la expresión $\tau = \rho r q H$, donde $\rho = 1000$ kg m^{-3}, $r = 1$ día^{-1}. Estime el tiempo que tardará la velocidad en hacerse inferior a 0.01 m/s. Recuerde que la solución de la ecuación $d(q^2)/dt = -sq^2$ es $q = q_0 exp(-st/2)$.

14) Considere un océano homogéneo, de profundidad uniforme H y densidad constante ρ. En este océano se encuentra un remolino ciclónico que llega desde la superficie hasta el fondo, el cual idealizamos por medio de una columna cilíndrica de profundidad H y radio a, que rota como un sólido rígido con velocidad angular ω. Considere que, debido a la fricción en el fondo, ω disminuye con la profundidad de acuerdo a la expresión $\omega = (f/2)exp(-z/H)$. Calcule la energía cinética de todo el remolino (obtenga primera una expresión para la energía cinética por unidad de area e integre sobre todo el cilindro).

15) Considere una corriente de gravedad tal como la que muestra la figura. Utilice la condición de estado estacionario y ausencia de fuerzas viscosas para obtener la velocidad de propagación de la corriente. Suponga ahora que la densidad del fluido ambiente ρ_1 es mucho menor que la del fluido que se propaga ρ_2 (por ejemplo, agua propagándose después de la rotura de una presa) y discuta cual es la dificultad que aparece y a que se puede deber. Resuelva ahora el problema bajo la suposición de que la presión sobre la superficie libre es constante e igua a la presión atmosférica.



© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

16) Considere ahora una corriente de gravedad sobre un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. Utilice la condición de estado estacionario y ausencia de fuerzas viscosas para obtener la velocidad de propagación de la corriente.

17) Considere la función de flujo $\psi = axy$. Sea $p_1 = p(x = 1, y = 1) = 0$. Calcule la presión máxima en el flujo.

18) Considere olas gravitatorias superficiales propagandose en el océano con longitud de onda $L = 100$ m y amplitud $a = 1$ m. Suponga que la profundidad del agua es infinita y calcule: (1) el período del oleaje, (2) las velocidades de fase y grupo, (3) la energía potencial, cinética y total por unidad de area, (4) el flujo de energía. Dibuje la variación de la superficie de la onda (5) con la distancia (para un tiempo fijo) y (6) en el tiempo (en un punto dado).

19) Considere el oleaje del problema anterior: (1) calcule y dibuje la trayectoria de las partículas a 0 y 100 m de profundidad, (2) represente la relación entre la posición y velocidad de las partículas y la elevación de la superficie del agua.

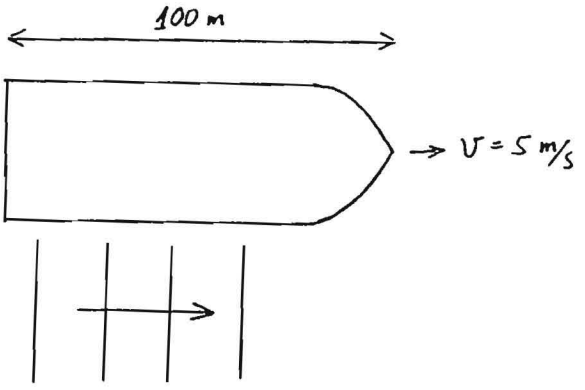
20) Considere el oleaje del problema anterior: (1) escriba las expresiones para la velocidad de las partículas y calcule la vorticidad del flujo, (2) suponga dos partículas inicialmente separadas por un vector $\vec{dr}$ y demuestre que dicha separación no cambia con el tiempo.

21) Considere una ola superficial que evoluciona sinusoidalmente en el espacio y el tiempo con velocidad angular ω y número de onda k. Su elevación sobre la superficie libre puede ser descrita por $\eta(x,t) = acos(kx - \omega t)$ y la magnitud de su velocidad es $q^2 = a^2\omega^2 e^{2kz}$ (aproximación de profundidad infinita, recuerde que $c = (g/k)^{1/2}$). Obtenga expresiones para (a) la energía potencial instantánea, (b)

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

la energía potencial media (sobre un período T), (c) la energía cinética instantánea (se recomienda integrar la energía cinética sobre toda la columna de agua, desde $z = -\infty$ hasta $z = 0$, obtendrá un valor independiente del tiempo).

22) Un barco se desplaza linealmente en el océano con una celeridad de 5 m/s. Desde el barco se observan olas que se desplazan en la misma dirección en que se mueve el barco y que lo adelantan, tardando 20 segundos en recorrer los 100 m de longitud del barco. Suponiendo que el barco se desplaza en aguas profundas (velocidad de fase de las olas es $c = (g/k)^{1/2}$), calcule la longitud de onda y el período de las olas.



23) Suponga que se la encargado la compra de un oleógrafo de presión (que se instala en el fondo del mar) con la intención de medir oleaje en aguas de 100 m de profundidad. En su búsqueda del instrumento adecuado encuentra un aparato que en su descripción técnica dice poder resolver (discriminar) cambios de presión de 1 Pascal. Suponga diversos valores de longitud de onda y determine si el instrumento sería capaz de observar los cambios de presión asociados al paso de estas olas.

24) Una tormenta muy distante genera oleaje de multitud de períodos. Varios días después este oleaje llega al puerto de Agaete. El período de las olas que llegan cambia de 12 a 11 segundos en 24 horas. Calcule a que distancia de Agaete se

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

encontraba la tormenta (considere que el oleaje de la tormenta se propagó con velocidad de grupo $c_g = g/(2\omega)$).

Bloque 8. Turbulencia

1) Calcule la cros-correlación $\overline{u(t)v(t)}$ entre las dos series periódicas $u(t) = cos(\omega t)$ y $v(t) = cos(\omega t + \phi)$. Dibuje los diagramas de dispersión (u en función de v) para $\phi = 0, \pi/4, \pi/2$.

2) Las mediciones realizadas en la atmósfera a 20°C dan valores para la desviación típica de la velocidad vertical, $w_{rms} = 1$ m/s, y temperatura, $T_{rms} = 0.1$°C. Si el coeficiente de correlación entre w y T es de 0.5, calcule el flujo de calor $Q = \rho c_p \overline{w'T'}$.

3) Considere la capa de mezcla superior del océano, de profundidad media h_0, en la cual la velocidad horizontal tiene componentes $(u_0, v_0 + v_1 cos(\omega t))$, donde $\omega = 2\pi/T$. Suponga que la capa de mezcla también tiene perturbaciones, de amplitud h_1 y período T, que se encuentran en fase con las perturbaciones de la componente v de la velocidad. Calcule el flujo horizontal medio de agua sobre la capa de mezcla. Recuerde que $\int_0^T cos^2 \omega t \, dt = T/2$.

4) Considere el caso de una capa de mezcla en la parte superior del océano, en estado estacionario, de espesor h. Considere el caso de las Islas Canarias, suponga que a partir de imagenes de satélite de la temperatura superficial del agua podemos simplificar el problemas suponiendo que la temperatura superficial es constante en la dirección Este-Oeste, mientras que en la dirección Norte-Sur la temperatura aumenta unos 2°C en 1000 km. Suponga también que la corriente media esta dirigida hacia el sur con una magnitud de 0.1 m/s. Derive la ecuación de con-

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

servación de calor para un volumen fijo de la capa de mezcla. Para ello iguale el flujo de Reynolds de calor en la superficie del océano por $\overline{w'T'} = Q/(C_p\rho)$, donde Q es la radiación por unidad de area, ρ es la densidad del agua y C_p es su calor específico a presión constante. Por otro lado iguale el flujo (negativo) de calor de Reynolds desde el océano profundo por $\overline{w'T'} = w_e\delta T$, donde w_e es la velocidad de mezcla desde el océano inferior hacia la capa de mezcla y δT es la diferencia de temperatura entre el océano inferior y la capa de mezcla.

5) Considere el giro subtropical del océano Atlántico Norte. El margen occidental de este giro esta formado por la Corriente del Golfo, cuyo caudal llega a aumentar en unos 50 Sv desde el Estrecho de Florida hasta donde alcanza su valor máximo. Una de las teorías existentes sugiere que este aumento de caudal esta ocasionado por correlaciones entre las fluctuaciones de la velocidad transversal a la Corriente del Golfo (que recircula desde el giro subtropical) y el espesor de las capas, que ocurre en los meandros de la Corriente del Golfo. Simplifique el problema suponiendo que existe una sola capa, y suponga: (a) que las fluctuaciones de la velocidad y del espesor son sinusoidales, (b) que su amplitud es de 0,2 m/s y 500 m, respectivamente, (c) que su longitud de onda es de 200 km, y (d) que se encuentran completamente en fase. Calcule cuantos meandros se necesitan para aportar el aumento de caudal de la Corriente del Golfo.

6) Considere el ciclo estacional de la capa de mezcla en la zona del Archipiélago Canario. Suponga que la profundidad de la capa de mezcla varía entre 0 m (en enero) y 100 m (en julio), y que la temperatura varía entre 18°C (en marzo) y 24°C (en septiembre). Suponga que la variación de ambas cantidades tiene forma aproximadamente simusoidal durante un año. Sabiendo que el cambio en calor por

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

unidad de volumen cerca de la superficie viene aproximadamente dada por $\rho C_p \delta T$, donde ρ es la densidad del agua, C_p es el calor específico a presión constante y T es la temperatura, obtenga una expresión para la cantidad de calor media (por unidad de area) contenida en la capa de mezcla durante un año.

Recuerde: $cos(a+b) = cosa\, cosb - sina\, sinb$

$\int_0^T sin(\omega t)cos(\omega t)dt = 0$, $\int_0^T cos^2(\omega t)dt = T/2$, $\omega = 2\pi/T$

7) Una masa de agua de 10 kg es continuamente mezclada en una batidora. Después de una hora de batirla la temperatura aumenta en 1°C. Suponiendo que no hay pérdida de calor, calcule cual es la potencia de la batidora en Vatios. ¿Cuál es el tamaño de los remolinos disipadores de energía ?

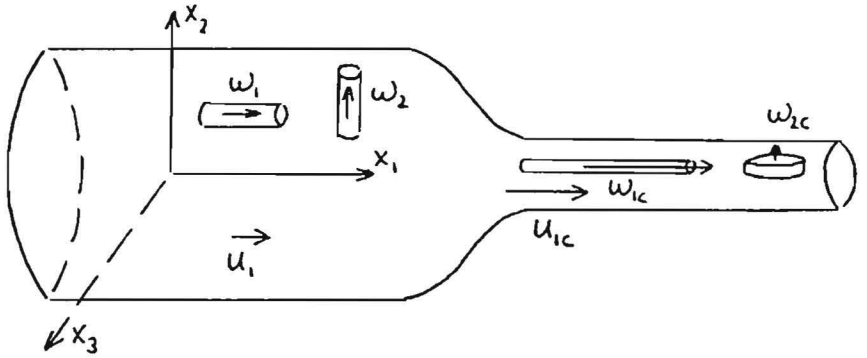
8) Una tubería horizontal de 0.2 m de diámetro lleva agua a temperatura de 20°C. La caida en presión es $dp/dx = 8$ N m^{-2} por metro. Suponiendo que el flujo es turbulento, verifique que el espesor de la subcapa viscosa es de unos 0.25 mm (utilice $dp/dx = 2\tau_0/R$; esto da $\tau_0 = 0.4$ N m^{-2} y $u_* = 0.02$ m/s).

9) La fuerza superficial, responsable de la transferencia de momento de un nivel $z = z_1$ a otro nivel $z = z_2$ en el fluido, se suele parametrizar de la forma $\tau_{xz} = \mu\, \partial u/\partial z$, donde μ es el coeficiente de viscosidad. (a) Considere primero el caso de flujo laminar en los siguientes fluidos: aire, agua, chocolate espeso. Utilice su "experiencia" sobre $\partial u/\partial z$ para ordenar μ en orden creciente para estos tres fluidos. (b) Ahora bien, en la realidad el valor efectivo de de μ, llamémosle μ_{turb}, es mayor en la atmósfera que en el océano. Justifique esta aparente paradoja.

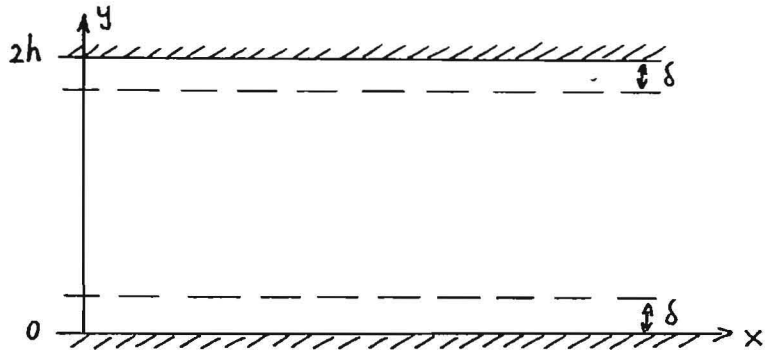
10) Considere una constricción en un tunel de viento, tal como el que muestra la figura, donde la velocidad del flujo medio aumenta en un factor c al pasar por

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

la constricción. Suponga que el momento angular de los remolinos en este flujo no cambia cuando pasan por la constricción. Muestre que las fluctuaciones de velocidad asociadas con un remolino en la dirección del flujo aumentan en un factor $c^{1/2}$, mientras que las fluctuaciones de velocidad asociadas con aquellos remolinos perpendiculares a la dirección del flujo disminuyen en un factor c.



11) Recuerde el problema del flujo entre dos placas, una fija y otra moviéndose con velocidad U_0 (véase la figura). Este problema fué discutido en clase para el caso en que $\tau = \mu\, \partial u/\partial y$, con μ constante. Considere ahora el caso más realista en el que μ tiene comportamiento diferente en dos regiones: (a) la "subcapa viscosa", cercana a la pared, donde $\mu = \mu_0 = constante$, y (b) la "capa turbulenta", situada a una distancia $\delta = (10\mu_0)/(\rho u_*)$ de la pared, donde la viscosidad cinemática viene dada por $\nu \equiv \mu/\rho = k u_* d$, siendo d la distancia a la placa.



12) Repita el problema anterior para el caso en que ambas placas están fijas y existe un gradiente de presión $dp/dx = -G < 0$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Bloque 9. Vorticidad Potencial

1) Derive la ecuación de conservación de vorticidad potencial para el caso de una columna de fluido homogéneo de profundidad H, en balance geostrófico. Utilice la ecuación de continuidad en su forma integrada verticalmente: $dH/dt + H(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) = 0$.

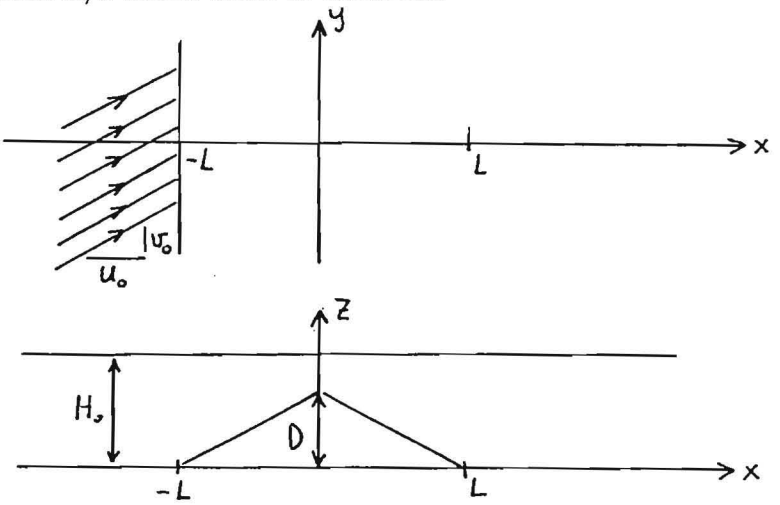
2) Considere un remolino oceánico, idealizado por un tubo de radio r_1 y altura h_1 rotando como un sólido rígido con velocidad angular Ω_1 (estos valores son conocidos). Al cabo de cierto tiempo este remolino evoluciona y se transforma en otro cuya velocidad angular se observa es $\Omega_2 = 2\Omega_1$. Bajo las suposiciones de torques externos e internos despreciables, y de vorticidad planetaria constante, obtenga expresiones para r_2 y h_2 (recuerde que la vorticidad relativa del remolino es dos veces su velocidad angular, $\omega = 2\Omega$).

3) Calcule la vorticidad planetaria, vorticidad relativa y vorticidad total de corrientes inerciales a una latitud de 30 °N. Obtenga este resultado utilizando la definición de la componente vertical del vector vorticidad relativa, $\zeta = \hat{k} \cdot \nabla \times \vec{v}$ (utilice el sistema de coordenadas natural para hacer este cálculo).

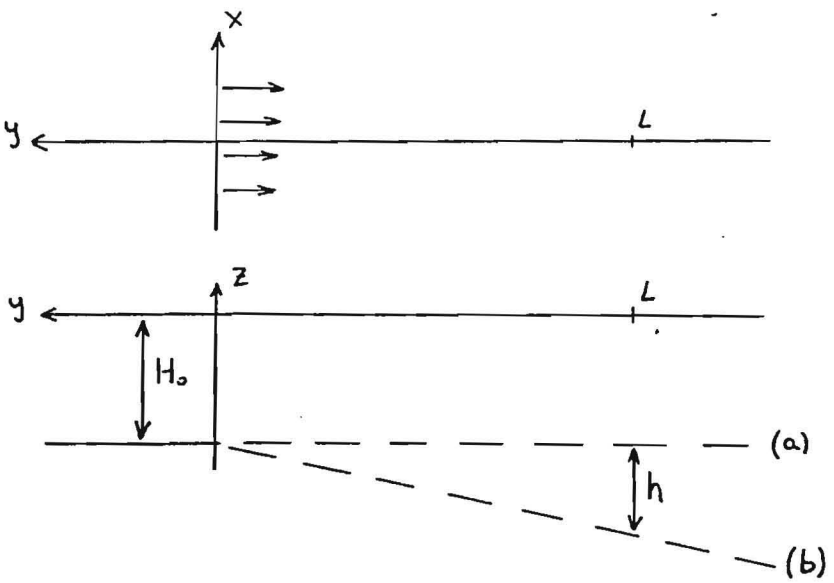
4) Un flujo bidimensional incide oblicuamente sobre una cordillera submarina (ver figura). Suponga que la cordillera es muy extensa en la dirección y (es decir, suponga $\partial/\partial y = 0$). La profundidad del agua antes y después de la cordillera es constante e igual a H_0, y la altura de la cordillera se aproxima por un triángulo, de manera que $H = H_0$ cuando $|x| > L$ y $H = H_0 - D(1 - |x|/L)$ cuando $|x| \leq L$. Asuma estado estacionario, densidad constante y $f = f_0$ constante (aproximación del plano f). Utilice la condición de conservación de vorticidad potencial y obtenga

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

expresiones para u, v sobre todo el dominio.

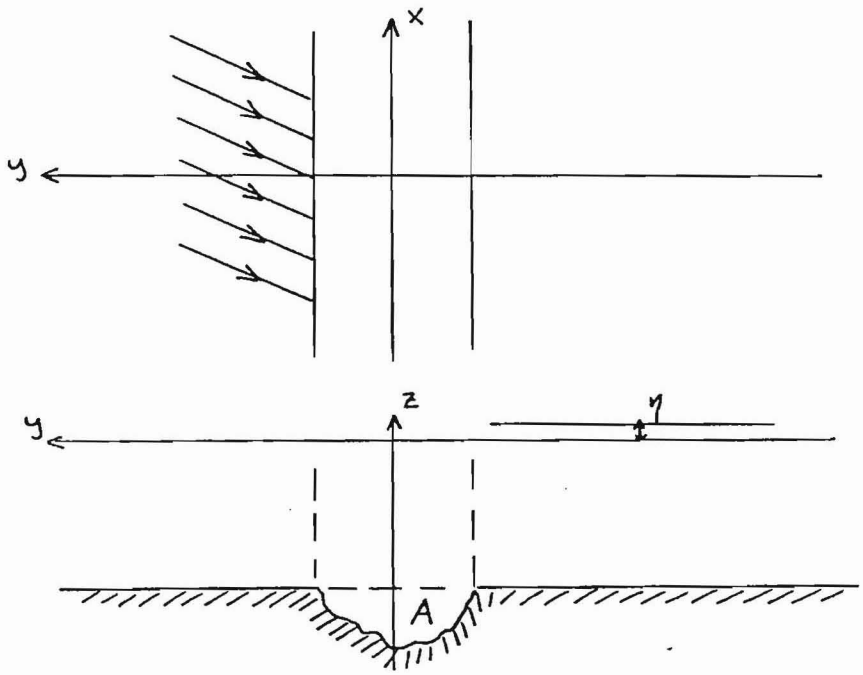


5) Considere un flujo dirigido hacia el Sur como el que muestra la figura. Suponga estado estacionario, densidad constante y que no hay variaciones en la dirección Este-Oeste ($\partial/\partial x = 0$). En $y = 0$ su vorticidad relativa es cero, su vorticidad planetaria es f_0 y la profundidad del agua es H_0. (a) Utilice la aproximación $f = f_0 + \beta y$, donde $f_0 = f(y = 0)$, para determinar como evoluciona la componente Este-Oeste de la velocidad ($u = u(y)$) bajo la suposición de que la profundidad es constante. (b) Repita el cálculo pero suponga que la profundidad aumenta linealmente con la distancia (una profundidad h en una distancia L), como si se tratase de un talud, $H_f = H_0 + hy/L$. Obtenga la condición para que la vorticidad relativa se mantenga igual a cero.



© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

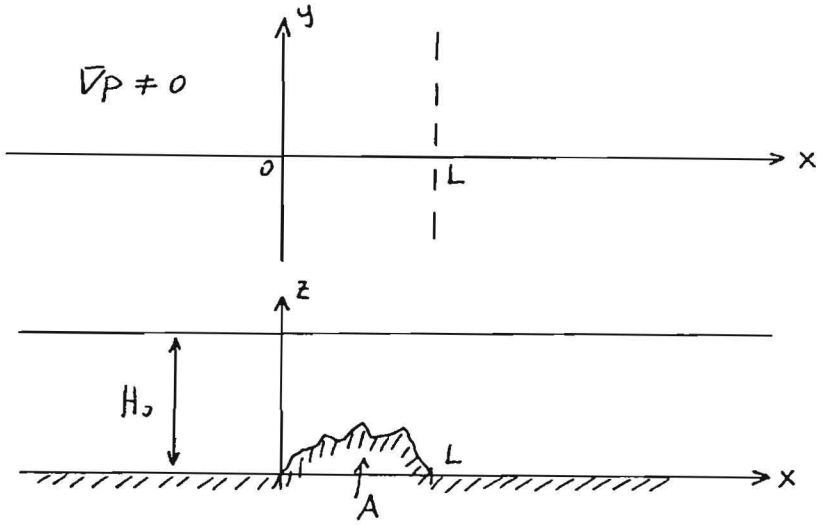
6) Considere un flujo estacionario de densidad constante que incide sobre un cañón submarino en la dirección Suroeste, con componentes $(-u_0, -v_0)$. Suponga estado estacionario, densidad constante y que no hay variaciones en la dirección Este-Oeste ($\partial/\partial x = 0$). El cañón submarino tiene sección transversal de area A. (a) Encuentre una expresión para ambas componentes de la velocidad del flujo después de atravesar el cañón. Utilice la aproximación f constante. (b) Considere ahora una línea a lo largo de la superficie libre del océano. Encuentre una expresión para el cambio en la elevación de la superficie libre una vez superado el cañón. Suponga que la presión es constante en la superficie del océano.



7) Considere un flujo bidimensional que incide sobre una cordillera cuya sección transversal es A. Considere el flujo incidente en balance geostrófico, con el gradiente de presión dado por $\nabla p = M\hat{i} - N\hat{j}$, pero que dicho balance se pierde al comenzar a cruzar la cordillera. Suponga que la cordillera es muy extensa

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

en la dirección y (vea la figura). Asuma estado estacionario, densidad constante y vorticidad planetaria constante (f_0), desprecie las fuerzas viscosas. Obtenga expresiones para la velocidad una vez pasada la cordillera.



8) En clase mostramos que una fuerza superficial normal actuando en la dirección x, $F_x(y)$, sobre una superficie en el plano y-z, produce un torque proporcional a $-\partial F_x/\partial y$. Muestre, con un razonamiento similar, de donde saldría el término $\partial F_y/\partial x$. Repita los cálculos para una fuerza superficial tangencial $G_x(y)$ que actuase sobre el plano x-y.

3.4 Evaluación

De lo discutido en la Metodología Docente surge la necesidad de formular una evaluación que permita apreciar el grado de madurez alcanzado en los procesos de razonamiento sobre temas relacionados con la asignatura. Ello implica que los exámenes orales y/o escritos deben replantearse y complementarse con formas menos tradicionales de evaluación. La evaluación debe sobre todo ponderar la comprensión y capacidad de aplicación de los conceptos fundamentales de la asig-

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

natura, en lugar de la simple memorización de conceptos y resolución de ejercicios similares a aquellos desarrollados en clase.

Debe realizarse un esfuerzo para que el proceso de evaluación sea, dentro de lo posible, de cierto atractivo para el estudiante. Ello puede conseguirse dando un peso relativo importante a las actividades desarrolladas por los estudiantes: trabajos realizados, presentaciones en clase, desarrollo de experimentos, participación en actividades sobre el tema, etc. Asimismo, los exámenes deben prepararse basándose en gran medida en los temas desarrollados por los diversos grupos de trabajo, de modo consistente con el hecho de que una parte importante de la asignatura será cubierta a través de las presentaciones y debates de los propios estudiantes. De esta manera el estudiante será corresponsable con el profesor tanto en el proceso de enseñanza como en el de evaluación.

De acuerdo a los criterios anteriores se realizaría una evaluación sobre el grado de madurez alcanzado a través de diferentes mecanismos tales como exámenes parciales, trabajos de grupo, realización e informes de prácticas y resolución de problemas. Debido a que gran parte de la evaluación se basará en actividades en grupo, y con el fin de asegurar una adecuada comprensión individual de la asignatura, se solicitará una nota mínima de aprobado en los exámenes parciales para poder superar la asignatura.

Finalmente, cabe señalar la importancia de que el profesor se autoevalue, con el fin de mejorar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta autoevaluación puede alcanzarse tanto a través de la reflexión sincera sobre los progresos de los estudiantes como por medio de discusiones con los estudiantes sobre la marcha de la asignatura y encuestas realizadas por ellos mismos.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

4. Bibliografía

A continuación se presenta una selección de libros y revístas periódicas relacionadas con la Mecánica de Fluidos Geofísicos. También se incluye un número limitado de referencias, correspondiente a aquellos artículos citados en la descripción de las Experiencias de Laboratorio. Se ha intentado que esta selección sea lo más exhaustiva posible pero limitada a referencias cuyo enfoque sea consistente con el presentado en este Proyecto Docente. Así pues, por ejemplo, no se han incluido los numerosos libros relacionados con Mecánica de Fluidos pero fundamentalmente enfocados hacia temas de Ingeniería.

4.1 Libros de Referencia

Los referencias a libros se han agrupado en las siguientes ocho categorías:

1) Introducción a la Mecánica de Fluidos

2) Tópicos Especiales en Mecánica de Fluidos

3) Mecánica de Fluidos Geofísicos

4) Oceanografía Física

5) Ciencias Atmosféricas

6) Métodos Matemáticos para la Física

7) Método Científico, Historia y Filosofía de la Ciencia

8) Método Didáctico

En la primera y segunda categoría se han seleccionado sólo aquellos libros cuyo enfoque sea lo más físico posible y que, en lo posible, contengan alguna parte orientada hacia Flujos Geofísicos. El tercer grupo consiste en aquellas referencias

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

que tienen un enfoque integrado hacia los diferentes tipos de Flujos Geofísicos, aún cuando el mayor énfasis está indudablemente dirigido hacia los flujos oceánicos y atmosféricos sobre la tierra. Las aplicaciones a estos flujos son consideradas con profundidad en las categorías cuarta y quinta. El grupo sexto incluye varios títulos de métodos matemáticos para la Física en general y diversas aplicaciones a la Mecánica de Fluidos. Los dos últimos grupos se refieren a bibliografía relacionada con el Método Científico y Pedagógico.

Puede apreciarse que existen relativamente pocos libros con una formulación única de la Mecánica de Fluidos Geofísicos y que, por el contrario, el número de libros orientado hacia los flujos en el océano y la atmósfera es considerable. En particular, existen también varios libros que hacen un enfoque integrado de la Mecánica de Fluidos oceánicos y atmosféricos.

Dada la considerable extensión de la literatura citada es conveniente ofrecer una lista de libros que por diversas razones (enfoque global de la Mecánica de Fluidos Geofísicos, adecuado razonamiento físico, aplicabilidad al perfil de la asignatura, suficientes referencias a experimentos de laboratorio y problemas, actualidad del enfoque y preferencia de tipo personal) son particularmente recomendados por el autor de este Proyecto. Para la asignatura de Mecánica de Fluidos y Ondas de la Licenciatura en Ciencias del Mar estos libros son: Batchelor (1967), Tennekes and Lumley (1972), Pedlosky (1987), Csanady (1982), Gill (1982), Paterson (1983), Stommel (1987), Kundu (1990) y Cushman-Roisin (1994). Para la parte de esta asignatura correspondiente a experiencias de laboratorio cabe destacar los filmes recogidos por la Encyclopedia Brittanica National Corporation (fechas varias) y por el National Committee for Fluid Mechanics Films (1972), y

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

la recolección escrita por Plint y Boswirth (1978). Asimismo, son de destacar los programas de manejo de bases de datos oceanográficas de Rhines (1991) y Osborne y Swift (1994) (versiones actualizadas de estos programas pueden obtenerse solicitándolas a los autores).

1) Introducción a la Mecánica de Fluidos

Batchelor, G. K., 1967: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Chirgwin, B. H., y C. Plumpton, 1967: *Elementary Classical Hydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford.

Currie, I. G., 1974: *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York.

Daily, J. W., y D. R. F. Harleman, 1966: *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley, Reading.

Dryden, H. L., F. D. Murnaghan, y H. Bateman, 1956: *Hydrodynamics*, Dover, New York.

Encyclopedia Britannica Educational Corporation, 1996: *Fluid Mechanics Films*, Chicago.

Kundu, P. K., 1990: *Fluid Mechanics*, Academic Press, New York.

Lamb, H., 1945: *Hydrodynamics*, Dover, New York.

Landau, L. D. y E. M. Lifshitz, 1987: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.

National Committee for Fluid Mechanics Films, 1972: *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Paterson, A. R., 1983: *A First Course in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Plint, M. A. y L. Boswirth, 1978: *Fluid Mechanics: A Laboratory Course*, Charles

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Griffin and Company Limited, London.

Rouse, H., 1976: *Advance Mechanics of Fluids*, Kriegler, New York.

Shames, I. H., 1967: *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York.

Tritton, D. J., 1977: *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Williams, J. y S. A. Elder, 1989: *Fluid Physics for Oceanographers and Physicists*, Pergamon Press, Oxford.

Yih, C. S., 1979: *Fluid Mechanics. A Concise Introduction to the Theory*, West River Press, Ann Arbor.

2) Tópicos Especiales en Mecánica de Fluidos

Baines, P. G., 1995: *Topographic Effects in Stratified Flows*, Cambridge University Press, London.

Batchelor, G. K., 1960: *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge.

Brandt, A., H. S. Fernando, O. M. Phillips y G. J. Van Heijst, 1996: *Double Diffusive Convection*, American Geophysical Union, Washington.

Chandrasekhar, S., 1961: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, London.

Csanady, G. T., 1980:: *Turbulent Diffusion in the Environment*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Drazin, P. y W. Reid, 1980: *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, New York.

Landahl, M. T. y E. Mollo-Christensen, 1986: *Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Leslie, D. C., 1983: *Developments in the Theory of Turbulence*, Oxford University Press, Oxford.

Luikov, A. V., 1980: *Heat and Mass Transfer*, MIR, Moscow.

McComb, W. D., 1990: *The Physics of Fluid Turbulence*, Clarendon Press, Oxford.

Ottino, J. M., 1990: *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport*, Cambridge University Press, Cambridge.

Saffman, P. G., 1992: *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, New York.

Schlichting, H., 1979: *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York.

Tennekes, H. y J. L. Lumley, 1972: *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Townsend, A. A., 1976: *The Structure of Turbulent Shear FLow*, Cambridge University Press, Cambridge.

Turner, J. S., 1973: *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge.

Witham, G. B., 1974: *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York.

Yih, C. S., 1980: *Stratified Flows*, Academic Press, New York.

3) Mecánica de Fluidos Geofísicos

Cushman-Roisin, B., 1994: *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, Prentice Hall, New York.

Ghil, M. y S. Childress, 1987: *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

Greenspan, H. P., 1968: *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, London.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Monin, A. S., 1990: *Theoretical Geophysical Fluid*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Munk, W. H. y G. MacDonald, 1975: *The Rotation of the Earth - A Geophysical Discussion*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

4) Oceanografía Física

Abbot, M. B., 1979: *Computational Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Company, Boston.

Bowden, K. F., 1983: *Physical Oceanography of Coastal Waters*, Wiley, New York.

Csanady, G. T., 1982: *Circulation in the Coastal Ocean*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Defant, A., 1961: *Physical Oceanography*, Vol. 1 y 2, Pergamon Press, Oxford.

Fischer, H. B., E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger y N. H. Brooks, 1979: *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, San Diego.

Gill, A. E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, New York.

Goldberg, E. D., I. N. McCave, J. J. O'Brien y J. H. Steele, 1977: *The Sea*, Vol. 6, Wiley, New York.

Godin, G., 1988: *Tides*, CICESE, Ensenada, Mexico.

Hill, M. N., 1962: *The Sea*, Vol. 1, Wiley, New York.

Hill, M. N., 1963: *The Sea*, Vol. 2, Wiley, New York.

Ippen, A. T., 1966: *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, McGraw-Hill, Inc., New York.

Johns, B., 1983: *Physical Oceanography of Coastal and Shelf Seas*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Kamenkovich, V. M., 1977: *Fundamentals of Ocean Dynamics*, Elsevier, Amsterdam.

Kamenkovich, V. M., M. N. Koshlyakov y A. S. Monin, 1986: *Synoptic Eddies in the Ocean*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Kraus, E. B., 1977: *Modelling and Prediction of the Upper Layers of the Ocean*, Pergamon Press, New York.

LeBlond, P. H. y L. A. Mysak, 1978: *Waves in the Ocean*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

Le Mehaute, B. Y D. M. Hanes, 1990: *The Sea: Ocean Engineering Science*, Vol. 9, Wiley, New York.

Lighthill, J., 1978: *Waves in the Ocean*, Cambridge University Press, Cambridge.

Mamayev, O. I., 1975: *Temperature-Salinity Analysis of World Ocean Waters*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

Marchuk, G. I. y B. A. Kagan, 1984: *Ocean Tides*, Pregamon Press, Oxford.

McLellan, H. J., 1965: *Elements of Physical Oceanography*, Pergamon Press, Oxford.

Monin, A. S. y R. V. Ozmidov, 1985: *Turbulence in the Ocean*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Osborne, J. y J. Swift, 1994: *OceanAtlas fo Macintosh. A Microcomputer Application for Examining Oceanographic Data. Version 2.5*, Manual y diskettes, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Californa.

Pedlosky, J., 1996: *Ocean Circulation Theory*, Springer-Verlag, New York.

Phillips, O. M., 1977: *The Dynamics of the Upper Ocean*, Cambridge University Press, Cambridge.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Pickard, G. L. y W. J. Emery, 1982: *Descriptive Physical Oceanography*, Pergamon Press, Oxford.

Pond, S. y G. L. Pickard, 1978: *Introductory Dynamic Oceanography*, Pergamon Press, Oxford.

Proudman, J., 1953: *Dynamical Oceanography*, Methuen, London.

Ramming, H. y Z. Kowalik, 1980: *Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics*, Elsevier, Amsterdam.

Rhines, P. B., 1991: *ATLAST. A World Ocean Atlast of Hydrography, Nutrients and Chemical Tracers. Version 3.0*, Manual y diskettes, School of Oceanography, University of Washington.

Robinson, A. R., 1982: *Eddies in Marine Science*, Springer-Verlag, Berlin.

Stern, M. E., 1975: *Ocean Circulation Physics*, Academic Press, New York.

Stommel, H., 1965: *The Gulf Stream: A Physical and Dynamical Description*, University of California Press, Berkeley.

Stommel, H., 1987: *A View of the Sea*, Princeton University Press, New Jersey.

Stommel, H. M. y D. W. Moore, 1989: *An Introduction to the Coriolis Force*, Columbia University Press.

Sverdrup, H. U., M. W. Johnson y R. H. Fleming, 1942: *The Oceans: Their Physics, Chemistry and General Biology*, Prentice-Hall, New Jersey.

Tomczak, M. y J. S. Godfrey, 1994: *Regional Oceanography: An Introduction*, Pergamon Press, London.

Warren, B. A. y C. Wunsch, 1981: *Evolution in Physical Oceanography*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Williams, J. y S. A. Elder, 1989: *Fluid Physics for Oceanographers and Physicists*,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Pergamon Press, Oxford.

Woods, J. D., 1982: *Turbulence in the Ocean*, Springer-Verlag, Berlin.

Worthington, L. V., 1976: *On the North Atlantic Circulation*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

5) Ciencias Atmosféricas

Andrews, D. G., J. R. Holton y C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, New York.

Budyko, M. I., 1974: *Climate and Life*, Academic Press, New York.

Brown, R. A., 1991: *Fluid Mechanics of the Atmosphere*, Academic Press, New York.

Chamberlain, J. W., 1978: *Theory of Planetary Atmospheres: An Introduction to their Physics and Chemistry*, Academic Press, New York.

Dutton, J. A., 1986: *The Ceaseless Wind. An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion*, Dover, New York

Garrat, J. R., 1992: *The Atmospheric Boundary Layer*, Cambridge University Press, Cambridge.

Gill, A. E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, New York.

Gossard, E. E. y W. H. Hooke, 1975: *Waves in the Atmosphere*, Elsevier, Amsterdam.

Holton, J. R., 1975: *The Dynamic Meteorology of the Stratosphere and Mesosphere*, American Meteorological Society, London.

Holton, J. R., 1979: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, New York.

Houghton, J., 1986: *The Physics of Atmospheres*, Cambridge University Press,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Cambridge.

Lindzen, R. S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Lindzen, R. S., E. N. Lorenz y G. W. Platzman, 1990: *The Atmosphere - A Challange: The Science of Jule Gregory Charney*, American Meteorological Society, Boston

Morel, P., 1973: *Dynamic Meteorology*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Palmén, E. y C. W. Newton, 1969: *Atmospheric Circulation Systems*, Academic Press, New York.

Panchev, S., 1985: *Dynamic Meteorology*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Panofsky, H. A. y J. A. Dutton, 1984: *Atmospheric Turbulence*, Wiley, New York.

Peixoto, J. P., y A. H. Oort, 1992: *Physics of Climate*, American Institute of Physics, New York.

Reiter, E. R., 1963: *Jet Stream Meteorology*, University of Chicago press, Chicago.

Riehl, H., 1979: *Climate and Weather in the Tropics*, Academic Press, Nueva york.

Wallace, J. M. y P. V. Hobbs, 1977: *Atmospheric Science: An Introductory Survey*, Academic Press, New York.

6) Métodos Matemáticos para la Física

Arfken, G., 1981: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York.

Bennett, A. F., 1993: *Inverse Methods in Physical Oceanography*, Cambridge University Press, 1993.

Jefreys, H. S., y B. S. Jefreys, 1966: *Methods of Mathematical Physics*, 3a. ed.,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Cambridge University Press, Cambridge.

Kreyszig, E., 1979: *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York.

Morse, P. M., y H. Feshbach, 1953: *Methods of Theoretical Physics*, Vols. 1 y 2, McGraw-Hill, New York.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, 1992: *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Tijonov, A. N. y A. A. Samarsky, 1980: *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, Moscu.

7) Método Científico, Historia y Filosofía de la Ciencia

Bernard Cohen, I., 1985: *The Birth of a New Physics. Revised and Updated*, W. W. Norton and Company, New York.

Einstein, A., y L. Infeld, 1938: *The Evolution of Physics*, Simon and Schuster Inc., New York.

Feyerabend, P., 1975: *Tratado contra el Método*, NLB, Londres.

Losee, J., 1972: *A Historical Introduction to the Philosophy of Science*, The Clarendon Press, Oxford.

Nagel, E., 1961: *The Structure of Science*, Harcourt, Brace and World, Inc., New York.

Popper, K. R., 1985: *Realismo y el Objetivo de la Ciencia*, Editorial Tecnos, Madrid.

Schroeer, D., 1972: *Physics and its Fifth Dimension: Society*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

8) Método Didáctico

Brunner, J. S., 1960: *The Process of Education*, Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts.

Carrasco, J. B., 1991: *Técnicas y Recursos para el Desarrollo de las Clases*, Ediciones Rialp, Madrid.

García Hoz, V., 1982: *Calidad Educativa, Trabajo y Libertad*, Dossat, Madrid.

Cofer, C. N., 1980: *Motivación y Emoción*, Editorial Española Desclée de Brouwer, Zarauz.

Rogers, C. R., 1981: *El Proceso de Convertirse en Persona*, Editorial Paidós, Buenos Aires.

Soler, E., L. Alvarez, A. García, J. Hernández, J. J. Ordoñez, F. Albuerne y M. A. Cadruecha, 1992: *Teoría y Práctica del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje*, Narcea, Madrid.

4.2 Revistas Periódicas

A continuación se presenta un listado de las publicaciones periódicas más relevantes en temas de Mecánica de Fluidos y aplicaciones a Flujos Geofísicos. Estas se han agrupado en cuatro categorías:

1) Mecánica de Fluidos

2) Oceanografía Física

3) Ciencias de la Atmósfera

4) Otros Flujos Geofísicos

Puede apreciarse que el mayor énfasis está dirigido a las tres primeras categorías, acorde con la orientación que se ha dado a este Proyecto Docente. En la

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

cuarta categoría se han agrupado algunas revistas de carácter general, tales como *Nature* y *Science*, y otras más específicas, en las cuales a menudo se encuentran artículos donde se aplica la Mecánica de Fluidos a diferentes problemas geofísicos.

1) Mecánica de Fluidos

Annual Review of Fluid Mechanics, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California.

Experiments in Fluids, Springer-Verlag, Berlin.

Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.

Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, American Institute of Physics, New York.

Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Royal Society of London, London.

Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin.

2) Oceanografía Física

Continental Shelf Research, Pergamon Press, Oxford.

Deep-Sea Research, Elsevier Science Ltd, Oxford.

Dynamics of Atmospheres and Oceans, Elsevier, New York.

EOS Transactions of the American Geophysical Union, American Geophysical Union, Washington.

Estuarine, Coastal and Shelf Science, Academic Press, New York.

Journal of Geophysical Research, Oceans, American Geophysical Society, Washington.

Journal of Marine Research, Sears Foundation for Marine Research, Yale University, New Haven.

Journal of Marine Systems, Elsevier, Amsterdam.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Journal of Physical Oceanography, American Meteorological Society, Boston.

Limnology and Oceanography, American Society of Limnology and Oceanography, Lawrence, Estados Unidos.

Oceanologica Acta, Gauthier-Villars, Montrouge, Francia.

Oceanic Abstracts, Cambridge Scientific Abstracts, Bethesda, Maryland.

Progress in Oceanography, Elsevier Science Ltd, Oxford.

Scientia Marina, Consejo Superior de Investigaciones Marinas, Barcelona.

3) Ciencias Atmosféricas

Boundary Layer Meteorology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bulletin of the American Meteorological Society, American Meteorological Society, Boston.

Dynamics of Atmospheres and Oceans, Elsevier, New York.

EOS Transactions of the American Geophysical Union, American Geophysical Union, Washington.

Journal of Applied Meteorology, American Meteorological Society, Boston.

Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, American Meteorological Society, Boston.

Journal of Atmospheric Sciences, American Meteorological Society, Boston.

Journal of Climate, American Meteorological Society, Boston.

Journal of Geophysical Research, Atmospheres, American Geophysical Union, Washington.

Monthly Weather Review, American Meteorológical Society, Boston.

Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Royal Meteorological Society, London.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

4) Otros Flujos Geofísicos

Annual Review of Earth and Planetary Sciences, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California.

Journal of Geophysical Research, Space Physics, American Geophysical Union, Washington.

Nature, Macmillan Magazines Ltd, London.

Reviews of Geophysics, American Geophysical Union, Washington.

Science, American Association for the Advancement of Science, Washington.

4.3 Artículos Seleccionados

La siguiente selección de artículos corresponde a aquellos mencionados como referencias para las experiencias de laboratorio.

Arístegui, J., P. Sangrá, S. Hernández, M. Cantón, A. Hernández y J. L. Kerling, 1994: Island-induced eddies in the Canary Islands, *Deep-Sea Research*, 41, 1509-1525.

Allen, J. S., 1980: Models of wind-driven currents on the continental shelf, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 12, 389-433.

Benjamin, T. B., 1968: Gravity currents and related phenomena, *Journal of Fluid Mechanics*, 31, 209-248.

Cessi, P., 1992: Ventilation of eastern subtropical gyres, *Journal of Physical Oceanography*, 22, 683-685.

Csanady, G. T., 1977: The coastal jet conceptual model in the dynamics of shallow seas, en *The Sea, Marine Modelling*, vol. 6, editado por E. D. Goldberg, I. N. McCave, J. J. O'Brien y J. H. Steele, pp. 117-144, Wiley, New York.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Csanady, G. T., 1978: The arrested topographic wave, *Journal of Physical Oceanography*, 8, 47-62.

Csanady, G. T., 1981: Circulation in the coastal ocean, *EOS Transactions American Geophysical Union*, 62, 9-11, 41-43, 73-75.

Csanady, G. T., 1985: Pycnobatic currents over the upper continental slope, *Journal of Physical Oceanography*, 15, 306-315.

Csanady, G. T., 1986: Cross-gyre transports, *Journal of Physical Oceanography*, 16, 1703-1711.

Csanady, G. T., 1988: Ocean currents over the continental slope, *Advances in Geophysics*, 30, 95-203.

Csanady, G. T., 1989: Energy dissipation and upwelling in a western boundary current, *Journal of Physical Oceanography*, 19, 462-473.

Csanady, G. T., 1990a: Mixing in coastal regions, en *The Sea, Ocean Engineering Science*, vol. 6, editado por B. Le Mehaute y D. M. Hanes, pp. 593-629, Wiley, New York.

Csanady, G. T., 1990b: Physical basis of coastal productivity. The SEEP and MASAR experiments. *EOS Transactions of the American Geophysical Union*, 71, 1060-1065.

Csanady, G. T., y J. L. Pelegrí, 1995: Vorticity balance of boundary currents, *Journal of Marine Research*, 53, 171-185.

Fernando, H. J. S., 1991: Turbulent mixing in stratified fluids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23, 455-493.

Fofonoff, N. P., 1981: The Gulf Stream system, en *Evolution of Physical Oceanography*, pp. 112-139, editado por B. A. Warren, MIT Press, Cambridge.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Garret, C., 1982: On the parameterization of diapycnal fluxes due to double-diffusive intrusions, *Journal of Physical Oceanography*, 12, 952-959.

Garret, C., P. MacCready y P. Rhines, 1993: Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating stratified flow near a sloping boundary, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25, 291-323.

Gibson, C. H., 1987: Fossil turbulence and intermittency in sampling oceanic mixing processes, *Journal of Geophysical Research*, 92, 5383-5404.

Gregg, M. C., 1987: Diapycnal mixing in the thermocline: A review, *Journal of Geophysical Research*, 92, 5249-5286.

Haynes, P. H., y M. E. McIntyre, 1987: On the evolution of vorticity and potential vorticity in the presence of diabatic heating and frictional or other forces, *Journal of Atmospheric Sciences*, 44, 828-841.

Haynes, P. H., y M. E. McIntyre, 1990: On the conservation and impermeability theorems for potential vorticity, *Journal of Atmospheric Sciences*, 47, 2021-2031.

Hempel, G., 1982: The Canary Current: Studies of an upwelling system. *Rapports et Proces-Verbeaux des Reunions, Conseille International pour l'Exploration de la Mer*, 180, 455 pp.

Hernández-Guerra, A., J. Arístegui, M. Cantón, y L. Nykjaer, 1993: Oceanographic features surrounding the Canary Islands as determined using Coastal Zone Color Scanner data, *International Journal of Remote Sensing*, 14, 1431-1437.

Holland, W. R. , T. Keffer y P. B. Rhines, 1984: Dynamics of the oceanic general circulation: the potential vorticity field, *Nature*, 308, 698-705.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Huang, R. X., 1989: The generalized eastern boundary conditions and the three-dimensional structure of the ideal fluid thermocline, *Journal of Geophysical Research*, 94, 4855-4866.

Kawase, M., y J. L. Sarmiento, 1985: Nutrients in the Atlantic thermocline, *Journal of Geophysical Research*, 90, 8961-8979.

Kranenburg, C., 1996: On gradient transport turbulence models for stably stratified shear flow, *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 23, 205-215.

Kundu, P. K., y R. C. Beardsley, 1991: Evidence of a critical Richardson number in moored measurements durnig the upwelling season off Northern California, *Journal of Geophysical Research*, 96, 4855-4868.

Leetma, A., P. NIieler y H. Stommel, 1977: Does the Sverdrup relation account for the Mid-Atlantic circulation?, *Journal of Marine Research*, 35, 1-10.

Luyten, J., y H. Stommel, 1986: Gyres driven by combined wind and buoyancy flux, *Journal of Physical Oceanography*, 16, 1551-1560.

Luyten, J., J. Pedlosky y H. Stommel, 1983: The ventilated thermocline, *Journal of Physical Oceanography*, 13, 292-309.

Mellor, G. L., y T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Review of Geophysics*, 20, 851-872.

Miles, J., 1986: Richardson's criterion for the stability of stratified shear flow, *Physics of Fluids*, 29, 3470-3471.

Mittelstaedt, E., 1991: The ocean boundary along the Northwest African coast: Circulation and oceanographic properties at the sea surface, *Progress in Oceanography*, 26, 307-356.

Munk, W. H., 1950: On the wind-driven ocean circulation, *Journal of Meteorology*,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

7, 79-93.

Mysak, L. A., 1980: Recent advances in shelf wave dynamics, *Review of Geophysics and Space Physics*, 18, 211-241.

Niiler, P. P., y E. B. Kraus, 1977: One-dimensional models of the upper ocean, en *Modelling and Prediction of the Upper Layers of the Ocean*, pp. 143-172, editado por E. B. Kraus, Pergamon Press, New York.

Nof, D., 1987: Penetrating outflows and the dam-breaking problem, *Journal of Marine Research*, 45, 557-577.

Nof, D., y N. Paldor, 1992: Are there oceanographic explanations for the Israelites' crossing of the Red Sea?, *Bulletin of the American Meteorological Society*, 73, 305-314.

Pedlosky, J, 1983: Eastern boundary ventilation and the structure of the thermocline, *Journal of Physical Oceanography*, 13, 2038-2044.

Pelegrí, J. L., 1988: Tidal fronts in estuaries, *Estuarine, Coastal and Shelf Sciences*, 27, 45-60.

Pelegrí, J. L., y G. T. Csanady, 1991: Nutrient transport and mixing in the Gulf Stream, *Journal of Geophysical Research*, 96, 2577-2593.

Pelegrí, J. L., y J. G. Richman, 1993: On the role of shear-mixing during transient costal upwelling, *Continental Shelf Research*, 13, 1363-1400.

Pelegrí, J. L., y J. G. Richman, 1994: Correction to "On the role of shear-mixing during transient costal upwelling", *Continental Shelf Research*, 14, 1645-1646.

Pelegrí, J. L., y G. T. Csanady, 1994: Diapycnal mixing in western boundary currents, *Journal of Geophysical Research*, 99, 18275-18304.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Pelegrí, J. L., G. T. Csanady y A. Martins, 1996: The North Atlantic nutrient stream, *Journal of Oceanography*, 52.

Pelegrí, J. L., P. Sangrà y A. Hernández-Guerra, 1996: Heat gain in the eastern North Atlantic subtropical gyre, en *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, editado por J. I. Díaz, Springer-Verlag, Berlin.

Peters, H., M. C. Gregg y J. Toole, 1988: On the parameterization of equatorial turbulence, *Journal of Geophysical Research*, 93, 1199-1218.

Phillips, O. M., 1972: Turbulence in a strongly stratified fluid - is it unstable?, *Deep Sea Research*, 19, 79-81.

Pollard, R. T., P. B. Rhines y R. O. Thompson, 1973: The deepening of the wind-mixed layer, *Geophysical Fluid Dynamics*, 3, 381-404.

Posmentier, E. S., 1977: The generation of salinity finestructure by vertical diffusion, *Journal of Physical Oceanography*, 7, 292-300.

Rhines, P. B., y W. Y. Young, 1982: A theory of wind-driven circulation. I. Mid-ocean gyres, *Journal of Marine Research*, 40, 559-596.

Ruddick, B. R., T. J. McDougall y J. S. Turner, 1989: The formation of layers in a uniformly stirred density gradient, *Deep Sea Research*, 36, 597-609.

Sarmiento, J. L., C. G. Rooth y W. Roether, 1982: The North Atlantic tritium distribution in 1972, *Journal of Geophysical Research*, 87, 8047-8056.

Shaw, P. T., y G. T. Csanady, 1983: Self-advection of density perturbations continental shelf, *Journal of Physical Oceanography*, 17, 821-827.

Stern, M. E., J. A. Whitehead y B. L. Hua, 1982: The intrusion of a density current along the coast of a rotating fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 99, 687-704.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

Stommel, H., 1948: The westward intensification of wind-driven ocean currents, *EOS Transactions of the American Geophysical Union*, 99, 202-206.

Stommel, H., 1979: Determination of water mass properties of water pumped down from the Ekman layer to the geostrophic flow below, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 76, 3051-3055.

Stommel, H., y F. Schott, 1977: The beta spiral and the determination of the absolute velocity field from hydrographic station data, *Deep-Sea Research*, 24, 325-329.

Stommel, H., P. Niiler y D. Anati, 1978: Dynamic topography and recirculation of the North Atlantic, *Journal of Marine Research*, 36, 449-468.

Stramma, L., 1984: Geostrophic transport in the Warm Water Sphere of the eastern subtropical North Atlantic, *Journal of Marine Research*, 42, 537-558.

Stramma, L., y G. Siedler, 1988: Seasonal changes in the North Atlantic subtropical gyre, *Journal of Geophysical Research*, 93, 8111-8118.

Sverdrup, H., 1947: Wind-driven currents in a baroclinic ocean, with application to the equatorial currents of the eastern Pacific, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 33, 318-326.

Thorpe, S. A., 1971: Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 46, 299-319.

Thorpe, S. A., 1987a: Transitional phenomena and the development of turbulence in stratified fluids: A review, *Journal of Geophysical Research*, 92, 5231-5248.

Thorpe, S. A., 1987b: Current and temperature variability on the continental slope, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 323,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008

471-517.

Turner, J. S., 1986: Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 173, 431-471.

Turner, J. S., y E. B. Kraus, 1967: A one-dimensional model of the seasonal thermocline. I. A laboratory experiment and its interpretation, *Tellus*, 19, 88-97.

Van Camp, L., L. Nykjaer, E. Mittelstaedt y P. Schlittenhgardt, 1991: Upwelling and boundary circulation off Northwest Africa as depicted by infrared and visible satellite observations, *Progress in Oceanography*, 26, 357-402.

Watts, D. R., 1983: Gulf Stream variability, en *Eddies in Marine Science*, editado por A. R. Robinson, pp. 114-144, Springer-Verlag, Berlin.

Zenk, W., B. Klein y M. Schröder, 1991: Cape Verde frontal zone, *Deep-Sea Research*, 38, Suppl. 1, S505-S530.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca universitaria, 2008