

# UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO A LA COGNICIÓN CUÁNTICA: UN MODELO MATEMÁTICO PARA ENTENDER CÓMO APRENDEMOS A TOMAR DECISIONES

Dr. Santiago Ramón Guerra Guillén

(Miembro colaborador del IDETIC, división de termodinámica)

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Departamento de Didácticas Específicas

## Resumen:

El presente texto, pretende ser un acercamiento al formalismo usado en la emergente área multidisciplinar conocida como Cognición Cuántica [15, 16, 17, 21], con implicaciones relevantes en las Ciencias Sociales. Para alcanzar nuestro objetivo tomaremos como documento fundamental los trabajos del doctor Andrei Khrennikov [2, 3]. Comenzaremos en la **Sección 1** con una aproximación muy básica al formalismo cuántico, pasando posteriormente en la **Sección 2** a mostrar la violación del Teorema de Bayes, mientras en la **Sección 3** se desarrolla un ejemplo simple de la Gestalt sobre las imágenes ambiguas, continuando en la **Sección 4** con las posibles aplicaciones de futuro y sus límites, finalizando en la **Sección 5** con unas conclusiones generales sobre el tema.

**Palabras clave:** experimento de la doble rendija, cognición cuántica y probabilidad negativa.

## Abstract

The present text, intends to be an approach to the formalism used in the emerging multidisciplinary field known as Quantum Cognition [15, 16, 17, 21], with relevant implications in the Social Sciences. To achieve our objective we will take as a fundamental document the Dr. Andrei Khrennikov's papers [2, 3]. We will begin in **Section 1** with a very basic approach to quantum formalism, going on later in **Section 2** to show the violation of the Bayes theorem, while in **Section 3** a Gestalt simple example is developed on ambiguous images, continuing in **Section 4** with the possible future applications and their limits, we will finish in **Section 5** with some general conclusions about the subject.

**Keywords:** double slit experiment, quantum cognition and negative probability.

## 1. EL CAMINO RECORRIDO

Una de las grandes ventajas de la Ciencia básica es que no es el consenso ni la ideología, sino la experiencia la que marca el camino, esto nos ha mostrado que nuestra forma de entender las cosas puede dar un giro inesperado en cualquier momento. Sin ningún lugar a dudas, si hay un ejemplo emblemático de este tipo de hechos es el experimento de la doble rendija [1], que usaremos como excusa para mostrar los elementos más notables y a su vez paradójicos de la formulación cuántica, que serán usados posteriormente en el texto.

Sea una fuente que lanza un haz de partícula sobre un par de rendijas paralelas situadas en una pared, que cumplen la condición necesaria de que la distancia entre rendijas es mucho mayor que el ancho de las rendijas. Tras atravesar las rendijas las partículas chocan con una pantalla, donde son registradas por detectores, cuando solo está abierta una de las rendijas se pueden generar curvas  $P_i$  para cada caso y un único máximo frente a la rendija correspondiente. Esto parece lógico pues las partículas han tenido que pasar por una única rendija, además se puede ver el ensanchamiento de la curva, tanto mayor cuanto más estrecha la rendija, como efecto de los bordes. Desde el punto de vista de la mentalidad clásica cabría esperar que cuando abrimos las dos rendijas no deben afectarse la una a la otra y la curva de distribución de los puntos debe ser la suma de ambas. Sin embargo lo que se observa es una figura de interferencia con varios máximos y mínimos (ver figura 1), como si fueran funciones de onda, para un instante  $t$  las amplitudes de las ondas, en un punto  $(0, x)$ , vienen dadas por, la siguiente expresión, donde la  $r_i$  representa la distancia de cada rendija a la pantalla:

$$\psi_i^{(+)}(0, x) = \frac{A}{\sqrt{r_i}} \exp(ikr_i), \quad (1)$$

Por otro lado, las intensidades de dichas ondas en dichos puntos, en cada caso, se obtienen multiplicando cada función por su conjugada compleja

$$I_i(0, x) = |\psi_i^{(+)}(0, x)|^2 = \frac{|A|^2}{r_i} = \frac{|A|^2}{\sqrt{d^2 + (x \mp a/2)^2}}, \quad (2)$$

ambas curvas presentan un máximo central para los dos valores posibles de  $x = \pm a/2$  como ya comentamos anteriormente. Por otro lado, cuando ambas rendijas están abiertas la amplitud de la onda resultante debe ser la suma de ondas individuales

$$\psi_{1,2}^{(+)}(0, x) = \sum_{i=1}^2 \frac{A}{\sqrt{r_i}} \exp(ikr_i), \quad (3)$$

y la intensidad correspondiente

$$I_{1,2}(0, x) = \left| \sum_{i=1}^2 \frac{A}{\sqrt{r_i}} \exp(ikr_i) \right|^2 + \frac{2|A|^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos[k(r_1 - r_2)]. \quad (4)$$

Como la distancia a la pantalla es mucho mayor que el ancho de las rendijas  $d \gg a$  podemos tomar  $r_2 - r_1$  aproximadamente igual a  $ya/d$ . Además  $a/d$  sería el ángulo  $\theta$  formado por las rendijas desde el centro de la pantalla, resultando finalmente

$$I_{1,2}(0, x) = \sum_{i=1}^2 I_i(0, y) + 2 \sqrt{\prod_{k=1}^2 I_k(0, y)} \cos[k(r_1 - r_2)]. \quad (5)$$

Vemos superpuesta a la suma de intensidades un término oscilante, que da máximos y mínimos en la curva, las distancia entre dos máximos  $\Delta y$ , viene dado por

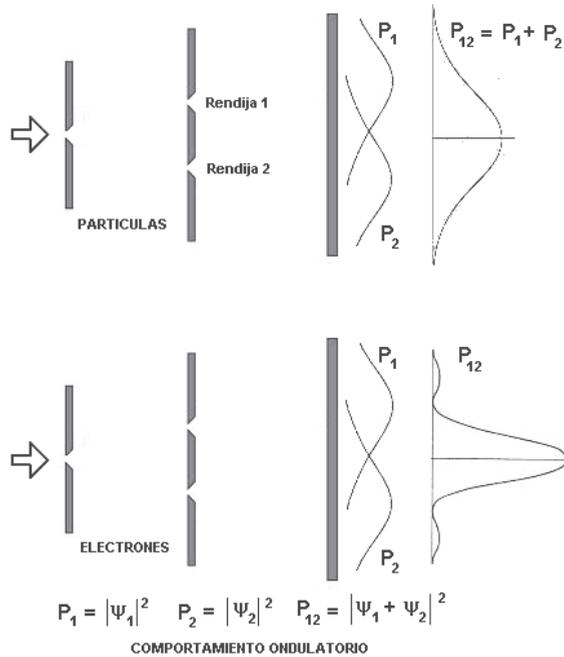
$$k\theta \Delta x = 2\pi \rightarrow \Delta x = 2\pi/k\theta = hd/pa$$

El cálculo anterior, basado en el formalismo de las ondas, ha sido aplicado en un contexto puramente cuántico para descubrir comportamientos no clásicos. La principal diferencia es que en el dominio clásico hablamos siempre de distribuciones de intensidad, mientras que en el dominio cuántico se trata de distribuciones de probabilidad. Pero es normalmente asumido en óptica que la intensidad luminosa es proporcional a la probabilidad de presencia de fotones, o electrones. Por ello, puede ser de utilidad en la investigación de los fundamentos de la teoría cuántica y de la frontera clásico-cuántica.

Hasta ahora lo único que hemos hecho es usar funciones de ondas para explicar de forma consistente los resultados experimentales. Pero qué significan en su amplio sentido físico las funciones de onda, ¿es lo mismo una onda que una partícula?, es evidente que no, las partículas son puntuales las ondas se extienden en el espacio.

Podríamos argumentar también que la onda representa un conjunto de partículas que actúan colectiva y simultáneamente, pero esto se descarta cuando podemos estar seguros de que solo hay una partícula en el aire. Mediante experimentos más refinados, del mismo tipo, con electrones se deduce lo siguiente:

Figura 1. Experimento de la doble rendija



Fuente: Escudero (2018).

- 1) Los electrones se emiten de uno en uno y se comportan como entes puntuales en una pantalla, es decir, se detectan como partículas.
- 2) No es posible predecir el punto de impacto individual.
- 3) A pesar de todo cuando el número de electrones emitidos es muy alto el cociente entre el número de electrones  $N(x)$  que inciden en un punto determinado y el número total de electrones emitidos  $N_T$  es constante y se expresa como:

$$\lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{N_T} = \text{Pr ob}(x), \quad (7)$$

que es la definición frecuencial de probabilidad, este límite solo existe frente a un gran número de sucesos, pero la probabilidad se asigna a cada caso individual, algo característico de las formulaciones probabilísticas. Es decir hay una probabilidad definida de detectar un electrón en un punto.

- 4) El proceso global muestra una figura de interferencia a pesar de ser resultado de sucesos independientes, lo que quiere decir que hay coherencia entre las partículas preparadas del mismo modo (misma diferencia de fase y que puede dar lugar a la auto interferencia de a partícula concreta).

Todo lo anterior nos sugiere que a cada estado preparado se le asocia una función  $\psi(\vec{r})$ , en general compleja y la probabilidad de encontrar la partícula en un volumen infinitesimal es  $d^3r$  en torno a un punto  $\vec{r}$  es

$$P(\vec{r})d^3r = |\psi(\vec{r})|^2 d^3r. \quad (8)$$

Los hechos fundamentales que se desprenden de este ejemplo son:

### 1.1. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

El uso de la probabilidad en la Mecánica Cuántica no es un hecho diferenciador de la propia teoría, lo que si lo es el hecho de que en este experimento la suma de las probabilidades no da la probabilidad de detectar partículas en un punto cuando ambas rendijas están abiertas, como calcularíamos con la probabilidad clásica. En la probabilidad cuántica lo que se suma son las amplitudes de onda o amplitudes de probabilidad, en vez de probabilidades, pues estas so reales y las amplitudes pueden ser complejas. Remarquemos este punto, pues la suma de dos funciones de onda admisibles es también solución admisible, en lo que se llama *principio de superposición*, de tal forma que verifican ecuaciones lineales, esto nos indica que la Cuántica no es estocástica.

### 1.2. PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Otro hecho esencial es que cualquiera de las funciones de onda por separado corresponde al estado de una partícula con un momento lineal  $\mathbf{p} = \mathbf{k}\hbar = m\mathbf{v}$ , bien definido. Por tanto, si aplicamos la superposición el estado superpuesto de los dos momentos corresponde a un estado físico no definido del momento lineal, cualquier superposición es un posible estado físico y cualquier función admite un desarrollo de este tipo, superposición de ondas planas. Este es un caso especial de la transformada de Fourier, las propiedades de esta nos permite relacionar la función  $\psi^{(+)}(x)$  y  $a(p_x)$ . Así cuanto más localizada esta  $\psi^{(+)}(x)$  menos lo está  $a(p_x)$  y viceversa

$$\psi^{(+)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(p_x) \exp(ipx/\hbar) dp, \quad (9)$$

$$a(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(+)}(x) \exp(ipx/\hbar) dx, \quad (10)$$

que es el principio de indeterminación posición-momento que muestra la imposibilidad de medir simultáneamente con una precisión infinita las coordenadas de posición y de momento correspondientes a la misma dirección, en esta caso dirección  $x$ .

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (11)$$

Esto no es debido a una falta de información, sino a una imposibilidad intrínseca debida a las propias leyes de la cuántica, Principio de Complementariedad, con lo que podemos escribir de forma general:

$$\Delta_\psi \hat{A} \Delta_\psi \hat{B} \geq \frac{|\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|}{2}, \quad (12)$$

donde el primer término es la indeterminación de los observables sobre el estado  $\psi$ . Esta desigualdad explica el fenómeno cuántico de la imposibilidad de medir dos observables complementarios simultáneamente con total precisión, como sucede en el experimento de la doble rendija, o interferómetro de Young (sin ningún lugar a dudas, el ejemplo de complementariedad más célebre y didáctico es el de la dualidad onda-corpúsculo).

## 2. LA DOBLE RENDIJA, MÁS ALLÁ DE LA BAYESIANA

La interpretación probabilística de Max Born de la función de onda ya fue propuesta en 1926, antes incluso de realizar los primeros experimentos de difracción de partículas, pero nada se dice sobre el comportamiento de las partículas antes de ser detectadas, es una interpretación, llamada mínima.

Volviendo de nuevo al experimento de doble rendija si consideremos un par de variables aleatorias  $a$  y  $b$ , como variables representativas de las rendijas, es decir si  $a = 0$  cuando el electrón pasa por la rendija superior y si  $a = 1$  el electrón pasa por la rendija inferior, mientras que  $b$  representa la posición de una placa fotosensible situada en la pared, de manera que la variable  $b$  tiene un rango continuo de valores  $x$  a lo largo de la placa fotosensible.

Considerando ahora  $|\psi_i(x)|^2$  como  $p(b=x | a=i)$ , entonces la ecuación (5) se representa como,

$$p(b=x) = p(a=0) p(b=x|a=0) + p(a=1) p(b=x|a=1) + \delta(x), \quad (13)$$

donde el “término de interferencia”  $\delta = |\psi_0| |\psi_1| \cos\theta$ , tiene la forma:

$$\delta(x) = 2\sqrt{p(a=0)p(b=x|a=0)p(a=1)p(b=x|a=1)} \cos\theta. \quad (14)$$

Aquí los valores de las probabilidades  $p(a=0)$  y  $p(a=1)$  son iguales a  $1/2$ , considerando la simetría del sistema. Para una situación experimental general,  $p(a=0)$  y  $p(a=1)$  se pueden tomar como valores arbitrarios no negativos que satisfacen  $p(a=0) + p(a=1) = 1$ . En la forma anterior, la ley de probabilidad clásica total,

$$p(b=x) = \sum_i p(a=i) p(b=x|a=i), \quad (15)$$

se viola, y el término de interferencia cuantifica la violación. El término de interferencia adicional aparece no solo en el experimento de dos rendijas, sino en cualquier experimento con observables cuánticos incompatibles arbitrarios representados por operadores hermitianos no conmutables  $A, B: [A, B] \neq 0$ .

Considere ahora dos variables aleatorias en cualquier campo de la ciencia, desde la física, la ciencia cognitiva, la biología, la sociología. También violan la probabilidad total clásica.

$$p(b=x) \neq \sum_i p(a=i) p(b=x|a=i). \quad (16)$$

Aquí, aparece una especie de término de interferencia (probabilístico):

$$\delta(x) = p(b=x) - \sum_i p(a=i) p(b=x|a=i). \quad (17)$$

El punto esencial es que no podemos usar el modelo de probabilidad de Kolmogorov. El análisis previo ha demostrado que la aparición del término de interferencia coincide con las predicciones de la teoría de la probabilidad cuántica.

Observamos que la ecuación (17) se puede reescribir en una forma similar a la fórmula para la interferencia cuántica y el término de interferencia siempre se puede representar de manera similar a la Ecuación (14):

$$\delta(x) = 2\lambda(x) \sqrt{p(a=0)p(b=x|a=0)p(a=1)p(b=x|a=1)}. \quad (18)$$

La única diferencia es que para datos arbitrarios no podemos garantizar que  $|\lambda(x)| \leq 1$ . Por lo tanto, para datos estadísticos arbitrarios, tenemos la probabilidad total con el término de interferencia:

$$p(b=x) = \sum_i p(a=i) p(b=x|a=i) + 2\lambda(x) \sqrt{p(a=0)p(b=x|a=0)p(a=1)p(b=x|a=1)}. \quad (19)$$

Un resultado sorprendente se obtiene al poner un detector en cada rendija, las franjas desaparecen, debido al carácter indeterminista de la Mecánica Cuántica y al colapso cuántico de la superposición, es como si el mero hecho de observar modificase el resultado del experimento. Más aún, la Mecánica Cuántica es contextual (depende de cómo se realiza la medida) un sistema cuántico puede presentar propiedades que dependen del orden en que se midan. Eso implica que la teoría no es realista, no existen las variables, ni su valor antes de medir.

Según la interpretación clásica de Kolmogorov, la probabilidad condicionada es la probabilidad de que ocurra un evento B con la condición de que haya ocurrido un evento A. Si se observa el evento A, entonces  $p_A(B) = p(B|A) = p(A \cap B) / p(A)$ , por definición. Esta fórmula es una de las muestras de la estructura booleana del modelo; ni siquiera se puede asignar probabilidad condicional a un evento sin utilizar la operación booleana de intersección. El punto crucial es que se supone que quien toma las decisiones es racional, pero eso necesariamente no es así en general.

Un ejemplo de lo que podemos llamar racionalidad bayesiana, se puede ver considerando el Principio de seguridad de Savage [18], que dice lo siguiente, si se prefiere una opción  $A_1$  a otra  $A_2$  si ocurre un posible evento futuro B, y prefiere la opción  $A_1$  aun si el evento B futuro no ocurre, entonces debería preferir la opción  $A_1$  a pesar de no tener conocimiento de si el evento B ocurrirá o no. Este principio es un efecto de la disyunción y una simple consecuencia de probabilidad total. Por tanto, este principio, se basa matemáticamente en la probabilidad clásica (y la lógica booleana). En particular, la fórmula de Bayes para probabilidades condicionales juega un papel crucial. Como descubrió el profesor de psicología cognitiva Jerome Busemeyer, las estadísticas que muestran el efecto de disyunción pueden tratarse como no clásicas, violando la suma total clásica [21, 22], y por lo tanto estos datos deben ser descritos por algún modelo de probabilidad no kolmogoroviano, por ejemplo, probabilidad cuántica.

En resumen la teoría cuántica define un estado condicional,  $\psi_A$ , como sigue: Si se observa el evento A, entonces  $\psi_A = P_A \psi / \sqrt{p(A)}$ , de donde  $P_A$  es el

proyector sobre el estado  $A$  de modo que  $p(B | A) = |P_B P_A \Psi|^2 / p(A)$ . La Teoría clásica, si  $A, B$  son dos eventos en  $\Omega$ , entonces siempre podemos definir el evento de intersección  $A \cap B = B \cap A$ , y  $p(A \cap B) = p(A) p(B | A) = p(B) p(A | B) = p(B \cap A)$ , por lo que el orden de los eventos no importa. Sin embargo de acuerdo con la teoría cuántica, si  $A, B$  son dos eventos en  $V$ , entonces podemos definir la secuencia de eventos  $A$  y luego  $B$ , denotados  $(A, B)$ ; y  $p(A, B) = p(A) p(B | A) = \|P_B P_A \Psi\|^2$  y el orden de los eventos puede importar. El evento de intersección,  $A \cap B = B \cap A$ , solo existe en la teoría cuántica si  $P_B P_A = P_A P_B$ , es decir, los proyectores conmutan, y en tales casos, no hay ningún efecto de orden. La conmutatividad es un punto clave donde las dos teorías divergen. La teoría clásica de la probabilidad puede extenderse dinámicamente a secuencias de eventos en el tiempo mediante un proceso de Markov que evoluciona de acuerdo con un operador de transición derivado de la ecuación directa de Kolmogorov. La teoría cuántica puede extenderse a secuencias de eventos a lo largo del tiempo mediante un proceso cuántico que evoluciona según un operador unitario derivado de la ecuación de Schrödinger, que es lineal y por tanto no da una evolución estocástica.

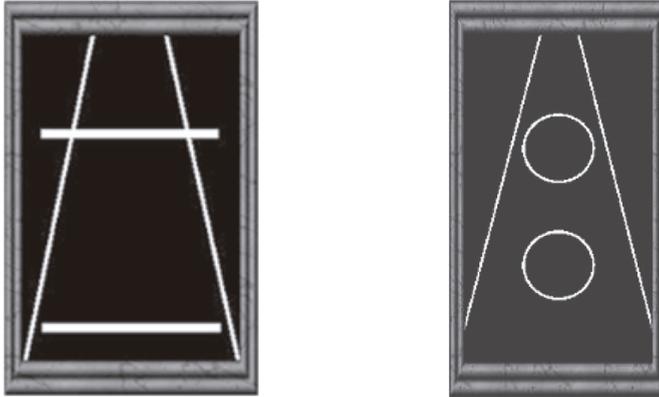
A pesar de todos estos éxitos aún no entendemos un concepto, esencial en la teoría, como es el proceso físico de la medida, y sobre todo el papel del observador, elemento consciente, o sujeto cognitivo, en ese proceso.

### **3. EL SER Y NO SER, UN HECHO CUÁNTICO: DE LA DOBLE RENDIJA A LA COGNICIÓN CUÁNTICA**

En este sub-apartado veremos una aplicación de todo lo expuesto en el estudio de imágenes ambiguas típicas de la Psicología Gestalt, realizada por el profesor Andrei Khrennikov [15, 16]. Todos los experimentos fueron asistidos por computadora y la prueba a se basa en la siguiente tarea cognitiva: mire la figura de la izquierda y responda a la pregunta (a). La prueba b se basa en la figura de la derecha: mire esta figura y responda a la pregunta (b):

Figura 2: figuras originales del experimento hecho por Andrei Khrennikov

- (a) ¿Son estos segmentos iguales?
- (b) ¿Son estos círculos iguales?



Fuente: Khrennikov (2015).

Las razones para utilizar estas pruebas se basaron en el reconocimiento fundamental de la importancia del contexto, como en la cuántica, en el mecanismo de percepción. Finalmente, se mostró que en las pruebas de ambigüedad, la figura y el fondo pueden fluctuar durante la percepción. Además se calcularon las siguientes probabilidades:

$$p^b(+), p^b(-), p^a(+), p^a(-), \quad (20)$$

$$p(b = + | a = +), p(b = - | a = +), p(b = + | a = -), p(\text{segundo} = - | a = -). \quad (21)$$

Aquí, el papel del contexto, digamos  $C$ , lo juega el procedimiento de selección de una muestra para el experimento. Todas las probabilidades dependen de  $C$ .

Se realizó un análisis estadístico de los resultados para determinar si los coeficientes de interferencia  $\lambda_\beta$  son distintos de cero o cero en las pruebas  $b$ ,  $a$  y  $b | a$ . El primer experimento dio los siguientes resultados

$$\text{Prueba } b: p^b(+)=0,6923; p^b(-)=0,3077,$$

$$\text{Prueba } a: p^a(+)=0,9259; p^a(-)=0,0741,$$

$$\text{Prueba } b | a: p(b = + | a = +)=0,68; p(b = - | a = +)=0,32, p(b = + | a = -)=0,5; p(b = - | a = -)=0,5. \quad (22)$$

El cálculo de la probabilidad condicional dio el siguiente resultado con respecto a  $p^b (+)$ :

$$p^a (+) p (\text{segundo} = + | a = +) + p^a (-) p (\text{segundo} = + | a = -) = 0.6666. \quad (23)$$

La segunda experimentación dio los siguientes resultados:

$$\text{Prueba b: } p^b (+) = 0.5714; p^b (-) = 0.4286,$$

$$\text{Prueba a: } p^a (+) = 1.0000; p^a (-) = 0.0000,$$

$$\text{Prueba b | a: } p (b = + | a = +) = 0.7000; p (b = - | a = +) = 0.3000, p (b = + | a = -) = 1.0000; p (b = - | a = -) = 0.0000. \quad (24)$$

El cálculo de la probabilidad condicional dio el siguiente resultado con respecto a  $p^b (+)$ :

$$p^a (+) p (b = + | a = +) + p^a (-) p (b = + | a = -) = 0.7. \quad (25)$$

Finalmente, la tercera experimentación dio los siguientes resultados:

$$\text{Prueba b: } p^b (+) = 0.4545; p^b (-) = 0.5455,$$

$$\text{Prueba a: } p^a (+) = 0.7000; p^a (-) = 0.3000,$$

$$\text{Prueba b | a: } p (b = + | a = +) = 0.4286; p (b = - | a = +) = 0.5714; p (b = + | a = -) = 1.0000, p (b = - | a = -) = 0.0000. \quad (26)$$

$$\text{Prueba b: } p^b (+) = 0.4545; p^b (-) = 0.5455,$$

$$\text{Prueba a: } p^a (+) = 0.7000; p^a (-) = 0.3000,$$

$$\text{Prueba b | a: } p (b = + | a = +) = 0.4286; p (b = - | a = +) = 0.5714; p (b = + | a = -) = 1.0000, p (b = - | a = -) = 0.0000. \quad (27)$$

El cálculo de la probabilidad condicional con respecto a  $p^b (+)$  dio el siguiente resultado:

$$p^a (+) p (b = + | a = +) + p^a (-) p (b = + | a = -) = 0.6000. \quad (28)$$

El valor medio  $\pm$  de la Desviación Estándar de  $p^b (+)$  resultó  $p^b (+) = 0.5727 \pm 0.1189$  en la prueba b, calculada usando (22), (24) y (27), mientras que en cambio resultó un valor medio de  $0.6556 \pm 0.0509$  para  $p^b (+)$  cuando se calcula en la Prueba b | a, utilizando las ecuaciones (23), (25) y (28). Los dos valores medios calculados son diferentes y, por lo tanto, dan evidencia de un comportamiento cuántico de los estados mentales cognitivos tal como se midieron probando observables mentales mediante las Pruebas b, a y b | a. La prueba  $t$  de Student mostró que la probabilidad de que las diferencias obtenidas entre los dos valores estimados de  $p^b (+)$  por la prueba b y por la Prueba b | a

sean accidentales, no excede de 0.30. Así, con una probabilidad de 0,70 los coeficientes de suplementarios son distintos de cero y, por tanto, los estudiantes se comportan (piensan) de forma cuántica (con respecto a los observables basados en las cifras ambiguas).

Como paso final, se calculó el  $\cos\theta_\beta$  sobre la base del coeficiente de interferencia  $\lambda_\beta$  dado por la Ecuación (18) . En el experimento obtuvieron

$$\cos\theta_+ = -0,2285, \theta_+ = 1,8013 \quad \cos\theta_+ = -0,2285, \theta_+ = 1,8013, \quad (29)$$

$$\cos\theta_- = 0.0438, \theta_- = 1.5270, \cos\theta_- = 0.0438, \theta_- = 1.5270, \quad (30)$$

que son resultados de fase bastante satisfactorios que indican un comportamiento de tipo cuántico para los estados mentales investigados.

Utilizando los datos obtenidos, pudieron describir una función de onda mental  $\psi = \psi_C$  del estado mental C del grupo de estudiantes que participaron en el experimento, correspondiente a un contexto mental denotado por el mismo símbolo C.

$$\psi(a) = \sqrt{p(a=+)p(b=\hat{a}|a=+)} + e^{i\theta} (a) \sqrt{p(a=-)p(b=\hat{a}|a=-)}, \quad (31)$$

El  $\psi$  es una función del rango de valores  $\{+, -\}$  del observable mental b referida al campo de números complejos. Dado que b puede asumir solo dos valores, dicha función puede representarse mediante vectores bidimensionales con coordenadas complejas. Los datos experimentales dan

$$\psi(+) = \sqrt{0.8753 \times 0.6029} + e^{i\theta(\beta)} \sqrt{0.1247 \times 0.5} \approx 0.7193 + i0.2431, \quad (32)$$

y

$$\psi(-) = \sqrt{0.8753 \times 0.39719} + e^{i\theta(\beta)} \sqrt{0.1247 \times 0.5} \approx 0.5999 + i0.2494. \quad (33)$$

#### 4. LOS OBSTÁCULOS EN EL CAMINO

A pesar de los éxitos de esta nueva rama de la Ciencia Cognitiva, hay ciertos aspectos que es necesario clarificar. Para mostrar uno de estos puntos se puede hacer una modificación al experimento de doble rendija de Young como se indica en [18].

Para conocer la información sobre la intensidad en las rendijas del experimento de Young, contenida en la polarización, se colocó un polarizador en la pantalla de observación y midieron la distribución de intensidad interferométrica sobre la pantalla para dos orientaciones ortogonales del polarizador. Estas observaciones dieron información imperfecta sobre intensidad y fase sobre las rendijas. Sin embargo, al conocer todos los detalles del proceso de medida, se puede obtener información exacta mediante un adecuado proceso de inversión. No entraremos en los cálculos, pero la intensidad resultante es:

$$I(r, \phi) = I_R(r) + \mu \sqrt{I_R(1)} \sqrt{I_R(-1)} \cos(\delta + \phi), \quad (34)$$

Donde el parámetro  $\mu$  es una medida de coherencia, un coeficiente de correlación lineal, llamado grado de coherencia, que viene dado por la siguiente expresión:

$$\mu = \frac{\langle E_1 E_2^* \rangle}{\sqrt{\langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle}}, \quad (35)$$

Esta cantidad está acotada  $0 \leq \mu \leq 1$  en función de la relación que exista entre los campos.

La expresión (34) es la distribución de intensidad conjunta y exacta. Recoge la información de la cantidad de luz que sale por la rendija  $r$  con un desfase. En óptica clásica un resultado imposible vendría dado por casos en los que  $I(r; \phi) < 0$ . Si, por ejemplo, elegimos  $\phi = \delta + \pi$  tenemos que  $\cos(\delta + \phi) = -1$  y entonces  $I(1; \phi) < 0$  o  $I(-1; \phi) < 0$  siempre que  $|\mu|^2 > \min \{ I_R(1) = I_R(-1); I_R(-1) = I_R(1) \}$ . Es interesante observar que hay situaciones en las que la distribución no es negativa, y que esto ocurre sobre todo cuanto menor es la coherencia.

De lo expuesto se desprende que las variables complementarias son la intensidad sobre las dos rendijas  $I(r = 1; -1)$  (siendo la variable  $r$  la que etiqueta a las rendijas) y la intensidad en el plano donde se forma la interferencia  $I(\phi)$  (siendo  $\phi$  la diferencia de fase). En el marco de la óptica clásica la complementariedad entre dos variables se expresa en la inexistencia de una distribución conjunta  $I(r; \phi) < 0$ .

Podríamos decir que la negatividad solo ocurre para estadísticas observadas cuyas variables estén entrelazadas, superposición no separable. Por ello, relacionamos la falta de separabilidad con el carácter entrelazado clásico entre la posición y la polarización.

Este tipo de protocolos que buscan una distribución conjunta de variables complementarias con marginales exactas conducen en general a distribuciones conocidas como funciones de Wigner:

$$W(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+y)\psi(x-y)e^{\frac{2ipy}{\hbar}} dy. \quad (36)$$

Sin embargo, la función de distribución de Wigner es una herramienta muy utilizada y que proporciona correcciones cuánticas a la mecánica estadística clásica. En este sentido, es de destacar la aplicación de la función, en la imagen de Heisenberg, a los experimentos de comunicación cuántica en procesos de PDC, con fotones entrelazados, vinculando dicho entrelazamiento al campo de vacío [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Por su naturaleza, en física cuántica la distribución de Wigner puede tomar valores negativos para estados no clásicos y es un claro indicador de la interferencia en mecánica cuántica. Además en contraste con el estado de vacío, cuya función de Wigner es positiva, en el caso del estado correspondiente a un fotón, representado en Óptica Cuántica, la correspondiente distribución de Wigner no es una función definida positiva, lo que guarda una estrecha relación con el carácter no-clásico de este estado, ¿podemos hablar de auto interferencia, quizás?, o imposibilidad del auto-colapso, como algunos usan para explicar de autoconciencia o autocognición. Estos resultados no tienen una interpretación en el ámbito de la Cognición Cuántica, y por supuesto no se presupone un entrelazamiento cuántico entre entidades cognitivas basadas en el vacío cuántico. Otro problema es la falta de medios para determinar el parámetro de fase de los modelos cuánticos antes del experimento, lo que los priva de poder predictivo y de la mayor parte de su impacto práctico potencial. Sin embargo, el grupo de Ilya Surov et al. [20] en una publicación reciente han presentado una hipótesis respaldada empíricamente que puede ayudar a resolver el problema de la fase inicial. De acuerdo con hipótesis, la fase cuántica entre alternativas no resueltas en una familia de situaciones similares de toma de decisiones es casi constante en los antecedentes nacionales, lingüísticos y culturales de los sujetos.

De confirmarse, el fenómeno de estabilidad de fase cuántica complementa el modelo cuántico de toma de decisiones dotándolo de poder predictivo. Esta posibilidad se demuestra en el experimento de prueba donde el comportamiento irracional dentro de un grupo social previamente inexplorado podría predecirse probabilísticamente con alta precisión.

## 5. CONCLUSIONES

El modelado matemático del experimento del doctor Andrei Kherennikov es un buen ejemplo de aplicación de las similitudes de comportamiento entre entidades cognitivas y la forma de análisis cuántico, lo que permitió hacer un uso directo de un formalismo abstracto de tipo cuántico, a un proceso cognitivo simple, consiguiendo explicar la dinámica cuántica de las entidades cognitivas. Nuestro objetivo con esta exposición era acercar esta novedosa forma de análisis a los investigadores de las Ciencias Sociales, y en especial a los educadores y pedagogos, que podrían usar esta herramienta unida a otras de tipo computacional aplicadas en la neurociencia, como el diagnóstico por imagen [14], para fijar una metodología de análisis de los aprendizajes, constructivistas, cuantizando en forma más efectiva y real cómo se consolida el aprendizaje significativo en base a los conocimientos previos y al contexto, físico y emocional. Todo esto más allá de ideas confusas y especulativas en las que se confunden lo que es la cognición cuántica y lo que se especula sobre ella, en ningún momento se trata de explicar los procesos fisiológicos cerebrales con funcionamientos cuánticos, por ahora no hay datos que puedan demostrar que el cerebro funcione como un computador cuántico, en este sentido tampoco podemos decir que vivamos en una escala física en la que las leyes cuánticas sean determinantes en nuestra vida diaria. Lo que si nos permite decir este ejemplo es que la matemática descubierta tras la mecánica cuántica puede ser útil y además permite un acercamiento entre disciplinas, de la que estamos necesitados de manera que se generen nuevas ideas y perspectivas que enriquezcan nuestro conocimiento de forma general y multidisciplinar.

Para finalizar, es esencial comprender que la Mecánica Cuántica fue concebida como la Física Moderna, en el amplio sentido de la palabra, y no solo como una mera descripción del microcosmos. Además, soportada por una herramienta matemática que para algunos físicos no está completa, en cuanto a su interpretación, pues no define el concepto de realidad independiente del observador, debido a la forma en la que se define el estado cuántico. Por otro lado, la definición de medida plantea grandes paradojas [1], dentro de la propia teoría. Es evidente que de alguna manera esto afectará a su aplicación a la Cognición Cuántica, en su futuro más próximo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alvarellos, J. E.; García, P. y García, J. J. (2000). *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica*. Editorial: UNED- ISBN: 978-84-362-5456-3.

- [2] Blutner, R. and Grabenb, P. B. (2014). Descriptive and Foundational Aspects of Quantum Cognition. - *arXiv preprint arXiv*: 1410.3961.
- [3] Casado, A., Guerra S., Plácido, J. (2008). Wigner representation for experiments on quantum cryptography using two-photon polarization entanglement produced in parametric down-conversion. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 41:045501.
- [4] Casado, A., Guerra, S. y Plácido, J. (2010). Partial Bell-state analysis with parametric down conversion in the Wigner function formalism. *J. Adv. Math. Phys.* 2010:501521.
- [5] Casado, A., Guerra, S. y Plácido, J. (2015). Wigner representation for entanglement swapping using parametric down conversion: The role of vacuum fluctuations in teleportation. *J. Mod. Opt.* 62:377-386.
- [6] Casado A., Guerra, S. y Plácido, J. (2015). Estudio, mediante el formalismo de la función de Wigner, de los efectos de la radiación de punto cero en la generación del bit cuántico fotónico. *Rev. Acad. Canar. Cienc.*, XXVI, 37-60.
- [7] Casado, A., Guerra, S. y Plácido, J. (2018). Rome teleportation experiment analysed in the Wigner representation: The role of the zeropoint fluctuations in complete one-photon polarization-momentum Bell-state analysis. *J. Mod. Opt.* 65:1960–1974.
- [8] Casado, A., Guerra S. y Plácido, J. (2019). From stochastic optics to the Wigner formalism: the role of the vacuum field in optical quantum communication experiments. *Atoms* 7(3):76.
- [9] Casado, A., Guerra, S. y Plácido, J. (2020). Wigner representation for polarization-momentum hyperentanglement generated in parametric down-conversion, and its application to complete Bell-state measurement. *Eur. Phys. J. D.* 68:338.
- [10] Casado, A., Guerra, S. y Plácido, J. (2020). Innsbruck Teleportation Experiment in the Wigner Formalism: A Realistic Description Based on the Role of the Zero-Point Field. *Frontiers in Physics*. [EISSN 2296-424X], v. 8.
- [11] de Barros, J. A. and Oas, G. (2016). Advanced Series on Mathematical Psychology Contextuality from Quantum. *Physics to Psychology*, 153-184.
- [12] Escudero, C. (2018). *La naturaleza de la materia*. *ONDAS DE LA MATERIA*. Recuperado de:  
[http://ex000290.ferozo.com/fisica/fiiib/archivos/2018%20La%20naturaleza%20de%20la%20materia%20\(cont\)%20BIOING.pdf](http://ex000290.ferozo.com/fisica/fiiib/archivos/2018%20La%20naturaleza%20de%20la%20materia%20(cont)%20BIOING.pdf)

- [13] Galazo, R. (2018). *Complementariedad clásica, o cuánto cuántico hay en cuántica*. TFG. UCM. Recuperado de:  
<http://webs.ucm.es/info/gioq/docencia/trabajos/RaquelGalazo.pdf>
- [14] Hofstadter, D. Dilemmas for superrational thinkers, leading up to a luring lottery. *Sci Am.* (1983) 6:24–35.
- [15] Khrennikov, A. (1999). Classical and Quantum Mechanics on Information. *Foundations of Physics*, Vol. 29, No. 7.
- [16] Khrennikov, A. (2015). Quantum-like modeling of cognition. *Front. Phys.* 3:77, 10.3389/fphy.2015.00077.
- [17] Li, Ji-An, Dong, D., Wei, Z., Liu, Y., Pan, Y., Nori, F. and Zhang, X. (2020). Quantum reinforcement learning during human decision-making. *Nature Human Behavior*, v. 4, 294-307.
- [18] Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*. New York, NY: Wiley.
- [19] Shafir, E. and Tversky, A. (1992). Thinking through uncertainty: non-consequential reasoning and choice. *Cognitive Psych.* Vol. 24, Issue 4, 449-474.
- [20] Surov, I., Pilkevich, S., Alodjants, A. and Khmelevsky, S. (2019). Quantum phase stability in human cognition. *Frontiers in Psychology*; 10: 929.
- [21] Wang, Z., Busemeyer, J., Atmanspacher, H. and Pothos, E. (2013). The Potential of Using Quantum Theory to Build Models of Cognition. *Topics in Cognitive Sciences* 5 (4), 672-688.
- [22] Yearsleyab, M. and Busemeyer, J. (2016). Quantum cognition and decision theories: A tutorial. *Science direct* 74, 99:116.