OTROS ARTICULOS

UNA LECCION DE ANALISIS MATEMATICO ELEMENTAL

José M. Pacheco
Dpto. de Matemáticas.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN: *Se prueba, poniendo de relieve los aspectos didácticos, que para toda función integrable en sentido de Riemann* $f: (0,1) \to R^+$*, la función* $A(h) = \int_0^1 |h-f(x)|\, dx$*, para h variando entre los extremos de f en (0,1), es cóncava y posee un único mínimo en (0,1).*

ABSTRACT: The following result is proved, highlighting didactic aspects: For every Riemann integrable function $f: (0,1) \to R^+$*, the function* $A(h) = \int_0^1 |h-f(x)|\, dx$*, for h running between the extrema of f, is concave and presents a unique minimum in (0,1).*

INTRODUCCION

A veces la resolución de un ejercicio elemental origina una cadena de ideas y razonamientos que pueden poner de relieve diferentes aspectos -aparentemente inconexos- de las Matemáticas elementales. El valor pedagógico y didáctico de tales situaciones es indudable, por lo que ilustran sobre la forma de construir un cuerpo de doctrina matemático.

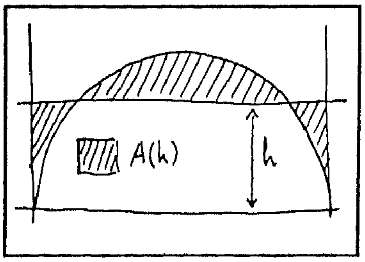
Un caso de esta índole viene dado por el ejercicio descrito más abajo, que proviene de un examen para ingreso en la Universidad de Moscú en 1991 (1). Se trata, en principio, de resolver un problema, evidentemente pensado como ejercicio de aplicación de los métodos del cálculo de extremos. El enunciado es el siguiente:

«En la figura 1, determinar h para que el área rayada sea mínima».

La primera pregunta que se plantea el matemático, antes de abordar la aplicación mecánica del cálculo diferencial es: ¿por qué se solicita precisamente hallar un mínimo? No es obvio que tal cosa ocurra, aunque razonando heurísticamente sobre la figura 1, parece razonable que -por algún tipo de compensación- al elevarse la cuerda desde el eje horizontal se produce en principio una disminución del área marcada.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

FIGURA 1



La segunda cuestión es más propiamente matemática: Si se considera la curva como la gráfica de alguna función, ¿para qué clase de funciones se puede plantear el mismo problema? y ¿existe algún resultado de carácter general que resuelva totalmente el problema?

1. UNA SOLUCION ELEMENTAL

Un estudio somero del problema nos conduce, tras desechar algunas manipulaciones directas con la ecuación de la circunferencia, a la siguiente resolución:

Situamos unos ejes de coordenadas ortonormales con el origen en el centro de la circunferencia y el eje OX a lo largo del diámetro horizontal. Suponemos además que el radio de la circunferencia es 1, lo que no resta generalidad.

Se observa que el problema es simétrico (este punto tiene cierta importancia, como se verá más adelante) respecto del eje OY, así que consideramos la figura 2. En ella vemos que:

$$\text{Area objeto del problema} = A(h) = a_1 + a_2$$

donde:

$$a_1 = \text{sector OCD} - \text{triángulo OCE}$$

$$a_2 = \text{rectángulo OABE} - \text{sector OAC} - \text{triángulo OCE}$$

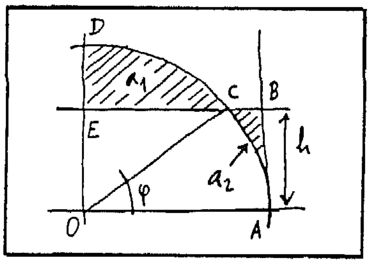
Todo puede ponerse, en lugar de la altura h, en función del ángulo ϕ:

$$\text{área sector OCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$\text{área triángulo OCE} = \frac{\text{OExEC}}{2} = \frac{\cos\phi \ \text{sen}\phi}{2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

FIGURA 2



luego

$$a_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{\cos\phi \ \mathrm{sen}\phi}{2}$$

Del mismo modo, dado que tenemos:

$$\text{área rectángulo OABE} = \text{OAxAB} = 1\mathrm{x}\,\mathrm{sen}\phi$$

$$\text{área sector OAC} = \frac{\phi}{2}$$

la otra parte del área rayada es:

$$a_2 = \mathrm{sen}\phi - \frac{\phi}{2} - \frac{\cos\phi \ \mathrm{sen}\phi}{2}$$

Por tanto, se tiene:

$$A(\phi) = a_1 + a_2 = \frac{\pi}{2} - \phi + \mathrm{sen}\phi - \frac{1}{2}\mathrm{sen}2\phi$$

Derivando con respecto de ϕ encontramos, tras igualar a 0:

$$A'(\phi) = -1 + \cos\phi - \cos 2\phi = 0 \Leftrightarrow \cos\phi - \cos 2\phi = 1$$

Por simple inspección hallamos inmediatamente que la única solución de esta ecuación trascendente en el intervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$ es $\phi = \frac{\pi}{3}$. Utilizando ahora la segunda derivada $A''(\phi) = -\mathrm{sen}\phi + 2\mathrm{sen}2\phi$, particularizando en $\phi = \frac{\pi}{3}$ tenemos el valor $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Por tanto, existe un mínimo para A(ϕ) cuando:

$$h = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. OTRA SOLUCION, Y UNA PROPOSICION DEDUCIDA DE ELLA

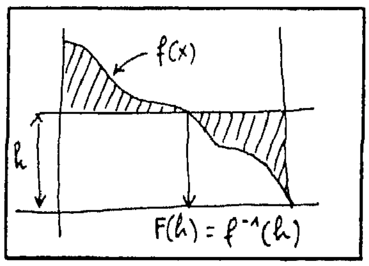
Posiblemente las operaciones con la ecuación de la circunferencia nos hayan llevado a considerar con más detalle la figura 2, notando que el área A(h) se construye utilizando básicamente el hecho de que a cada h le corresponde un único x, esto es, que la función con que se trabaja es inyectiva.

Por tanto es razonable suponer que el comportamiento del problema sea *parecido para otras curvas similares al cuarto de circunferencia que hemos* estudiado. Esta idea nos conduce a explorar la siguiente resolución.

Consideremos la figura 3, una variante de la figura 2. Nos permitiremos plantear y resolver un problema más general. Denotemos por y = f(x) la ecuación de la curva, suponiendo que f sea una función continua en (0,1) (que en el caso de la figura 2 es la representativa de nuestro cuarto de circunferencia) monótonamente decreciente. Representando mediante una integral el área objeto del problema, nos viene dada por:

$$A(h) = \int_0^1 |h-f(x)|\,dx = \int_0^{F(h)} (f(x)-h)dx + \int_{F(h)}^1 (h-f(x))dx.$$

FIGURA 3



Aquí, como antes, el hecho esencial es que para cada h existe un único valor F(h), esto es f(x) es inyectiva, o equivalentemente, $F=f^{-1}$. Aplicando la fórmula de derivación de una integral respecto de un parámetro tendremos, exigiendo que f (y por tanto F) sea derivable en el interior del intervalo (0,1):

$$\frac{dA}{dh} = -\int_0^{F(h)} dx + (f(F(h)-h)F'(h) + \int_{F(h)}^1 dx - (h-f(F(h))F'(h) =$$

$$= 1-2F(h) + 2(f(F(h))-h)F'(h)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Como $F=f^{-1}$, para todo $h\in(f(1),f(0))$ es $f(F(h)) = h$, luego $\dfrac{dA}{dh} = 1 - 2F(h)$, de modo que cuando $h = f(\dfrac{1}{2})$ se anula esa derivada. Para analizar el comportamiento local, derivamos de nuevo, utilizando el teorema de la función inversa:

$$\frac{d^2A}{dh^2} = -2F'(h) = -\frac{2}{f'(F(h))}$$

Como, para todo $x\in(0,1)$, es $f'<0$, el signo de la segunda derivada es positivo, luego la función es cóncava, y el extremo es un mínimo. Resumimos el razonamiento anterior en la siguiente proposición:

Proposición 1

«Si f(x) es una función continua, estrictamente monótona decreciente en el intervalo [0,1), y derivable en el abierto (0,1), entonces la función $A(h) = \int_0^1 |h-f(x)|\,dx$, definida sobre el intervalo (f(1),f(0)), es cóncava y alcanza un único mínimo en $f(\dfrac{1}{2})$».

Como aplicación tenemos nuestro problema original, correspondiente a la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ que desde luego satisface las condiciones de la proposición.

Luego hay un mínimo para el valor $h = \sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Notamos que este ejemplo ilustra una de las restricciones de la Proposición, puesto que aquí f(x) no es derivable en x=1, aunque sí en el interior del intervalo.

3. UN RESULTADO GENERAL

Las resoluciones elementales que hemos visto utilizan herramientas potentes del Análisis Matemático: en primer lugar el teorema de la función inversa, recogido en la exigencia de que la función f(x) sea monótona, y la diferenciabilidad de la función, usada en la comprobación de la concavidad y de la existencia de extremos. Todo ello se halla recogido en el enunciado de la Proposición 1.

Este tipo de soluciones son las esperadas al plantear el problema a quienes poseen un conocimiento operativo de las técnicas del Cálculo Diferencial. Sin embargo, para seguir una pauta de mayor generalidad, propia del razonamiento matemático, podemos considerar el problema tratando de evitar el uso de tales métodos, que imponen grandes restricciones en la clase de funciones admisibles. La pregunta es ahora:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

¿Cuál es el resultado análogo al de la Proposición 1 si se suavizan las condiciones exigidas a la función?

En realidad el problema original es una cuestión sobre funciones integrables. Por ello la única condición que exigiremos a la función f es que sea integrable (p. ej. en sentido de Riemann) en el intervalo (0,1). Para estudiar el problema con máxima generalidad no se pide que sea monótona –si reconsideramos la figura 1 veremos que esta condición no es esencial, según se desprende de la primera resolución del ejercicio–, aunque no se pierde nada por suponer que la función es estrictamente positiva.

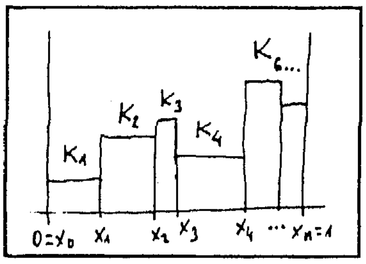
Por tanto, analizaremos la función $A(h) = \int_0^1 |h-f(x)|\,dx$, asociada a f y definida sobre el intervalo (k,K), siendo k, K los extremos inferior y superior de la función f en (0,1).

Nos inspiramos en la importancia de la hipótesis de decrecimiento de f en la segunda solución para formular el problema en toda generalidad. Para ello vamos a definir el concepto de reordenada decreciente de una función real $f:(0,1)\to R^+$. La idea es construir una nueva función $f^*:(0,1)\to R^+$, con el mismo rango de valores que f, pero que sea decreciente. Un poco más adelante se verá la importancia de esta definición al utilizarla con funciones escalonadas.

Dada la función f, construimos una reordenación del intervalo (0,1) asociada a ella, mediante una biyección Ω: $(0,1)\to(0,1)$ que satisfaga la propiedad siguiente: $\Omega(x)<\Omega(y)$ siempre que $f(x)>f(y)$, y cuando $f(x)=f(y)$, entonces $\Omega(x)<\Omega(y)$ si $x<y$. La reordenada decreciente de f es la función f* que satisface, para todo $x\in(0,1)$, la ecuación $f^*(\Omega(x))=f(x)$.

Para la función escalonada E(x) (figura 4), que toma valores constantes K_1, K_2, ..., K_n sobre los intervalos consecutivos definidos por la partición $0=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=1$, su reordenada decreciente será una nueva función escalonada $E^*(x)$, definida sobre la partición construida reordenando los intervalos de la anterior de modo que los escalones K_j estén ordenados de modo decreciente. Denotamos la nueva partición por $0=y_0<y_1<...<y_{n-1}<y_n=1$, y renombraremos los valores K_j en la forma $k_1\geq k_2\geq k_3\geq...\geq k_{n-1}\geq k_n$ (figura 5).

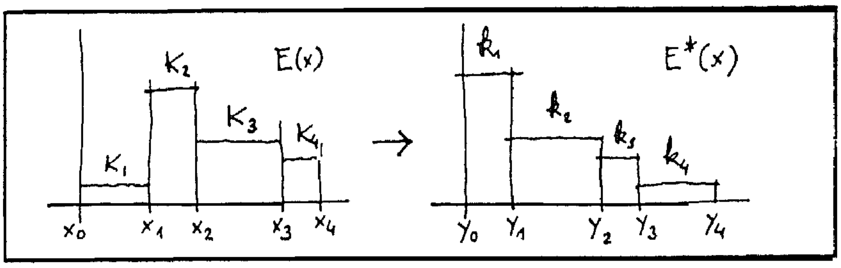
FIGURA 4



El punto fundamental del razonamiento que nos llevará a obtener el resultado general es que la función A(h) asociada á E(x) no varía al sustituir ésta por E*(x), como es inmediato probar observando la figura 5. La función A(h)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

FIGURA 5



es una función continua, afín a trozos, definida sobre (k,K), cuyos puntos angulosos corresponden a los valores k_j. Para $1<j<n$, en el entorno de k_j se tiene:

$$A(h) = \sum_{r=1}^{j-1} (k_r-h)(y_r-y_{r-1}) + |k_j-h|(y_j-y_{j-1}) + \sum_{s=j+1}^{n} (h-k_s)(y_s-y_{s-1})$$

de modo que, ordenando los términos que llevan h y los que no, obtenemos:

$$A(h) = (-\sum_{r=1}^{j} (y_r-y_{r-1}) + \sum_{s=j+1}^{n} (y_s-y_{s-1}))h + \ldots, \text{ si } h<k_j$$

$$A(h) = (-\sum_{r=1}^{j-1} (y_r-y_{r-1}) + \sum_{s=j}^{n} (y_s-y_{s-1}))h + \ldots, \text{ si } k_j<h$$

luego las pendientes de los dos segmentos de $A(h)$ que confluyen en $h = k_j$ son:

$$1-2y_j \text{ si } h<k_j,$$

$$1-2y_{j-1} \text{ si } h>k_j.$$

Por tanto, dado que $y_j > y_{j-1} \Rightarrow 1-2y_j < 1-2y_{j-1}$, esas pendientes son crecientes, luego la poligonal es cóncava (figura 6).

Para que exista un mínimo en k_j tiene que darse una de las dos alternativas siguientes: O bien es negativa la primera de las pendientes y positiva la otra, esto es, $1-2y_j<0$ y $1-2y_{j-1}>0$, o bien alguna de las dos es nula. En el primer caso es $y_{j-1}< \frac{1}{2} <y_j$, y en el segundo alguno de los valores y_{j-1}, y_j es precisamente $\frac{1}{2}$. Luego encontramos el mínimo donde era de esperar: en $f(\frac{1}{2})$ si tal valor existe, o bien en el valor $h=k_j$ tal que $y_{j-1}< \frac{1}{2} <y_j$ si no existe $f(\frac{1}{2})$.

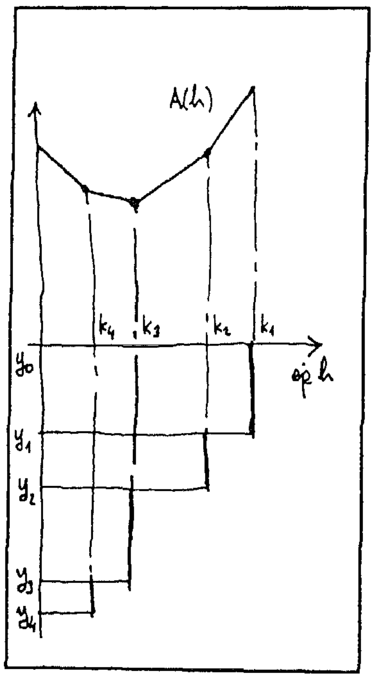
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Volvamos al caso general de una función cualquiera f integrable. Construyamos dos familias aproximantes de funciones escalonada $E_{sup}(x)$ y $E_{inf}(x)$. Cada una de ellas posee su reordenada decreciente $E^*_{inf}(x)$, $E^*_{sup}(x)$. Por ser las E* funciones decrecientes, definen la función f*.

Las sumas superiores e inferiores de Riemann correspondientes a las E*, que definen la integral de f*, son exactamente las mismas que las de las E, que definen la integral de f. Luego la función A(h) es la misma para f y f*. Ahora bien, *la A(h) asociada á f* –y por tanto á f– está definida como límite común* entre dos familias de funciones cóncavas, luego ella también lo es.

Resumimos el razonamiento anterior enunciando el siguiente resultado general.

FIGURA 6



Proposición 2

«Si f(x) es una función positiva integrable sobre el intervalo (0,1), cuyos extremos son k y K, entonces la función definida sobre el intervalo (k,K), $A(h) = \int_0^1 |h - f(x)|\,dx$ es cóncava, y para $h = f(\xi)$, donde:

$$\xi = \inf \{x \mid x \geq \frac{1}{2}) \vee (f(x) \text{ está definida})\},$$

alcanza un mínimo».

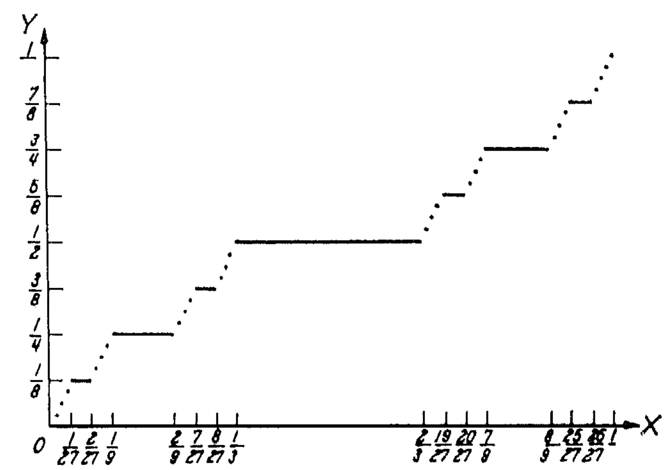
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

4. UN COMENTARIO FINAL

Vamos a apuntar sólo una cuestión de interés entre las muchas que se pueden suscitar a lo largo del desarrollo que hemos presentado: Dada una función f, existen infinitas otras que poseen la misma reordenada descendente f^*, como es fácil comprobar con cualquier función escalonada. Más aún, para toda función escalonada –en el sentido definido más arriba– E(x) es posible construir algorítmicamente la reordenada $E^*(x)$. Hay también casos triviales en que construir f^* es inmediato, como p. ej. para toda función creciente en (0,1), donde f^* es la función cuya gráfica es la simétrica de la de f respecto de la recta $x = \frac{1}{2}$. Lo que podemos asegurar, hablando sin precisión, es que la función f^* resultará siempre con algún parentesco con la llamada *función singular* (figura 7) de Lebesgue g(x) (2), cuya gráfica es más conocida con el nombre de *escalera del diablo* en los textos sobre Geometría Fractal.

La pregunta es, por tanto: ¿existe alguna manera de formular la expresión –analítica o algorítmicamente– de f^*, para una f arbitraria?

FIGURA 7



5. REFERENCIAS

(1) ANONIMO (1993): «Entrance examinations for the Independent University of Moscow», *Notices of the American Mathematical Society,40(2)*, 138-139.

(2) HEWITT E., STROMBERG K., (1969): *Real Abstract Analysis* (p. 113), Springer-Verlag, Berlín.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004