Manuales Docentes Universitarios

Problemas de comunicaciones analógicas y digitales

Sofía Martín González
Santiago Tomás Pérez Suárez
José Ramón Velázquez Monzón
Rafael Pérez Jiménez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Vicerrectorado de Calidad e Innovación Educativa

28

COLECCIÓN MANUALES DOCENTES UNIVERSITARIOS

ÁREA DE ENSEÑANZAS TÉCNICAS • Nº 28

Problemas de comunicaciones analógicas y digitales

Sofía Martín González
Santiago Tomás Pérez Suárez
José Ramón Velázquez Monzón
Rafael Pérez Jiménez

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Vicerrectorado de Calidad e Innovación Educativa

2008

Colección: Manuales Docentes Universitarios
Problemas de comunicaciones analógicas y digitales Nº 28

Sofía Martín González
Santiago Tomás Pérez Suárez
José Ramón Velázquez Monzón
Rafael Pérez Jiménez

Maquetación y diseño:
Servicio de Publicaciones y Difusión Científica de la ULPGC

ISBN: 978-84-96971-39-4
Depósito Legal: GC 311-2008

Impresión:
Servicio de Reprografía, Encuadernación y Autoedición ULPGC

Índice

Presentación

Desde hace unos años, la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria ha mostrado su compromiso con la mejora de la calidad de la docencia, de la investigación y de los servicios que presta a la sociedad. Para alcanzar tales objetivos se puso en marcha, en 2001, una convocatoria anual para la publicación de manuales docentes para la enseñanza universitaria, realizados por el personal docente de nuestra institución.

Transcurridos seis años desde el inicio de aquella iniciativa, que pretendía ofrecer unos manuales docentes que poseyeran un diseño uniforme y unos contenidos rigurosos, adaptados a las exigencias de nuestras titulaciones, resulta obvio que nos felicitemos por el camino recorrido. Sin embargo, la experiencia acumulada a lo largo de estos años, así como la respuesta obtenida por parte del profesorado y la calidad de las publicaciones efectuadas, hace necesario que se introduzcan mejoras en los procedimientos de recepción, revisión científica y edición de estas obras, cumpliendo con las exigencias de los estándares internacionales en la edición de publicaciones docentes.

Un reciente informe en el que se establecían los estándares y directrices para la mejora de la calidad en las instituciones universitarias europeas, realizado por la *European Association for Quality Assurance in Higher Education* (ENQUA), llamaba la atención sobre el empeño que deben poner las universidades para garantizar que los recursos de apoyo al aprendizaje son adecuados y se ajustan a sus necesidades. Éste y otros objetivos son los que pretenden alcanzar, en los próximos años, el recién creado Vicerrectorado de Calidad e Innovación Educativa, en colaboración con el Vicerrectorado de Ordenación Académica y EEES, y el Servicio de Publicaciones y Difusión Científica de esta Universidad.

Los manuales y materiales de autoaprendizaje editados por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria constituyen una muestra de la apuesta decidida por la calidad de nuestra institución, además de una evidencia del grado de especialización y de las capacidades didácticas de su personal docente.

Deseo agradecer a los autores de estas publicaciones su empeño por adaptar sus contenidos a las exigencias editoriales de esta colección, así como su generosa predisposición a redactar unos materiales docentes que se ajustan a los requisitos de este tipo de publicaciones. Sólo deseo que los estudiantes que van a utilizar estos manuales docentes y materiales de autoaprendizaje sepan apreciar el valor del trabajo bien hecho y el esfuerzo que sus autores han puesto en su realización.

José Regidor García
Rector

1

capítulo

Introducción a los sistemas de telecomunicación

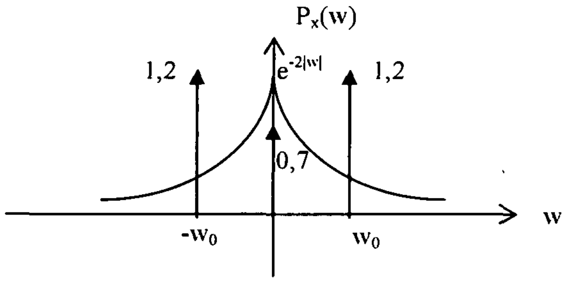
ENUNCIADOS

1. Para las funciones $\Pi\left(\frac{t}{T}\right), ke^{-|t|}$, determine:
   a) Las funciones de autocorrelación.
   b) La correlación cruzada de ambas.

2. Considere la señal x(t) dada por un pulso rectangular de amplitud unitaria y anchura T_1, centrado en el origen.
   a) Dibuje la señal x(t).
   b) Dibuje la señal periódica $x_p(t)$ formada por la repetición de x(t) con período $T_0=3T_1/2$.
   c) Determine $X(\omega)$, transformada de Fourier de x(t), y dibuje $|X(\omega)|$ para valores de $|\omega| \leq 6\pi/T_1$.
   d) Determine a_k, los coeficientes de la serie de Fourier de $x_p(t)$. Dibuje a_k para valores de $|k| = 0,1,2,3$.
   e) Usando los resultados de c) y d) verifique que se cumple:

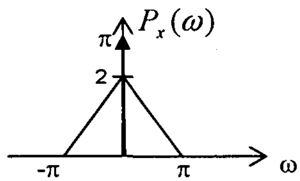
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega)\Big|_{\omega=k2\pi/T_0}$$

3. La densidad espectral de potencia de una señal es la representada en la figura siguiente.



   a) Calcule la función de autocorrelación $R_x(\tau)$.
   b) Calcule la potencia media, la potencia de continua, la potencia de alterna, el valor medio y el valor eficaz de la señal.

4. La densidad espectral de potencia de una señal es la que se muestra en la figura siguiente.



   a) Calcule la función de autocorrelación $R_x(\tau)$.
   b) Calcule la potencia media, la potencia de continua, la potencia de alterna, el valor medio y el valor eficaz de la señal.

5. Indique si las siguientes señales son de energía o de potencia. En caso de ser de energía, calcule su energía y su densidad espectral de energía. En caso de ser de potencia, calcule su potencia media y su densidad espectral de potencia. Los resultados se expresarán en función de A y T.

   a) $x(t) = A \cdot \Delta\left(\frac{t}{T}\right)$
   b) $x(t) = A \cdot sen(\omega_0 t + \theta)$

6. Se considera la señal $x(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$ a la entrada de un sistema LTI cuya respuesta al impulso h(t) se desconoce. Si la Densidad Espectral de Energía de la señal a la salida es;

$$E_y(w) = A^2T^2 \operatorname{sinc}^4\left(\frac{Tw}{2\pi}\right)$$

obtenga la expresión del módulo de la función de transferencia del sistema.

7. Considere un pulso rectangular $x(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$ siendo T = 1ms.
   a) Obtenga su densidad espectral de energía (en ω y f).
   b) Calcule el ancho de banda del primer nulo (en Hz y rad/s).
   c) Calcule el ancho de banda equivalente (en Hz y rad/s).

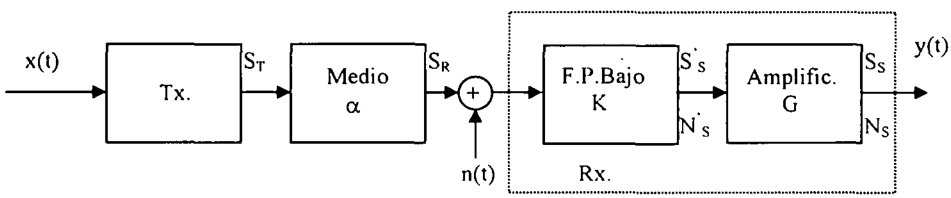
8. Dada la señal $x(t) = K_0 e^{-K_1 t} u(t)$, obtenga:
   a) Ancho de banda de 3 dB.
   b) Ancho de banda de L dB.
   c) Ancho de banda equivalente.
   d) Ancho de banda del 90% de la energía.

9. Sea la señal $x(t) = e^{-2|t|}$.
   a) Calcule el ancho de banda de L dB.
   b) A partir de la expresión obtenida en a), calcule el ancho de banda de 3 dB.
   c) Calcule el ancho de banda equivalente.

10. Sea una señal constante en el tiempo *x(t)* = *A*, donde A es real. Calcule:
    a) Su autocorrelación.
    b) Su potencia media, calculando la autocorrelación en el origen.
    c) Su potencia media, evaluando su valor cuadrático medio.
    d) Su densidad espectral de potencia, calculando la transformada de Fourier de la autocorrelación.
    e) Su potencia media, integrando su densidad espectral de potencia.

11. Sea x(t) una señal cuyo espectro X(ω) está limitado en banda a B rad/s, y sea p(t) una señal periódica de periodo T_0 s. Considere que $\omega_0 >> B$.
    a) Determine el espectro de la señal y(t)=x(t)· p(t).
    b) Dibuje el espectro de la señal y(t) considerando que p(t) en una señal rectangular de ciclo de trabajo 50%.
    c) Si la señal y(t) se filtra paso banda con un filtro ideal centrado en la frecuencia ω0 y ancho de banda 2B, determine la señal a la salida del filtro.

12. Se transmite en banda base una señal analógica cuya función densidad espectral de potencia es prácticamente nula para frecuencias superiores a 10 kHhz. El sistema de telecomunicación se puede modelar mediante el siguiente esquema



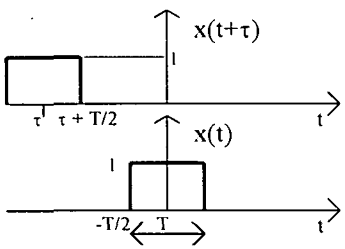
Se desea que la relación señal a ruido a la salida sea SNR_S=30 dB, para lo que se supone que el amplificador del receptor es ideal y lineal para todas las señales, con una ganancia en voltaje G y un nivel de ruido despreciable. El filtro paso bajo es ideal, con una frecuencia de corte f_c=10 kHz y un factor de atenuación en potencia de K=2. La densidad espectral de potencia del ruido en recepción es $P_n(f) = N_0/2 = 0{,}5 \cdot 10^{-7}\, W/Hz$.

Calcule cuál será la máxima distancia posible de transmisión si la potencia máxima operativa del transmisor es de 10 W y el medio de transmisión consiste en un cable que produce una atenuación α= 2 dB/km para todas las frecuencias.

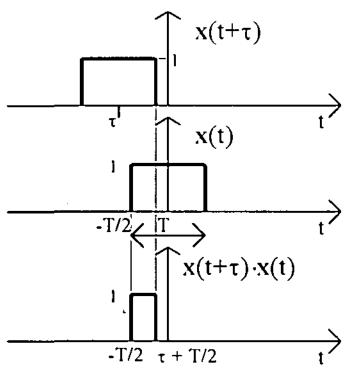
SOLUCIONES

1. a) Autocorrelación de $\Pi\left(\dfrac{t}{T}\right)$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x(t)dt$$; Nota: Es lo mismo hacerlo para τ ó -τ ya que la variación se hace desde -∞ a +∞.

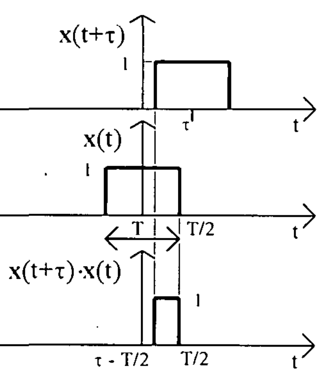


$$\tau+\frac{T}{2}<-\frac{T}{2}\rightarrow\tau<-T\Rightarrow R_x(\tau)=0$$



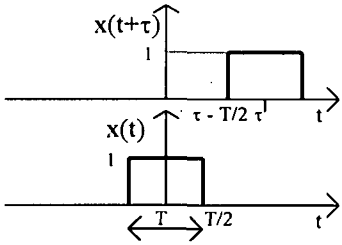
$$\left.\begin{aligned}\tau+\frac{T}{2}&>-\frac{T}{2}\\ \tau-\frac{T}{2}&<-\frac{T}{2}\end{aligned}\right\}\rightarrow -T<\tau<0\Rightarrow$$

$$R_x(\tau)=\int_{-T/2}^{\tau+T/2}1dt=\tau+T$$

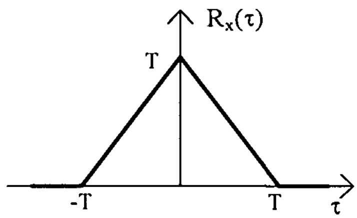


$$\left.\begin{aligned}\tau-\frac{T}{2}&>-\frac{T}{2}\\ \tau-\frac{T}{2}&<\frac{T}{2}\end{aligned}\right\}\rightarrow 0<\tau<T\Rightarrow$$

$$R_x(\tau)=\int_{\tau-T/2}^{T/2}1dt=T-\tau$$

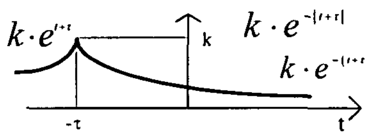


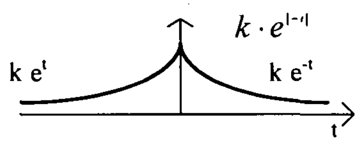
$$\tau-\frac{T}{2}>\frac{T}{2}\rightarrow\tau>T\Rightarrow R_x(\tau)=0$$



Autocorrelación de $ke^{-|t|}$:

$$R_x(\tau\ )=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{k}^2e^{-|t+\tau|}\mathrm{e}^{-|t|}\,dt$$





$-\tau<0\rightarrow\tau>0$:

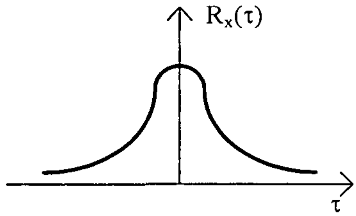
$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{-\tau}k^2e^{t+\tau}e^{t}dt+\int_{-\tau}^{0}k^2e^{-(t+\tau)}e^{t}dt+\int_{0}^{\infty}k^2e^{-(t+\tau)}e^{-t}dt=$$

$$=k^2e^{\tau}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-\infty}^{-\tau}+k^2e^{-\tau}\left[t\right]_{-\tau}^{0}+k^2e^{-\tau}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_{0}^{\infty}$$

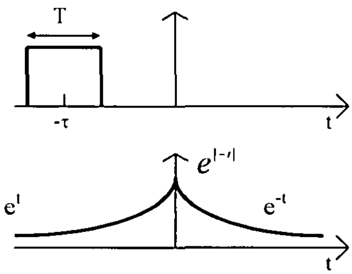
$$R_x(\tau)=k^2e^{-\tau}(1+\tau)\qquad;\tau>0$$

Como la autocorrelación es par, $R_x(-\tau)=R_x(\tau)$, para todo τ se cumple:

$$\boxed{R_x(\tau) = k^2 e^{-|\tau|}(1+|\tau|)}$$

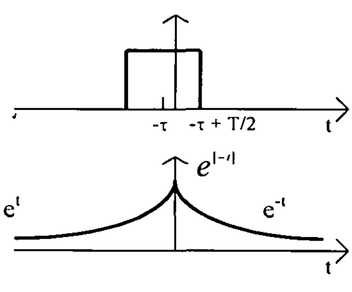


b) $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right) e^{-|t|} dt$



$$-\infty < -\tau + \frac{T}{2} < 0 \rightarrow \frac{T}{2} < \tau < \infty$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\tau - T/2}^{-\tau + T/2} k\, e^{t} dt = k e^{t}\Big]_{-\tau - T/2}^{-\tau + T/2} = k e^{-\tau}\left(e^{T/2} - e^{-T/2}\right)$$



$$-\tau + \frac{T}{2} > 0 \rightarrow 0 < \tau < \frac{T}{2}$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\tau - T/2}^{0} k\, e^{t} dt + \int_{0}^{-\tau + T/2} k\, e^{-t} dt$$

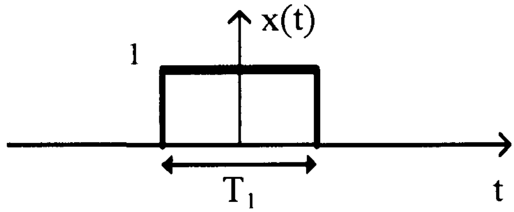
$$= k\left(1 - e^{-\tau - T/2}\right) + k\left(1 - e^{\tau - T/2}\right)$$

Por ser par:

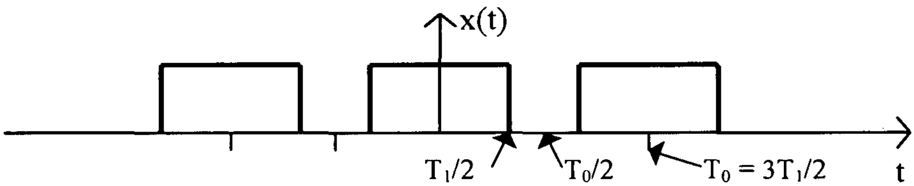
$$R_{xy}(\tau) = ke^{\tau}\left(e^{T/2} - e^{-T/2}\right) \quad ; \quad -\infty < \tau < -\frac{T}{2}$$

$$R_{xy}(\tau) = k\left(1 - e^{\tau - T/2}\right) + k\left(1 - e^{-\tau - T/2}\right) \quad ; \quad -\frac{T}{2} < \tau < 0$$

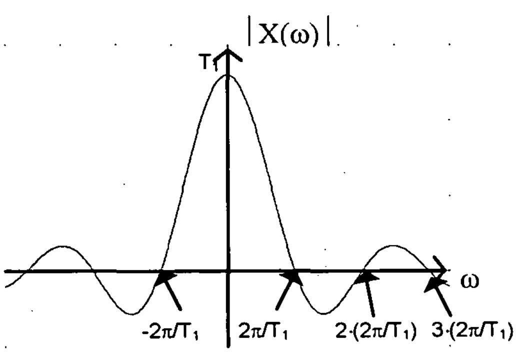
2. a)



b)



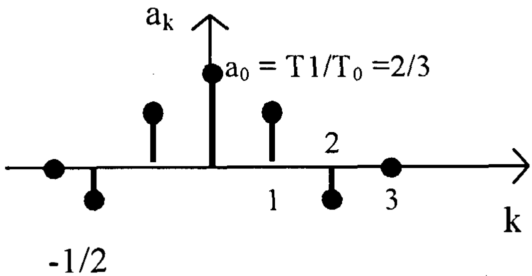
c) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T_1/2}^{T_1/2} = 2\frac{sen(\omega T_1/2)}{\omega} = T_1 \operatorname{sin}c\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$



d)

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{-1}{jk\omega_0}\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{sen(k\omega_0 T_1/2)}{\pi k} = \frac{2}{T_0}\frac{sen(k\omega_0 T_1/2)}{k\omega_0} =$$

$$= \frac{T_1}{T_0}\operatorname{sinc}\left(k\frac{T_1}{T_0}\right)$$



e) $$a_k = \frac{2}{T_0}\frac{sen(k\omega_0 T_1/2)}{k\omega_0} = \frac{2}{T_0}\frac{sen(k\omega_0 T_1/2)}{k\omega_0}\bigg|_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{T_0}X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

3. a) $P_x(\omega) = 0{,}7\delta(\omega) + 1{,}2[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + e^{-2|\omega|}$

$$1 \xrightarrow{T.F.} 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\cos\omega_0 t \xrightarrow{T.F.} \pi\,[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{T.F.} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \Rightarrow \text{Por dualidad: } \frac{2a}{a^2+t^2} \xrightarrow{T.F.} 2\pi\, e^{-a|-\omega|} = 2\pi\, e^{-a|\omega|}$$

$$R_x(\tau) = TF^{-1}[P_x(\omega)] = \frac{0{,}7}{2\pi} + \frac{1{,}2}{\pi}\cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2\pi}\frac{4}{4+\tau^2}$$

$$\boxed{R_x(\tau) = 0{,}11 + 0{,}38\cos(\omega_0\tau) + \frac{0{,}63}{4+\tau^2}}$$

b) Potencia media = $\langle x^2(t)\rangle = R_x(0) = 0{,}11 + 0{,}38 + \dfrac{0{,}63}{4}$

$$\boxed{\langle x^2(t)\rangle = 0{,}65\,W}$$

La potencia de continua viene dada por la transformada inversa de las deltas en el origen de frecuencia:

$$\boxed{P_{dc} = \langle x(t)\rangle^2 = 0{,}11\,W \qquad \langle x(t)\rangle = \sqrt{0{,}11} = 0{,}33\,V}$$

La potencia de alterna viene dada por el resto de términos:

$$\boxed{P_{ac} = x_{ef}^2 = 0{,}38 + \frac{0{,}63}{4} = 0{,}54\,W \qquad x_{ef} = \sqrt{0{,}54} = 0{,}73\,V}$$

4. $P_x(\omega) = \pi\delta(\omega) + 2\Delta\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)$

a) Dado que se cumple: $R_x(\tau) \xrightarrow{T.F.} P_x(\omega)$, será necesario calcular la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral de potencia.

$$\left.\begin{array}{r} \delta(t) \xrightarrow{T.F.} 1 \\ X(t) \xrightarrow{T.F.} 2\pi x(-\omega) \end{array}\right\} 1 \xrightarrow{T.F.} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{2} \xrightarrow{T.F.} \pi\delta(\omega)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\left(\dfrac{t}{B}\right) \xrightarrow{T.F.} B\sin c^2\left(\dfrac{\omega B}{2\pi}\right) \\ X(t) \xrightarrow{T.F.} 2\pi x(-\omega) \end{array}\right\} B\sin c^2\left(\frac{tB}{2\pi}\right) \xrightarrow{T.F.} 2\pi\Delta\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{B}{\pi}\sin c^2\left(\frac{tB}{2\pi}\right) \xrightarrow{T.F.} 2\Delta\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

(Sustituyendo B por π) $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin c^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \xrightarrow{T.F.} 2\Delta\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)}$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{2} + \sin c^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}$$

b) Potencia media: $P_x = R_x(0) = 1{,}5\ \text{W}$

Potencia de continua: $P_{ac} = 1\ \text{W}$

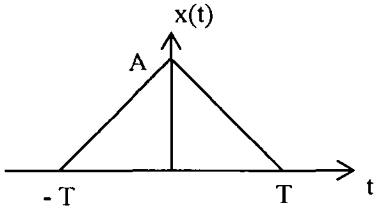
Potencia de alterna: $P_{ac} = 1\ \text{W}$

Valor medio: $<x(t)> = \sqrt{P_{dc}} = 0{,}71\ \text{V}$

Valor eficaz: $x_{ef} = \sqrt{P_{ac}} = 1\ \text{V}$

5. a) $x(t) = A \cdot \Delta\left(\dfrac{t}{T}\right)$

La señal x(t) es una señal definida en energía.



$$x(t) = -\frac{A}{T}t + A \qquad \text{para el intervalo: } 0 \le t \le T$$

Sobre R = 1 Ω, la energía de la señal es:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt = 2 \cdot \int_0^T x^2(t)dt = 2\int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A\right)^2 dt =$$

$$= 2\int_0^T \left(\frac{A^2}{T^2}t^2 - 2\frac{A}{T}At + A^2\right)dt = 2\left(\frac{A^2}{T^2}\frac{t^3}{3} - \frac{2A^2}{T}\frac{t^2}{2} + A^2 t\right)\Bigg|_0^T =$$

$$= 2\left(\frac{A^2}{T^2}\frac{T^3}{3} - \frac{2A^2}{T}\frac{T^2}{2} + A^2 T\right) = 2\left(\frac{A^2 T}{3} - A^2 T + A^2 T\right) =$$

$$= \frac{2}{3}A^2 T \text{ julios}$$

Densidad espectral de energía: $E_x(\omega) = |X(\omega)|^2$

Dado que: $x(t) = A \cdot \Delta\left(\dfrac{t}{T}\right) \xrightarrow{T.F} X(\omega) = A \cdot T \cdot \sin c^2\left(\dfrac{\omega \cdot T}{2\pi}\right)$

$$\boxed{E_x(\omega) = A^2T^2 \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\omega \cdot T}{2\pi}\right) \qquad \text{julios/Hz}}$$

b) $x(t) = A \cdot sen(\omega_0 t + \theta)$

La señal x(t) es una señal definida en potencia.

Autocorrelación de una señal periódica:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t+\tau)\cdot x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot A\cos(\omega_0 t+\theta)dt =$$

$$= \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2}[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta) + \cos(\omega_0\tau)]dt = \frac{A^2}{2T_0}\cos(\omega_0\tau)\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\ dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}T_0\cos(\omega_0\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

La potencia media se obtiene evaluando la autocorrelación en el origen, y la densidad espectral de potencia, realizando la transformada de Fourier de la autocorrelación.

Potencia media: $P_x = R_x(0) = \dfrac{A^2}{2}$ W

Densidad espectral de potencia:

$$P_x(\omega) = T.F.[R_x(\tau)] = \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] \qquad \text{W/Hz}$$

6.

$$A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{T.F.} AT\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = X(\omega)$$

$$E_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = A^2T^2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{E_y(\omega)}{E_x(\omega)} = \frac{A^2T^2 \sin c^4\left(\dfrac{\omega T}{2\pi}\right)}{A^2T^2 \sin c^2\left(\dfrac{\omega T}{2\pi}\right)} = \sin c^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$|H(\omega)| = \left|sinc\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\right|$$

7. $x(t) = \Pi\left(\dfrac{t}{T}\right) \xrightarrow{T.F.} X(\omega) = T \cdot \sin c\left(\dfrac{\omega T}{2\pi}\right)$

a) $E_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = T^2 \cdot \sin c^2\left(\dfrac{\omega T}{2\pi}\right)$ julios/Hz

$E_x(f) = T^2 \cdot \sin c^2 (f \cdot T)$ julios/Hz

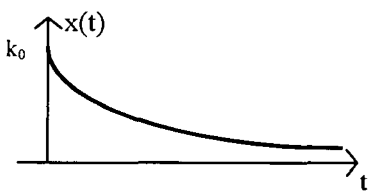
b) $\dfrac{B_{PN} \cdot T}{2\pi} = 1 \Rightarrow B_{PN} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 10^3$ rad/s ó $B_{PN} = 10^3$ Hz

c) $E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1^2 dt = T$ julios

$E_x(f)\big|_{\max} = E_x(0) = T^2$

$2B_{eq} \cdot E_x(f)\big|_{\max} = E_x \Rightarrow B_{eq} = \dfrac{T}{2T^2} = \dfrac{1}{2T} = \dfrac{10^3}{2}$ Hz ó $B_{eq} = 2\pi \cdot 500$ rad/s

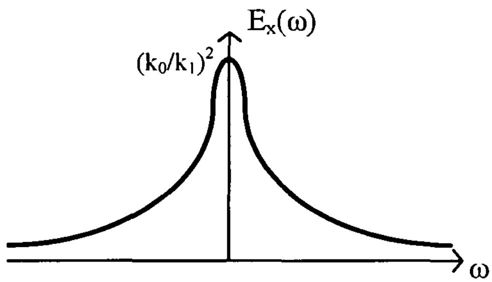
8. $x(t) = k_0 e^{-k_1 t} u(t)$



$$X(\omega) = k_0 \frac{1}{k_1 + j\omega}$$

$$E_x(\omega)=|X(\omega)|^2=\frac{k_0^2}{k_1^2+\omega^2}=\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{k_1}\right)^2}$$

$$E_x(\omega)\big|_{\max}=\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2=E_x(0)$$



a) B_{3dB}: Será el ancho de banda para el cual la amplitud máxima de la densidad espectral de energía cae a la mitad, ya que:

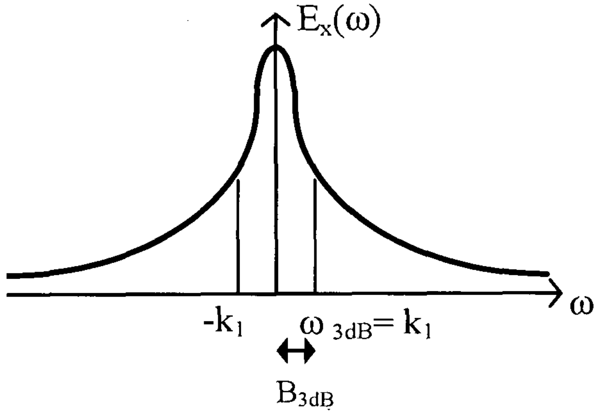
$$10\ \log\frac{A_{max}}{A_{max}/2}=10\ \log\ 2=3dB$$

Para calcular las frecuencias a las que la amplitud cae a la mitad, se aplica:

$$E_x(\omega_{3dB})=\frac{E_x(\omega)\big|_{\max}}{2}=\frac{E_x(0)}{2}$$

$$\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega_{3dB}}{k_1}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2\ ;\ 2=1+\left(\frac{\omega_{3dB}}{k_1}\right)^2\ \Rightarrow\ \omega_{3dB}=\pm k_1\ rad/s$$

$$\boxed{B_{3dB}=k_1\ rad/s}$$



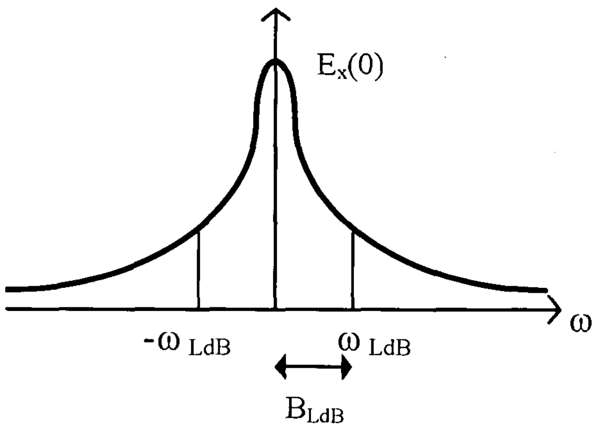
b) Para calcular el B_{LdB}, se aplica:

$$10\log\frac{E_x(\omega)\big|_{max}}{E_x(\omega_{LdB})} = L\ dB \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x(\omega)\big|_{max}}{E_x(\omega_{LdB})} = 10^{\frac{L}{10}}$$

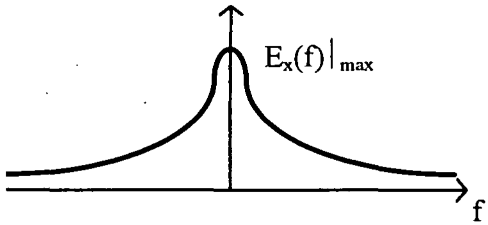
En este caso, la condición será: $E_x(\omega)\big|_{max} = 10^{\frac{L}{10}}\, E_x(\omega_{LdB})$

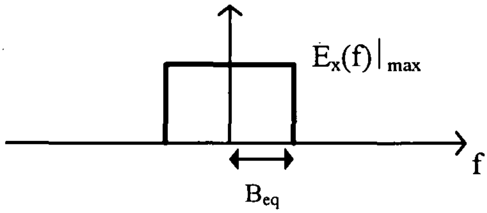
$$\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2 = 10^{\frac{L}{10}}\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_{LdB}}{k_1}\right)^2}\ ;\ 1+\left(\frac{\omega_{LdB}}{k_1}\right)^2 = 10^{\frac{L}{10}} \Rightarrow \omega_{LdB} = \pm k_1\sqrt{10^{\frac{L}{10}}-1}\ rad/s$$

$$\boxed{B_{LdB} = k_1\sqrt{10^{\frac{L}{10}}-1}\ rad/s}$$



c)





$$2\,B_{eq}.E_x(f)\big|_{\max} = E_x$$

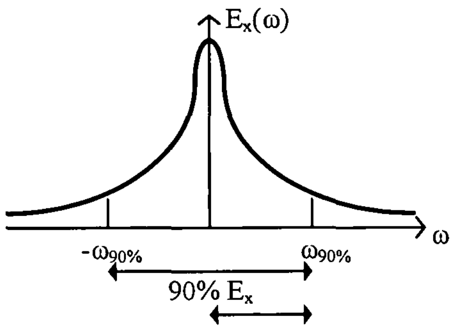
Aplicando Parseval se puede calcular la energía E_X en el tiempo o en la frecuencia. Haciéndolo en el tiempo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{0}^{+\infty} k_0^2 e^{-2k_1 t}dt = k_0^2 \frac{-1}{2k_1}\left[e^{-2k_1 t}\right]_0^{\infty} = \frac{k_0^2}{2k_1} \text{ julios}$$

$$B_{eq} = \frac{E_x}{2\,E_x(f)\big|_{\max}} = \frac{k_0^2/2k_1}{2k_0^2/k_1^2} = \frac{k_1}{4} Hz$$

$$\boxed{B_{eq} = \frac{k_1}{4} Hz}$$

d)



$$90\%(E_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{90\%}}^{\omega_{90\%}} E_x(\omega)\, d\omega$$

$$90\%(E_x) = 0{,}9E_x = 0{,}9\frac{k_0^2}{2k_1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{90\%}}^{\omega_{90\%}} E_x(\omega)\, d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\omega_{90\%}} \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{k_1}\right)^2} d\omega =$$

$$\text{(Cambio de variable: } \frac{\omega}{k_1} = \omega' \; ; \; \frac{d\omega}{k_1} = d\omega'\text{)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2 \int_0^{\frac{\omega_{90\%}}{k_1}} \frac{1}{1+(\omega')^2} k_1 d\omega' = \frac{1}{\pi}\frac{k_0^2}{k_1}\left[arctg(\omega')\right]_0^{\omega_{90\%}/k_1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{k_0^2}{k_1}\operatorname{arctg}(\omega_{90\%}/k_1)$$

$$0{,}9\frac{k_0^2}{2k_1} = \frac{1}{\pi}\frac{k_0^2}{k_1} arctg(\omega_{90\%}/k_1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \omega_{90\%} = k_1 tg(\pi\, 0{,}45) \;\; rad/s \\ B_{90\%} = 6{,}3\, k_1 \;\; rad/s \end{array}}$$

9. $x(t) = e^{-2|t|} \xrightarrow{T.F.} X(\omega) = \dfrac{4}{4+\omega^2}$

$$E_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left(\frac{4}{4+\omega^2}\right)^2$$

$$E_x(\omega)\big|_{\max} = 1 = E_x(0)$$

a) $$10\log\frac{E_x(\omega)\big|_{\max}}{E_x(\omega_{LdB})} = L\,dB$$

$$10\log\frac{1}{\left(\dfrac{4}{4+\omega_{LdB}^2}\right)^2} = L\,dB$$

$$20\log\frac{4+\omega_{LdB}^2}{4} = L\,dB \Rightarrow \frac{4+\omega_{LdB}^2}{4} = 10^{\frac{L}{20}} \Rightarrow \omega_{LdB} = \pm 2\sqrt{10^{\frac{L}{20}}-1} \quad \text{rad/s}$$

$$\boxed{B_{LdB} = 2\sqrt{10^{\frac{L}{20}}-1} \quad \text{rad/s}}$$

b) Si L = 3 $\Rightarrow$ $$\boxed{B_{3dB} = 2\sqrt{10^{\frac{3}{20}}-1} = 1{,}2846 \text{ rad/s}}$$

c) Energía de la señal:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = 2\int_0^{\infty}(e^{-2t})^2 dt = 2\left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^{\infty} = -\frac{2}{4}(0-1) = \frac{1}{2} \text{ julios}$$

$$2B_{eq}\,E_x(f)\big|_{\max} = E_x \quad \Rightarrow \quad B_{eq} = \frac{E_x}{2E_x(f)\big|_{\max}} = \frac{1/2}{2\cdot 1} = 0{,}25 \text{ Hz}$$

10. $x(t) = A \quad ; A \in \Re$

a) Autocorrelación: $R_x(\tau) = \langle x(t+\tau)\cdot x^*(t)\rangle = \langle A\cdot A\rangle = A^2$

b) Potencia media: $P_x = R_x(0) = A^2$ W

c) Potencia media: $P_x = \langle x^2(t)\rangle = \langle A^2\rangle = A^2$ W

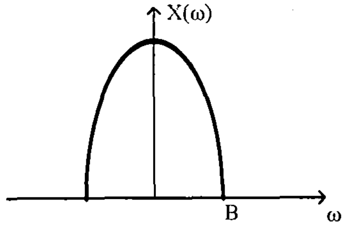
d) Densidad espectral de potencia:

$P_x(\omega) = T.F.[R_x(\tau)] = T.F.[A^2] = A^2 2\pi\delta(\omega)$ W/Hz

e) Potencia media:

$$P_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^2 2\pi\delta(\omega)d\omega = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega = A^2 \text{ W}$$

11.



p(t): periódica de período T_0 $\Rightarrow$ $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

a) $y(t) = x(t)p(t)$ $\Rightarrow$ $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$

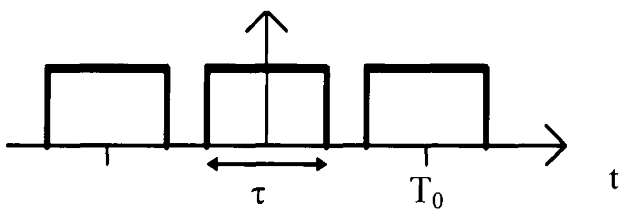
$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad ; \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\boxed{Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(\omega - k\omega_0)}$$

Aparecen réplicas del espectro de x(t) centradas en cada $\pm k\omega_0$ y ponderadas por los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

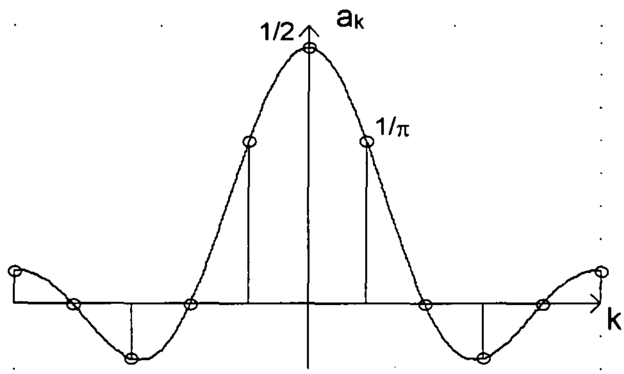
b)

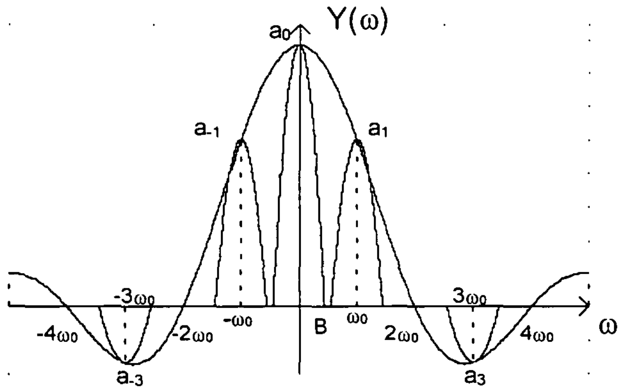


$$C.T. = \frac{\tau}{T_0}(\%) = 50\% \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{2}$$

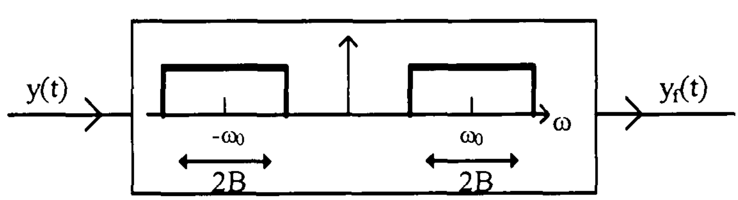
Del problema 2, apartado d) se puede obtener directamente la expresión de los coeficientes a_k, sustituyendo T_1 por τ.

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}\left(k\pi \dfrac{\tau}{T_0}\right)}{k\pi} & ;k \neq 0 \\ \dfrac{\tau}{T_0} & ;k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_k = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(k\pi / 2)}{k\pi} & ;k \neq 0 \\ 1/2 & ;k = 0 \end{cases}$$

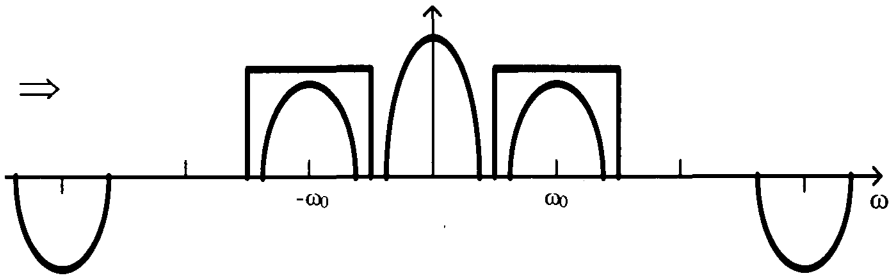




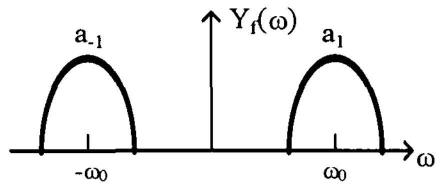
c)



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



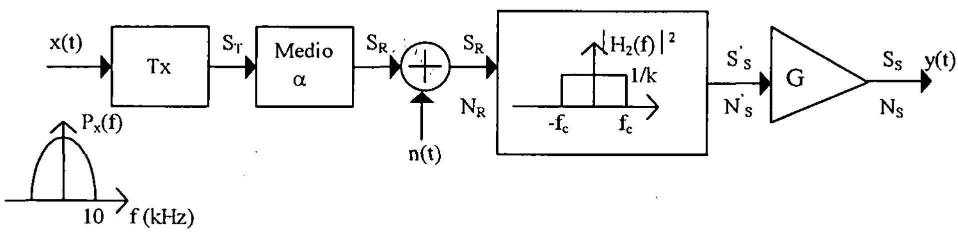
$$a_1 = a_{-1} = \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$Y_f(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\boxed{y_f(t) = \frac{1}{\pi}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)x(t) = \frac{2}{\pi}x(t)\cos\omega_0 t}$$

Equivale a haber multiplicado la entrada por un tono.

12.



Como G es ganancia en tensión, la ganancia en potencia será G^2:

$$\frac{S_S}{N_S} = \frac{S_S' G^2}{N_S' G^2} = \frac{S_S'}{N_S'} = 30dB = 10^3$$

$$N_S' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega)\left|H_2(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f)\left|H_2(f)\right|^2 df = \int_{-f_c}^{f_c} \frac{N_0}{2}\frac{1}{k}df =$$

$$= \frac{N_0}{2}\frac{1}{k}2f_c = 0{,}5\cdot 10^{-7}\frac{1}{2}2\cdot 10\cdot 10^3 = 0{,}5\, mW$$

$$S_S' = 10^3 N_S' = 0{,}5\, W \quad ; \qquad S_R = k\, S_S' = 2\cdot 0{,}5 = 1\, W$$

α_T: atenuación total introducida por el cable

$$\alpha_T = \frac{S_T}{S_R} = \frac{10\ W}{1\ W} = 10 \quad \Rightarrow \quad 10\log 10\ dB = 10\ dB$$

$$\alpha = \frac{\alpha_T}{d(km)} \qquad \Rightarrow \boxed{d(km) = \frac{\alpha_T}{\alpha} = \frac{10\ dB}{2\ dB/km} = 5\ km}$$

2

capítulo

Canales analógicos paso banda: modulaciones lineales

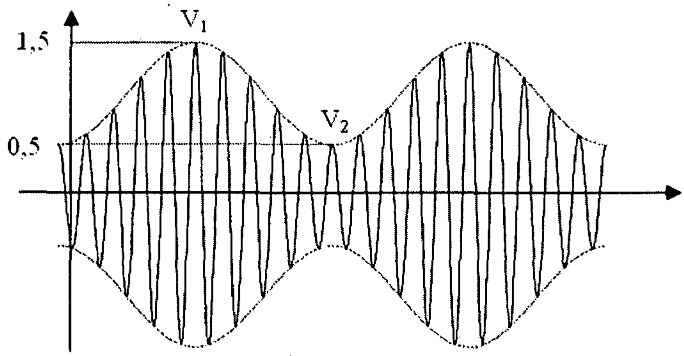
ENUNCIADOS

1. La señal $x(t) = 2 \cdot \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_m t)$ modula en AM una portadora de amplitud A_p=10 V de forma que la expresión de la señal modulada es $y_{AM}(t) = \left[A_p + K \cdot x(t)\right]\cos(\omega_p t)$.
   a) Calcule K para que la señal modulada se encuentre en el límite de la sobremodulación.
   b) Dibuje el espectro de la señal modulada.
   c) Calcule la potencia de la portadora, de las bandas laterales, la potencia media total y la potencia de pico o de cresta (PEP).

2. La señal $x(t) = K\left(\text{sen}(\omega_1 t) + \text{sen}(2\omega_2 t)\right)$ modula en BLU superior a una portadora de radiofrecuencia. La señal modulada se transmite a la potencia máxima del transmisor. Si éste tiene una potencia de cresta P, determinar la amplitud de la portadora en función de K y P.

3. Se modula en BLUI una portadora de 3 V. con dos tonos normalizados de frecuencias f_1 y f_2.
   a) Obtenga la expresión de la señal modulada y dibuje la transformada de Fourier.
   b) Obtenga la expresión de la envolvente real y a partir de ella calcule la potencia media y la de pico de la señal modulada.

4. Sea la señal de la figura donde la frecuencia de la moduladora es de 2 kHz y la frecuencia de la portadora es de 500 kHz.



a) ¿De qué tipo de modulación se trata?

b) Obtenga la expresión del índice de modulación en función de V_1 y V_2. Calcúlelo.

c) Calcule la potencia de la portadora.

d) Calcule la potencia de las bandas laterales.

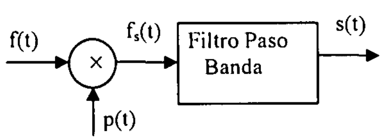
e) Calcule la potencia total de la señal.

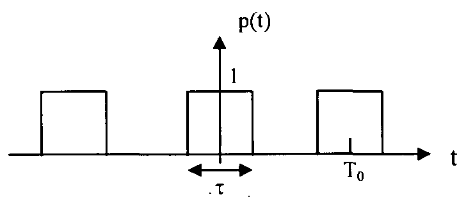
f) Calcule la eficiencia.

g) ¿Se puede demodular la señal por detección de envolvente? ¿Por qué?

h) Si el valor de pico de la moduladora fuese de 1,5 calcule el nuevo índice de modulación ¿Se produce sobremodulación? ¿Se puede demodular por detección de envolvente? ¿Y de forma síncrona? Razónelo.

5. En el diagrama de bloques de la figura f(t) es una señal limitada en banda a f_b Hz y p(t) una señal periódica de la forma que se indica. El filtro paso banda es ideal con ganancia unitaria en la banda de paso, se encuentra sintonizado a f_0 Hz ($f_0=1/T_0$) y tiene un ancho de banda de $2f_b$ Hz. Suponga $f_0>>f_b$.





a) Determine s(t), en función de To y τ.

b) ¿La salida s(t) es una modulación? En caso afirmativo indique de qué tipo y la frecuencia de la portadora.

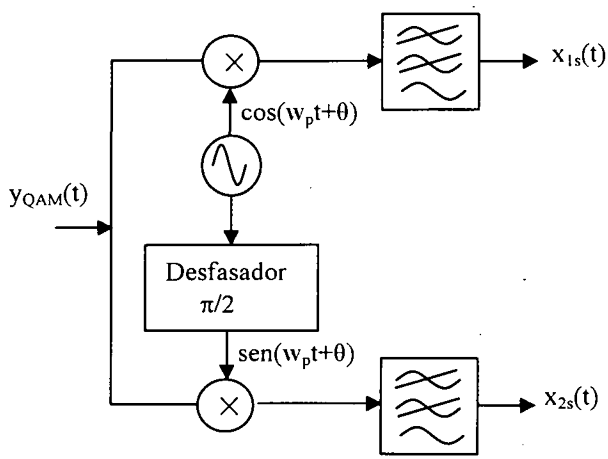
c) Si de la señal p(t) se puede variar τ, calcule para qué valor del ciclo de trabajo la amplitud de la salida s(t) es máxima.

6. Sea la señal f(t)=sinc(t):

a) Calcule su transformada de Hilbert en frecuencia $\hat{F}(w)$ y dibújela.

b) Si f(t) es la moduladora en una modulación en Banda Lateral Única Superior donde la frecuencia de la portadora es fp Hz, indique la expresión del espectro de la señal modulada y determine la expresión de la señal modulada en el tiempo.

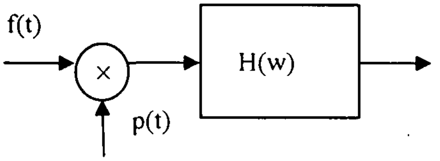
7. Considere el siguiente receptor de señales QAM en el que existe un error de fase respecto de la portadora recibida en la señal generada por el oscilador local.



a) Obtenga la señal a la salida de cada uno de los canales. Comente el resultado.

b) Comente en qué casos será posible recuperar las señales moduladoras.

8. Dado el diagrama de bloques de la figura:



donde f(t) está limitada en banda a f_b Hz y p(t) es una señal periódica de frecuencia f_s Hz.

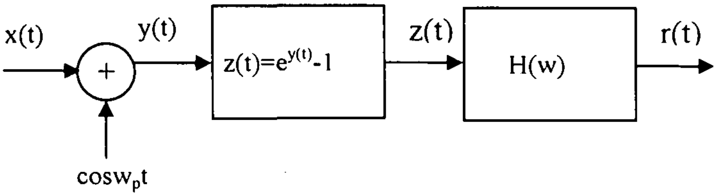
a) ¿Qué condición debe cumplir f_s para que no se pierda la información de f(t)?

b) ¿Qué expresión debe tener H(w) para que el sistema actúe como un generador de DBL con portadora f_s? ¿De forma ideal, qué se debe hacer para cambiar de portadora y qué posiciones espectrales se pueden tomar?

c) ¿Qué característica debe tener H(w) para que la señal a la salida sea f(t)?

d) Obtenga la respuesta impulsiva en ambos casos.

9. Sea el diagrama de bloques de la figura:

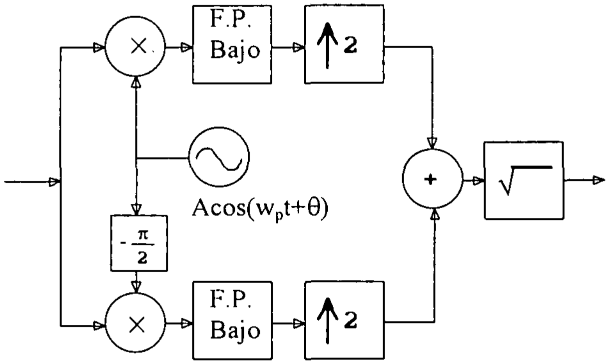


Si el espectro de x(t) está limitado en banda a f_b Hz, y $w_p >> w_b$:

a) Bosqueje el espectro de z(t). Considere sólo los cuatro primeros términos de la serie de potencias.

b) A partir de z(t) y con un filtro adecuado ¿se podría generar una modulación de amplitud de x(t)? En caso afirmativo indique el tipo de filtro, sugiriendo una característica de transferencia en frecuencias, e indique el tipo de modulación que se obtiene.

10. Sea el diagrama de bloques de la figura



a) ¿Puede ser empleado como demodulador de señales DBL? ¿Por qué?

b) ¿Y como detector de señales AM? ¿Por qué?

c) Indique cómo influye el error de fase θ en ambos casos.

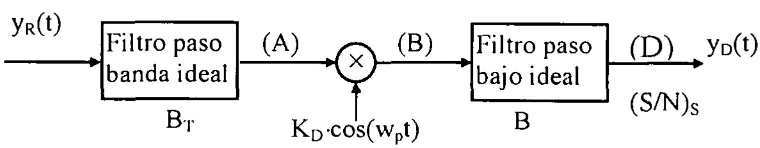
11. Se transmite una señal modulada en DBL por un canal con ruido blanco de DEP $P_n(f)=N_0/2=0{,}5\times10^{-8}$ W/Hz. La moduladora f(t) está limitada en banda a 4 kHz y se precisa una RSR a la salida de 30 dB. El receptor está compuesto por un filtro paso banda ideal a la entrada y un demodulador tal que cumple que la relación señal a ruido a la salida es el doble que la de la entrada. Se desea conocer:

a) Potencia de la señal recibida.

b) Potencia de la señal transmitida si el canal introduce una atenuación de 40 dB.

12. La señal de entrada al detector síncrono de la figura es

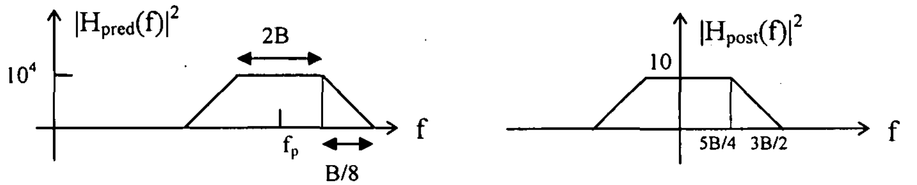
$$y_R(t) = [A_l + A_m x_m(t)]\cos(w_p t) - A_n \hat{x}(t)\,\mathrm{sen}(w_p t) + n(t)$$



donde $\hat{x}(t)$ es una transformación lineal de la señal x(t), n(t) es ruido blanco con densidad espectral de potencia $P_n(f)=N_0/2$ W/Hz, B_T es el ancho de banda de la señal de entrada y B es el ancho de banda de la señal moduladora x(t). Se supone que el filtro paso bajo además bloquea la componente contínua. Obtenga la relación señal a ruido a la salida $(S/N)_S$ y particularice los resultados para los casos de AM, DBL y BLU.

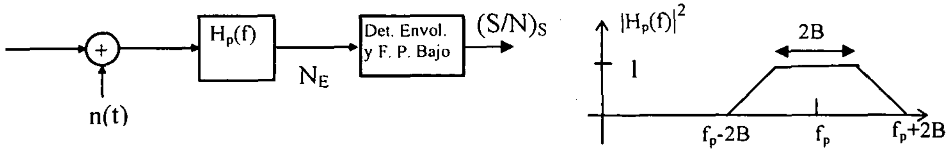
13. Un transmisor puede convertir en potencia media de señal modulada P_T, el 30% de su consumo. Si éste es de 1 kW, se modula con dos tonos de igual amplitud, la atenuación de propagación es de 40 dB y $P_n(f)= N_0/2= 0{,}5\cdot 10^{-9}$ W/Hz, obtenga:
    a) Potencia de las bandas laterales en el caso de emplear AM con m=1.
    b) Potencia media en el caso de modulación en BLU.
    c) Potencias de cresta en los dos casos anteriores.
    d) Si se utiliza una señal vocal con potencia media $\langle x_m^2(t)\rangle=0{,}2$ W y ancho de banda B=3 kHz, ¿cuál de los dos sistemas descritos resultará más apropiado?

14. En un sistema de modulación lineal, la potencia de pico del transmisor es de 50 W, la atenuación del medio es de 60 dB, la densidad espectral de potencia de ruido $P_n(f)= N_0/2=10^{-12}$ W/Hz, la potencia media de la moduladora $\langle x_m^2(t)\rangle=0{,}5$ W y su ancho de banda B=4 kHz. El demodulador del receptor es síncrono y los filtros de predetección y postdetección son los de la figura:



Halle las potencias de señal y ruido a la entrada del demodulador S_E, N_E y las relaciones $(S/N)_E$ y $(S/N)_S$ para :
    a) Un sistema de AM con índice de modulación del 80%.
    b) Un sistema de DBL.

15. El sistema receptor de la figura contiene un detector de envolvente de AM.



Calcule el valor mínimo de potencia de señal recibida para que esté por encima del umbral y obtenga la expresión de la S/N después del filtro de predetección.

Densidad espectral de potencia de ruido, $P_n(f)= N_0/2$ =-110 dBm/Hz

Ancho de banda de transmisión B_T=6 kHz.

16. Una emisora de onda media y modulación de amplitud radia una señal de anchura de banda B=10 kHz, potencia de moduladora $\langle x_m^2(t)\rangle$=0,8 W, índice de modulación m=0,85 y con una potencia media transmitida de 10 kW. La densidad espectral de potencia de ruido en recepción es $P_n(f)= N_0/2 = 10^{-11}$ W/Hz.

Un vehículo que tiene sintonizada esta emisora penetra en un paso subterráneo. En el interior del mismo la atenuación de propagación varía con la distancia según la ley:

$$A(dB)=a_0+a_1\cdot d(m), \quad a_0=10 \text{ dB}, a_1=1/3 \text{ dB/m}$$

Calcule:

a) La relación $(S/N)_S$ en el receptor al entrar en el paso si la atenuación de propagación en ese punto es de 80 dB.
b) Atenuación de propagación para la que se estará en el umbral de recepción.
c) ¿A qué distancia dentro del paso dejará de oírse la emisora?

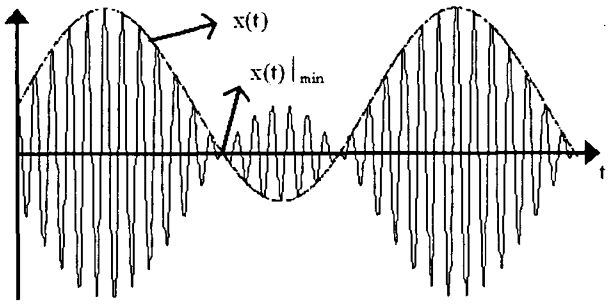
17. Se tiene un transmisor cuya potencia máxima disponible es PEP=1 kW. La señal moduladora es un tono de 3 kHz, la densidad espectral de potencia de ruido en recepción, $P_n(f)= N_0/2$ = -100 dBW/Hz y la atenuación de propagación en función de la distancia A(dB)=53+20·log(d(km)).

a) Si se efectúan modulaciones AM con índices de modulación m=0,3, 0,8 y 1, obtenga en cada caso la relación entre potencia de las bandas laterales y la total. ¿Cuál será más eficiente?

b) Si la relación $(S/N)_S$ mínima deseada es de 23 dB, calcule en cada caso, la máxima distancia a la que se debe situar un receptor para obtener la calidad deseada y efectúe los comentarios pertinentes.

SOLUCIONES

1. a)



La condición para que no exista sobremodulación será que la envolvente real $e_R(t)$ sea mayor o igual a 0.

$$y_{AM}(t) = \left[A_p + K \cdot x(t)\right]\cos\omega_p t \;\Rightarrow\; e_R(t) = \left|A_p + K \cdot x(t)\right|$$

$$e_R(t)\big|_{\min} = \left|A_p + K \cdot x(t)\right|_{\min} \;\Rightarrow\; A_p + K \cdot x(t)\big|_{\min} = 0 \;\Rightarrow\; K = -\frac{A_p}{x(t)\big|_{\min}}$$

Para calcular $x(t)_{\min}$ se deriva x(t) y se calcula el mínimo.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\omega_m(sen\omega_m t + sen2\omega_m t) = 0$$

$$sen\omega_m t + sen2\omega_m t = sen\omega_m t + 2sen\omega_m t \cdot \cos\omega_m t = sen\omega_m t(1 + 2\cos\omega_m t) = 0$$

$$\text{Soluciones:} \begin{cases} sen\omega_m t = 0 & \Rightarrow & \omega_m t = 0, \pi \\ 1 + 2\cos\omega_m t = 0 & \Rightarrow & \omega_m t = \arccos(-1/2) = \pm\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \omega_m t = 0 & \rightarrow & x(t) = 3 \\ \omega_m t = \pi & \rightarrow & x(t) = -1 \\ \omega_m t = \pm\dfrac{2\pi}{3} & \rightarrow & x(t) = -3/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t)\big|_{\max} = 3 \\ x(t)\big|_{\min} = -3/2 \end{array}$$

$$\boxed{K = -\frac{A_p}{x(t)\big|_{\min}} = -\frac{10}{-3/2} = \frac{20}{3}}$$

La expresión de la señal modulada será:

$$y_{AM}(t) = A_p\left[1 - \frac{x(t)}{x(t)|_{\min}}\right]\cos\omega_p t$$

b) $$y_{AM}(t) = A_p \cos\omega_p t - \frac{A_p}{x(t)|_{\min}}(2\cos\omega_m t + \cos 2\omega_m t)\cos\omega_p t =$$

$$= 10\cos\omega_p t + \frac{40}{3}\cos\omega_m t \cdot \cos\omega_p t + \frac{20}{3}\cos 2\omega_m t \cdot \cos\omega_p t =$$

$$= 10\cos\omega_p t + \frac{20}{3}\left[\cos(\omega_p + \omega_m)t + \cos(\omega_p - \omega_m)t\right] +$$

$$+ \frac{10}{3}\left[\cos(\omega_p + 2\omega_m)t + \cos(\omega_p - 2\omega_m)t\right]$$

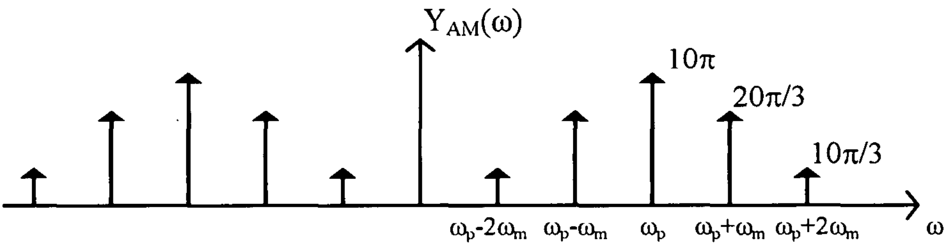
$$Y_{AM}(\omega) = 10\pi\left[\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)\right] +$$

$$+ \frac{20}{3}\pi\,[\delta(\omega - (\omega_p + \omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_p + \omega_m)) +$$

$$+ \delta(\omega - (\omega_p - \omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_p - \omega_m))] +$$

$$+ \frac{10}{3}\pi\,[\delta(\omega - (\omega_p + 2\omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_p + 2\omega_m)) +$$

$$+ \delta(\omega - (\omega_p - 2\omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_p - 2\omega_m))]$$



c) $$\underline{P_p} = \frac{1}{2}A_p^2 = \frac{1}{2}10^2 = \underline{50\,W}$$

$$\underline{P_{BL}} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \underline{55.6\,W}$$

$$\underline{P_T} = P_p + P_{BL} = \underline{105.6\,W}$$

$$\underline{PEP} = \frac{1}{2}\left[A_p\left(1 - \frac{x(t)|_{\max}}{x(t)|_{\min}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[10\left(1 - \frac{3}{-3/2}\right)\right]^2 = \frac{30^2}{2} = \underline{450\,W}$$

2. $x(t) = K(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t) \Rightarrow \hat{x}(t) = K(-\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$

$\hat{x}(t)$: Transformada de Hilbert

$$y_{BLUS}(t) = K(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)\cdot A_p\cos\omega_p t - K(-\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)\cdot A_p sen\omega_p t =$$
$$= K\cdot A_p(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)\cos\omega_p t + K\cdot A_p(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)sen\omega_p t$$

$$x_f(t) = K\cdot A_p(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t); \qquad x_c(t) = K\cdot A_p(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

$$PEP = \frac{1}{2}\left(e_R(t)|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_f^2(t) + x_c^2(t)}\Big|_{\max}\right)^2 = P$$

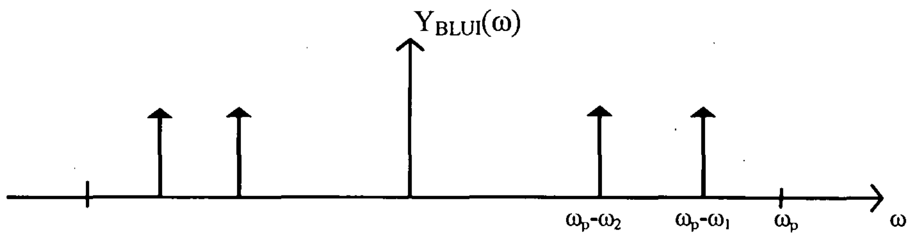
$$e_R^2(t) = x_f^2(t) + x_c^2(t) = K^2A_p^2(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)^2 + K^2A_p^2(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2 =$$
$$= K^2A_p^2(sen^2\omega_1 t + sen^2\omega_2 t + 2sen\omega_1 t\cdot sen\omega_2 t +$$
$$+\cos^2\omega_1 t + \cos^2\omega_2 t + 2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t = K^2A_p^2(2 + 2\cos(\omega_1 - \omega_2)t)$$

$$e_R^2(t)\big|_{\max} = 4\cdot K^2A_p^2$$

$$P = \frac{1}{2}e_R^2(t)\big|_{\max} = \frac{1}{2}4K^2A_p^2 \Rightarrow \boxed{A_p = \frac{1}{K}\sqrt{P/2}}$$

3. a) $x(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t \qquad \Rightarrow \hat{x}(t) = sen\omega_1 t + sen\omega_2 t$

$$\boxed{y_{BLUI}(t) = (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)\cdot A_p\cos\omega_p t + (sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)\cdot A_p sen\omega_p t}$$



b) $x_f(t) = A_p(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$; $\quad x_c(t) = A_p(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)$

$$e_R^2(t) = x_f^2(t) + x_c^2(t) = A_p^2(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2 + A_p^2(sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)^2 =$$

$$= A_p^2(\cos^2\omega_1 t + \cos^2\omega_2 t + 2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t +$$

$$+ sen^2\omega_1 t + sen^2\omega_2 t + 2sen\omega_1 t\cdot sen\omega_2 t) = 2A_p^2\left(1+\cos(\omega_1-\omega_2)t\right)$$

$$\boxed{e_R(t) = \sqrt{2}A_p\sqrt{1+\cos(\omega_1-\omega_2)t}}$$

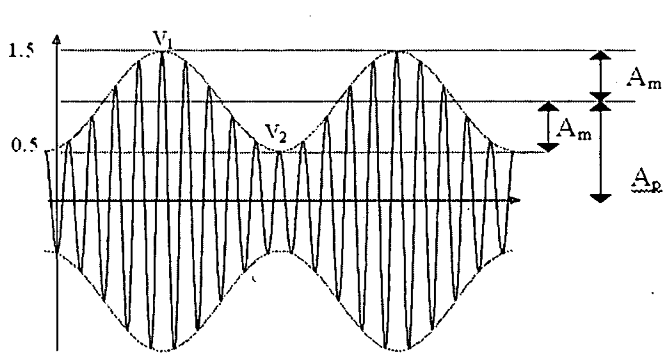
$$\underline{P_y} = \frac{1}{2}\left\langle e_R^2(t)\right\rangle = \frac{2A_p^2}{2}\left\langle\left(1+\cos(\omega_1-\omega_2)t\right)\right\rangle = A_p^2 = \underline{9\,W}$$

$$\underline{PEP} = \frac{1}{2}e_R^2(t)\Big|_{\max} = \frac{2A_p^2}{2}(1+1) = 2A_p^2 = \underline{18\,W}$$

4. $f_m = 2$ kHz
   $f_p = 500$ kHz

   a) Es una modulación AM.

   b)



$$\left.\begin{aligned} V_1 &= A_m + A_p \\ V_2 &= A_p - A_m \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} A_p &= (V_1+V_2)/2 \\ A_m &= (V_1-V_2)/2 \end{aligned}$$

$$m = \frac{A_m}{A_p} = \frac{(V_1-V_2)/2}{(V_1+V_2)/2} = \frac{(V_1-V_2)}{(V_1+V_2)} \Rightarrow m = \frac{1,5-0,5}{1,5+0,5} = 1/2 = 0,5 \qquad \boxed{m = 50\ \%}$$

c) $P_p = \frac{1}{2}A_p^2$; $A_p = (V_1+V_2)/2 = 1\,V$ $\quad\boxed{P_p = 0,5\,W}$

d) $y_{AM}(t) = A_p \cos\omega_p t + A_m \cos\omega_m t \cos\omega_p t \quad ; \; A_m = (V_1 - V_2)/2 = 0{,}5\,V$

$$P_{BL} = \frac{1}{2}\left\langle (A_m \cos\omega_m t)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{A_m^2}{2} = \frac{(0{,}5)^2}{4} = 62{,}5\,mW \qquad \boxed{P_{BL} = 62{,}5\,mW}$$

e) $\boxed{P_T = P_p + P_{BL} = 562{,}5\,mW}$

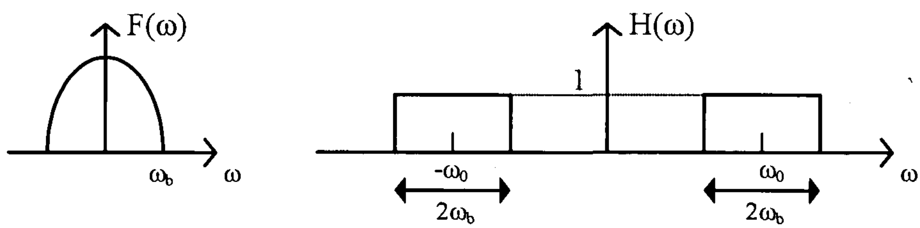
f) $\boxed{\eta = \frac{P_{BL}}{P_T} = \frac{62{,}5}{562{,}5} = 0{,}11 = 11\%}$

g) Sí, ya que no está sobremodulada.

h) $A_m = 1{,}5\,V \Rightarrow m = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5 = 150\% > 100\% \quad \Rightarrow$ Hay sobremodulación.

Por lo tanto, no se puede demodular por detección de envolvente, pero sí de forma coherente.

5.



a) s(t) = ?

$$f_s(t) = f(t)\cdot p(t) \xrightarrow{TF} F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} P_{np}(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

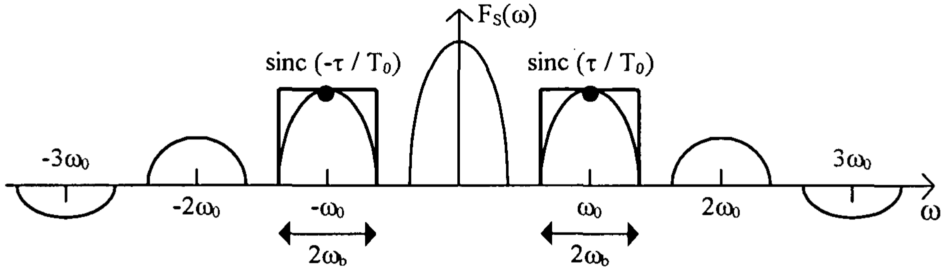
$P_{np}(\omega)$: T.F. de la señal no periódica a partir de la cual se forma p(t).

$$p_{np}(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\tau \cdot sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\tau \cdot sinc\left(\frac{k\dfrac{2\pi}{T_0}\tau}{2\pi}\right) = \frac{\tau}{T_0} sinc\left(k\frac{\tau}{T_0}\right)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T_0} sinc\left(k\frac{\tau}{T_0}\right)\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc\left(k\frac{\tau}{T_0}\right)\mathrm{F}(\omega - k\omega_0)$$



$$S(\omega) = \frac{\tau}{T_0}\left[sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right)\mathrm{F}(\omega - \omega_0) + sinc\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)\mathrm{F}(\omega + \omega_0)\right]$$

$$sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right) = sinc\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)$$

$$S(\omega) = \frac{\tau}{T_0} sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right)\left(\mathrm{F}(\omega - \omega_0) + \mathrm{F}(\omega + \omega_0)\right)$$

$$s(t) = \frac{\tau}{T_0} sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right)\left(f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}\right) = 2\frac{\tau}{T_0} sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right) f(t)\cos\omega_0 t$$

$$\boxed{s(t) = 2\frac{\tau}{T_0} sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right) f(t)\cos\omega_0 t}$$

b) Se trata de una modulación en Doble Banda Lateral siendo la frecuencia de la portadora $f_0 = 1/T_0$ Hz.

c) s(t) será máxima cuando $2\frac{\tau}{T_0} sinc\left(\frac{\tau}{T_0}\right)$ sea máximo.

Para ello se calcula la derivada de este término.

$$2\frac{\tau}{T_0}\frac{\text{sen}\left(\pi\frac{\tau}{T_0}\right)}{\pi\frac{\tau}{T_0}} = \frac{2}{\pi}\text{sen}\left(\pi\frac{\tau}{T_0}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{2}{\pi}\text{sen}\left(\pi\frac{\tau}{T_0}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{T_0}\cos\left(\pi\frac{\tau}{T_0}\right) = 0 \Rightarrow \pi\frac{\tau}{T_0} = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{2} = 50\%}$$

6. f(t) = sinc(t)

a) $\hat{F}(\omega) = ?$

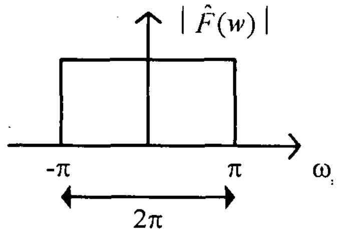
$\hat{f}(t)$: Transformada de Hilbert de f(t).

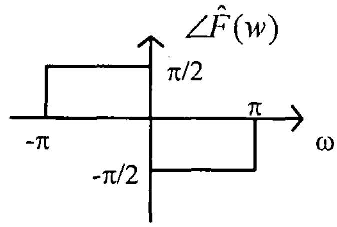
$\hat{F}(\omega)$: Transformada de Fourier de la Transformada de Hilbert de f(t).

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{TF} \tau \cdot sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \Rightarrow \tau \cdot sinc\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$sinc\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{\tau}\Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right); \quad \tau = 2\pi \Rightarrow sinc(t) \xrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\boxed{\hat{F}(\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$



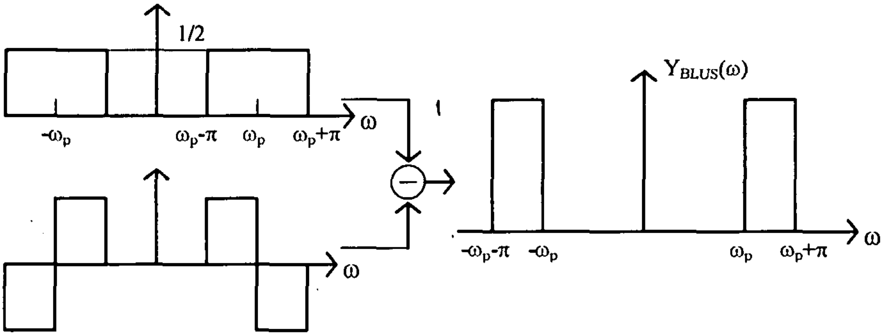


b) $y_{BLUS}(t) = f(t)\cos\omega_p t - \hat{f}(t) sen\omega_p t$

$$Y_{BLUS}(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \pi \left[\delta(\omega + \omega_p) + \delta(\omega - \omega_p)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi} F(\omega)\left(-j\,\mathrm{sgn}(\omega)\right) * j\pi \left[\delta(\omega + \omega_p) - \delta(\omega - \omega_p)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\omega + \omega_p)(1 - sig(w + w_p)) + F(\omega - \omega_p)(1 + sig(w - w_p))\right]$$



$$\boxed{Y_{BLUS}(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - (\omega_p + \pi/2)}{\pi}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + (\omega_p + \pi/2)}{\pi}\right)}$$

$$\frac{\tau}{2\pi} sinc\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \quad ; \tau = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi} sinc\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$y_{BLUS}(t) = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{t}{2}\right) e^{j(\omega_p + \pi/2)t} + \frac{1}{2} sinc\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j(\omega_p + \pi/2)t}$$

$$\boxed{y_{BLUS}(t) = sinc\left(\frac{t}{2}\right)\cos(\omega_p + \pi/2)t}$$

7. $y_{QAM}(t) = x_1(t) A_p \cos\omega_p t + x_2(t) A_p sen\omega_p t$

a) **Rama superior:**

$$y_{QAM}(t)\cdot\cos(\omega_p t + \theta) = A_p x_1(t)\cos\omega_p t \cdot \cos(\omega_p t + \theta) + A_p x_2(t) sen\omega_p t \cdot \cos(\omega_p t + \theta) =$$

$$= \frac{A_p}{2} x_1(t)\left(\cos(2\omega_p t + \theta) + \cos\theta\right) + \frac{A_p}{2} x_2(t)\left(sen(2\omega_p t + \theta) + sen(-\theta)\right)$$

$$\boxed{x_{1s}(t) = \frac{A_p}{2}\cos\theta \cdot x_1(t) - \frac{A_p}{2} sen\theta \cdot x_2(t)}$$

Rama inferior:

$$y_{QAM}(t)\cdot sen(\omega_p t+\theta)=A_p x_1(t)\cos\omega_p t\cdot sen(\omega_p t+\theta)+A_p x_2(t) sen\omega_p t\cdot sen(\omega_p t+\theta)$$

$$=\frac{A_p}{2}x_1(t)\left(sen(2\omega_p t+\theta)+sen\theta\right)+\frac{A_p}{2}x_2(t)\left(\cos\theta-\cos(2\omega_p t+\theta)\right)$$

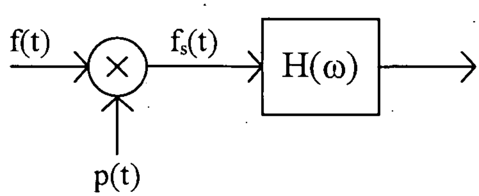
$$\boxed{x_{2s}(t)=\frac{A_p}{2}sen\theta\ \cdot x_1(t)+\frac{A_p}{2}\cos\theta\ \cdot x_2(t)}$$

Las dos señales moduladoras aparecen mezcladas a las salidas de ambas ramas, dependiendo la amplitud del error de fase cometido.

b) Solamente será posible recuperar las moduladoras sin que aparezcan mezcladas cuando el error de fase sea múltiplo entero de $\pi/2$.

θ	0	π/2	π	3π/2
$\mathbf{x_{1s}(t)}$	$x_1(t)$	$-x_2(t)$	$-x_1(t)$	$x_2(t)$
$\mathbf{x_{2s}(t)}$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$-x_2(t)$	$-x_1(t)$

8.

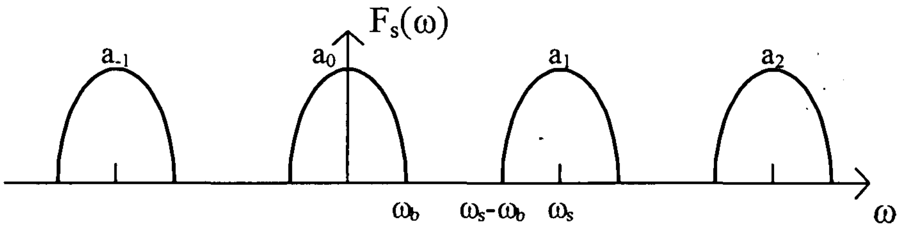


a) $f_s(t)=f(t)\cdot p(t)\ \xrightarrow{TF}\ F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$

$$P(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kF(\omega)*\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$\boxed{F_s(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kF(\omega-k\omega_s)}$$



Para que no se pierda la información, los espectros no deben solaparse y ello ocurrirá cuando:

$$\boxed{\omega_s - \omega_b \geq \omega_b \;\; \Rightarrow \;\; f_s \geq 2f_b}$$

b) Hay que hacer un filtrado paso banda, centrado en ω_s y ancho de banda $2\omega_b$.

$$\boxed{H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - \omega_s}{2\omega_b}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + \omega_s}{2\omega_b}\right)}$$

Para cambiar de portadora hay que cambiar la frecuencia donde se centra el filtrado. Estas frecuencias serán los múltiplos enteros de ω_s: $\pm 2\omega_s \pm 3\omega_s$ ...

c) Se debe realizar un filtrado paso bajo.

$$\boxed{H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_b}\right)}$$

d) $\frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{t\,B}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{B}\right)$

Para el caso del filtro paso banda:

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - \omega_s}{2\omega_b}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + \omega_s}{2\omega_b}\right)$$

$$h(t) = \frac{2\omega_b}{2\pi} sinc\left(\frac{t\,2\omega_b}{2\pi}\right)\left(e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t}\right)$$

Para el caso del filtro paso bajo:

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_b}\right)$$

$$\boxed{h(t) = \frac{2\omega_b}{2\pi} sinc\left(\frac{t\,2\omega_b}{2\pi}\right) = \frac{\omega_b}{\pi} sinc\left(\frac{t\,\omega_b}{\pi}\right)}$$

9. a) $z(t) = e^{y(t)} - 1$

$y(t) = x(t) + \cos\omega_p t$

Desarrollo en serie: $e^{y(t)} = 1 + y(t) + \frac{y^2(t)}{2!} + \frac{y^3(t)}{3!} + \ldots$

$$z(t) = 1 + y(t) + \frac{y^2(t)}{2!} + \frac{y^3(t)}{3!} - 1 =$$

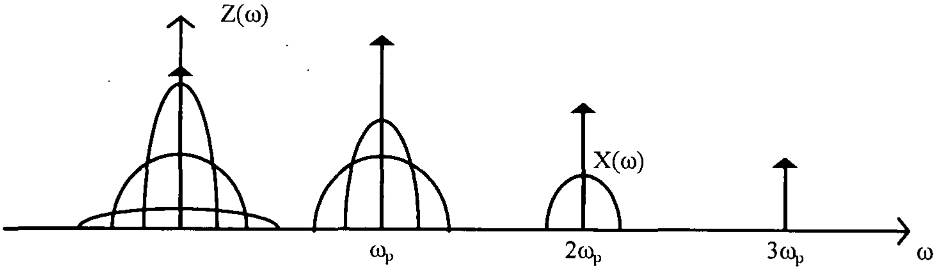
$$= x(t) + \cos\omega_p t + \frac{1}{2}\left(x(t) + \cos\omega_p t\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x(t) + \cos\omega_p t\right)^3 =$$

$$= x(t) + \cos\omega_p t + \frac{1}{2}\left(x^2(t) + 2x(t)\cos\omega_p t + \cos^2\omega_p t\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x^3(t) + 3x^2(t)\cos\omega_p t + 3x(t)\cos^2\omega_p t + \cos^3\omega_p t\right) =$$

$$= x(t) + \cos\omega_p t + \frac{1}{2}x^2(t) + x(t)\cos\omega_p t + \frac{1}{4}\left(1 + \cos 2\omega_p t\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t)\cos\omega_p t + \frac{1}{4}x(t)\left(1 + \cos 2\omega_p t\right) + \frac{1}{24}\left(3\cos\omega_p t + \cos 3\omega_p t\right)$$



b) Haciendo un filtrado pasobanda en $2\omega_p$ con ancho de banda $2\omega_b$ se obtendrá una modulación AM.

$$\boxed{H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 2\omega_p}{2\omega_b}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 2\omega_p}{2\omega_b}\right)}$$

$$r(t) = \frac{1}{4}\cos 2\omega_p t + \frac{1}{4}x(t)\cos 2\omega_p t$$

$$\boxed{r(t) = \frac{1}{4}(1 + x(t))\cos 2\omega_p t}$$

10. a) Para ver si puede demodular DBL, suponemos una señal modulada en DBL a la entrada y vemos qué ocurre a la salida.

Rama superior:

$$A_m x_m(t)\cos\omega_p t \cdot \cos(\omega_p t + \theta) = \frac{A_m}{2}x_m(t)[\cos(2\omega_p t + \theta) + \cos\theta]$$

Después del filtro pasobajo: $\frac{A_m}{2}x_m(t)\cos\theta$

Después de elevar al cuadrado: $\left(\frac{A_m}{2}x_m(t)\cos\theta\right)^2$

Rama inferior:

$$A_m x_m(t)\cos\omega_p t \cdot sen(\omega_p t + \theta) = \frac{A_m}{2}x_m(t)[sen(2\omega_p t + \theta) + sen\theta]$$

Después del filtro pasobajo: $\frac{A_m}{2}x_m(t)sen\theta$

Después de elevar al cuadrado: $\left(\frac{A_m}{2}x_m(t)sen\theta\right)^2$

A la salida queda:

$$y_s(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{A_m}{2}x_m(t)\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{A_m}{2}x_m(t)\right)^2 sen^2\theta} = \pm\frac{A_m}{2}|x_m(t)|$$

No puede demodular DBL porque sólo disponemos del módulo de la señal moduladora.

b) **Rama superior:**

$$A_p(1+m\cdot x_m(t))\cos\omega_p t\cdot\cos(\omega_p t+\theta)=\frac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\left[\cos(2\omega_p t+\theta)+\cos\theta\right]$$

Después del filtro pasobajo: $\dfrac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\cos\theta$

Después de elevar al cuadrado: $\left(\dfrac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\right)^2\cos^2\theta$

Rama inferior:

$$A_p(1+m\cdot x_m(t))\cos\omega_p t\cdot sen(\omega_p t+\theta)=\frac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\left[sen(2\omega_p t+\theta)+sen\theta\right]$$

Después del filtro pasobajo: $\left(\dfrac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\right)^2 sen^2\theta$

Después de elevar al cuadrado: $\left(\dfrac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\right)^2 sen^2\theta$

A la salida queda:

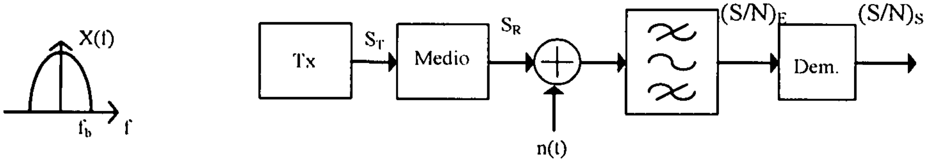
$$y_s(t)=\pm\sqrt{\left(\frac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{A_p(1+m\cdot x_m(t))}{2}\right)^2 sen^2\theta}=$$

$$=\pm\left|\frac{A_p}{2}(1+m\cdot x_m(t))\right|=\pm\frac{A_p}{2}\left|(1+m\cdot x_m(t))\right|$$

Servirá para demodular AM siempre y cuando la señal no esté sobremodulada, ya que en ese caso el término $(1+m\cdot x_m(t))$ es siempre positivo y al tomar el módulo no se perderá x(t). El demodulador funcionará como un detector de envolvente.

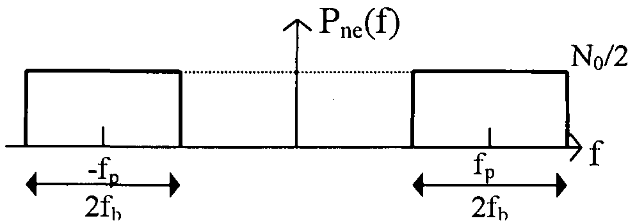
c) En ambos casos θ no influye en nada.

11.



f_b=4 kHz

a)



$$P_{ne} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{ne}(f)df = 2\int_{f_p-f_b}^{f_p+f_b} \frac{N_0}{2}df$$

$$N_E = N_0 \cdot 2f_b = 10^{-8} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^{-5}\ W$$

$$GP = \frac{\left(S/N\right)_S}{\left(S/N\right)_E} = 2 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{10^3}{2}$$

$$S_E = \left(\frac{S}{N}\right)_E \cdot N_E = \frac{10^3}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-5}\ W$$

$$\boxed{S_E = 4 \cdot 10^{-2}\ W}$$

b) $\alpha = 40\ dB = 10^4$; $\alpha = \frac{S_T}{S_R}$; $S_R = S_E$

$$\boxed{S_T = \alpha \cdot S_R = 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 400\,W}$$

12. A la salida del filtro paso banda, el ruido será una señal paso banda.

$$y_A(t) = \left(A_l + A_m x_m(t)\right)\cos\omega_p t - A_n\hat{x}(t)sen\omega_p t + n_F(t)\cos\omega_p t - n_C(t)sen\omega_p t$$

$$y_B(t) = k_D\left(A_l + A_m x_m(t) + n_F(t)\right)\cos^2\omega_p t - k_D\left(A_n\hat{x}(t) + n_C(t)\right)sen\omega_p t\cos\omega_p t$$

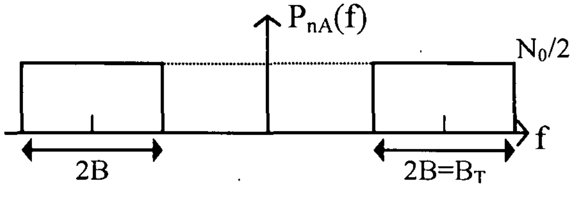
$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\omega_p t = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\omega_p t\right)\\ sen\omega_p t\cdot\cos\omega_p t = \dfrac{1}{2}sen 2\omega_p t\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_D(t) = \frac{k_D}{2}\left[A_m x_m(t) + n_F(t)\right]$$

$$Señal:\ s_D(t) = \frac{k_D A_m}{2}x_m(t)$$

$$Ruido:\ n_D(t) = \frac{k_D}{2}n_F(t)$$

Las potencias de señal y ruido a la salida son:

AM



$$A_n = 0$$

$$B_T = 2B = B_N$$

$$\left\langle n^2(t)\right\rangle = \left\langle n_F^2(t)\right\rangle = 2\int_{f_p-B}^{f_p+B}\frac{N_0}{2}df = 2\cdot\frac{N_0}{2}\cdot 2B = 2N_0 B$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{s_D}{n_D} = \frac{\left(\dfrac{k_D A_m}{2}\right)^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{\left(\dfrac{k_D}{2}\right)^2 2N_0 B} = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{2N_0 B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{2N_0 B}}$$

DBL

$$A_n = A_l = 0$$

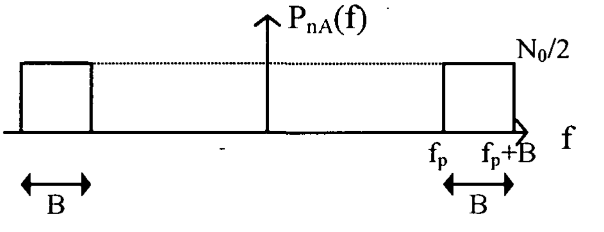
$$B_T = 2\,\mathrm{B} = B_N$$

$$\left\langle n_F^2(t)\right\rangle = 2N_0B$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{\left(\frac{k_D A_m}{2}\right)^2 \left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{\left(\frac{k_D}{2}\right)^2 2N_0B} = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{2N_0B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{2\mathrm{N}_0B}}$$

BLU



$$A_l = 0 \;;\; A_m = A_n$$

$$B_T = B = B_N$$

$$\left\langle n^2(t)\right\rangle = \left\langle n_F^2(t)\right\rangle = 2\int_{f_p}^{f_p+B} \frac{N_0}{2}\,df = 2\cdot\frac{N_0}{2}\cdot B = N_0B$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{\left(\frac{k_D A_m}{2}\right)^2 \left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{\left(\frac{k_D}{2}\right)^2 N_0B} = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{N_0B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{N_0B}}$$

13. a) AM, m=1

P_T = 30 % de 1 kW = $0.3 \cdot 10^3$ = 300 W Potencia de señal transmitida

Modulación con dos tonos de igual amplitud:

$$A_m x_m(t) = A_m\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) \quad \text{(No está normalizada)}$$

$$y_{AM}(t) = \left[A_p + A_m\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)\right]\cos\omega_p t$$

$$m = 1 \;\Rightarrow\; A_p + A_m\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)\Big|_{\min} = 0$$

$$\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)\Big|_{min} = -2$$ (Se ha supuesto que ambos tonos alcanzan su valor mínimo simultáneamente)

$$A_p - 2A_m = 0 \;\Rightarrow\; A_m = \frac{A_p}{2}$$

$$y_{AM}(t) = A_p\left[1 + \frac{1}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)\right]\cos\omega_p t =$$

$$= A_p\cos\omega_p t + \frac{A_p}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)\cos\omega_p t =$$

$$= A_p\cos\omega_p t + \frac{A_p}{4}\cos(\omega_p + \omega_1)t + \frac{A_p}{4}\cos(\omega_p - \omega_1)t +$$

$$+ \frac{A_p}{4}\cos(\omega_p + \omega_2)t + \frac{A_p}{4}\cos(\omega_p - \omega_2)t$$

La señal está constituida por una portadora de amplitud A_p y cuatro tonos de amplitud $A_p/4$ que constituyen las bandas laterales.

$$P_P = \frac{A_p^2}{2}; \quad P_{BL} = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{A_p}{4}\right)^2 = \frac{A_p^2}{8}$$

$$P_T = P_P + P_{BL} = \frac{A_p^2}{2} + \frac{A_p^2}{8} = \frac{5}{8}A_p^2 = 300\,W \;\Rightarrow\; A_p = \sqrt{480} = 21{,}9\,V$$

$$\boxed{P_{BL} = \frac{A_p^2}{8} = 60\,W}; \quad P_P = 240\,W$$

b) $y(t) = A_m x(t)\cos\omega_p t - A_m \hat{x}(t) sen\omega_p t$; BLUS

$$P_T = P_{BL} = \frac{1}{2}\left\langle x_F^2(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle x_C^2(t)\right\rangle = \frac{A_m^2}{2}\left\langle x_m^2(t)\right\rangle + \frac{A_m^2}{2}\left\langle \hat{x}_m^2(t)\right\rangle = A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle = 300\,W$$

$$\boxed{P_T = P_{BL} = 300\ W}$$

$$\left\langle x_m^2(t)\right\rangle = \left\langle (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2\right\rangle = \left\langle \cos^2\omega_1 t\right\rangle + \left\langle \cos^2\omega_2 t\right\rangle + \left\langle 2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1;\quad \text{Se cumple que } \left\langle 2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t\right\rangle = 0$$

$$A_m = \sqrt{300} = 17{,}32\,V$$

c) $$\mathrm{PEP}\big|_{AM} = \frac{1}{2}\left(e_R(t)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[A_p\left(1 + \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)\right)\Big|_{\max}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(2A_p)^2 = 2A_p^2 = 2\cdot 480 = 960\,W;\ \text{Se cumple } (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)\big|_{max} = 2$$

$$\boxed{\mathrm{PEP}\big|_{AM} = 960\ W}$$

$$\mathrm{PEP}\big|_{BLU} = \frac{1}{2}\left(e_R(t)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A_m^2 x_m^2(t) + A_m^2\hat{x}_m^2(t)}\Big|_{\max}\right)^2 =$$

$$= \frac{A_m^2}{2}\left(x_m^2(t) + \hat{x}_m^2(t)\right)\Big|_{\max} = \frac{A_m^2}{2}\left[(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2 + (sen\omega_1 t + sen\omega_2 t)^2\right]_{\max} =$$

$$= \frac{A_m^2}{2}\left|\cos^2\omega_1 t + sen^2\omega_1 t + \cos^2\omega_2 t + sen^2\omega_2 t + 2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t +\right.$$

$$\left. + 2sen\omega_1 t\cdot sen\omega_2 t\right|_{\max} = \frac{A_m^2}{2}\left\|2 + 2\cos(\omega_1 - \omega_2)t\right|_{\max} =$$

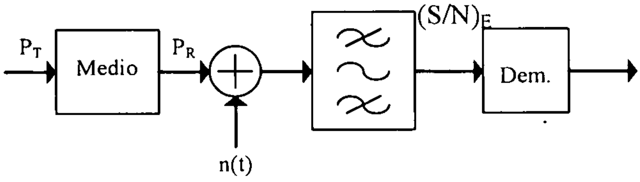
$$= \frac{A_m^2}{2}[2+2] = 2A_m^2 = 2\cdot 300 = 600\,W$$

Debido a que $\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t = 1$

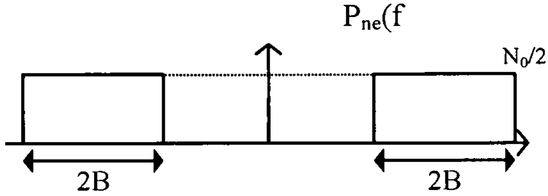
$$2\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t + 2\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t\cdot\mathrm{sen}\,\omega_2 t = 2\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

$$\boxed{\mathrm{PEP}\big|_{BLU} = 600\ W}$$

d)



AM



$$N_E = 2\frac{N_0}{2}2\,\mathrm{B} = 2N_0B = 2\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{3} = 6\mu\, W$$

$$P_T = \frac{1}{2}A_p^2\left(1+m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right) = \frac{A_p^2}{2}\left(1+1^2\cdot 0{,}2\right) = A_p^2\cdot 0{,}6 = 300\,W$$

$$A_p = \sqrt{500} = 22{,}36\,V$$

$$P_P = \frac{1}{2}A_p^2 = \frac{500}{2} = 250\,W$$

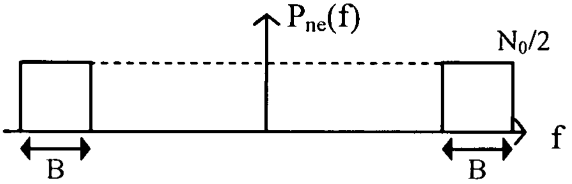
$$P_{BL} = \frac{A_p^2}{2}m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle = \frac{500}{2}\cdot 0{,}2 = 50\,W$$

P_T es la potencia de señal enviada $\Rightarrow\ S_E = \dfrac{P_T}{\alpha} = \dfrac{300\,W}{10^4} = 30\,mW$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{S_E}{N_E} = \frac{P_T/\alpha}{2N_0B} = \frac{30\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-6}} = 5000 = 37\,dB$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = GP\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\frac{m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}{1+\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}\left(\frac{S}{N}\right)_E = 32{,}2\,dB$$

BLU



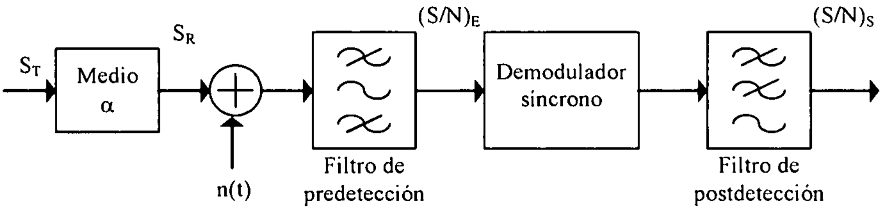
$$N_E = 2\frac{N_0}{2}B = N_0 B = 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^3 = 3\ \mu W$$

$$S_E = \frac{P_T}{\alpha} = \frac{P_{BL}}{\alpha} = \frac{300\ W}{10^4} = 30\ mW$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{S_E}{N_E} = \frac{P_T/\alpha}{N_0 \mathrm{B}} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-6}} = 10^4 = 40\ dB = \left(\frac{S}{N}\right)_S$$

Como no nos dicen nada sobre el tipo de demodulador empleado, suponemos un demodulador síncrono y medimos la calidad mediante la $(S/N)_S$. El sistema más apropiado será el de BLU ya que presenta la mayor relación señal a ruido a la salida.

14. a) **Sistema AM con un índice de modulación m = 80 %**



$$PEP = \frac{1}{2}\left(e_R(t)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A_p\left(1 + m \cdot x_m(t)\right)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}A_p^2(1+m)^2$$

$$50\ W = \frac{A_p^2}{2}(1+0{,}8)^2;\quad A_p^2 = \frac{100}{1{,}8^2};\quad A_p = 5{,}5\ V$$

$$P_{BL} = \frac{1}{2}A_p^2\left(m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{1{,}8^2}\cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}5 = 4{,}93\ W$$

$$P_p = \frac{1}{2}A_p^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{1{,}8^2} = 15{,}43\ W$$

$$P_T = 20{,}37\, W = S_T$$

En la potencia transmitida se incluye tanto la potencia de señal como la de portadora, no transmitiendo información esta última. Una vez se demodula en recepción, la potencia que se recupera de señal será la fracción de potencia de las bandas laterales respecto a la potencia total.

$$S_E = P_P + P_{BL}$$

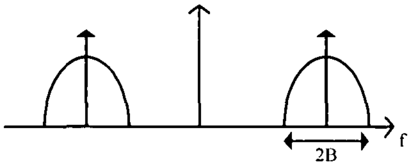
$$S_S = S_E \cdot \frac{P_{BL}}{P_T} = S_E \frac{\frac{1}{2} A_p^2 \left(m^2 \left\langle x_m^2(t) \right\rangle\right)}{\frac{1}{2} A_p^2 \left(1 + m^2 \left\langle x_m^2(t) \right\rangle\right)}$$

$$S_S = S_E \frac{\left(m^2 \left\langle x_m^2(t) \right\rangle\right)}{\left(1 + m^2 \left\langle x_m^2(t) \right\rangle\right)} = S_E \cdot \frac{4{,}93}{20{,}37} = S_E \cdot 0{,}24 = S_E \cdot 24\%$$

A la entrada del filtro de predetección:

$$S_R = \frac{S_T}{\alpha}; \quad \alpha = 60\, dB = 10^6 \;\Rightarrow\; S_R = \frac{20{,}37}{10^6} = 20{,}37\, \mu W$$

Potencias de señal y ruido a la salida del filtro de predetección:

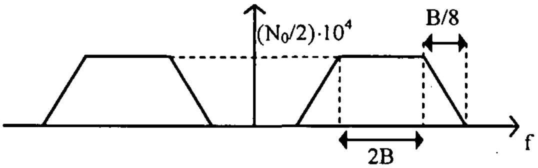


A la señal no le afecta el filtro ya que el ancho de banda es mayor que el de la señal modulada. Introduce una ganancia de 10^4.

$$S_E = S_R \cdot \left|H_{pred}(f)\right|^2 = 20{,}37 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 \text{ W}$$

$$\boxed{S_E = 20{,}37 \cdot 10^{-2}\, W}$$

La D.E.P. de ruido tomará la misma forma que la del filtro:

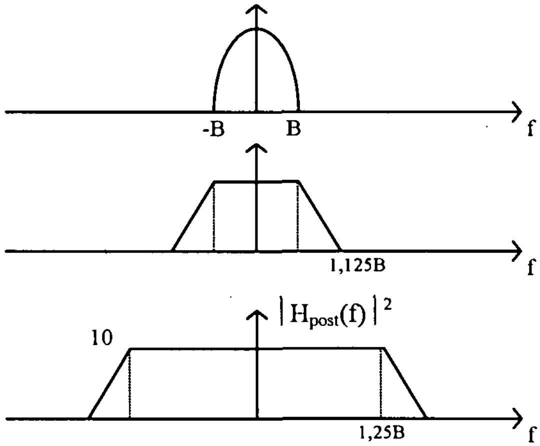


$$N_E = 2\frac{N_0}{2}\cdot 10^4\left(2B+\frac{B}{8}\right) = 2\cdot 10^{-12}\cdot 10^4\left(\frac{17}{8}\right)4\cdot 10^3 \text{ W}$$

$$\boxed{N_E = 1{,}7\cdot 10^{-4}\ W}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{20{,}37\cdot 10^{-2}}{1{,}7\cdot 10^{-4}} = 1198{,}23 = 30{,}78\,dB}$$

A la salida del demodulador:



El filtro de postdetección tiene un ancho de banda tal que no afecta ni al ancho de banda de la señal ni al del ruido.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = GP\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\cdot\frac{\left(m^2\langle x_m^2(t)\rangle\right)}{\left(1+m^2\langle x_m^2(t)\rangle\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\cdot\frac{0{,}8^2\cdot 0{,}5}{1+0{,}8^2\cdot 0{,}5}\cdot 1198{,}23$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = 27{,}6\,dB}$$

b) **Sistema DBL**

$$PEP = \frac{1}{2}\left(e_R(t)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A_m x_m(t)\big|_{\max}\right)^2 = \frac{A_m^2}{2} = 50\,W \quad \Rightarrow \quad A_m = 10\ V$$

$$S_T = P_T = \frac{1}{2}A_m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle = \frac{1}{2}100\cdot 0{,}5 = 25\,W$$

En este caso toda la potencia transmitida es potencia de señal.

$$S_R = \frac{S_T}{\alpha} = \frac{25}{10^6} = 25\ \mu\,W$$

$$\boxed{S_E = S_R\cdot\left|H_{pred}(f)\right|^2 = 25\cdot 10^{-2}\ W}$$

$$\boxed{N_E = 1{,}7\cdot 10^{-4}\ W}$$

S_E y N_E se calculan igual que para AM ya que el ancho de banda en ambos casos es el mismo.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{S_E}{N_E} = \frac{25\cdot 10^{-2}}{1{,}7\cdot 10^{-4}} = 1470{,}6$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_E = 31{,}67\,dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = 2\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\cdot 1470{,}6$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = 34{,}67\,dB}$$

Es mejor el sistema DBL que el de AM en 7 dB.

15. $P_n(f) = \frac{N_0}{2} = -110\ \text{dBm/Hz} \ \Rightarrow\ \frac{N_0}{2} = 10^{-11}\ \ \text{mW/Hz} = 10^{-14}\ \ \text{W/Hz}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E\Bigg|_{umbral} = 10\,dB \ \Rightarrow\ S_E\big|_{umbral} = 10\cdot N_E$$

$$N_E = 2\frac{N_0}{2}[2B+B] = 3N_0\mathrm{B}$$

$$B_T = 2B$$

$$N_E = 3N_0\frac{\mathrm{B_T}}{2} = 3\cdot 10^{-14}\cdot 6\cdot 10^3 = 1{,}8\cdot 10^{-10}\ W$$

$$\boxed{S_E\big|_{umbral} = 10\cdot N_E = 1{,}8\ nW}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{S_E}{N_E} = \frac{A_r^2\big/2\left(1+m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right)}{3N_0\mathrm{B}} = \frac{A_r^2\left(1+m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right)}{6N_0\mathrm{B}}}$$

16. a) $\left(\frac{S}{N}\right)_S = ?$

$$P_R = \frac{P_T}{\alpha} = \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}\ W$$

$$N_E = 2N_0\mathrm{B} = 2\cdot 2\cdot 10^{-11}\cdot 10^4 = 4\cdot 10^{-7}\ W$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{N_E} = \frac{10^{-4}}{4\cdot 10^{-7}} = 250$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = GP\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\cdot\frac{\left(m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right)}{\left(1+m^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\cdot\frac{0{,}85^2\cdot 0{,}8}{1+0{,}85^2\cdot 0{,}8}\cdot 250$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_S = 183 = 22{,}62\ dB}$$

b) $\alpha_u = ?$

En el umbral $\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_E\Bigg|_{umbral} = 10 = \frac{P_R\big|_u}{2N_0\mathrm{B}} = \frac{P_R\big|_u}{4\cdot 10^{-2}}$

$$P_R\big|_u = 4\cdot 10^{-6}\ W$$

$$\boxed{\alpha_u = \frac{P_T}{P_R\big|_u} = \frac{10^4}{4\cdot 10^{-6}} = 94\ dB}$$

c) d=?

Si a la entrada del túnel α=80 dB y dejará de oirse a 94 dB. La atenuación debida al túnel será:

$$\Delta\alpha = 94 - 80 = 14\ dB$$

$$A(dB) = a_0 + a_1 \cdot d\ (m)$$

$$14 = 10 + \frac{1}{3} d\ (m)$$

$$\boxed{d = 12\ m}$$

17. a) $PEP = \dfrac{A_p^2}{2}(1+m)^2 \;\Rightarrow\; A_p^2 = \dfrac{2\cdot PEP}{(1+m)^2}$

$$x_m(t) = \cos\omega_m t \;\Rightarrow\; \langle x_m^2(t)\rangle = 0{,}5$$

$$P_{BL} = \frac{A_p^2}{2} m^2 \langle x_m^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{2\cdot PEP}{(1+m)^2} m^2 \frac{1}{2} = \frac{m^2 PEP}{2(1+m)^2}$$

$$P_P = \frac{A_p^2}{2} = \frac{PEP}{(1+m)^2}$$

$$P_T = P_{BL} + P_P = \frac{PEP}{(1+m)^2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

m	P_{BL}	P_C	P_T	P_{BL}/P_T (%)
0,3	26,63	591,72	618,35	4,3
0,8	98,76	308,64	407,4	24,2
1	125	250	375	33,3

La más eficiente es para m = 1.

b) $$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{2N_0\mathrm{B}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = GP\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_E = 2\frac{m^2\langle x_m^2(t)\rangle}{\left(1+m^2\langle x_m^2(t)\rangle\right)}\cdot\frac{P_R}{2N_0\mathrm{B}} = \frac{m^2\langle x_m^2(t)\rangle}{\left(1+m^2\langle x_m^2(t)\rangle\right)}\cdot\frac{P_R}{N_0\mathrm{B}}$$

$$P_R = \frac{P_T}{\alpha};\quad P_T = \frac{PEP}{(1+m)^2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right);\quad \langle x_m^2(t)\rangle = 0{,}5$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{m^2\cdot 0{,}5}{1+m^2\cdot 0{,}5}\cdot\frac{1}{N_0\mathrm{B}}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{PEP}{(1+m)^2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right) = \frac{PEP\cdot m^2\cdot 0{,}5}{(1+m)^2 N_0\mathrm{B}\alpha}$$

$$\alpha = \frac{m^2}{(1+m)^2}\frac{10^3}{2\cdot 2\cdot 10^{-10}\cdot 3\cdot 10^3\cdot 10^{2,3}}$$

m	***α (dB)***	***d (km)***
0,3	55,37	1,31
0,8	62,12	2,86
1	63,20	3,23

3

capítulo

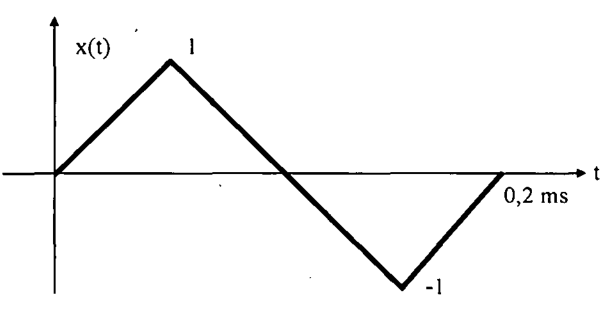
Canales analógicos paso banda: modulaciones angulares

ENUNCIADOS

1. La señal $x(t) = \Delta\left(\dfrac{t-10^{-6}}{10^{-6}}\right) - \Delta\left(\dfrac{t-3\cdot 10^{-6}}{10^{-6}}\right)$ voltios modula en fase a una portadora de 10 MHz. La constante de la modulación vale 2π radianes por voltio.
   a) Represente gráficamente la desviación de fase instantánea en radianes.
   b) Calcule la máxima desviación de fase e indique en qué instantes se produce.
   c) Indique la frecuencia instantánea en Hz en función del tiempo.
   d) Indique la máxima desviación de frecuencia en Hz y diga para qué instantes de tiempo se produce.

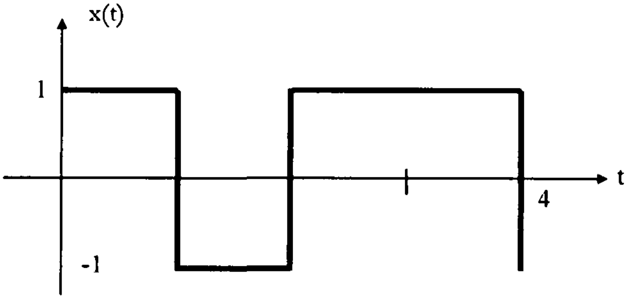
2. Dibuje las formas de onda de la señal FM y PM que resultan para la siguiente señal moduladora, x(t). Determine los valores máximo y mínimo de frecuencia en ambas modulaciones. Suponga que x(t) viene dada en voltios.

$f_p = 100$ MHz .
$f_d = 10^5$ Hz/V
$f_d = 10\pi$ rad/V



3. Dibuje las formas de onda de la señal FM y PM que resultan para la siguiente señal moduladora, x(t). Determine los valores máximo y mínimo de frecuencia en ambas modulaciones. Suponga que x(t) viene dada en voltios.

$f_p = 100$ MHz.
$f_d = 10^5$ Hz/V
$\phi_d = \pi/2$ rad/V



4. Sea la siguiente señal con modulación exponencial;

$$y_{ME}(t) = 10 \cdot \cos(2\pi\, 10^6 t + 0{,}1 \cdot sen(2000\pi t))$$

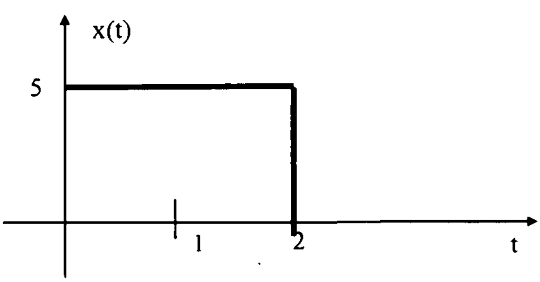
Calcule:

a) Potencia de la modulación.
b) Desviación de frecuencia máxima.
c) Desviación de fase máxima.
d) Ancho de banda de la señal.

5. Sea la siguiente señal con modulación FM:

$$y_{FM}(t) = 40 \cdot \cos(w_p t + 2\pi f_d \int_0^t x(\lambda) d\lambda)$$

donde f_d=10 Hz/V.



a) Dibuje la forma de la desviación instantánea de fase.
b) Dibuje la forma de la desviación instantánea de frecuencia.

c) Calcule la desviación de fase máxima, $\Delta\phi$.

d) Calcule la desviación de frecuencia máxima, Δf.

e) Potencia de la señal.

6. Una portadora de 10 MHz se modula en FM con una senoide de 5 kHz y amplitud unitaria, de modo que la desviación máxima de frecuencia es $\Delta f = 1$ MHz.

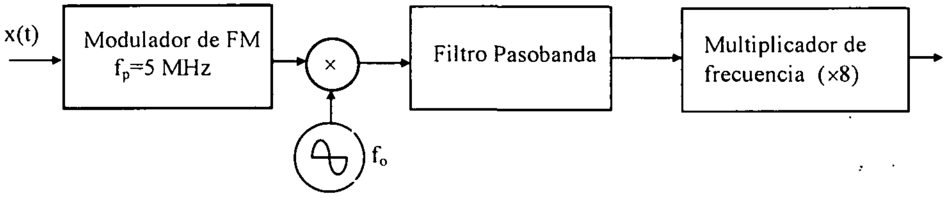
   Calcule:

   a) Ancho de banda de la señal de FM.

   b) Ancho de banda si se duplica la amplitud de la moduladora.

   c) Ancho de banda si se duplica la frecuencia de la moduladora.

7. Un transmisor de FM tiene un diagrama de bloques como el que se indica en la figura



   La moduladora tiene componentes de frecuencia entre 300 Hz y 3,4 kHz. La salida final de FM ha de tener una frecuencia de portadora de 103,7 MHz y una desviación de frecuencia de 75 kHz. Calcule:

   a) La frecuencia de sintonía y el ancho de banda del filtro.

   b) Los valores posibles de frecuencia del oscilador.

   c) La desviación de frecuencia del modulador de FM inicial.

   d) El ancho de banda necesario para la transmisión.

8. Un tono normalizado de 1 kHz modula en frecuencia una portadora de 100 MHz, de forma que la máxima desviación de fase es $\Delta\phi_1=3\pi/4$. Por otra parte, otra portadora de 100 MHz es modulada por un tono de 10 kHz siendo asimismo $\Delta\phi_2=3\pi/4$. La densidad espectral de potencia de ruido es $P_n(f)=N_0/2=-110$ dBm/Hz

   a) Obtenga el índice de modulación, máxima desviación de frecuencia y ancho de banda de transmisión en ambos casos.

b) Si la atenuación de propagación es de 100 dB y se guarda un margen de desvanecimiento de 20 dB, calcule cuál será la potencia de transmisión necesaria para que se pueda recuperar la moduladora en los dos sistemas.

9. En un sistema receptor de FM en el que la DEP de ruido es $P_n(f)= N_0/2 =10^{-8}$ W/Hz, se recibe una portadora de frecuencia 100 MHz modulada por un tono normalizado de frecuencia 15 kHz, siendo la máxima desviación de frecuencia de 75 kHz. El filtro de predetección es ideal con ancho de banda el de transmisión.

   a) Si la potencia media del transmisor es de 10 dBW, calcule la máxima atenuación permisible para que el receptor pueda recuperar la señal.
   b) Calcule la $(S/N)_S$ en las mismas condiciones.
   c) Calcule la $(S/N)_S$ si la amplitud de portadora recibida es de A_r=1,29 V.
   d) Si se aumenta la desviación de frecuencia a 150 kHz, con A_r=1,29 V, compruebe si el receptor funciona en esas condiciones y en ese caso calcule $(S/N)_S$.

10. Se modula en frecuencia la portadora $10\cdot\cos(2\pi 10^8 t)$ con la señal $x(t)= 0{,}75\cdot\cos(2\pi 10^2 t) + 0{,}25\cdot\cos(2\pi 10^4 t)$, siendo la constante de la modulación f_d=75 kHz/V.

    a) Obtenga la expresión analítica de la señal en el dominio del tiempo.
    b) Calcule el ancho de banda.
    c) Si la DEP de ruido es $P_n(f)=N_0/2=0{,}5\cdot 10^{-12}$ W/Hz, calcule la máxima atenuación permisible para que sea posible recuperar la señal.

11. En un receptor de FM se recibe una portadora modulada por un tono de 1 kHz con una máxima desviación de frecuencia de 8 kHz. Sabiendo que la potencia de señal a la entrada del receptor es de -0,46 dBm y la DEP del ruido es $P_n(f)=N_0/2=10^{-9}$ W/Hz, calcule:

    a) $(S/N)_E$
    b) Margen sobre el umbral en dB.
    c) La potencia de ruido en la banda comprendida entre los 500 y 1000 Hz a la salida del discriminador, sabiendo que la constante del discriminador es K_F= 10^{-3} V/Hz,

12. Se tiene un canal de 15 kHz por el que se desea transmitir un tono normalizado de 3 kHz de ancho de banda. La PEP del transmisor empleado es de 1 KW. Si la DEP del ruido es $P_n(f)=N_0/2=-113$ dBm/Hz, la atenuación de propagación es de 70 dB y el sistema ha de hacer frente a pérdidas por desvanecimiento de 10 dB, verifique si el sistema se encuentra en condiciones de recuperar la señal y en ese caso obtenga la $(S/N)_S$.

13. Se transmite un tono normalizado de 10 kHz modulando en FM a una portadora de 1 MHz con una máxima desviación de frecuencia de 50 kHz. El medio de transmisión introduce un ruido blanco con DEP $P_n(f)=N_0/2=0{,}5\cdot 10^{-9}$ W/Hz y una atenuación de 40 dB. El receptor está constituido por un filtro de predetección ideal de ancho de banda 200 kHz, seguido por un discriminador de frecuencia y de un filtro de postdetección de 10 kHz. Se desea una calidad en recepción mínima de 43 dB.
    a) Obtenga la amplitud de la portadora necesaria en el transmisor.
    b) ¿Se puede mejorar la $(S/N)_S$? Razone la respuesta y en caso afirmativo calcule dicha mejora.

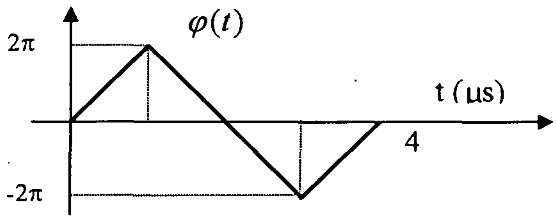
14. Se transmite por un sistema Múltiplex por División en Frecuencia (MDF) de 40 canales telefónicos de 4 kHz . El primer canal va en la banda de 0 a 4 kHz y los 39 restantes se ordenan consecutivamente mediante modulación BLU de subportadoras de 4, 8, ..., 156 kHz, eligiendo las bandas superiores y bandas de guarda nulas. La señal resultante modula en FM a una portadora de 100 MHz, resultando un ancho de banda de transmisión de 2 MHz.
    a) Obtenga el ancho de banda de la señal múltiplex, el índice de modulación, la desviación de frecuencia máxima y el valor umbral z_u.
    b) Si el sistema trabaja con un margen de 12 dB sobre el umbral y la constante del discriminador es de 10^{-6} V/Hz, determine la potencia media de ruido en un canal genérico de la señal múltiplex en postdetección utilizando un filtro pasobanda ideal. ¿Para qué canal será mínima la potencia de ruido? Calcule su valor.
    c) Calcule la potencia de la señal múltiplex a la salida suponiendo que en el canal en que la potencia de ruido es máxima la $(S/N)=20$ dB. Calcule la (S/N) en el caso del canal con menos ruido bajo las mismas condiciones.

SOLUCIONES

1. f_p=10 MHz

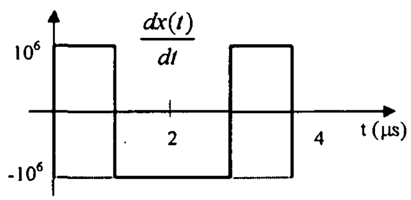
   $\phi_d = 2\pi$ rad/V

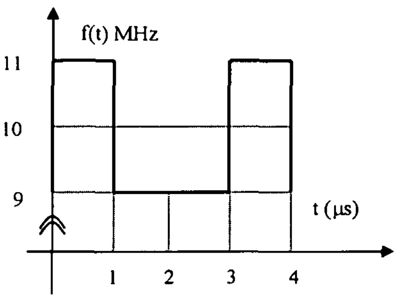
   a) $\varphi(t) = \phi_d \cdot x(t) = 2\pi \cdot x(t)$



   b) $\Delta\theta = 2\pi$ rad. Se produce para t=1ms y t=3ms.

   c) $f(t) = f_p + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f_p + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d(\phi_d x(t))}{dt} = 10^7 + \dfrac{dx(t)}{dt}$ Hz





$$f(t) = f_p + \left[\Pi\left(\frac{t-0{,}5\cdot 10^{-6}}{10^{-6}}\right) - \Pi\left(\frac{t-2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^{-6}}\right) + \Pi\left(\frac{t-3{,}5\cdot 10^{-6}}{10^{-6}}\right)\right] 10^6 \quad \text{Hz}$$

   d) $\Delta f = 1$ MHz

   Se produce para $0 < t < 4\,\mu s$, estando indeterminado en los instantes t = $1\,\mu s$ y $3\,\mu s$.

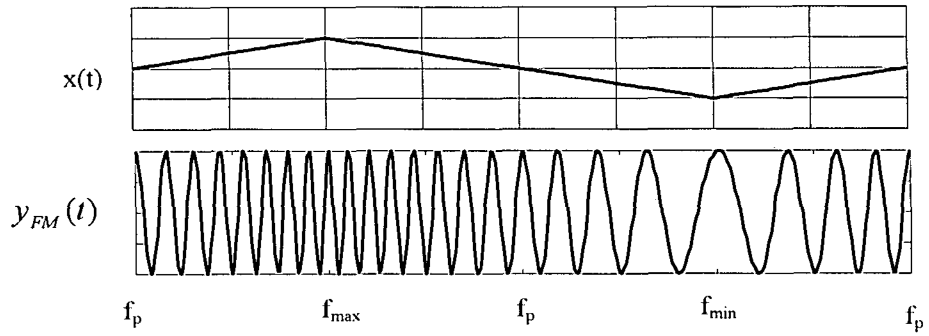
2. **FM**

   $f(t) = f_p + f_d \cdot x(t)$

   $\Delta f(t) = f_d x(t) = 10^5 \cdot x(t)$ Hz $\Rightarrow$ $\Delta f = 10^5$ Hz

$$f_{max} = f_p + \Delta f = 100{,}1\ \text{MHz}$$

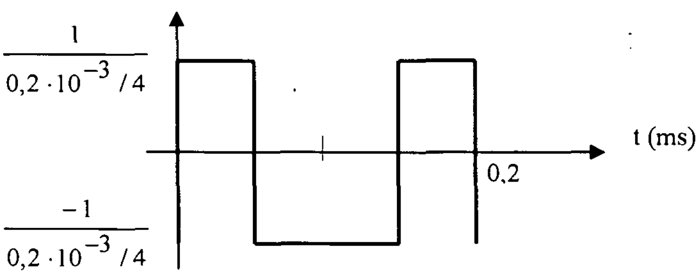
$$f_{min} = f_p - \Delta f = 99{,}9\ \text{MHz}$$



PM

$$\varphi(t) = \omega_p t + \phi_d \cdot x(t)$$

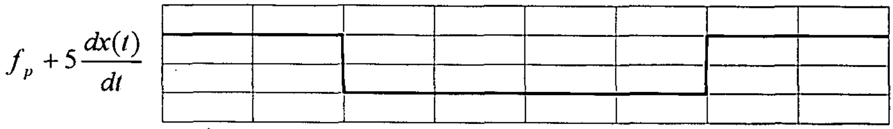
$$f(t) = f_p + \frac{\phi_d}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt} = f_p + \frac{10\pi}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt} = f_p + 5\frac{dx(t)}{dt}$$

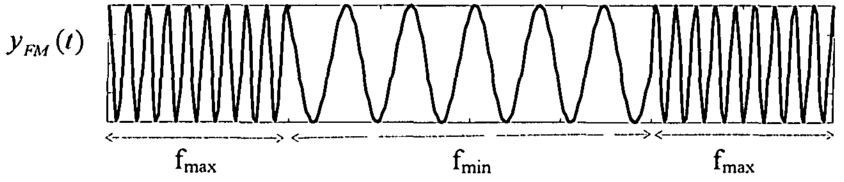


$$\Delta f = 5\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{max} = 5 \cdot 2 \cdot 10^4 = 10^5\ \text{Hz}$$

$$f_{max} = f_p + \Delta f = 100{,}1\ \text{MHz}$$

$$f_{min} = f_p - \Delta f = 99{,}9\ \text{MHz}$$



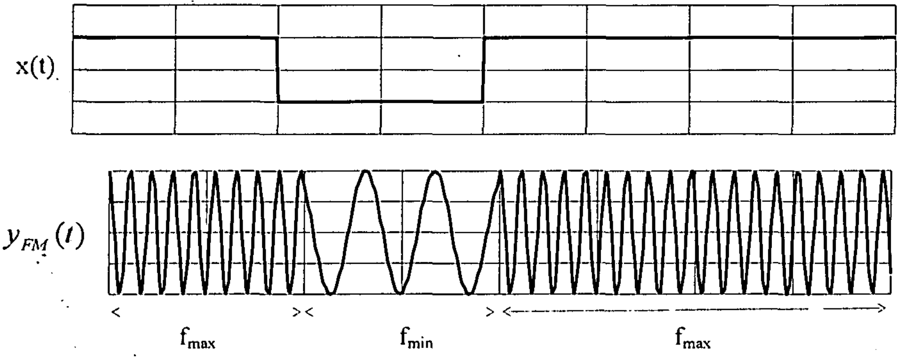


3. **FM**

$$f(t) = f_p + f_d x(t) \Rightarrow \Delta f = f_d \cdot 1 = 10^5 \text{ Hz}$$

$$f_{max} = f_p + \Delta f = 100{,}1\,\text{MHz}$$

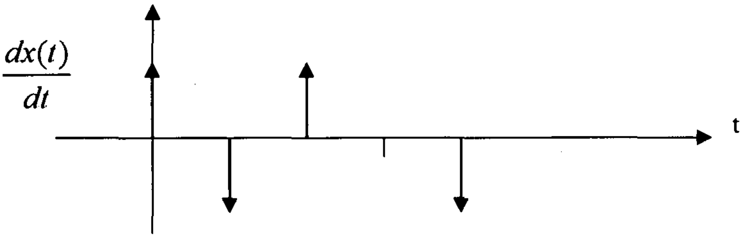
$$f_{min} = f_p - \Delta f = 99{,}9\,\text{MHz}$$



PM

$$\varphi(t) = \omega_p t + \phi_d \cdot x(t)$$

$$f(t) = f_p + \frac{\phi_d}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$$



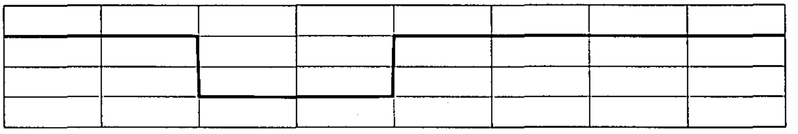
En los instantes que se producen las deltas la frecuencia sigue igual pero se produce un salto en la fase.

$$f_{\max} = f_{\min} = f_p$$

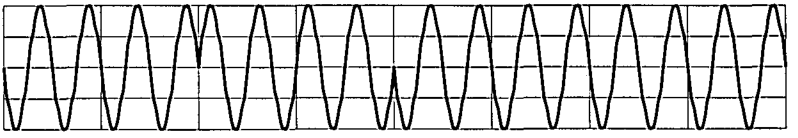
$$x(t) = 1 \Rightarrow \varphi(\mathrm{t}) = \omega_p t + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \Rightarrow y(t) = A_p \cos\left(\omega_p t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_p sen\omega_p t$$

$$x(t) = -1 \Rightarrow \varphi(\mathrm{t}) = \omega_p t + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \Rightarrow y(t) = A_p \cos\left(\omega_p t - \frac{\pi}{2}\right) = A_p sen\omega_p t$$

x(t)



$y_{PM}(t)$



Si se selecciona $\phi_d = \pi \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 1 \rightarrow y_{PM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + \pi) \\ x(t) = -1 \rightarrow y_{PM}(t) = A_p \cos(\omega_p t - \pi) = A_p \cos(\omega_p t + \pi) \end{cases}$

Coincide la forma de onda de la señal modulada para las dos amplitudes que presenta la señal moduladora. Se produciría ambigüedad y no se podría demodular la señal. Por eso en PM debe cumplirse que $|\Delta\phi| < \pi$.

4. $y_{ME}(t) = 10 \cdot \cos\left(2\pi 10^6 t + 0{,}1 \cdot sen(2000\pi t)\right)$

$A_p = 10 \quad \omega_p = 2\pi 10^6$ rad/s $\quad f_p = 1\,\mathrm{MHz}$

$\omega_\mathrm{m} = 2000\pi$ rad/s $\quad f_m = 1\,\mathrm{kHz}$

a) $P_T = \dfrac{A_p^2}{2} = \dfrac{100}{2} = 50\ \mathrm{W}$

b) $\varphi(t) = 0{,}1 \cdot sen(2000\pi t)$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{0{,}1}{2\pi} 2000\pi \cos(2000\pi t) = 100 \cdot \cos(2000\pi t)$$

$\Delta f = 100$ Hz

c) $\Delta\theta = |\varphi(t)|_{\max} = 0{,}1$ rad

d) $B_T = 2 f_m + 2\Delta f = 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 = 2200\,\mathrm{Hz}$

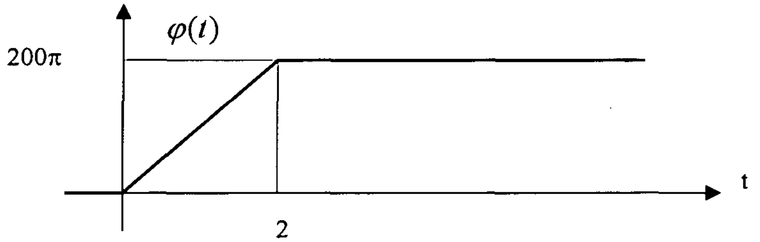
5. a) $\varphi(t) = 2\pi \cdot f_d \int_0^t x(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 2\pi \cdot 10 \int_0^t x(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 20\pi \int_0^t x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

La integral se calcula por tramos:

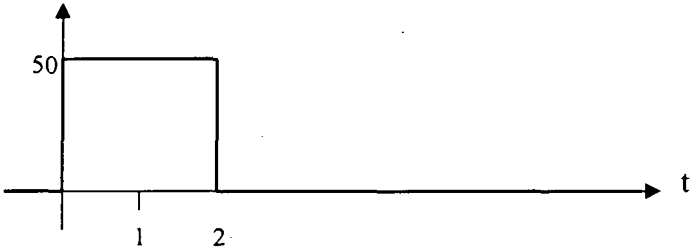
$t < 0;\quad \varphi(\mathrm{t}) = 0$

$0 \le t < 2; \varphi(\mathrm{t}) = 20\pi \int_0^t x(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 20\pi \int_0^t 5\mathrm{d}\lambda = 100\pi[\lambda]_0^t = 100\pi \cdot t$

$t \ge 2; \varphi(\mathrm{t}) = 20\pi \int_0^2 5d\lambda = 100\pi[\lambda]_0^2 = 200\pi$



b). $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$



c) $\Delta\phi = 200\pi$ rad

d) $\Delta f = 50\,\mathrm{Hz}$

e) $P_T = \dfrac{A_p^2}{2} = \dfrac{40^2}{2} = 800$ W

6. a) $B_{FM} = 2\Delta f + 2f_m = 2\cdot 10^6 + 2\cdot 5\cdot 10^3 = 2010$ kHz

b) $\Delta f_1 = f_d A_m = f_d = 1\,\mathrm{MHz}$

$\Delta f_2 = f_d 2A_m = 2f_d = 2\,\mathrm{MHz}$

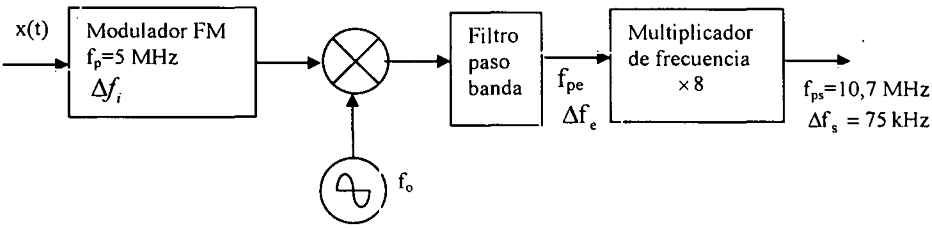
Al duplicar la amplitud máxima de la moduladora, se duplica la desviación de frecuencia.

$$B_{FM} = 2\Delta f + 2f_m = 2 \cdot 2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 5 \cdot 10^3 = 4010 \text{ kHz}$$

c) $f_m = 2 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 10^4 \text{ Hz}$

$$B_{FM} = 2\Delta f + 2f_m = 2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^4 \text{ Hz} = 2020 \text{ kHz}$$

7.



a) $f_{pe} = \dfrac{103{,}7}{8} = 12{,}9625 \text{ MHz}$

$$\Delta f_e = \frac{75}{8} = 9{,}375 \ kHz$$

A la entrada del multiplicador se tendrán los valores de frecuencia de la salida divididos por 8.

La frecuencia de sintonía del filtro será la frecuencia de la portadora a la entrada del multiplicador y el ancho de banda será el de una modulación FM con Δf_e.

$$f_s = f_{pe} = 12{,}9625 \text{ MHz}$$

$$B_{filtro} = B_{FM} = 2\Delta f + 2B = 2 \cdot 9{,}375 + 2 \cdot 3{,}4 = 25{,}55 \text{ kHz}$$

b) Las frecuencias del oscilador para obtener a la salida del modulador la frecuencia de portadora deseada serán:

$$f_o = f_{pe} + f_p = 12{,}9625 \pm 5 = \begin{cases} 17{,}9625 \text{ MHz} \\ 7{,}9625 \text{ MHz} \end{cases}$$

c) El mezclador no afecta a la desviación de frecuencia. Por lo tanto: $\Delta f_i = 9{,}375\,\text{kHz}$

d) $B_T = 2\Delta f + 2 f_m = 2 \cdot 75 + 2 \cdot 3{,}4 = 156{,}8\,\text{kHz}$

8. $f_{m1} = 1\,\text{kHz}$ $\quad f_{m2} = 10\,\text{kHz}$

$f_{p1} = 100\,\text{MHz}$ $\quad f_{p2} = 100\,\text{MHz}$

$\Delta\phi_1 = \dfrac{35}{4}\,\text{rad}$ $\quad \Delta\phi_2 = \dfrac{35}{4}\,\text{rad}$

a) La desviación de frecuencia en una modulación de tono en FM:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \underbrace{f_d A_m}_{\Delta f}\cos\omega_m t \rightarrow \varphi(t) = \frac{\Delta f}{f_m}\,\text{sen}\,\omega_m t = \underbrace{\beta}_{\Delta\phi}\,\text{sen}\,\omega_m t$$

Por lo tanto en modulación de tono se cumple $\Delta\phi = \beta$.

$$\beta_1 = \Delta\phi_1 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}36 \qquad \Delta f_1 = \beta_1 f_{m1} = 2{,}36\,\text{kHz}$$

$$\beta_2 = \Delta\phi_2 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}36 \qquad \Delta f_2 = \beta_2 f_{m2} = 23{,}6\,\text{kHz}$$

$$B_{T1} = 2(\Delta f_1 + f_{m1}) = 6{,}72\,\text{kHz}$$

$$B_{T2} = 2(\Delta f_2 + f_{m2}) = 67{,}2\,\text{kHz}$$

b) La atenuación en el caso peor será cuando se produzcan pérdidas por desvanecimiento, por lo tanto consideramos la atenuación en el caso peor.

$$\alpha_T = \alpha + \text{D} = 100\,\text{dB} + 20\,\text{dB} = 120\,\text{dB} = 10^{12}$$

Para que se pueda recuperar la moduladora, el receptor debe estar por encima del umbral, por lo tanto se va a considerar la potencia necesaria para estar en el umbral en ambos casos.

$$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_E\right|_{umbral} = 20 = \left(\frac{P_R}{N_0 B}\right)_u \frac{1}{2(\beta+1)}$$

En adelante se llamará al cociente $\frac{P_R}{N_0 B} = z$. De aquí:

$z_u = 40(\beta + 1)$

Para el tono $f_{m1} = 1\,\text{kHz} = B_1$:

$$P_{R1}\,|_{umbral} = N_0 B_1 40(\beta_1 + 1)$$

$$\frac{N_0}{2} = -110\,\frac{\text{dBm}}{\text{Hz}} = 10^{-11}\,\frac{\text{mW}}{\text{Hz}} = 10^{-14}\,\frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

$$P_{R1}\,|_u = 2\cdot 10^{-14}\cdot 10^3\cdot 40\cdot(2{,}36+1) = 2{,}688\cdot 10^{-9}\text{ W}$$

$$P_{T1} = \alpha_T P_{R1} = 10^{12}\cdot 2{,}688\cdot 10^{-9} = 2{,}688\,\text{kW}$$

Para el tono $f_{m2} = 10\,\text{kHz} = B_2$:

$$P_{R2}\,|_u = N_0 B_2 40(\beta_2 + 1) = 2\cdot 10^{-14}\cdot 10^4\cdot 40\cdot(2{,}36+1) = 2{,}688\cdot 10^{-8}\text{ W}$$

$$P_{T2} = \alpha_T P_{R2} = 10^{12}\cdot 26{,}88\cdot 10^{-9} = 26{,}88\,\text{kW}$$

La potencia necesaria en el segundo caso es 10 veces mayor debido al ancho de banda del filtro de predetección.

9. a) La máxima atenuación posible vendrá dada cuando el sistema se encuentre en el umbral.

$$P_T = 10\text{ dBW} = 10\text{ W}$$

$$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_E\right|_{umbral} = 20 = \frac{P_R}{N_0 B}\frac{1}{2(\beta+1)}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{75}{15} = 5$$

$$P_R = 40(\beta + 1)N_0 B$$

$$P_R = 40(5+1)2\cdot 10^{-8}\cdot 15\cdot 10^3 = 0{,}072\text{ W}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{P_T}{P_R} = \frac{10}{0{,}072} = 138 = 21{,}4\,\text{dB}$$

b) Como la moduladora es un tono normalizado:

$$\langle x^2(t)\rangle = A_m^2\langle x_m^2(t)\rangle = 1^2\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{P_R}{N_0B}\right)3\beta^2\langle x_m^2(t)\rangle = \frac{0{,}072}{2\cdot 10^{-8}\cdot 15\cdot 10^3}\cdot 3\cdot 5^2\cdot\frac{1}{2} = 9000 = 39{,}54\text{ dB}$$

c) $\left(\frac{S}{N}\right)_S = ?\quad$ si $A_r = 1{,}29$ V

$$P_R = \frac{A_r^2}{2} = 0{,}832\text{ W}$$

Esta potencia es mayor que la del apartado a) lo que implica que se está por encima del umbral.

Si el sistema no se encontrara por encima del umbral no se podría aplicar la expresión de $\left(\frac{S}{N}\right)_S$.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{P_R}{N_0B}\right)3\beta^2\langle x_m^2(t)\rangle = \frac{0{,}832}{2\cdot 10^{-8}\cdot 15\cdot 10^3}\cdot 3\cdot 5^2\cdot\frac{1}{2} = 104.006 = 50{,}17\text{ dB}$$

d) $\Delta f = 150\text{ kHz} \Rightarrow \beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{150}{15} = 10$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{N_0B}\,\frac{1}{2(\beta+1)} = \frac{0{,}832}{2\cdot 10^{-8}\cdot 15\cdot 10^3}\,\frac{1}{2(10+1)} = 75 > 20$$

El sistema está por encima del umbral.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{0{,}832}{2\cdot 10^{-8}\cdot 15\cdot 10^3}\cdot 3\cdot 10^2\cdot\frac{1}{2} = 416.024 = 56{,}19\text{ dB}$$

Al duplicar Δf se consigue una mejora de la calidad de 6,02 dB.

10. a) $y_{FM}(t) = A_p\cos\left(\omega_p t + 2\pi f_d\int x(t)dt\right)$

$$\varphi(t) = 2\pi\cdot f_d\int x(t)dt = 2\pi\cdot 75\cdot 10^3\left(\frac{0{,}75}{2\pi 10^2}sen(2\pi 10^2 t) + \frac{0{,}25}{2\pi 10^4}sen(2\pi 10^4 t)\right) =$$

$$= 562{,}5\cdot sen(2\pi 10^2 t) + 1{,}875\cdot sen(2\pi 10^4 t)$$

$$y_{FM}(t) = 10 \cdot \cos\left(2\pi 10^8 t + 562{,}5 \cdot sen\left(2\pi 10^2 t\right) + 1{,}875 \cdot sen\left(2\pi 10^4 t\right)\right)$$

b) $B_T = 2(\Delta f + B)$

$$B = \max\left(10^2, 10^4\right) = 10^4 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = f_d \left|x(t)\right|_{\max} = 75 \cdot 10^3 \cdot (0{,}75 + 0{,}25) = 75 \text{ kHz}$$

$$B_T = 2 \cdot \left(75 \cdot 10^3 + 10^4\right) = 170 \text{ kHz}$$

c) El sistema debe estar por encima del umbral.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = 20 = \frac{P_R}{N_0 B} \frac{1}{2(\beta+1)} = \frac{P_R}{N_0 2(\Delta f + B)} = \frac{P_R}{N_0 B_T}$$

$$P_R = 20 N_0 B_T = 20 \cdot 10^{-12} \cdot 170 \cdot 10^3 = 3{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$P_T = \frac{A_p^2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ W}$$

$$\alpha = \frac{P_T}{P_R} = \frac{50}{3{,}4 \cdot 10^{-6}} = 71{,}7 \text{ dB}$$

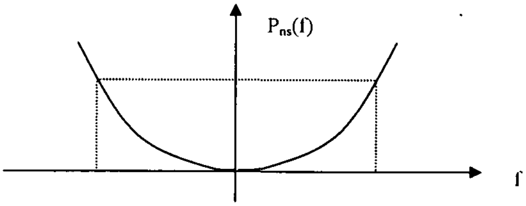
11. $\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{8}{1} = 8$

a) $$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{N_0 B} \frac{1}{2(\beta+1)} = \frac{10^{-0{,}046} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot (8+1)} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 10^{-6}} = 25 = 14 \text{ dB}$$

b) $$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_E\right|_{umbral} = 20 = 13 \text{ dB}$$

margen = 14 - 13 = 1 dB

c) La constante del discriminador multiplica tanto a la señal como al ruido. Como viene dada en habrá que multiplicar la DEP por la constante al cuadrado.



$$P_{ns}(f) = k_F^2 \frac{N_0 \cdot f^2}{A_r^2} \Pi\left(\frac{f}{2\omega}\right)$$

$$P_R = \frac{A_r^2}{2} \Rightarrow A_r^2 = 2P_R$$

$$N_S = \frac{k_F^2 N_0}{2P_R} 2\int_{500}^{1000} f^2 df = \frac{k_F^2 N_0}{P_R}\frac{1}{3}\left[f^3\right]_{500}^{1000} = \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{9 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{3}\left[1000^3 - 500^3\right] =$$

$$= 6{,}48 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W}$$

12. En primer lugar se comprueba si está por encima del umbral.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{N_0 B}\frac{1}{2(\beta+1)} = \frac{P_R}{N_0 B_T}$$

$$P_T = 10^3\ \mathrm{W}$$

$$\alpha_T = 70 + 10 = 80\ \mathrm{dB} = 10^8$$

Como el canal es de 15 kHz $\Rightarrow \mathrm{B_T} = 15\ \mathrm{kHz}$.

$$\frac{N_0}{2} = -113\frac{\mathrm{dBm}}{\mathrm{Hz}} = 10^{-11{,}3}\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{Hz}} = 5 \cdot 10^{-15}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_T}{\alpha_T}\frac{1}{N_0 B_T} = \frac{10^3}{10^8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-15} \cdot 15 \cdot 10^3} = 66.666 > 20$$

Se está por encima del umbral.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{P_R}{N_0 B}\right) 3\beta^2 \left\langle x_m^2(t)\right\rangle = \frac{10^3}{10^8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^3} \cdot 3 \cdot 1{,}5^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.125.000 = 60{,}5\ \mathrm{dB}$$

13. a) $\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{P_R}{N_0 B}\right) 3\beta^2 \left\langle x_m^2(t)\right\rangle \Rightarrow P_R = \dfrac{\left(\frac{S}{N}\right)_S N_0 B}{3\beta^2\left\langle x_m^2(t)\right\rangle}$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{50}{10} = 5$$

$$P_R = \frac{10^{4{,}3} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}5} = 5{,}32 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

$$P_T = \alpha \cdot P_R = 10^4 \cdot 5{,}32 \cdot 10^{-3} = 53{,}2 \text{ W}$$

$$P_T = \frac{A_p^2}{2}$$

$$A_p = \sqrt{2P_T} = 10{,}32 \text{ V}$$

b) Se podrá mejorar aumentando β, o lo que es lo mismo, el ancho de banda de transmisión siempre que no se baje del umbral. Se podrá aumentar tanto como lo permita el ancho de banda de del filtro de predetección.

$$B_T = B_{pred} = 200 \text{ kHz} = 2(\Delta f + f_m)$$

$$\Delta f = 100 - f_m = 90 \text{ kHz}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{90}{10} = 9$$

Hay que comprobar si con este nuevo valor de β se está por encima del umbral:

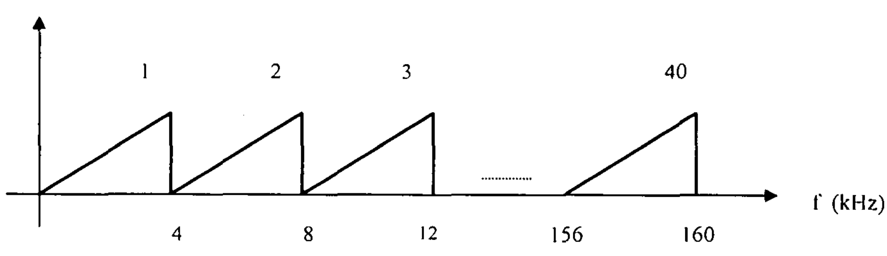
$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{P_R}{N_0 B_T} = \frac{5{,}32 \cdot 10^{-3}}{10^{-9} \cdot 200 \cdot 10^3} = 26{,}6 > 20$$

El receptor se encuentra por encima del umbral. Por lo tanto:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{P_R}{N_0 B}\right) 3\beta^2 \left\langle x_m^2(t) \right\rangle = \frac{5{,}32 \cdot 10^{-3}}{10^{-9} \cdot 10^4} \cdot 3 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{2} = 48{,}10 \text{ dB}$$

Se consigue una mejora de: 48,1– 43= 5,1 dB.

14. a) El espectro positivo de la señal múltiplex queda:



$$B = 40 \cdot 4 = 160\ \text{kHz}$$

$$B_T = 2B(\beta + 1)$$

$$\beta = \frac{B_T}{2B} - 1 = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 160 \cdot 10^3} - 1 = 5{,}25$$

$$\Delta f = \beta \cdot B = 5{,}25 \cdot 160 \cdot 10^3 = 840\ \text{kHz}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E = 20 = z_u \frac{1}{2(\beta + 1)}$$

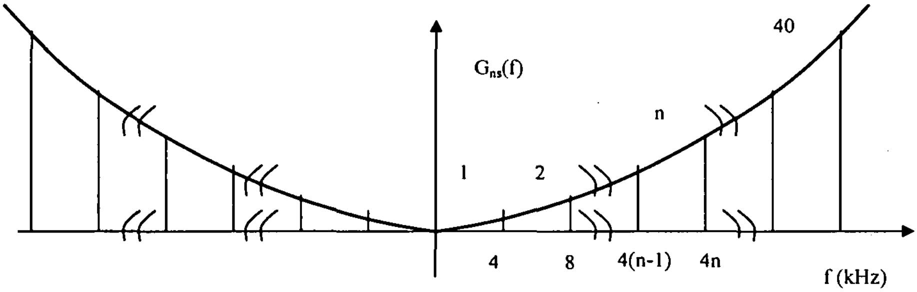
$$z_u = 40(\beta + 1) = 250 = 24\ \text{dB}$$

b) Se está 12 dB por encima del umbral.

$$z = z_u + 12 = 36\ \text{dB} = 10^{3,6} = \frac{P_R}{N_0 B} = \frac{A_r^2}{2N_0 B}$$

$$A_r^2 = 2 \cdot 10^{3,6} \cdot 160 \cdot 10^3 N_0 = 1{,}28 \cdot 10^9 N_0$$

La DEP del ruido a la salida será:



$$G_{ns}(f) = \frac{k_F^2 N_0}{A_r^2} f^2 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$N_S\big|_{\text{canal n}} = \frac{k_F^2 N_0}{A_r^2} 2 \int_{4(n-1)10^3}^{4n10^3} f^2 df = \frac{k_F^2 N_0}{A_r^2} \frac{2}{3}\left(4 \cdot 10^3\right)\left(n^3 - (n-1)^3\right) =$$

$$= \frac{10^{-12} N_0}{1{,}28 \cdot 10^9 N_0} \frac{2}{3}\left(4 \cdot 10^3\right)^3\left(n^3 - \left(n^3 - 3n^2 + 3n - 1\right)\right)$$

$$N_S\big|_n = 3{,}3 \cdot 10^{-11}\left(3n^2 - 3n + 1\right)\ \text{W}$$

El mínimo ruido se tendrá en el canal n=1.

$$N_S\big|_{n=1} = 3{,}3\cdot 10^{-11}(3-3+1) = 3{,}3\cdot 10^{-11}\ \text{W} = -104{,}8\ \text{dBW}$$

c) El ruido será máximo en el canal n=40.

$$N_S\big|_{n=40} = 3{,}3\cdot 10^{-11}\left(3\cdot 40^2 - 3\cdot 40+1\right) = 1{,}54\cdot 10^{-2}\ \text{W} = -68{,}1\,\text{dBW}$$

$$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_S\right|_{n=40} = 20\,\text{dB} = 10^2$$

$$S_S\big|_{n=40} = 100\cdot N_s = 1{,}54\cdot 10^{-5}\ \text{W}$$

Esta es la señal a la salida de un solo canal. La potencia total de la señal a la salida será:

$$S_S\big|_{total} = 40\cdot 1{,}54\cdot 10^{-5} = 6{,}16\cdot 10^{-4}\ \text{W}$$

$$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_S\right|_{n=1} = \frac{1{,}54\cdot 10^{-5}}{3{,}3\cdot 10^{-11}} = 56{,}7\ \text{dB}$$

4

capítulo

Conversión analógica-digital de señales

ENUNCIADOS

1. Determine la frecuencia de muestreo mínima que se debe utilizar en los siguientes casos:
   a) x(t)=sinc(100t)
   b) x(t)=sinc^2(100t)
   c) x(t)=sinc(100t)+sinc(50t)
   d) x(t)=sinc(100t)+sinc^2(60t)

2. A la señal x(t) limitada en banda a B rad/s, se le realiza un muestreo ideal, tal que $\omega_M >> 2B$. La señal muestreada se hace pasar por un filtro de forma que a su salida se obtiene $y(t)=x(t)\cos(3\omega_M t)$.
   a) Obtenga la función de transferencia del filtro, H(w).
   b) Obtenga la respuesta al impulso del filtro, h(t).
   c) Razone si el filtro es realizable. En caso negativo indique de qué forma se podría aproximar.

3. A la señal x(t) limitada en banda a B rad/s, se le realiza un muestreo ideal a la frecuencia de Nyquist. La señal muestreada se hace pasar por un filtro con respuesta al impulso $h(t)=\frac{1}{T_M}\Delta\left(\frac{t}{T_M}\right)$.
   a) Obtenga la expresión analítica de la señal a la salida del filtro y(t), de su espectro $Y(\omega)$ y dibújelas.

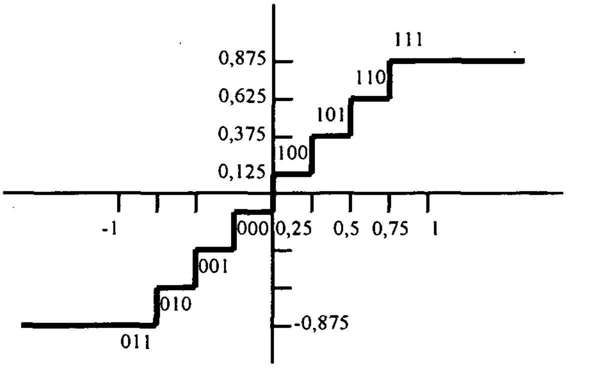
b) Obtenga la función de transferencia del sistema inverso $H_r(\omega)$ que recupere la señal x(t).

4. Sea la señal x(t) de duración finita, tal que $|t| \leq \tau$. Su espectro se muestrea con un tren de deltas en frecuencia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$.

   a) Demuestre que para poder recuperar x(t) se debe cumplir que $\omega_0 \leq \pi/\tau$.

   b) Determine el sistema que recupere la señal x(t).

5. Se muestrea un tono $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ de frecuencia f_0=1 kHz a una frecuencia de muestreo f_M=5 kHz. Las muestras son cuantificadas con un cuantificador uniforme de 8 niveles como se muestra en la siguiente figura.



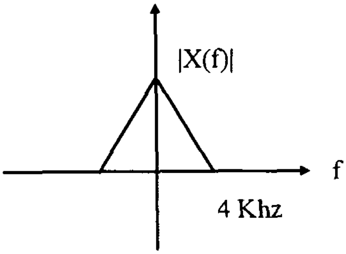
   a) Calcular el valor de las tres primeras muestras, sus valores cuantificados y los errores de cuantificación producidos.

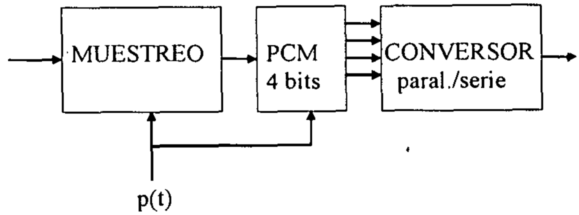
   b) Obtenga el código de la secuencia PCM resultante y la forma de onda, suponiendo que cuando se quiere transmitir un 1 se envía un pulso y para un cero no se envía nada.

   c) Obtenga la tasa de bits o régimen binario de la señal digital a transmitir y el tiempo de duración de bit.

   d) Se realiza una multiplexación en el tiempo intercalando bits de 5 señales de las mismas características de la anterior. Obtenga la nueva tasa de bits y el nuevo tiempo de duración de bit.

6. Considere el sistema PCM de la figura;





$|x(t)|_{max} = 2$ V; $\langle x(t) \rangle = 0$ V

   a) Determine el máximo período de muestreo para poder recuperar la señal sin distorsión.
   b) Determine la potencia de ruido de cuantificación y la RSR de cuantificación, suponiendo la potencia de pico de x(t).
   c) Si el sistema PCM es de 5 bits, determine la relación porcentual de la mejora o empeoramiento en el ruido de cuantificación. Comente el resultado.
   d) Calcule para ambos casos (cuantificación con 4 y 5 bits) el porcentaje de error cometido sobre el valor pico a pico de la señal.
   e) Se desea que el error de cuantificación sea inferior al 0,5% del valor pico a pico de la señal muestreada. Calcule el mínimo número de bits necesario y la nueva RSR de cuantificación.

7. Una señal $m_1(t)$ está limitada en banda a 3 kHz, y otras tres señales $m_2(t)$, $m_3(t)$ y $m_4(t)$ lo están a 1 kHz cada una. Estas señales se van a muestrear al índice de Nyquist.
   a) Sugiera un esquema de multiplexación adecuado.
   b) Calcule la velocidad del muestreador (en muestras/segundo).
   c) Si la salida del muestreador se cuantifica con 1024 niveles y se codifica en binario, obtenga el régimen binario de la señal múltiplex.

8. Una señal de televisión con ancho de banda de 5 Mhz se modula en PCM con un cuantificador de 512 niveles. Se pide:
   a) Mínimo número de bits para codificar las muestras.

b) Ancho de banda necesario para la transmisión si cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b.

9. Se diseña un sistema de multiplexación en el tiempo PCM que emplea 256 niveles de cuantificación para transmitir 3 señales $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$. Sus anchos de banda son 5 kHz, 10 kHz y 5 kHz respectivamente. Cada señal se muestrea al índice de Nyquist y se codifica con 8 bits. Determine:
   a) El máximo tiempo de bit.
   b) Ancho de banda requerido para PCM si cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b.
   c) Diagrama de bloques del transmisor y del receptor, y velocidad del muestreador.
   d) Ancho de banda si se emplean 512 niveles de cuantificación y cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b.
   e) Modifique el esquema si el multiplexor intercala bits de cada muestra, (multiplexación digital).

10. Se tienen 10 canales con banda pasante de 50 Hz a 3,3 kHz y cada uno de ellos se muestrea a 8 kHz. Si se hace una multiplexación en el tiempo (MDT), se pide:
    a) Calcule la frecuencia de muestreo total o velocidad de las muestras. Calcule el ancho de banda mínimo requerido si cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b.

    Si se hace MDT de PCM de 8 niveles, se pide:

    b) Compare el nuevo ancho de banda con el anterior si cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b y calcule la relación señal a ruido de cuantificación, suponiendo potencia de pico.

    Si se hace MDT de PCM de 128 niveles, se pide:

    c) Calcule el ancho de banda requerido si cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b y la relación señal a ruido de cuantificación, suponiendo también potencia de pico.

11. Un sistema de cuantificación desea ahorrar 3 bits por medio de compansión logarítmica con ley μ.
    a) Obtener el valor de la ganancia de compansión y del parámetro μ, aproximado por exceso.
    b) Obtener el número de bits necesarios para conseguir al menos una relación señal a ruido de cuantificación uniforme de 40 dB, siendo la relación entre el valor máximo y el valor eficaz de la señal de 2. Suponga $x_{sc}=x_{max}$ y $\langle x\rangle=0$.
    c) Suponga que al sistema obtenido en el apartado b) se le aplica compansión con ley μ ($\mu=256$). Calcule la ganancia de compansión y la mejora que se produce en el sistema (en dB). ¿Cuántos bits tendríamos que haber añadido en el sistema de cuantificación uniforme para conseguir al menos la misma mejora?

12. Un proceso estocástico gaussiano x(t) que tiene de valor medio $\langle x(t)\rangle=0{,}5$ y desviación típica $\sigma_x=0{,}1$, se cuantifica con 256 niveles. Teniendo en cuenta que la señal es siempre positiva y que está normalizada, obtenga la relación señal a ruido de cuantificación.

    Se desea mejorar la relación señal a ruido aplicando cuantificación no uniforme, escogiendo una de las tres leyes que se indica. Para tomar la decisión se debe evaluar la ganancia de compansión en aquellos puntos donde desee mejorar la relación señal a ruido de cuantificación.

    1.- Ley μ, con $\mu=120$.

    2.- Ley A, con A=80.

    3.- $C(x)=2x^2$; $\quad 0 \le x \le 0{,}5$

    $C(x)=-2(x-1)^2+1 \quad 0{,}5 \le x \le 1$

13. Se tiene una señal periódica de período $T = 1$ ms, cuyo ciclo se define de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{250}(t-250); & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ -\dfrac{3}{250}(t-750); & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

donde *t* viene dado en μs y *x(t)* en voltios.

Se muestrea la señal a $f_M = 8$ kHz, tomándose la primera muestra en $t = 50$ µs. Las muestras se codifican mediante un sistema MIC de 8 bits y tensión de sobrecarga de 3 V.

a) Escriba las palabras código correspondientes a las tres primeras muestras de señal y obtenga los errores absoluto y relativo para cada una de ellas.

b) Calcule la relación señal a ruido de cuantificación.

14. Se dispone de un codificador MIC de 8 bits cuyo margen de funcionamiento está comprendido entre ±1 V. Se aplican a dicho codificador muestras de señal de valores:

1,117314 0,086726 0,714236 (Voltios)

a) Indique para cada una de ellas su nivel de cuantificación, errores absoluto y relativo de cuantificación y palabra código correspondiente.

b) Repita los cálculos en caso de compansión con ley A (A = 87,6).

15. Se transmiten 20 señales vocales modulándolas previamente por impulsos codificados (MIC) y multiplexándolas por división en el tiempo (MDT). La trama del sistema MDT está formada por los 20 canales vocales más dos de señalización, todos con el mismo número de bits. La frecuencia de muestreo de los canales vocales es de 8 kHz y el régimen binario total es de 1408 kbps. Se pide:

a) Número de bits por muestra.

b) Relación señal a ruido de cuantificación, suponiendo $x_{max}/x_{ef} = 4$, $x_{sc} = x_{max}$ y $\langle x \rangle = 0$.

c) Si el codificador tiene un margen dinámico de ±1 V, calcúlese para la muestra 0,23 V la palabra código, el valor recuperado y los errores absoluto y relativo en el extremo receptor.

Se quiere aumentar en 18 dB la relación señal a ruido de cuantificación para los niveles bajos de la señal manteniendo el número de bits por muestra. Para ello se utiliza un compansor de ley µ.

d) Obtenga el valor de µ de la ley de compansión.

e) Para el valor de µ obtenido en el apartado d), calcule el tamaño del escalón para niveles bajos de señal.

f) Calcule para la muestra 0,23 V el valor comprimido, la palabra código, el valor expandido, el valor recuperado y los errores absoluto y relativo.

SOLUCIONES

1. $$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{TF} \tau \sin c\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \qquad \Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{TF} \tau \sin c^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

$$\tau \sin c\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \qquad \tau \sin c^2\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} 2\pi\,\Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\sin c\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{\tau}\Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \qquad \sin c^2\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{\tau}\Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

a) $x(t) = sinc(100t)$

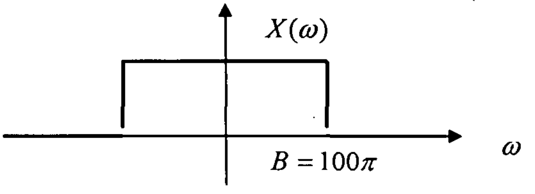
Si $\tau / 2\pi = 100$, entonces $\tau = 200\pi$

$$x(t) = \sin c(100t) \xrightarrow{TF} X(\omega) = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$$

$B = 100\pi$ rad/s

$\boxed{\omega_M\big|_{\min} = 200\pi \text{ rad/s}}$

$\boxed{f_M\big|_{\min} = 100 \text{ Hz}}$



b) $x(t) = \sin c^2(100t)$

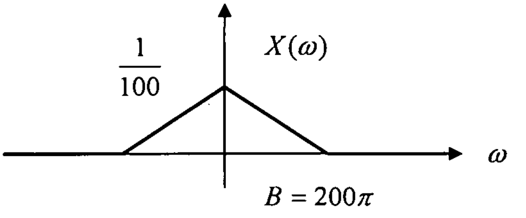
Si $\tau / 2\pi = 100$, entonces $\tau = 200\pi$

$$x(t) = \sin c^2(100t) \xrightarrow{TF} X(\omega) = \frac{1}{100}\Delta\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$$

$B = 200\pi$ rad/s

$\boxed{\omega_M\big|_{\min} = 400\pi \text{ rad/s}}$

$\boxed{f_M\big|_{\min} = 200 \text{ Hz}}$

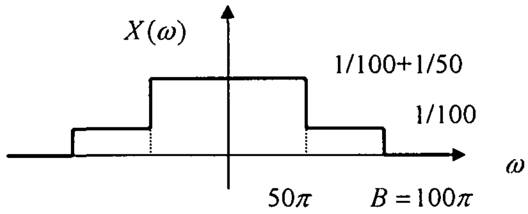


c) $$x(t) = \sin c(100t) + \sin c(50t) \xrightarrow{TF} X(\omega) = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) + \frac{1}{50}\Pi\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$$

$B = 100\pi$ rad/s

$\boxed{\omega_M\big|_{\min} = 200\pi \text{ rad/s}}$

$\boxed{f_M\big|_{\min} = 100 \text{ Hz}}$

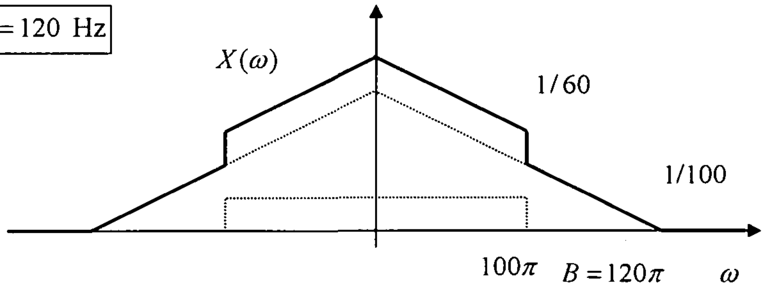


d) $x(t) = \sin c(100t) + \sin c^2(60t) \xrightarrow{TF} X(\omega) = \dfrac{1}{100}\Pi\left(\dfrac{\omega}{200\pi}\right) + \dfrac{1}{60}\Delta\left(\dfrac{\omega}{120\pi}\right)$

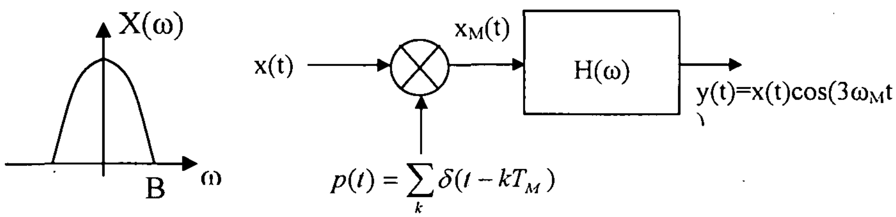
$B = 120\pi$ rad/s

$\boxed{\omega_M\big|_{\min} = 240\pi \text{ rad/s}}$

$\boxed{f_M\big|_{\min} = 120 \text{ Hz}}$



2.

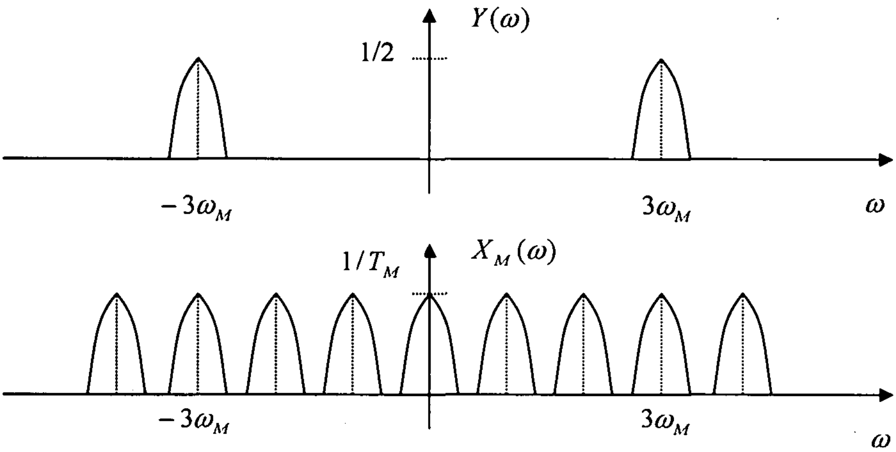


a) $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_M) \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{T_M}\delta(\omega - k\omega_M)$

$$x(t)\cdot p(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi}X(\omega) * 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_M}\delta(\omega - k\omega_M) = \frac{1}{T_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_M) = X_M(\omega)$$

$$y(t) = x(t)\cdot\cos(3\omega_M t) \rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \pi\left[\delta(\omega - 3\omega_M) + \delta(\omega + 3\omega_M)\right]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - 3\omega_M) + \frac{1}{2}X(\omega + 3\omega_M)$$



Para obtener $Y(\omega)$ a partir de $X_M(\omega)$ el filtro debe ser:

$$\boxed{H(\omega)=\frac{T_M}{2}\left[\Pi\left(\frac{\omega-3\omega_M}{2B}\right)+\Pi\left(\frac{\omega+3\omega_M}{2B}\right)\right]}$$

b) Tal como se mostró en el problema 1:

$$\frac{\tau}{2\pi}\sin c\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right)\xrightarrow{TF}\Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

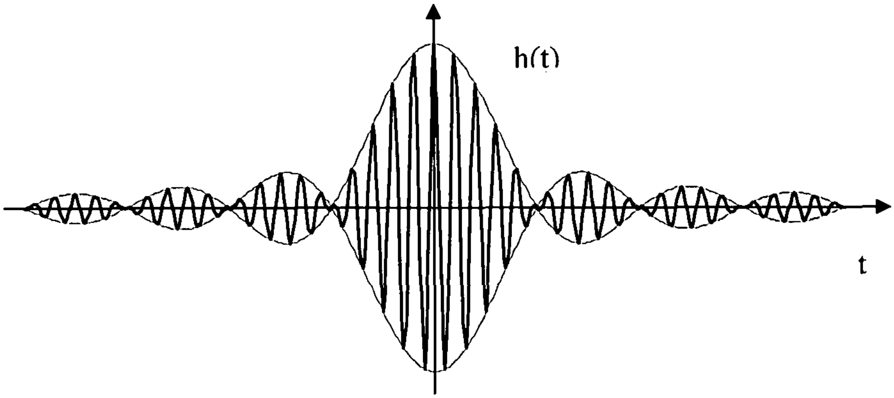
Sustituyendo τ por 2B y ajustando las variables, se obtiene:

$$\frac{B}{\pi}\frac{T_M}{2}\sin c\left(\frac{tB}{\pi}\right)\xrightarrow{TF}\frac{T_M}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{2B}\right)$$

$$h(t)=TF^{-1}[H(\omega)]=\frac{T_M}{2}\frac{B}{\pi}\left[\sin c\left(\frac{Bt}{\pi}\right)e^{j3\omega_M t}+\sin c\left(\frac{Bt}{\pi}\right)e^{-j3\omega_M t}\right]=$$

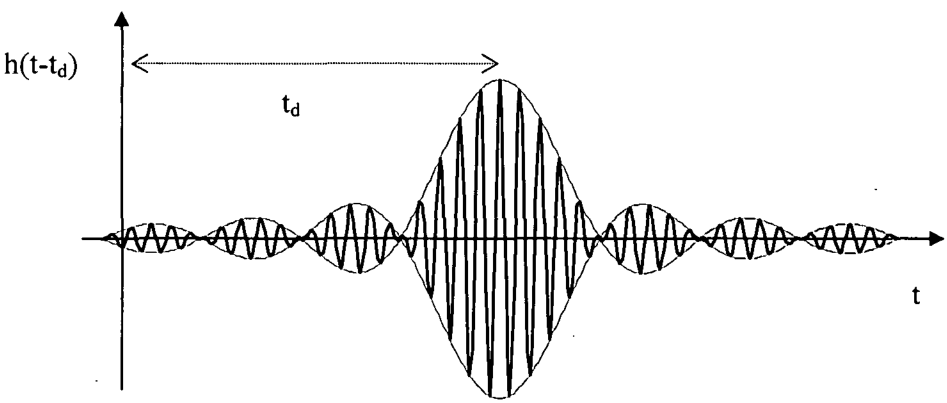
$$=\frac{T_M}{2}\frac{B}{\pi}\sin c\left(\frac{Bt}{\pi}\right)\cdot 2\cos(3\omega_M t)$$

$$\boxed{h(t)=\frac{T_M B}{\pi}\sin c\left(\frac{Bt}{\pi}\right)\cos(3\omega_M t)}$$

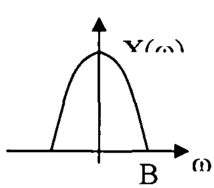


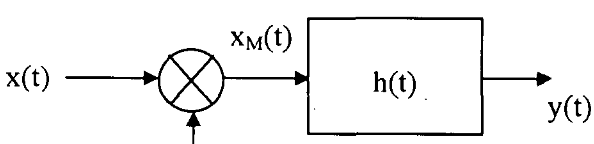
c) El filtro no es realizable ya que no es causal: $h(t) \neq 0,\ t < 0$. Habría que introducir un retardo t_d para hacerlo realizable.

$$h(t-t_d)=\frac{T_M B}{\pi}\sin c\left(\frac{B}{\pi}(t-t_d)\right)\cdot\cos(3\omega_M(t-t_d))$$



3.





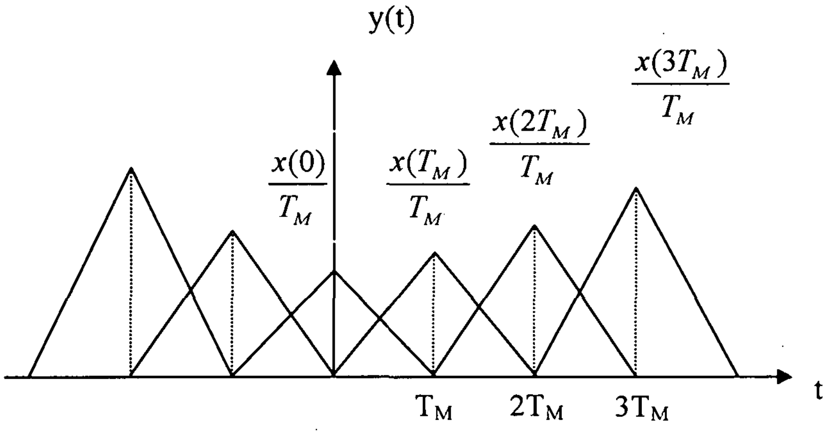
$$p(t)=\sum_k \delta(t-kT_M)$$

a) $$h(t)=\frac{1}{T_M}\Delta\left(\frac{t}{T_M}\right)\rightarrow H(\omega)=\frac{1}{T_M}T_M\ \sin c^2\left(\frac{\omega T_M}{2\pi}\right)$$

$$x_M(t)=x(t)\cdot p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_M)\delta(t-kT_M)$$

$$y(t)=x_M(t)*h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_M)\delta(t-kT_M)*\frac{1}{T_M}\Delta\left(\frac{t}{T_M}\right)$$

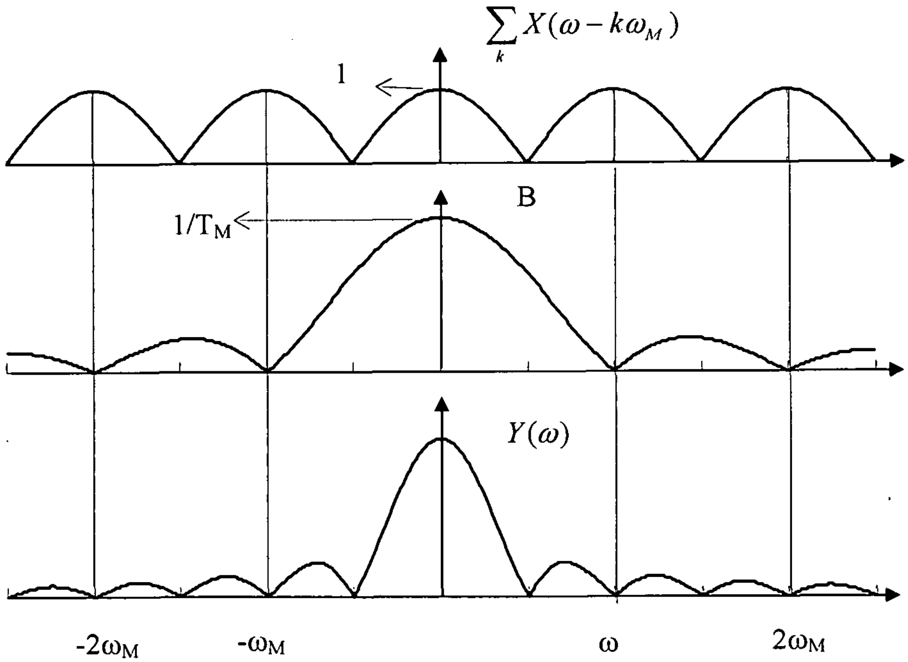
$$\boxed{y(t)=\frac{1}{T_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_M)\Delta\left(\frac{t-kT_M}{T_M}\right)}$$



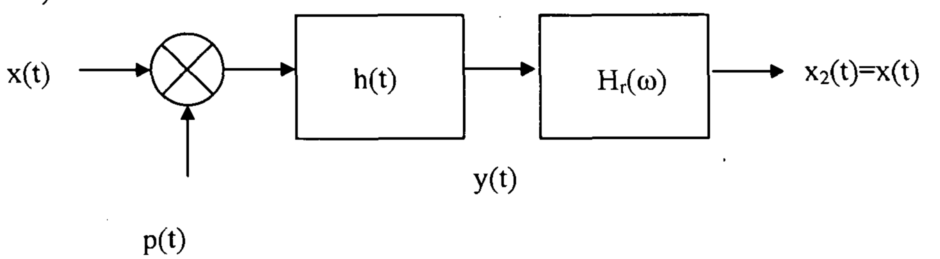
$$Y(\omega)=X_M(\omega)\cdot H(\omega)$$

$$X_M(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_M}2\pi\delta(\omega-k\omega_M)=\frac{1}{T_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_M)$$

$$\boxed{Y(\omega)=\frac{1}{T_M}\sin c^2\left(\frac{\omega T_M}{2\pi}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_M)}$$



b)



$$Y(\omega) = \frac{1}{T_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_M) H(\omega)$$

Se desea obtener a la salida la señal original:

$$X(\omega) = Y(\omega) \cdot H_r(\omega)$$

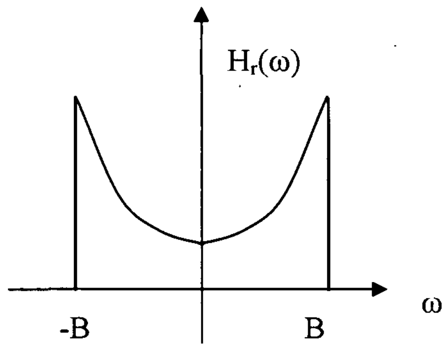
$$H_r(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

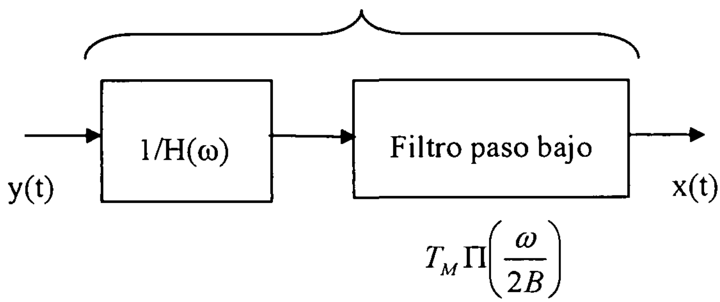
$$H_r(\omega) = \frac{X(\omega)}{\frac{1}{T_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_M) H(\omega)} =$$

$$=\frac{X(\omega)\cdot T_M\Pi\left(\dfrac{\omega}{2B}\right)}{\dfrac{1}{T_M}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_M)H(\omega)T_M\Pi\left(\dfrac{\omega}{2B}\right)}=$$

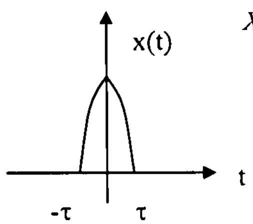
$$=\frac{X(\omega)\cdot T_M\Pi\left(\dfrac{\omega}{2B}\right)}{X(\omega)H(\omega)}=\frac{T_M\Pi\left(\dfrac{\omega}{2B}\right)}{H(\omega)}=$$

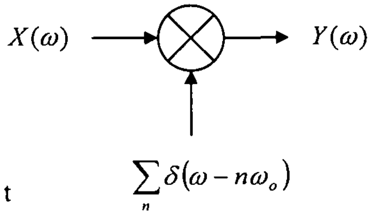
$$\boxed{=\frac{T_M\Pi\left(\dfrac{\omega}{2B}\right)}{\sin c^2\left(\dfrac{\omega T_M}{2\pi}\right)}=H_r(\omega)}$$

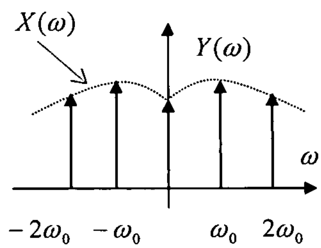




4.





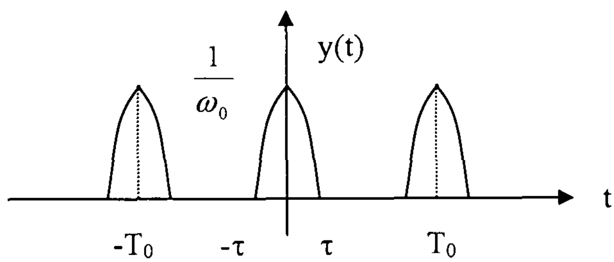


a) $$Y(\omega)=X(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$y(t)=x(t)*TF^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)\xrightarrow{TF}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T_0}\delta(\omega-n\omega_0)$$

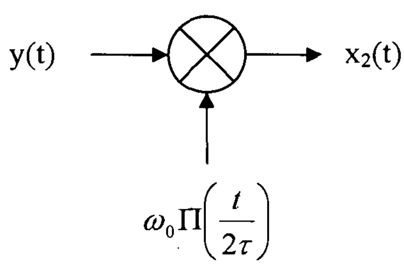
$$y(t)=x(t)*\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_0)$$



$$T_0-\tau\geq\tau\,;\qquad T_0\geq 2\tau\,;\qquad \frac{2\pi}{\omega_0}\geq 2\tau$$

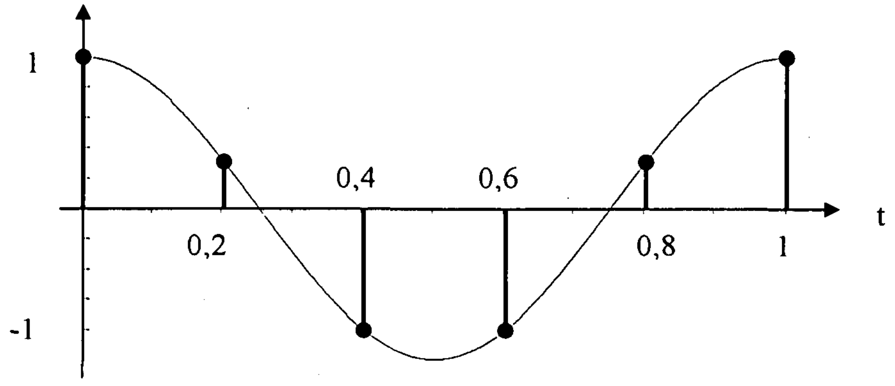
$$\boxed{\omega_0\leq\frac{\pi}{\tau}\ \text{rad/s}}$$

b)



$$x_2(t)=y(t)\omega_0\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_0)\omega_0\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)=x(t)$$

5.



a) $T_M = \dfrac{1}{f_M} = \dfrac{1}{5 \cdot 10^3} = 0{,}2 \text{ ms}$

$$x_0 = x(0) = \cos(0) = 1 \text{ V}$$

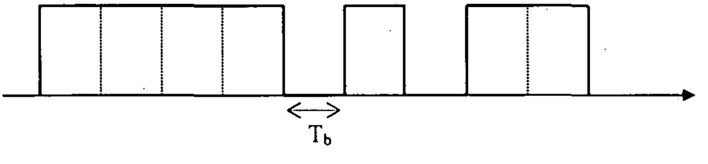
$$x_1 = x(T_M) = \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}) = \cos(0{,}4\pi) = 0{,}309 \text{ V}$$

$$x_2 = x(2T_M) = \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}) = \cos(0{,}8\pi) = -0{,}809 \text{ V}$$

Muestra x	Valor cuantificado $Q(x)$	Error absoluto $q_a = x - Q(x)$	Error relativo $q_r = (x - Q(x))/x$
x_0	0,875	0,125	12,5 %
x_1	0,375	-0,066	21,3 %
x_2	-0,875	0,066	8,1 %

b)

$\overbrace{111}^{x_0}\overbrace{101}^{x_1}\overbrace{011}^{x_2}$



c)

$$\boxed{R_b = n \cdot f_M = 3 \cdot 5 \cdot 10^3 = 15 \text{ kbps}}$$

$$\boxed{T_b = \frac{1}{R_b} = \frac{1}{15 \cdot 10^3} = 66 \ \mu s}$$

d) $\boxed{R_b = n \cdot f_M \cdot n^{\circ} canales = 3 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 5 = 75 \text{ kbps}}$

$$\boxed{T_b = \frac{1}{R_b} = 13{,}3 \ \mu s}$$

6. a) $f_M \geq 2B = 2 \cdot 4 \cdot 10^3 = 8 \text{ kHz}$

$$\boxed{T_M \leq \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125 \ \mu s}$$

b) $\langle q^2 \rangle = \dfrac{\Delta^2}{12} \qquad \Delta = \dfrac{2x_{SC}}{2^n} = \dfrac{V_{PP}}{2^n} = \dfrac{4}{16} = 0{,}25$

$$\boxed{\langle q^2 \rangle = \frac{0{,}25^2}{12} = 5{,}2 \text{ mW}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{\langle x^2 \rangle}{x_{SC}^2} = 4{,}8 + 6 \cdot 4 + 10\log\frac{\left(|x(t)|_{\max}\right)^2}{x_{SC}^2} \qquad ; x_{SC}^2 = \left(|x(t)|_{max}\right)^2$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = 28{,}8 \text{ dB}}$$

c) $$\frac{\langle q^2 \rangle|_{5b}}{\langle q^2 \rangle|_{4b}} = \frac{\Delta^2/12|_{5b}}{\Delta^2/12|_{4b}} = \frac{\left(4/32\right)^2}{\left(4/16\right)^2} = 0{,}25 = 25\%$$

El ruido de cuantificación disminuye al 25 % del que se tenía para 4 bits. Sin embargo, aumentará el régimen binario.

$$\left.\begin{array}{l} R_b|_{5b} = n \cdot f_M = 5 \cdot f_M \\ R_b|_{4b} = n \cdot f_M = 4 \cdot f_M \end{array}\right\} R_b|_{5b} = \frac{5}{4} R_b|_{4b} = 1{,}25 \cdot R_b|_{4b} \text{ aumenta en un 25 \%}$$

d) $n = \log_2 \dfrac{1}{2p}; \quad 2^n = \dfrac{1}{2p}; \quad p = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$$\boxed{n = 4; \quad p = \frac{1}{2^5} = 3{,}125\ \%}$$

$$\boxed{n = 5; \quad p = \frac{1}{2^6} = 1{,}56\ \%}$$

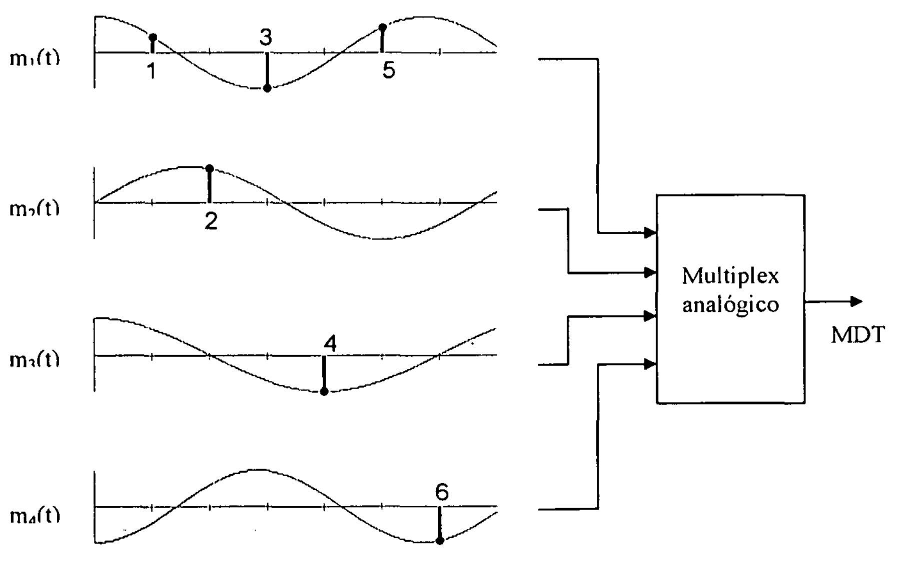
e) $n \geq \log_2 \dfrac{1}{2p} = \log_2 \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}005} = \log_2 100 = 6{,}64 \quad \Rightarrow \quad n = 7 \ \ bits$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = 4{,}8 + 6 \cdot n = 46{,}8\ \text{dB}}$$

7. a) $f_{M1} = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6\ \text{kHz}$

$f_{M2} = f_{M3} = f_{M4} = 2 \cdot 10^3 = 2\ \text{kHz}$

$\dfrac{f_{M1}}{f_{M2}} = \dfrac{6}{2} = 3 \Rightarrow$ se han de tomar tres muestras de $m_1(t)$ por cada una que se tome de las otras tres señales. Las muestras se toman en el orden que se muestra:



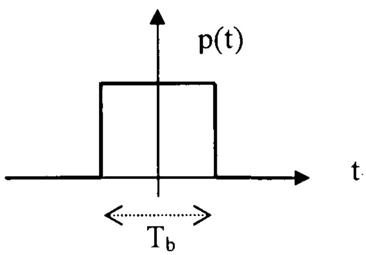
b) $\boxed{f_{MT} = f_{M1} + f_{M2} + f_{M3} + f_{M4} = 6 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ kHz}}$

c) $\boxed{1024 = 2^{10} \quad \Rightarrow \quad n = 10 \text{ bits}}$

$$\boxed{R_b = n \cdot f_M = 10 \cdot 12 \cdot 10^3 = 120 \text{ kbps}}$$

8. a) $\boxed{L = 512 \text{ niveles} \Rightarrow \text{n} = \log_2 512 = 9 \text{ bits}}$

b) Cada bit se transmite mediante un pulso de duración T_b.



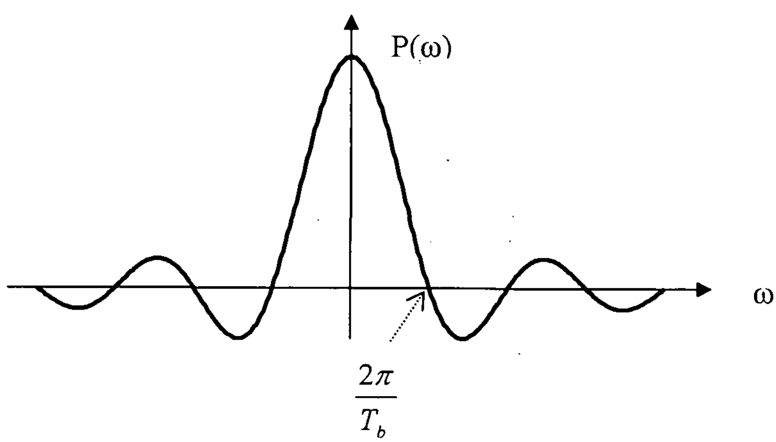
$$\Pi\left(\frac{t}{T_b}\right) \xrightarrow{TF} T_b \operatorname{sin}c\left(\frac{\omega T_b}{2\pi}\right)$$

La frecuencia de muestreo mínima es: $f_M = 2 \cdot B = 2 \cdot 5 \cdot 10^6 = 10 \text{ MHz}$

$R_b = n \cdot f_M = 9 \cdot 10 \cdot 10^6 = 90 \text{ Mbps}$

$T_b = \dfrac{1}{90 \cdot 10^6} = 11{,}1 \text{ ns}$

$$\boxed{B_p = \frac{1}{T_b} = 90 \text{ MHz}}$$



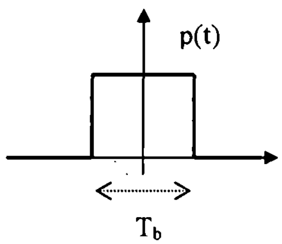
9. a) $256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$ bits

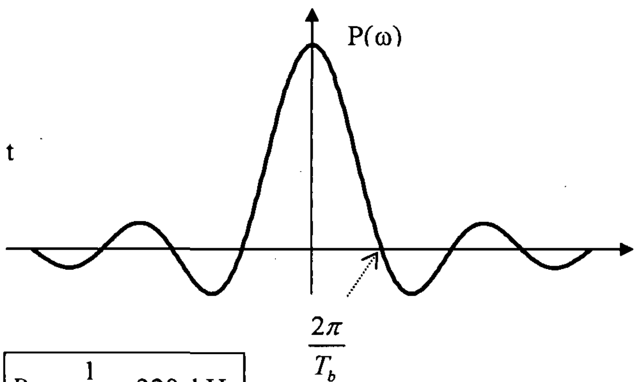
$$f_M = f_{M1} + f_{M2} + f_{M3} = 2 \cdot (5 + 10 + 5)\ \text{kHz} = 40\ \text{kHz}$$

$$R_b = n \cdot f_M = 8 \cdot 40 \cdot 10^3 = 320\ \text{kbps}$$

$$\boxed{T_b = \frac{1}{R_b} = \frac{1}{320 \cdot 10^3} = 3{,}125\ \mu s}$$

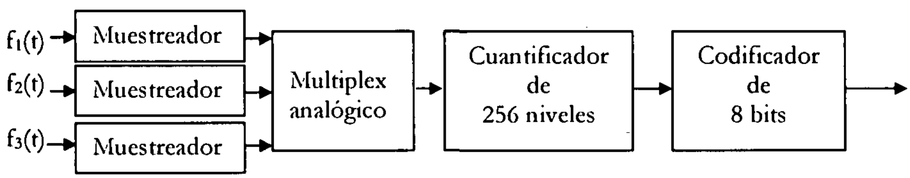
b)



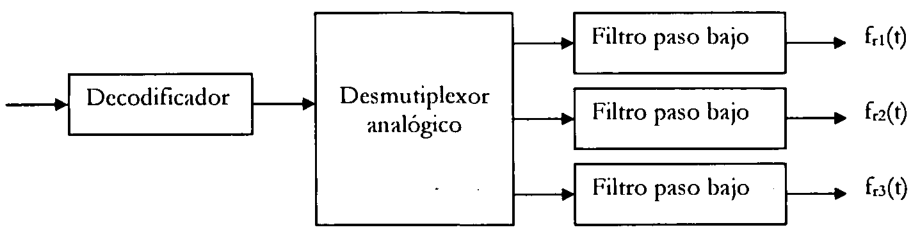


$$\boxed{B_p = \frac{1}{T_b} = 320\ \text{kHz}}$$

c) Transmisor:



Receptor:

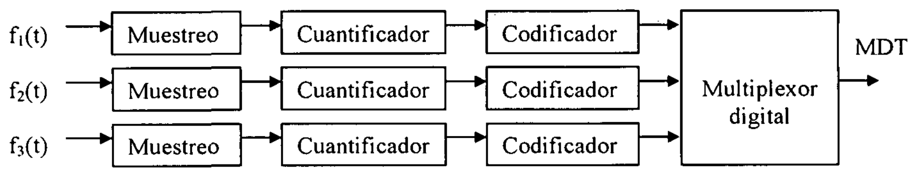


d) $L = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$ bits

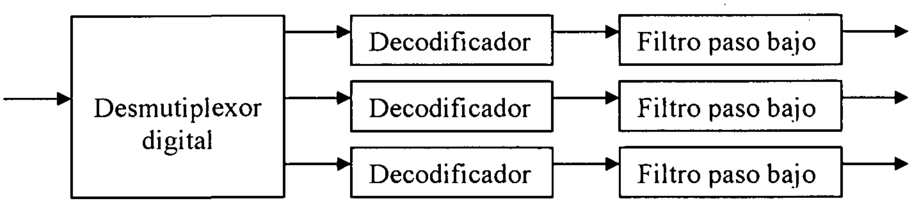
$$R_b = n \cdot f_M = 9 \cdot 40 \cdot 10^3 = 360 \text{ kbps}$$

$$\boxed{B_p = \frac{1}{T_b} = 360 \text{ kHz}}$$

e) Transmisor:



Receptor:



10. a) $\boxed{f_{MT} = n^{\circ}\,\text{señales} \cdot f_M = 10 \cdot 8 \cdot 10^3 = 80 \text{ kHz}}$

El ancho de banda mínimo que se requeriría corresponde al caso en el que se asigna un bit a cada muestra:

$$\boxed{B_p = \frac{1}{T_b} = f_{MT} = 80 \text{ kHz}}$$

b) $L = 8 \Rightarrow n = 3$ bits

$\boxed{B_p = R_b = n \cdot f_{MT} = 3 \cdot 80 \cdot 10^3 = 240 \text{ kHz}}$ (tres veces mayor)

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = 4{,}8 + 6 \cdot n = 22{,}8 \text{ dB}}$$

c) $L = 128 \Rightarrow n = 7$ bits

$\boxed{B_p = R_b = n \cdot f_{MT} = 7 \cdot 80 \cdot 10^3 = 560 \text{ kHz}}$ (siete veces mayor)

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = 4{,}8 + 6 \cdot n = 46{,}8 \text{ dB}}$$

11. a) $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q ley } \mu} = G_c^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q ley } \mu} (dB) = 20\log G_C + \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}} (dB) = 20\log G_C + 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{\langle x^2 \rangle}{x_{SC}^2}$$

Si se disminuye en 3 bits el cuantificador uniforme, disminuiría en la relación señal a ruido de cuantificación uniforme. Esta pérdida para valores pequeños de muestra es compensada por la ganancia de compansión utilizando la ley μ. Por lo tanto:

$$20\log G_C = 18 \text{ dB} \Rightarrow G_C = 10^{0.9} = 7{,}94 = \frac{\mu}{\ln(1+\mu)}$$

Para un valor de $\mu = 26{,}3$ se obtiene una ganancia de compansión de 7,95.

b) $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}} = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{\langle x^2 \rangle}{x_{SC}^2} \geq 40 \text{ dB}$

$$x_{SC} = x_{\max}$$

$$\langle x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x^2 \rangle = x_{ef}^2$$

$$\frac{x_{\max}}{x_{ef}} = 2 \Rightarrow x_{ef} = \frac{x_{\max}}{2}$$

$$40 \text{ dB} \leq 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$6 \cdot n \geq 41{,}2 \Rightarrow \boxed{n = 7 \text{ bits}}$$

c) $\boxed{G_C = \frac{\mu}{\ln(1+\mu)} = \frac{256}{\ln(257)} = 46{,}13 \Rightarrow 20\log G_C = 33{,}28 \text{ dB}}$

En el sistema de cuantificación uniforme tendríamos que haber añadido al menos 6 bits para conseguir la misma mejora. Es decir, necesitaríamos un sistema de cuantificación uniforme de 13 bits.

12. $0 \leq x(t) \leq 1$ V

$L = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$ bits

En este caso no se puede aplicar la expresión:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{\langle x^2 \rangle}{x_{SC}^2}$$

porque la señal no está comprendida entre. $\pm x_{SC}$ Como la señal está acotada entre 0 y 1 V, utilizamos los 256 niveles para cuantificar ese intervalo. Por lo tanto:

$$\Delta = \frac{x_{SC}}{L} = \frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle q^2 \rangle} \qquad \begin{cases} \langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \sigma_x^2 = 0{,}5^2 + 0{,}1^2 = 0{,}26 \text{ W} \\ \langle q^2 \rangle = \dfrac{\Delta^2}{12} = \dfrac{1}{12 \cdot 256^2} = 1{,}27 \cdot 10^{-6} \text{ W} \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{0{,}26}{1{,}27 \cdot 10^{-6}} = 204724 = 53{,}1 \text{ dB}}$$

Para evaluar la ganancia de compansión se toma el valor más probable de x(t) que será su valor medio.

1. Ley μ (μ = 120): $C(x) = \dfrac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)}$

   La ganancia viene determinada por la derivada de C(x) evaluada en el punto x=0,5:

   $$C'(x) = \frac{1}{\ln(1+\mu)}\frac{\mu}{1+\mu x} \quad \Rightarrow \quad C'(0{,}5) = 0{,}41$$

   Mejora: $\boxed{20\log G_C(dB) = 20\log 0{,}41 = -7{,}74 \text{ dB}}$

2. Ley A (A = 80): $C(x) = \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A}$; $\dfrac{1}{A} \leq x \leq 1$

   $$C'(x) = \frac{1}{1+\ln A}\frac{A}{Ax} \quad \Rightarrow \quad C'(0{,}5) = \frac{1}{1+\ln 80}\frac{1}{0{,}5} = 0{,}37$$

   Mejora: $\boxed{20\log G_C(dB) = 20\log 0{,}37 = -8.64 \text{ dB}}$

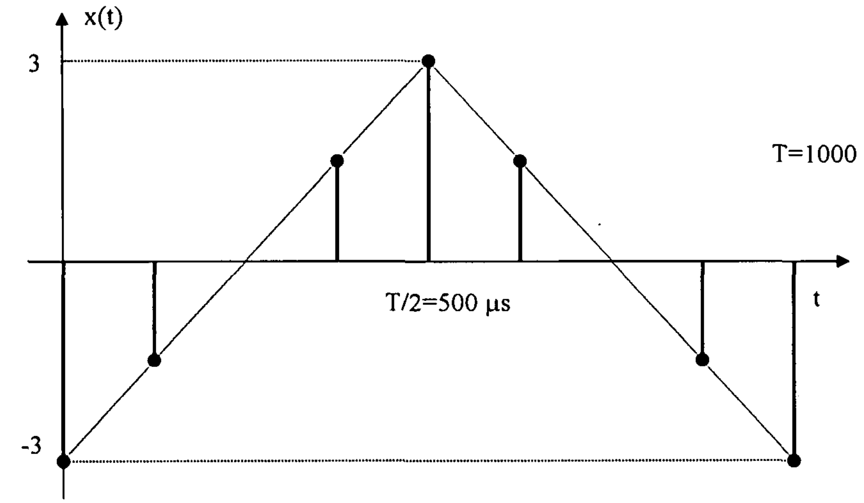
3. $C(x) = \begin{cases} 2x^2 & 0 \leq x \leq 0{,}5 \\ -2(x-1)^2 + 1 & 0{,}5 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$C(x) = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad C'(0{,}5) = 2$$

Mejora: $\boxed{20 \log G_C(dB) = 20 \log 2 = 6{,}02 \text{ dB}}$

Se escoge este último compansor, ya que para el valor medio de la señal de entrada, que es el más probable, proporciona una mejora de 6 dB frente a los otros dos que proporcionan pérdidas.

13.



a) $f_M = 8 \text{ kHz} \Rightarrow \mathrm{T_M} = \dfrac{1}{f_M} = 125 \ \mu s$

$t_0 = 50 \ \mu s \Rightarrow \mathrm{x(t_0)} = \text{-2,4 V}$

$t_1 = 50 + 125 = 175 \ \mu s \Rightarrow \mathrm{x(t_1)} = \text{-0,9 V}$

$t_2 = 50 + 2 \cdot 125 = 300 \ \mu s \Rightarrow \mathrm{x(t_2)} = \text{0,6 V}$

$n = 8$ bits $\Rightarrow$ L = 256 niveles $\Rightarrow$ se tomarán 128 niveles positivos y 128 negativos.

$$\Delta = \frac{2x_{SC}}{L} = \frac{2 \cdot 3}{256} = \frac{3}{128} = 0{,}0234375$$

Para calcular el nivel de cuantificación de cada muestra:

$$k = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] \rightarrow \begin{cases} t_0 \rightarrow k = 102 \\ t_1 \rightarrow k = 38 \\ t_2 \rightarrow k = 25 \end{cases}$$

Las palabras código se obtienen codificando en binario *k* y añadiendo al principio el bit de signo, *1* para una muestra positiva y *0* para una muestra negativa.

$$\begin{array}{r|l} 102 & 0 \\ 51 & 1 \\ 25 & 1 \\ 12 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 38 & 0 \\ 19 & 1 \\ 9 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 1 \\ 12 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & \\ & \\ & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 01100110 & 00100110 & 10011001 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ signo - & signo - & signo + \end{array}$$

Valores de reconstrucción: $y_K = \Delta\left(k + \frac{1}{2}\right) sig(x)$

Error absoluto: $q_a = x - Q(x)$

Error relativo: $q_r = \dfrac{x - Q(x)}{x}$

Poniendo los resultados en una tabla:

Muestra x	Nivel k	Palabra código	Valores de reconstrucción (y_k)	Error absoluto $(\lvert q_a \rvert)$	Error relativo $(\lvert q_r \rvert)$
-2,4	102	01100110	-2,40234375	0,00234375	0,097 %
-0,9	38	00100110	-0,90234375	0,00234375	0,26 %
0,6	25	10011001	0,59765625	0,00234375	0,39 %

b) Se aplica directamente la expresión:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle q^2 \rangle}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{3}{250}(t-250)\right)^2 dt = \frac{2}{T}\frac{3^2}{250^2}\left(\frac{t^3}{3} - 500\frac{t^2}{2} + 250^2 t\right)\Bigg|_0^{T/2} = 9 \text{ W}$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12} = 4{,}58 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{9}{4{,}58 \cdot 10^{-5}} = 65536 = 48{,}1 \text{ dB}}$$

14. $x_{SC} = 1$ V ; $n = 8$ bits ; $\Delta = \frac{2x_{SC}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{256} = 2^{-7}$

a) $k = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]$

$$y_k = \Delta\left(k + \frac{1}{2}\right)sig(x)$$

La primera muestra supera el valor de sobrecarga:

$x_0 = 1{,}117314 \rightarrow k = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] = 143$, se asigna el máximo nivel posible: $k = 127$.

La tabla de resultados es:

Muestra x	Nivel k	Palabra código	Valores de reconstrucción (y_k)	Error absoluto (q_a)	Error relativo (q_r)
1,117314	127	11111111	0,99609375	0,12122025	10,85 %
0,086726	11	10001011	0,08984375	0,00311775	3,59 %
0,714236	91	11011011	0,71484375	0,00060775	0,085 %

b) Como todas las muestras son positivas, no es necesario tener en cuenta el signo.

$x_{max} = 1$

$$\left.\begin{aligned} C(x) &= \frac{A(x)}{1+\ln A}sig(x) & 0 \le |x| \le \frac{1}{A} \\ C(x) &= \frac{1+\ln A(x)}{1+\ln A}sig(x) & \frac{1}{A} \le |x| \le 1 \end{aligned}\right\} \text{Compresor}$$

El expansor será la función inversa de C(x):

$$C^{-1}(x)=\frac{(1+\ln A)|C|}{A}sig(C) \quad 0\le|C|\le\frac{1}{1+\ln A}$$

$$C^{-1}(x)=\frac{e^{[|C|(1+\ln A)-1]}}{A}sig(C) \quad \frac{1}{1+\ln A}\le|C|\le 1$$

En el caso de la primera muestra, como hay sobrecarga, el valor comprimido será $C(x)=1$; se cuantifica de manera uniforme el valor comprimido:

$$k=127 \Rightarrow \qquad \mathrm{y_k}=\Delta\left(k+\frac{1}{2}\right)=0{,}99609375$$

El valor reconstruido se pasa por el expansor:

$$C^{-1}(y_{127})=\frac{e^{[0.99609375(1+\ln 87.6)-1]}}{87.6}=0{,}9788488401$$

$$|q_a|=0{,}1384651599 \qquad\qquad |q_r|=12{,}39\,\%$$

La tabla de valores queda:

Muestra x	Muestra comprimida $C(x)$	Nivel k	Valor de reconstrucción (y_k)	Palabra código	Muestra expandida $C^{-1}(y_k)$	Error absoluto (q_a)	Error relativo (q_r)
1,117314	1,0	127	0,99609375	11111111	0,97884884	0,13846516	12,39%
0,086726	0,553243	70	0,550781	11000110	0,085565	0,001161	1,3%
0,714236	0,938506	120	0,941406	11111000	0,725661	0,011426	1,6%

15. a) N = 20 señales vocales

$$R_b=(N+2)\cdot n\cdot f_M$$

$$\boxed{n=\frac{R_b}{(N+2)f_M}=\frac{1408\cdot 10^3}{22\cdot 8\cdot 10^3}=8\ \text{bits}}$$

b) $$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}}=4{,}8+6\cdot n+10\log\frac{\langle x^2\rangle}{x_{SC}^2}$$

$$x_{SC} = x_{\max}$$

$$\langle x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x^2 \rangle = x_{ef}^2$$

$$\frac{x_{\max}}{x_{ef}} = 4 \Rightarrow x_{ef} = \frac{x_{\max}}{4}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}} = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{\langle x^2 \rangle}{x_{SC}^2} = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\frac{x_{ef}^2}{x_{\max}^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{q uniforme}} = 4{,}8 + 6 \cdot n + 10\log\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 40{,}8 \ \text{ dB}}$$

c) $x_0 = 0{,}23; \quad \Delta = \dfrac{2x_{SC}}{2^n} = \dfrac{2}{256} = 2^{-7}$

$$k = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] = E\left[0{,}23 \cdot 2^7\right] = 29$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 1 \\ 14 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \qquad \boxed{10011101}$$

$$\boxed{y_{29} = \Delta\left(k + \frac{1}{2}\right) = 2^{-7} \cdot 29{,}5 = 0{,}230468}$$

$$\boxed{|q_a| = 4{,}68 \cdot 10^{-4}} \qquad \boxed{|q_r| = 0{,}2 \ \%}$$

d) $20\log G_c = 20\log\dfrac{\mu}{\ln(1+\mu)} = 18 \ \text{ dB} \Rightarrow \dfrac{\mu}{\ln(1+\mu)} = 10^{0.9} = 7{,}94$

Por tanteo: $\dfrac{26{,}3}{\ln(27{,}3)} = 7{,}95 \Rightarrow \boxed{\mu \cong 26{,}3}$

e) $\Delta_{qley\mu} = \dfrac{\Delta_{quniforme}}{G_c} = \dfrac{2^{-7}}{7{,}95} = 9{,}82 \cdot 10^{-4}$

f) $C(x) = x_{max} \dfrac{\ln\left(1 + \mu \dfrac{|x|}{x_{max}}\right)}{\ln(1+\mu)} sig(x) \xrightarrow{Simplificando} C(x) = \dfrac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}$

$$|C|\ln(1+\mu) = \ln(1+\mu|x|) \Rightarrow e^{|C|\ln(1+\mu)} - 1 = \mu|x| \Rightarrow x = C^{-1}(x) = \frac{e^{|C|\ln(1+\mu)} - 1}{\mu} sig(C)$$

$$\boxed{x_0 = 0{,}23 \quad \rightarrow \quad C(x_0) = 0{,}590551}$$

$$\Delta = \frac{2x_{SC}}{2^n} = \frac{2}{2^8} = 2^{-7}$$

$$k = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] = E\left[0{,}590551 \cdot 2^7\right] = 75$$

75	1
37	1
18	0
9	1
4	0
2	0
1	

$$\Rightarrow \boxed{11001011}$$

$$\boxed{y_{75} = \Delta\left(k + \frac{1}{2}\right) = 2^{-7} \cdot 75{,}5 = 0{,}589844}$$

$$\boxed{C^{-1}(y_{75}) = \frac{e^{0{,}589844 \ln(1+26{,}3)} - 1}{26{,}3} = 0{,}229374}$$

$$\boxed{|q_a| = 0{,}000626 \qquad |q_r| = 0{,}27\ \%}$$

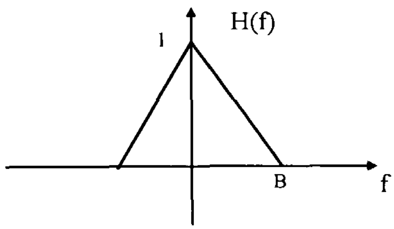
5

capítulo

Transmisión digital en banda base

ENUNCIADOS

1. Un canal tiene la siguiente característica de transferencia;



Se pide:

a) Determine la respuesta impulsiva y dibújela.

b) Verifique si se cumple el primer criterio de Nyquist. En caso afirmativo determine el factor de caída.

c) En caso afirmativo a b), proponga un nuevo factor de caída para el canal, determine la respuesta impulsiva y compárela con el resultado de a).

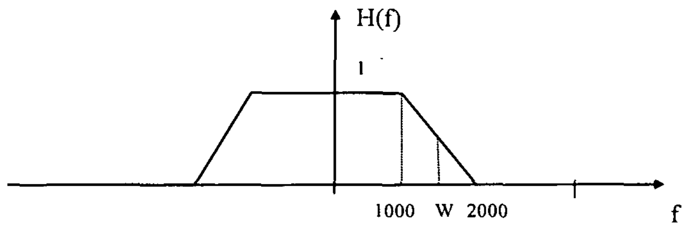
d) En cada caso determine la máxima velocidad de transmisión para IES nula.

2. Un canal de transmisión tiene la función de transferencia que se muestra en la figura. Se pide:

a) Determinar la respuesta impulsiva.

b) ¿La respuesta impulsiva está conformada según el primer criterio de Nyquist? ¿Por qué? En caso afirmativo determine el valor del factor de caída.

c) Determine la máxima velocidad de transmisión para nula IES. ¿A qué otras velocidades se podrá transmitir?



3. Se transmiten datos binarios en banda base a través de una línea telefónica de ancho de banda 3,6 kHz. Los pulsos están conformados de acuerdo con el primer criterio de Nyquist con un factor de caída $\alpha=0{,}2$.

   a) Haga un trazo aproximado del espectro del pulso P(f) y calcule el ancho de banda de Nyquist, B_N.

   b) Determine la velocidad de transmisión y el régimen binario si el alfabeto empleado consta de 8 símbolos.

4. Una fuente de señal se muestrea, cuantifica y codifica PCM. Cada muestra se codifica en una palabra que consta de 3 bits de información (datos) y uno de sincronismo. La transmisión se lleva a cabo por un canal de 6000 Hz de ancho de banda en banda base usando pulsos de Nyquist con un factor de caída del 50%, donde cada pulso transmite la información de un bit. Determine:

   a) Máxima tasa de transmisión de bits.

   b) Máxima tasa de transmisión de bits de datos.

   c) Máximo ancho de banda base de la señal de la fuente. Si se reduce a la mitad los niveles del cuantificador y se mantiene la máxima tasa de transmisión de bits, ¿cuál sería el ancho de banda base máximo para la señal de la fuente?

5. En un sistema de telecomunicación digital se emplea un código de línea con pulsos 16 niveles posibles. Se pide:

   a) Ancho de banda mínimo que se requiere para una transmisión (sin conformar) de 12000 bps.

b) Ancho de banda si se aplica el primer criterio de Nyquist con un factor de caída α=0,2.

6. Un sistema de telecomunicación digital recibe señales con amplitud de pico de 1 mV. Si la probabilidad de transmitir un cero o un uno es la misma y suponiendo que el ruido del canal es gaussiano de valor medio cero y valor eficaz σ_n=200 μV, determine la probabilidad de error en la detección si se emplea:
   a) Código de línea polar (NRZ).
   b) Código de línea unipolar (NRZ).

7. Una señal digital binaria con símbolos equiprobables (p(0)=p(1)=0,5) se transmite a una tasa binaria de 10 kbps. Se codifica mediante un código NRZ polar, siendo la amplitud de los pulsos recibidos de 10 mV. La DEP de ruido en el receptor es de $N_0/2=10^{-9}$ W/Hz.
   a) Calcule la probabilidad de error.
   b) Si la tasa binaria se incrementara a 100 kbps, calcule cual sería la amplitud de pulsos recibidos para mantener la misma probabilidad de error.
   c) Repita los apartados anteriores para el caso de un código unipolar.

8. El receptor de un sistema de comunicación digital puede recibir dos símbolos (H_0 y H_1). A esos símbolos se asocian las señales eléctricas:

   $H_0 \rightarrow z=x$
   $H_1 \rightarrow z=x^2+y^2$

   Donde x e y son señales independientes y gaussianas, de media nula e igual varianza. Para estos datos obtenga:

   La regla de decisión óptima que minimiza la probabilidad de error, considerando que ambos símbolos son equiprobables.
   a) Dibuje las regiones de decisión y calcule los umbrales.
   b) Probabilidades de error para una varianza de 2,25.

NOTA: para $z=x^2+y^2$, si x e y son variables aleatorias e independientes y gaussianas, puede considerarse que su función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$f(x^2+y^2)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\left(\frac{z}{2\sigma^2}\right)};\quad z\geq 0$$

9. Se tiene un sistema binario que puede transmitir dos símbolos (H_0 y H_1), las funciones de densidad de probabilidad de transmisión son:

$$H_1 \rightarrow \quad P(r/H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{r^2}{2}\right)}$$

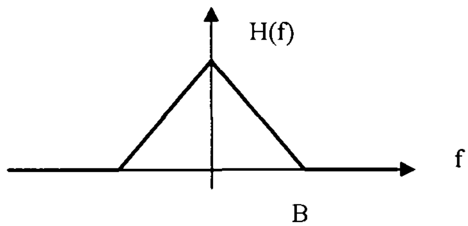
$$H_0 \rightarrow \quad P(r/H_0)=\frac{1}{2}e^{-|r|}$$

Obtenga la regla de decisión óptima de mínima probabilidad de error, considerando que la probabilidad de H_1 es ¾.

10. Encontrar la estructura de un receptor óptimo para un sistema binario tal $s_0(t)=\cos(\omega_i\cdot t)$ que $t\in[0,1]$, y $s_1(t)=0$ para , en el mismo intervalo.

SOLUCIONES

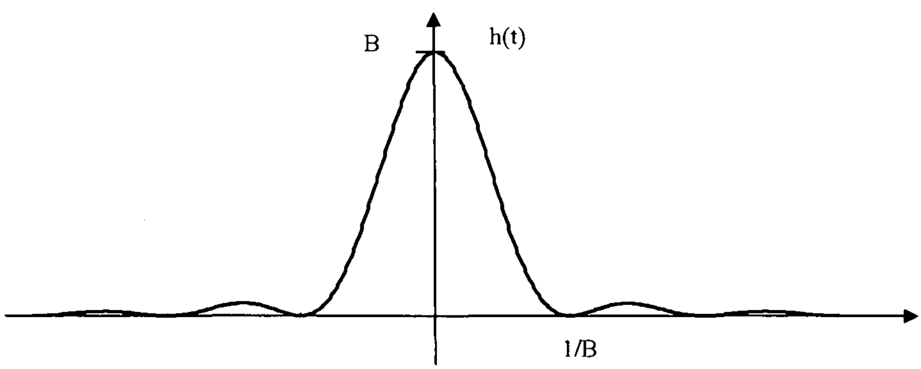
1.



$$\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{TF} T \cdot sinc^2(Tf)$$

$$T \cdot sinc^2(Tf) \xrightarrow{TF} \Delta\left(\frac{f}{T}\right)$$

a) $$H(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right) \rightarrow \boxed{h(t) = B \cdot sinc^2(Bt)}$$



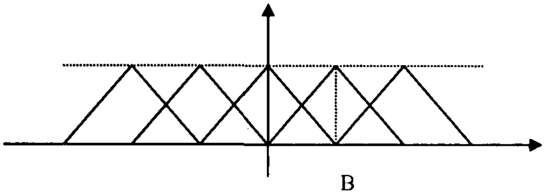
b) Se puede ver en el tiempo y en la frecuencia:

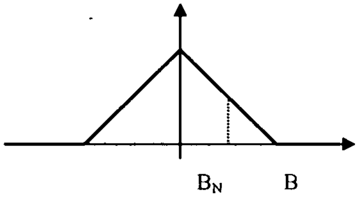
En el tiempo:

$$IES \Rightarrow \begin{cases} h(0) \neq 0 \\ h(nT_C) = 0 \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \text{ se verifica ya que: } \begin{cases} h(0) = B \\ h(nT_C) = 0 \end{cases}$$

En la frecuencia:

$$H_{eq}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - \frac{n}{T_C}) = cte$$

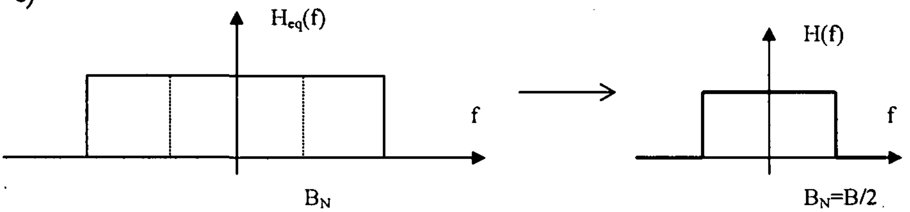




Al verificarse, entonces: IES=0.

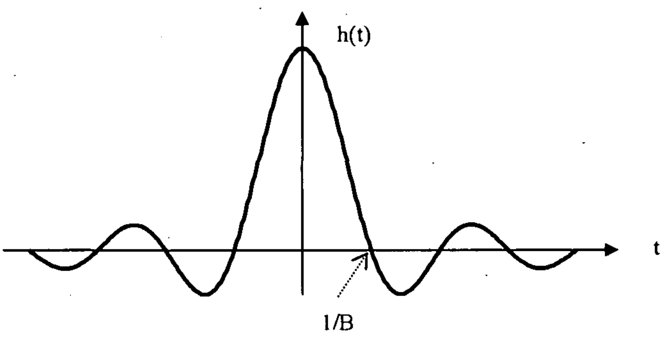
$$\boxed{\alpha = \frac{B - B_N}{B_N} = \frac{2B_N - B_N}{B_N} = 1}$$

c)



$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \rightarrow \boxed{h(t) = B \cdot sinc(Bt)}$$

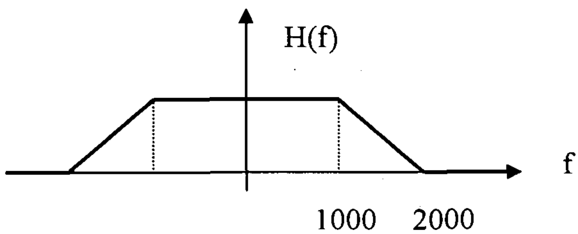
$$\boxed{\alpha = \frac{B_N - B_N}{B_N} = 0}$$



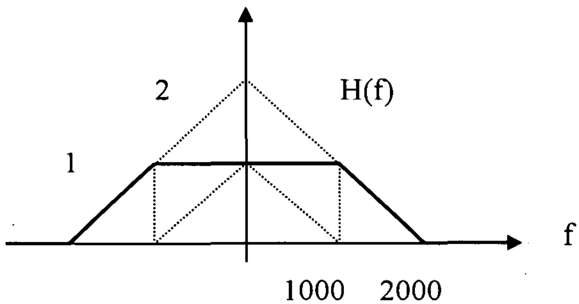
d) a. $\boxed{V_T = \frac{1}{T_C} = B \text{ baudios}}$

b. $\boxed{V_T = \frac{1}{T_C} = B \text{ baudios}}$

2.



a)

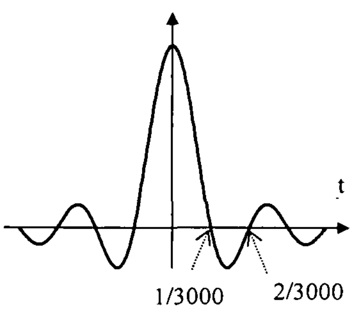


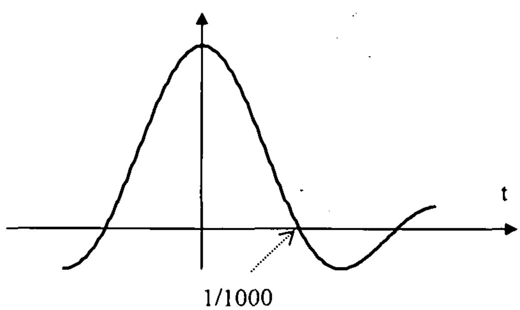
$$H(f) = 2\Delta\left(\frac{f}{2000}\right) - \Delta\left(\frac{f}{1000}\right)$$

$$h(t) = 4000 sinc^2(2000t) - 1000 sinc^2(1000t)$$

Desarrollando las sinc como $sinc(kt) = \dfrac{\text{sen}(\pi kt)}{\pi kt}$ queda:

$$\boxed{h(t) = 3000 sinc(1000t) sinc(3000t)}$$



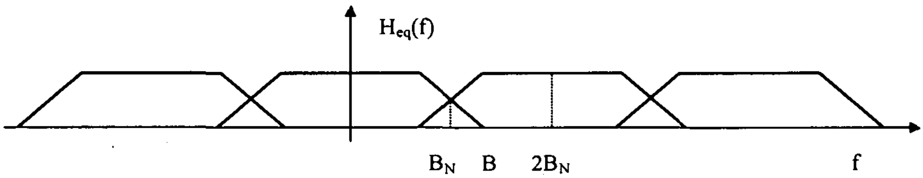


La primera sinc impone los nulos en h(t): $T_C = \dfrac{1}{3000}$ s

b) En el tiempo:

$$h(0) \neq 0; \mathrm{h}\left(n\frac{1}{3000}\right) = 0 \Rightarrow T_C = \frac{1}{3000}\ \mathrm{s} = 0{,}33\ \ \mathrm{ms}$$

En la frecuencia:



$$H_{eq}(f) = cte$$

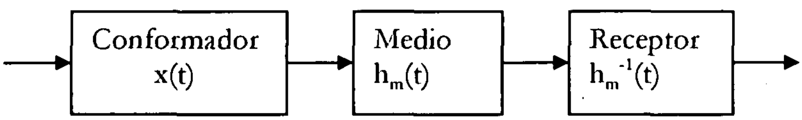
$$\boxed{\alpha = \frac{B - B_N}{B_N} = \frac{2000 - 1500}{1500} = \frac{1}{3} = 33\%}$$

c)

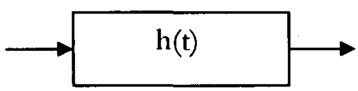
$$\boxed{V_T = \frac{1}{T_C} = 3000\ \ \text{baudios}}$$

Se puede transmitir también a las velocidades: $\frac{1}{2T_C}, \frac{1}{3T_C}, \ldots \ \frac{V_T}{n}; \mathrm{n} = 1,2,3\ldots$

3. Habitualmente se considerará canal a:

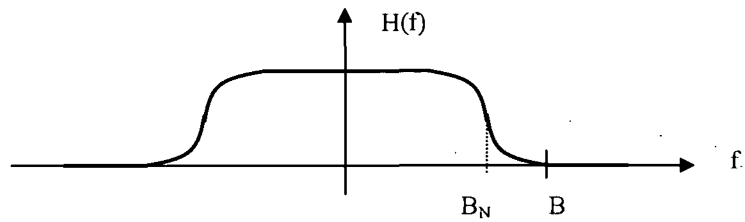


Que equivale a:



Si el ecualizador compensa el efecto del medio, h(t) coincidirá con la respuesta al impulso del conformador. Por eso en muchas ocasiones nos referimos a la "conformación de pulsos en el transmisor para nula IES".

a)



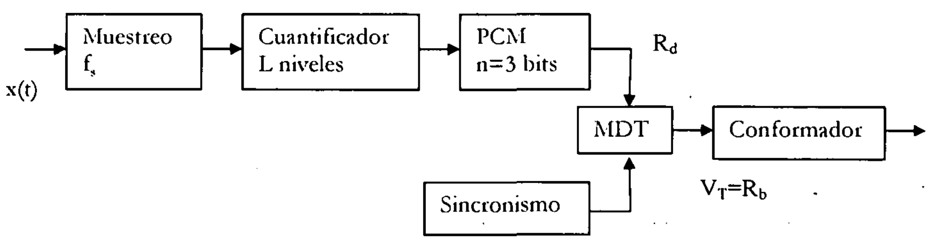
$$\alpha = \frac{B - B_N}{B_N} \Rightarrow \boxed{B_N = \frac{B}{1+\alpha} = \frac{3.6}{1.2}10^3 = 3 \text{ kHz}}$$

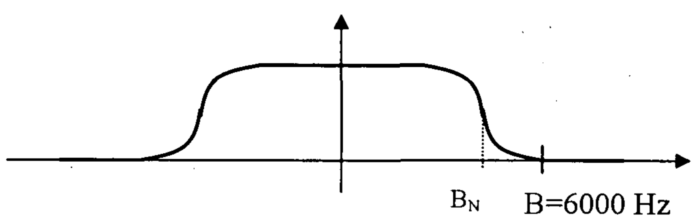
b) $$B_N = \frac{1}{2T_C} = \frac{V_T}{2} \Rightarrow \boxed{V_T = 2B_N = 6000 \text{ baudios}}$$

$$R = \frac{1}{T_C}\log_2 M = V_T \log_2 M = 6000 \cdot \log_2 8$$

$$\boxed{R = 18 \text{ kbps}}$$

4.





a) $$\alpha = \frac{B - B_N}{B_N} \rightarrow B_N = \frac{B}{1+\alpha} = \frac{6000}{1.5} = 4000 \text{ Hz}$$

$$V_T = \frac{1}{T_C} = 2B_N = 8000 \text{ baudios}$$

Como 1 bit por símbolo $\Rightarrow \boxed{R_b = V_T = 8 \text{ kbps}}$

b) De cada 4 bits transmitidos, 3 son de datos $\Rightarrow \boxed{R_d = \frac{3}{4} R_b = 6 \text{ kbps}}$

c) $R_d = n f_S \rightarrow f_S = \frac{R_d}{n} = \frac{6000}{3} = 2 \text{ kHz}$

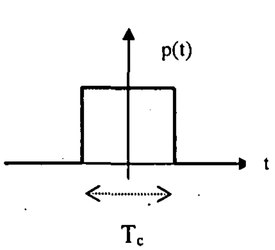
$$f_S \geq 2 f_b \Rightarrow \boxed{f_b \leq \frac{f_S}{2} = 1 \text{ kHz}}$$

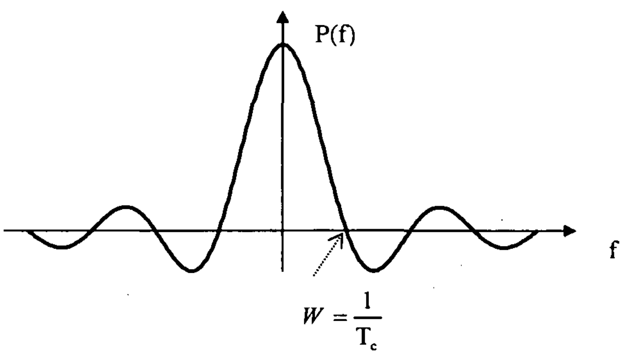
$$L = 2^3 = 8 \text{ niveles} \rightarrow L' = \frac{L}{2} = 4 \text{ niveles} \Rightarrow n' = 2 \text{ bits}$$

Ahora, de cada 3 bits transmitidos 2 son de datos y 1 de sincronismo.

$$R'_d = \frac{2}{3} R_b = 5.33 \text{ Kbps}; f'_S = \frac{R'_d}{n'} = \frac{5.33 \cdot 10^3}{2} = 2{,}67 \text{ kHz} \Rightarrow \boxed{f_b \leq \frac{f_S}{2} = 1{,}33 \text{ kHz}}$$

5. a) $M = 16$ símbolos $\Rightarrow$ n = 4 bits

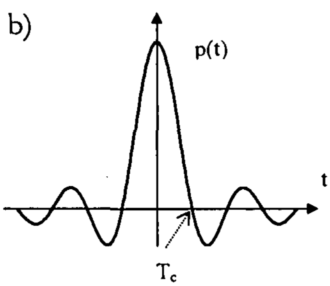


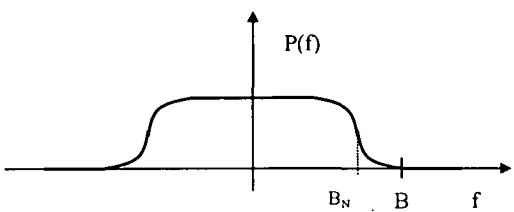


$$R = n \cdot V_T;\ V_T = \frac{R}{n} = \frac{12000}{4} = 3000 \text{ baudios}$$

$$T_C = \frac{1}{V_T} = \frac{1}{3000} \text{ s} \qquad \boxed{W = \frac{1}{T_C} = V_T = 3 \text{ kHz}}$$

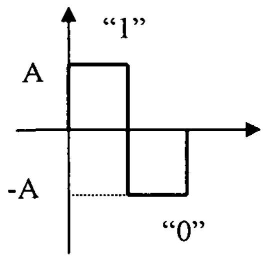
b)

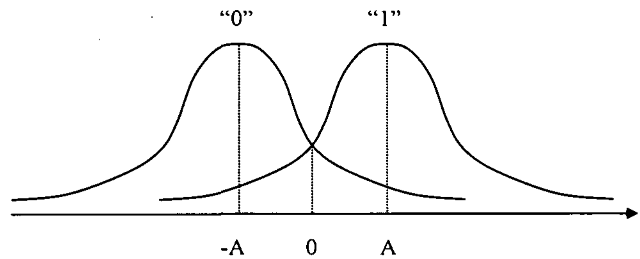




$$B_N = \frac{1}{2T_C} = \frac{V_T}{2} = 1500 \text{ Hz} \qquad \boxed{B = B_N(1-\alpha) = 1500 \cdot 1{,}2 = 1{,}8 \text{ kHz}}$$

6. a) Polar:





$$P_e = Q\left(\frac{A-(-A)}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-3}}{200 \cdot 10^{-6}}\right) = Q(5)$$

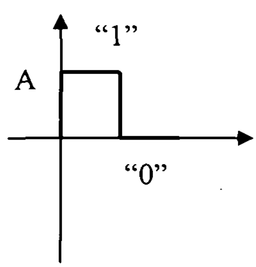
La función Q(x) se puede aproximar cuando x>2 por:

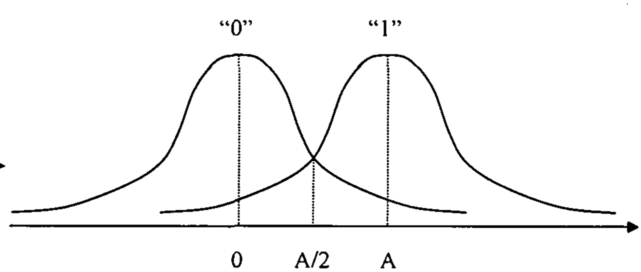
$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\left(1 - \frac{0.7}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{P_e = Q(5) = 0{,}2917 \cdot 10^{-6}}$$

Significa que se cometerá un error de cada $\frac{1}{Q(5)} \cong 3{,}5 \cdot 10^6$ bits que se transmitan.

b)

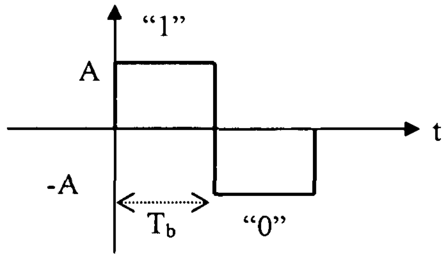




$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{A-O}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q(2{,}5) = 0{,}621 \cdot 10^{-2}}$$

Se cometerá un error de cada $\frac{1}{Q(2{,}5)} = 161$ bits que se transmitan.

7. a) Para codificación polar:



$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 10^4 \text{ bps} \Rightarrow T_b = 10^{-4} \text{ s}$$

$$E_b = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_0;\ \ E_1 = E_0 = A^2 T_b = (10^{-2})^2 10^{-4} = 10^{-8} \text{ jul} \Rightarrow E_b = 10^{-8} \text{ jul}$$

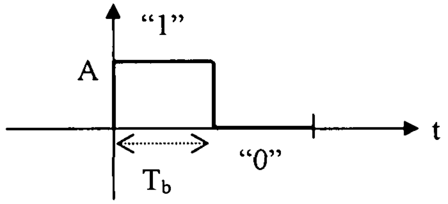
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{10^{-8}}{10^{-9}}}\right) = Q\left(\sqrt{10}\right) = Q(3{,}16) = 8 \cdot 10^{-4}$$

b) $R_b = \dfrac{1}{T_b} = 10^5 \text{ bps} \Rightarrow T_b = 10^{-5} \text{ s}$

$$\frac{E_b}{N_0/2} = 10;\ \ \mathrm{E}_b = 10 \cdot 10^{-9} = 10^{-8} = A^2 \cdot 10^{-5}$$

$$A = \sqrt{10^{-3}} = 31{,}6 \, \text{mV}$$

c) Para codificación unipolar:



$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 10^4 \text{ bps} \Rightarrow T_b = 10^{-4} \text{ s}$$

$$E_b = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_0;\ \ E_1 = A^2 T_b; E_0 = 0; E_b = \frac{1}{2}A^2 T_b = \frac{1}{2}(10^{-2})^2 10^{-4} = \frac{1}{2}10^{-8} \text{ jul}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{10^{-8}/2}{2 \cdot 10^{-9}}}\right) = Q\left(\sqrt{2{,}5}\right) = Q(1{,}58) = 0{,}056$$

Para $R_b = \dfrac{1}{T_b} = 10^5 \text{ bps} \Rightarrow T_b = 10^{-5} \text{ s}$

$$\frac{E_b}{N_0}=2{,}5;\ \frac{A^2T_b/2}{N_0}=2{,}5;\ \frac{A^2 10^{-5}/2}{2\cdot 10^{-9}}=2{,}5 \Rightarrow A^2=10^{-3}$$

$$A=\sqrt{10^{-3}}=31{,}6\,\text{mV}$$

8. $H_0 \to z=x;\ P\left(z/H_0\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

$$H_1 \to z=x^2+y^2;\ P\left(z/H_1\right)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}};\ z\geq 0$$

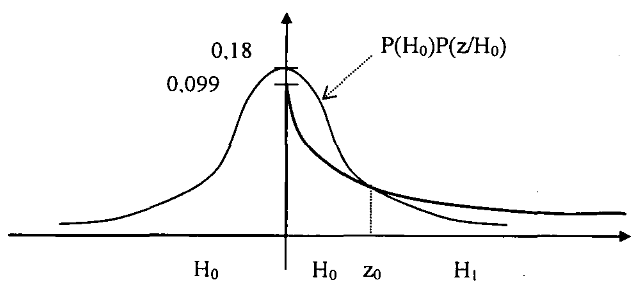
a) $P(H_0)=P(H_1)$

$$MAP \to P(H_0)\cdot P\left(z/H_0\right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} P(H_1)\cdot P\left(z/H_1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \qquad e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}+\frac{z}{2\sigma^2}} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma}$$

$$-z^2+z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} 2\sigma^2\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma}\right) \to z^2-z+2\sigma^2\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma}\right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} 0$$

b) $z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\sigma^2\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma}\right)}}{2}$



c)

$$\sigma^2 = 2{,}25 \Rightarrow z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1 \pm 4{,}97}{2} = 2{,}98 \rightarrow z_0 = 2{,}98$$

$$P_e = \frac{1}{2}\int_0^{2{,}98} P\left(\frac{z}{H_1}\right)dz + \frac{1}{2}\int_{2{,}98}^{\infty} P\left(\frac{z}{H_0}\right)dz$$

9. $H_1 \rightarrow P\left(\frac{r}{H_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2}}$

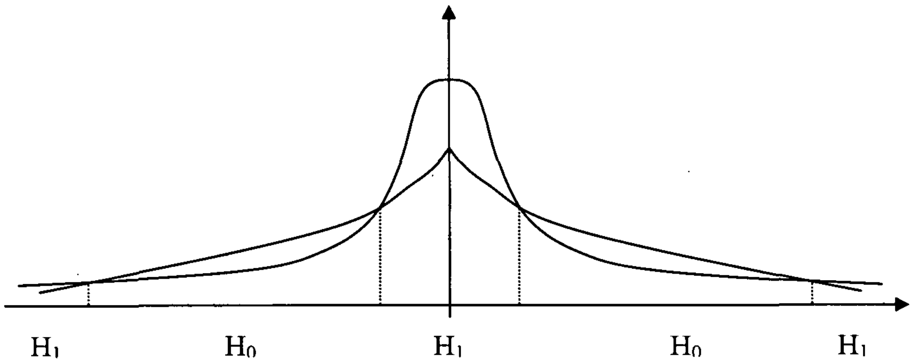
$$H_0 \rightarrow P\left(\frac{r}{H_0}\right) = \frac{1}{2}e^{-|r|}$$

$$MAP \Rightarrow P(H_0)\cdot P\left(\frac{r}{H_0}\right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} P(H_1)\cdot P\left(\frac{r}{H_1}\right)$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}e^{-|r|} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2}} \qquad\qquad e^{\frac{r^2}{2}-|r|} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{6}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{r^2}{2} - |r| \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \ln\frac{6}{\sqrt{2\pi}} \qquad\qquad r^2 - 2|r| - 1{,}7456 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} 0$$

$$\pm r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 6{,}9824}}{2} = \frac{2 \pm 3{,}3140}{2} \rightarrow \boxed{r = \begin{cases} +2{,}66 \\ -0{,}66 \end{cases}}$$

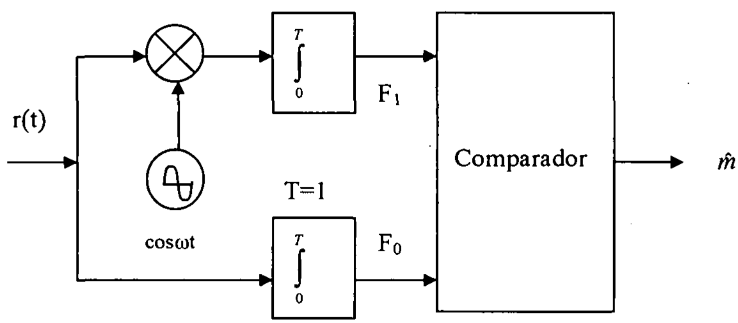


$$P_e = P(H_0)\int_{-\infty}^{-r_1} P\left(r/_{H_0}\right)dr + \int_{-r_1}^{-r_0} P(H_1)P\left(r/_{H_1}\right)dr + \int_{-r_0}^{r_0} P(H_0)P\left(r/_{H_0}\right)dr +$$

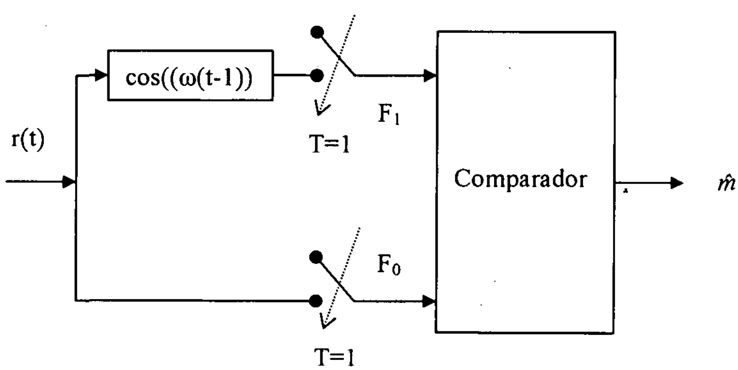
$$\int_{r_0}^{r_1} P(H_1)P\left(r/_{H_1}\right)dr + \int_{r_1}^{\infty} P(H_0)P\left(r/_{H_0}\right)dr$$

10. Si la señal corresponde a un sistema binario ASK$\Rightarrow \begin{cases} s_0(t) = 0 & [0,1] \\ s_1(t) = \cos(\omega_i t) & [0,1] \end{cases}$

1) Receptor correlador:



2) Filtro adaptado:



6

capítulo

Transmisión digital pasobanda

ENUNCIADOS

1. De diez señales se toman 8000 muestras por segundo de cada una y se multiplexan en el tiempo. La señal resultante se pasa por un cuantificador de M niveles y un codificador de n bits. Esta nueva señal se multiplexa en el tiempo con una fuente de datos de 240 kbits/s. La salida es modulada con una portadora de 100 MHz en 2-PSK con conformación de pulsos con factor de caída de 0,25 y se transmite por un canal con ancho de banda de 1MHz. Se pide:
   a) Número de niveles del cuantificador que se requiere.
   b) Si duplicamos la tasa de la fuente de datos y el número de niveles del cuantificador queda fijado en 256, ¿qué cambios necesita sufrir el modulador?

2. Por un canal pasobanda entre 100,3 kHz y 103 kHz se quiere transmitir una señal digital a una velocidad de 9600 bits/s con un factor de caída del 12,5%.
   a) Indique la modulación M-ASK apropiada.
   b) Indique la frecuencia de la portadora.

3. Se desea transmitir 60 canales telefónicos de ancho de banda cada canal de 3 kHz. Cada canal se muestrea dejando 2 kHz de banda de guarda. Las 60 señales muestreadas se multiplexan en el tiempo. La señal múltiplex resultante se cuantifica con un cuantificador de 256 niveles, se codifica en PCM y se modula en M-PSK. Esta señal se transmite a partir de pulsos

conformados con factor de caída 0 a un satélite por un canal con ancho de banda de 2 MHz. Se pide:

a) Diagrama de bloques del transmisor y el receptor.

b) Frecuencia de muestreo de cada canal.

c) Tasa de bits a la salida del codificador PCM.

d) Número de fases del modulador M-PSK para que el canal soporte la tasa de transmisión.

4. La salida de 10 fuentes de datos de 2400 bps se multiplexan en frecuencia usando dos niveles de multiplexación de forma que las subportadoras minimizan al ancho de banda. Las señales binarias en banda base están conformadas mediante una característica en coseno alzado con factor de caída 2/3.

   a) Calcule el ancho de banda a la salida de cada fuente.

   b) Calcule el ancho de banda de transmisión en los siguientes casos:

      1) 2-ASK/AM.

      2) 2-ASK/BLU.

      3) 2-FSK/FM, tomando Δf=5 kHz en FSK y Δf=740 kHz en FM.

5. Se realiza una MDT con 10 canales de 10 kHz de ancho de banda muestreados al índice de Nyquist. La señal multiplexada se hace pasar por un sistema PCM. Los datos así obtenidos se modulan en M-PSK para transmitirlos posteriormente por un canal comprendido entre 70 y 72 MHz.

   a) Diagramas de bloques del transmisor y receptor.

   b) Tasa de muestras a la salida del multiplexor.

   c) Si la cuantificación es uniforme y se desea cometer un error de cuantificación menor que el 1%, determine el tamaño mínimo de la palabra del codificador. Indique el número de niveles que debe emplear el cuantificador.

   d) Si se fija en 256 el número de niveles del cuantificador, determine el modulador M-PSK con el mínimo número de fases y el modulador con máximo factor de caída necesarios para transmitir los datos por el canal. Indique la frecuencia en que situaría la portadora.

6. Un ordenador genera símbolos binarios a una tasa de 56 kbps. Suponiendo pulsos de 2 posibles amplitudes conformados, se pide:
   a) Ancho de banda de los pulsos para a α=25%.
   b) Ancho de banda de los pulsos para a α=75%.
   c) Si se emplean pulsos con 8 amplitudes posibles, determine el ancho de banda en los dos casos anteriores.
   d) Si se emplea un modulador 16-PSK, determine el ancho de banda de transmisión si el factor de caída es del 25% y 100%.

7. Se dispone de un canal en banda base de 3,6 kHz de anchura de banda. Se pide:
   a) Encuentre los posibles regímenes binarios si se transmiten pulsos de 2 niveles conformados con factores de caída del 25%, 50% y 100%.
   b) Repita para el caso de emplear pulsos con 16 amplitudes posibles.
   c) Considere que el canal tiene una frecuencia de corte inferior de 300 Hz. Si modulamos en 16-PSK, determine la ubicación de la portadora y las tasas binarias de transmisión en el caso de conformar los pulsos con los factores de caída del apartado a).

8. Se desea transmitir datos a una tasa de 9600 bps por un canal de 15 kHz de ancho de banda centrado en una frecuencia de 80 MHz. Estos datos son posteriormente transmitidos por una línea telefónica cuyo canal permite el paso de frecuencias comprendidas entre los 300 y 3000 Hz. Si se dispone de moduladores y demoduladores M-PSK. se pide:
   a) Determine el modulador para el primer canal con el mínimo número de fases y proponga el mayor factor de caída posible para conformar los pulsos.
   b) Haga lo mismo para el segundo canal. Dibuje el diagrama de bloques del transmisor y receptor para ambos canales.
   c) Si se desea transmitir la secuencia 0110011101101110... y las fases en las constelaciones de los moduladores se asignan con el valor creciente de las palabras, dibuje las constelaciones para cada modulador y determine los valores de fases transmitidos y recibidos en cada caso.

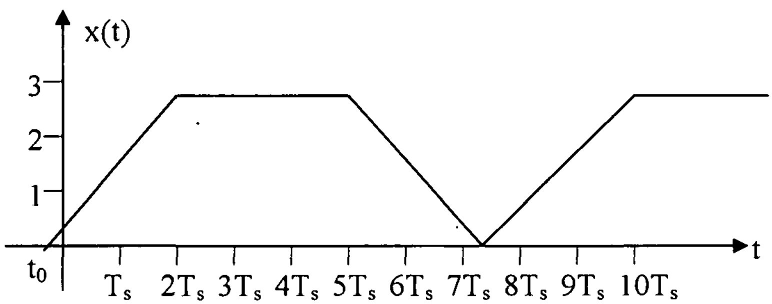
9. Un repetidor regenerativo recibe una señal modulada en 4-DPSK sobre una portadora de f_0 MHz y la demodula como paso intermedio para la transmisión que se realiza en 8-PSK sobre una portadora de f_1 MHz. Las claves de codificación de ambos sistemas son las siguientes:

4-DPSK	8-PSK	
00 → $-3\pi/4$	000 → 0	100 → $-\pi/4$
01 → $3\pi/4$	001 → $\pi/4$	101 → $-\pi/2$
10 → $-\pi/4$	010 → $3\pi/4$	110 → π
11 → $\pi/4$	011 → $\pi/2$	111 → $-3\pi/4$

Obtenga la secuencia moduladora y la de las fases a la salida del repetidor si se recibe la secuencia de fases π, $3\pi/4$, π, $3\pi/4$, $-\pi/2$, $-3\pi/4$, π, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$

10. La señal analógica de la figura se codifica con un modulador delta de escalón 1 V a la frecuencia $1/T_s$. La señal obtenida se transmite con un sistema 4-DPSK con la siguiente asignación de fases:

00 → $\pi/4$	01 → $3\pi/4$
10 → $7\pi/4$	11 → $5\pi/4$



a) Obtenga la secuencia de fases de la señal modulada a partir de x(t) suponiendo que en t_0 la fase es 0°.

b) Represente la salida del demodulador delta en recepción si la secuencia de fases recibida cada T_s s. es 0, $5\pi/4$, π, $5\pi/4$, $\pi/2$, $\pi/4$.

11. Mediante un sistema ASK con frecuencia de portadora de 100 kHz se transmite una señal multinivel NRZ con la siguiente codificación;

00 → -3 V.	10 → 1 V.
01 → -1 V.	11 → 3 V.

siendo la velocidad de transmisión de 16 Kbaudios.

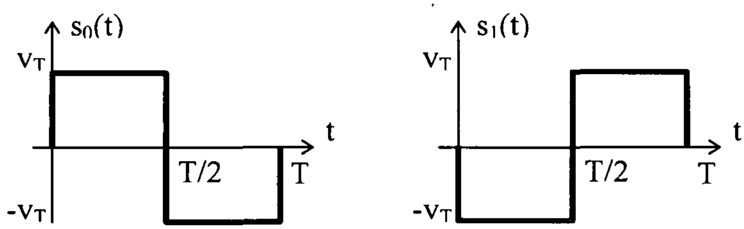
a) Forma de onda transmitida para la secuencia de código 00011011, indicando el período de símbolo y portadora.

b) Estructura del receptor y ancho de banda de la señal modulada.

c) Probabilidad de error en el caso de símbolos equiprobables y considerando que el canal no atenúa pero introduce un ruido con D.E.P. $N_0/2=0{,}5\times10^{-9}$ W/Hz. Utilice la aproximación;

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\exp^{-\frac{x^2}{2}}$$

12. Un sistema de comunicación digital utiliza una modulación PSK binaria y un código Manchester, transmitiendo las señales;



La señal se transmite por un canal que añade ruido blanco gaussiano y aditivo con D.E.P. $N_0/2=10^{-9}$ W/Hz.

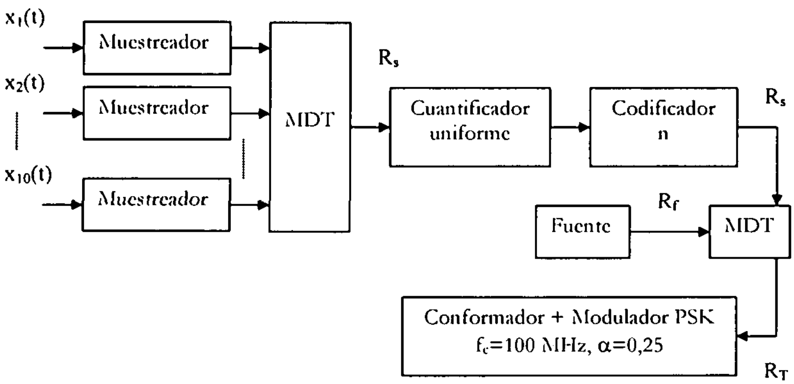
a) Diseño del receptor óptimo.

b) Energía transmitida por símbolo si la probabilidad de error ha de ser inferior a 10^{-6} y la atenuación del canal es de 30 dB.

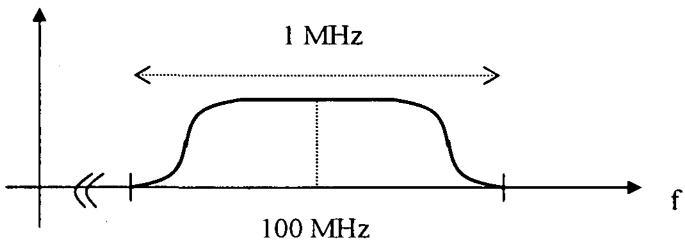
Considere que el régimen binario de la señal es de 40 kbps, los símbolos transmitidos son equiprobables y puede considerarse la misma aproximación de Q(x) del problema anterior.

SOLUCIONES

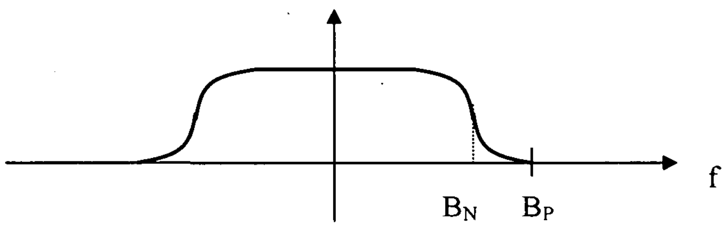
1.



a)



El factor de redondeo o caída está definido para la conformación en banda base. Por lo tanto:



$$\alpha = \frac{B_P - B_N}{B_N} \qquad B_N = \frac{B_P}{1-\alpha} = \frac{10^6 \frac{1}{2}}{1+0{,}25} = 4 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

$$B_N = \frac{1}{2T_c} = \frac{V_T}{2} \qquad V_T = 2B_N = 8 \cdot 10^5 \text{ baudios}$$

$$\text{2-PSK} \Rightarrow M = 2 \text{ símbolos} \Rightarrow R_T = V_T \log_2 M = V_T = 800 \text{ kbps}$$

$$R_T = R_S + R_f \qquad R_S = R_T - R_f = 800 - 240 = 560 \text{ kbps}$$

$$R_S = N \cdot n \cdot f_S \rightarrow n = \frac{R_S}{N \cdot f_S} = \frac{560 \cdot 10^3}{10 \cdot 8 \cdot 10^3} = 7 \text{ bits}$$

$$\boxed{M = 2^n = 128 \text{ niveles}}$$

b) $R'_f = 2 \cdot R_f = 480$ kbps

$$M' = 256 \rightarrow n' = \log_2 256 = 8 \text{ bits}$$

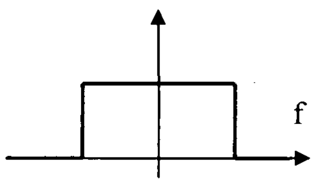
$$R'_S = N \cdot n' \cdot f_S = 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10^3 = 640 \text{ kbps}$$

$$R'_T = R'_S + R'_f = 480 + 640 = 1120 \text{ kbps} = V'_T$$

Al aumentar R'_T aumentará el ancho de banda ocupado. Como no se puede superar el ancho de banda permitido (1 MHz), habrá que modificar la conformación o el número de fases del modulador para poder transmitir sin distorsión.

El mínimo ancho de banda ocupado sería haciendo:

$$\alpha = 0 \rightarrow B'_P = B'_N = \frac{1}{2T_C} = \frac{V'_T}{2}$$



Como $B_P = 2B'_N = V'_T = 1{,}12$ MHz > 1 MHz $\Rightarrow$ habrá que aumentar el número de fases.

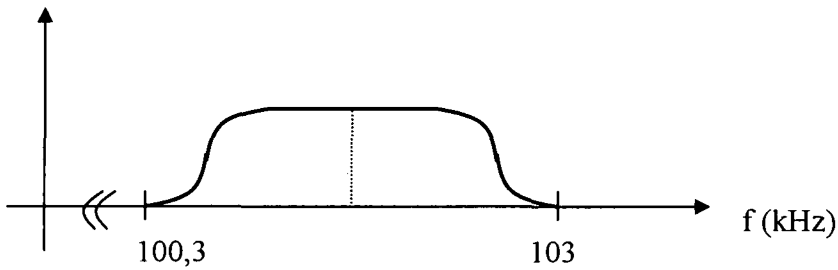
Tomando 4 fases (4-PSK):

$$R'_T = V'_T \log_2 4 = 2V'_T \qquad V'_T = \frac{R'_T}{2} = 560 \cdot 10^3 \text{ baudios}$$

$$B'_N = \frac{V'_T}{2} = 280 \text{ KHz} \qquad \alpha = \frac{B'_P - B'_N}{B'_N} = \frac{500 - 280}{280} = 0{,}79$$

Las modificaciones serán: $\boxed{\begin{cases} 4-PSK \\ \alpha = 0{,}79 \end{cases}}$

2.



a) $BW_{TX} = 2B_P = 103 - 100{,}3 = 2{,}7 \text{ kHz}$

$B_P = 1{,}35 \text{ kHz}$ $\quad\quad B_N = \dfrac{B_P}{1+\alpha} = \dfrac{1{,}35}{1{,}125} 10^3 = 1{,}2 \text{ kHz}$

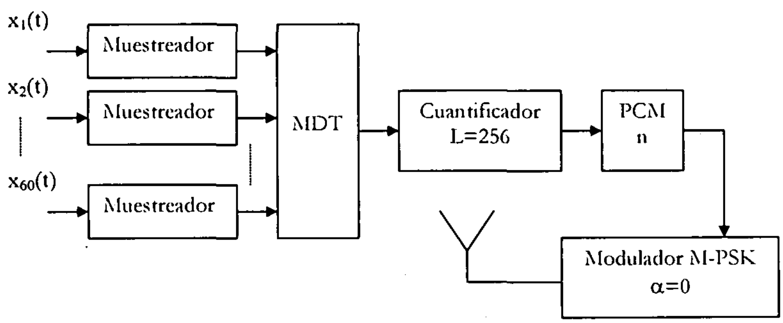
$V_T = 2B_N = 2{,}4 \text{ kbaudios}$

$R = V_T \log_2 M$ $\quad\quad \log_2 M = \dfrac{R}{V_T} = \dfrac{9600}{2400} = 4 \text{ bits/símbolo}$

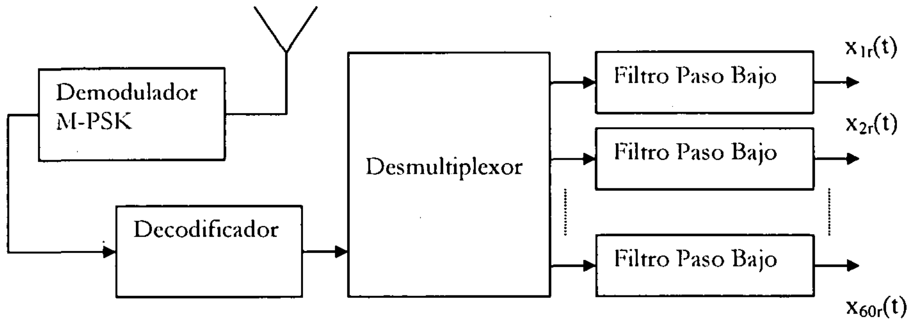
$$\boxed{M = 2^4 = 16 \text{ símbolos} \Rightarrow 16\text{-ASK}}$$

b) $$\boxed{f_C = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{103 + 100{,}3}{2} = 101{,}65 \text{ kHz}}$$

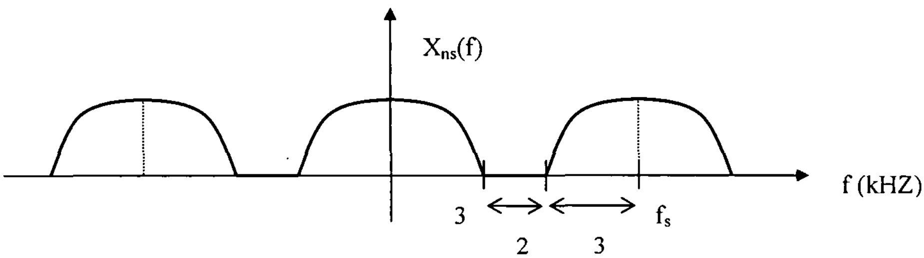
3. a) Transmisor:



Receptor:



b)

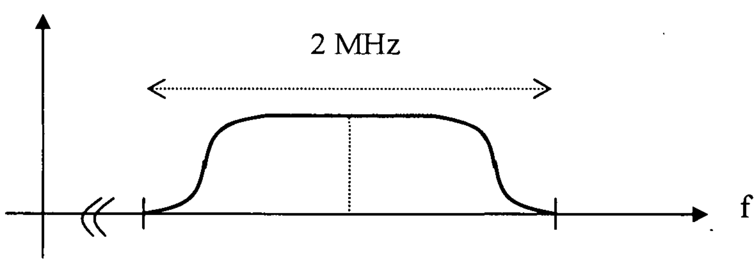


$$\boxed{f_S = 2\cdot 3 + 2 = 8 \text{ kHz}}$$

c)

$$\boxed{R = N\cdot n\cdot f_S = 60\cdot \log_2 256\cdot 8\cdot 10^3 = 3{,}84 \text{ Mbps}}$$

d)



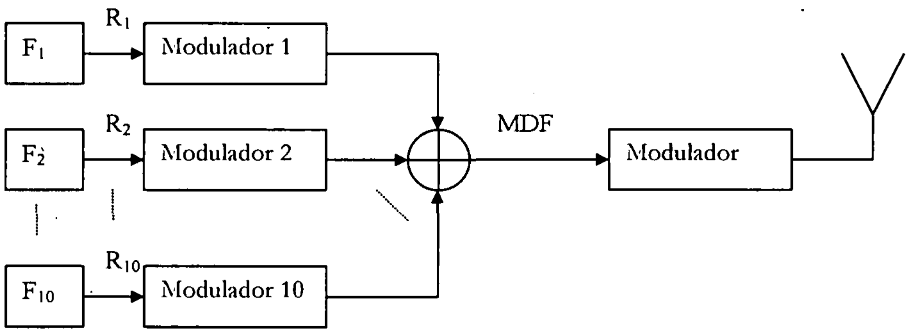
$$2B_P = 2 \text{ MHz} \qquad \alpha = 0 \Rightarrow B_N = B_P = 1 \text{ MHz}$$

$$B_N = \frac{1}{2T_C} = \frac{V_T}{2} \qquad V_T = 2 \text{ Mbaudios} \qquad R = V_T \log_2 M$$

$$\log_2 M \geq \frac{R}{V_T} = \frac{3.84}{2} = 1{,}92 \Rightarrow \log_2 M = 2$$

$$\boxed{M = 4 \text{ símbolos o fáses} \Rightarrow 4\text{-PSK}}$$

4.



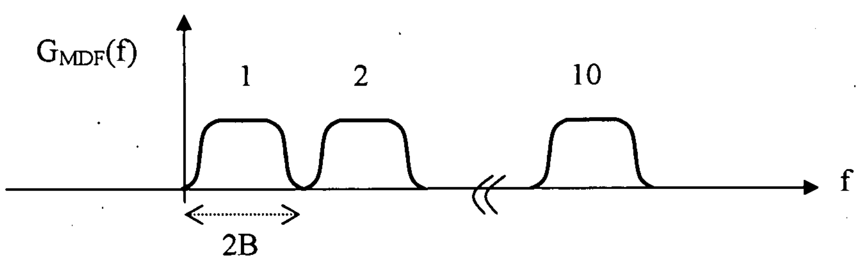
a) $\left.\begin{array}{l} R_i = 2400 \text{ bps} \\ \alpha = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} V_T = R_i = 2400 \text{ baudios} = 2B_N \\ B_N = 1200 \text{ Hz} \end{array}$

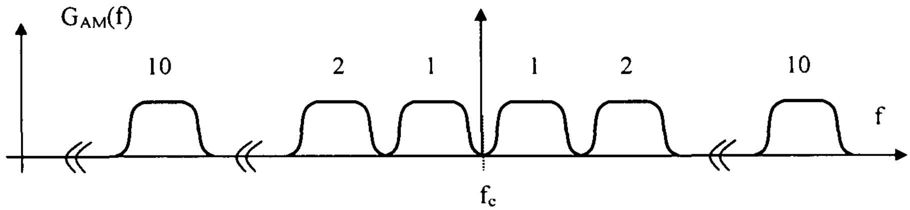
$$\boxed{B_P = B_N(1+\alpha) = 1200\left(1+\frac{2}{3}\right) = 1200\frac{5}{3} = 2 \text{ kHz}}$$

b) 1) 2-ASK/AM

$BW_{MDF} = 10 \cdot 2B = 40 \text{ kHz}$

$BW_{TX} = 2\mathrm{BW}_{\mathrm{MDF}} = 80 \text{ kHz}$

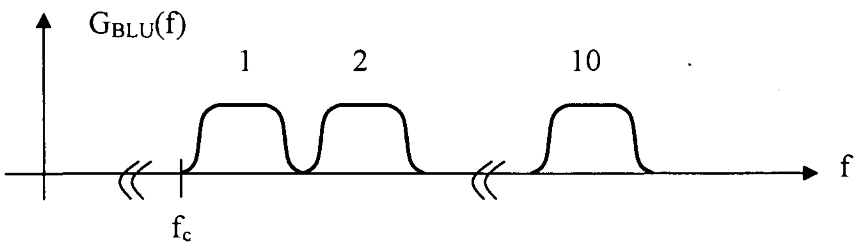




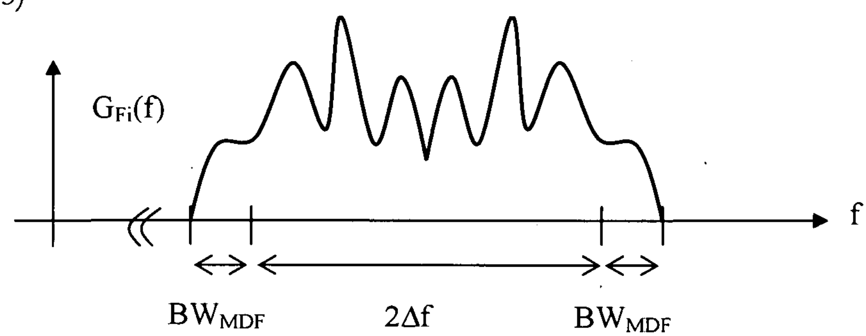
2) 2-ASK/BLU

$$BW_{MDF} = 40 \text{ kHz}$$

$$BW_{TX} = BW_{MDF} = 40 \text{ kHz}$$



3)



El ancho de banda de cada fuente modulada en 2-PSK se determina a partir de la regla de Carson.

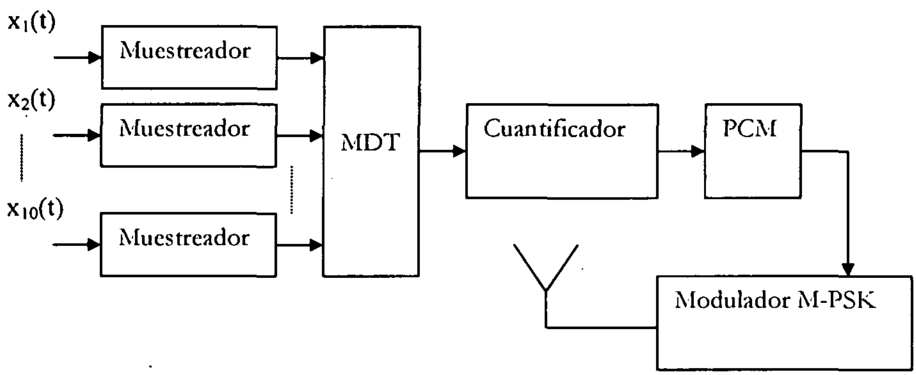
$$BW_{Fi} = 2\Delta f + 2BW_{BB} = 2(\Delta f + BW_{BB}) = 2BW_{BB}(\beta + 1) = 2(5+2)10^3 = 14 \text{ kHz}$$

$$BW_{MDF} = 10 BW_{Fi} = 140 \text{ kHz}$$

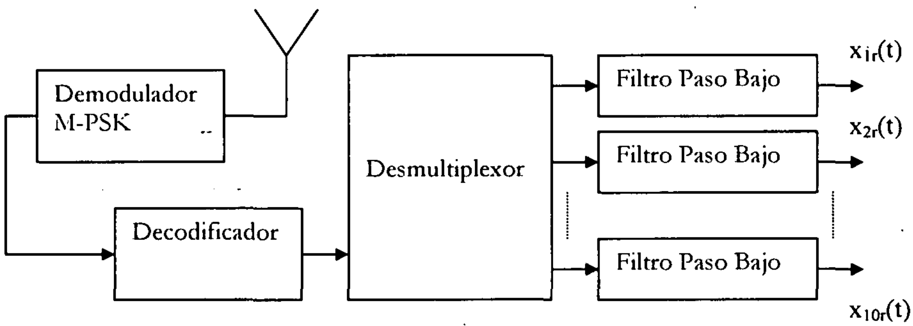
El ancho de banda de la señal MDF modulada en FM también se calculará a partir de la regla de Carson.

$$\boxed{BW_{TX} = 2(\Delta f + BW_{MDF}) = 2(740 + 140)10^3 = 1{,}76 \text{ MHz}}$$

5. a) Transmisor:



Receptor:



b) $f_{Si} = 2BW_{BB} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ kHz}$

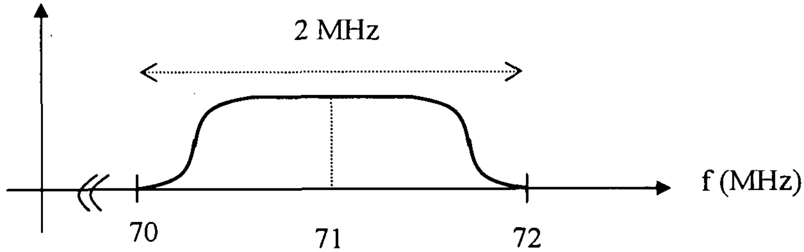
$$\boxed{f_{ST} = 10 f_{Si} = 200 \text{ kmuestras/s}}$$

c) $P < 1\% = 0{,}01$

$$n \geq \log_2 \frac{1}{2P} = \log_2 \frac{1}{2 \cdot 0{,}01} = \log_2 50 \rightarrow \boxed{n = \log_2 64 = 6 \text{ bits}}$$

$$L = 2^n = 64 \text{ niveles}$$

d) $L = 256 \rightarrow n = \log_2 256 = 8 \text{ bits} \rightarrow R = n \cdot f_{ST} = 1.6 \text{ Mbps}$



$2B_P = 2 \text{ MHz}$ $\quad B_P = 1 \text{ MHz}$ $\quad \boxed{f_C = 71 \text{ MHz}}$

$2-PSK \Rightarrow R = V_T = 2B_N$ $\quad B_N = 800 \text{ kHz}$ $\quad \boxed{\alpha = \frac{1-0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25}$

6. 2 símbolos $\Rightarrow V_T = R = 2B_N$

a) $\alpha = 25\% \Rightarrow \boxed{B_P = B_N(1+\alpha) = \frac{56 \cdot 10^3}{2}(1+0{,}25) = 35 \text{ kHz}}$

b) $\alpha = 75\% \Rightarrow \boxed{B_P = B_N(1+\alpha) = \frac{56 \cdot 10^3}{2}(1+0{,}75) = 49 \text{ kHz}}$

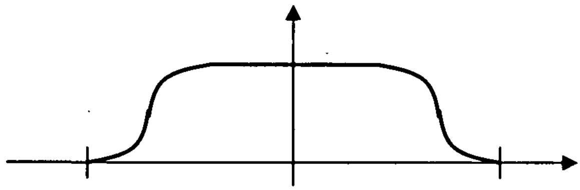
c) 8 símbolos $\Rightarrow V_T = \frac{R}{\log_2 M} = \frac{56 \cdot 10^3}{3} = 18{,}667 \text{ kbaudios}$

$$B_N = \frac{V_T}{2} \qquad \boxed{B_P = B_N(1+\alpha) = \begin{cases} \frac{56/3}{2}(1+0{,}25) = 11{,}667 \text{ kHz} & \alpha = 25\% \\ \frac{56/3}{2}(1+0{,}75) = 16{,}333 \text{ kHz} & \alpha = 75\% \end{cases}}$$

d) 16 símbolos $\Rightarrow V_T = \frac{R}{\log_2 M} = \frac{56 \cdot 10^3}{4} = 14 \text{ kbaudios} = 2B_N$

$$\boxed{BW_{TX} = 2B_P = 2B_N(1+\alpha) = \begin{cases} 14(1+0{,}25) = 17{,}5 \text{ kHz} & \alpha = 25\% \\ 14(1+1) = 28 \text{ kHz} & \alpha = 100\% \end{cases}}$$

7.



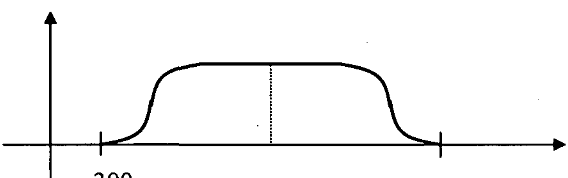
a) $B_N = \dfrac{B_P}{1+\alpha}$ $\quad R = V_T = 2B_N = \dfrac{2B_P}{1+\alpha}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} R_1 = \dfrac{2\cdot 3{,}6}{1+0{,}25}10^3 = 5{,}76 \text{ kbps} & \alpha = 25\% \\ R_2 = \dfrac{2\cdot 3{,}6}{1+0{,}5}10^3 = 4{,}8 \text{ kbps} & \alpha = 50\% \\ R_3 = \dfrac{2\cdot 3{,}6}{1+1}10^3 = 3{,}6 \text{ kbps} & \alpha = 100\% \end{array}}$$

b) 16 símbolos $R = V_T \log_2 16 = 4V_T = 4\cdot 2B_N = 8B_N \quad R = \dfrac{8B_N}{1+\alpha}$

$$\boxed{R_1' = 4R_1 = 23{,}04 \text{ kbps} \quad R_2' = 4R_2 = 19{,}2 \text{ kbps} \quad R_3' = 4R_3 = 14{,}4 \text{ kbps}}$$

c)

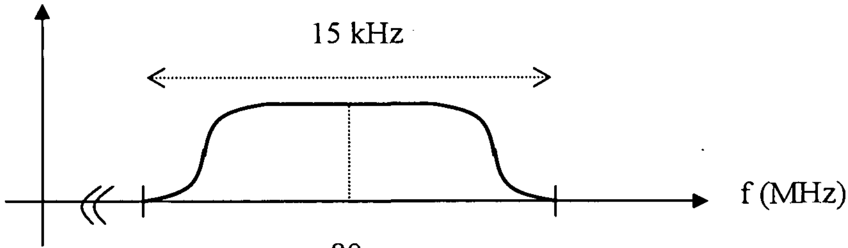


16-PSK $\rightarrow R = V_T \log_2 16 = 4V_T = 8B_N$

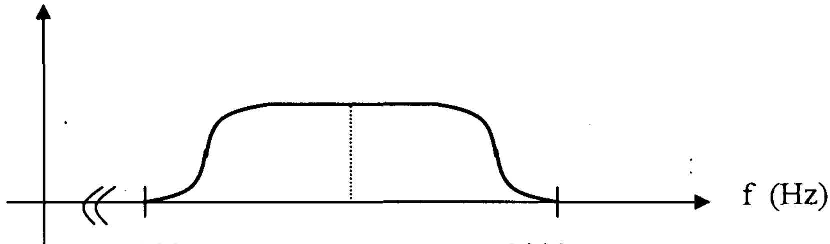
$$f_C = \frac{3600+300}{2} = 1950 \text{ Hz} \quad B_P = 3600 - 1950 = 1650 \text{ Hz}$$

$$\boxed{R_1 = \frac{8\cdot 1650}{1+0{,}25} = 10{,}56 \text{ kbps} \quad R_2 = \frac{8\cdot 1650}{1+0{,}5} = 8{,}8 \text{ kbps} \quad R_3 = \frac{8\cdot 1650}{1+1} = 6{,}6 \text{ kbps}}$$

8. Canal 1:



Canal 2:



a) $BW_{TX} = 2B_P = 2B_N(1+\alpha) = V_T(1+\alpha) = \dfrac{R}{\log_2 M}(1+\alpha)$

$$\frac{1+\alpha}{\log_2 M} = \frac{BW_{TX}}{R} = \frac{15\cdot 10^3}{9600} = 1{,}5625$$

Si $M = 2$ símbolos $\Rightarrow 1+\alpha = 1{,}5625 \rightarrow \alpha = 0{,}5625$

$$\boxed{\begin{cases} 2-PSK \\ \alpha = 0{,}5625 \end{cases}}$$

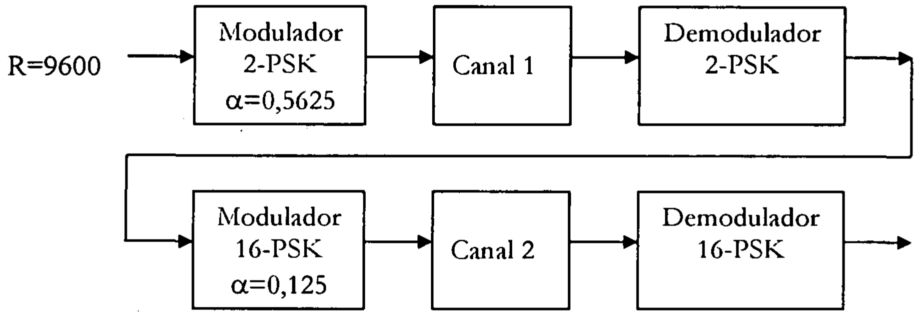
b) $\dfrac{1+\alpha}{\log_2 M} = \dfrac{BW_{TX}}{R} = \dfrac{2700}{9600} = 0{,}28125$ $\qquad \alpha = 0{,}28125\cdot\log_2 M - 1$

$M = 2 \rightarrow \alpha = -0{,}71 < 0 \rightarrow$ no es posible

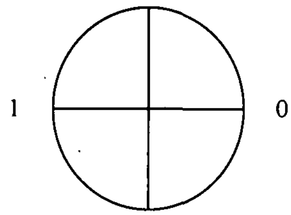
$M = 4 \rightarrow \alpha = -0{,}43 < 0 \rightarrow$ no es posible

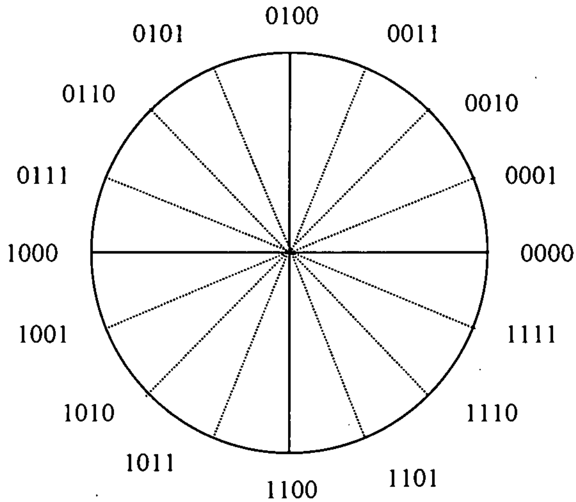
$M = 8 \rightarrow \alpha = -0{,}15 < 0 \rightarrow$ no es posible

$$\boxed{\begin{cases} 16-PSK \\ \alpha = 0{,}125 \end{cases}}$$



c)





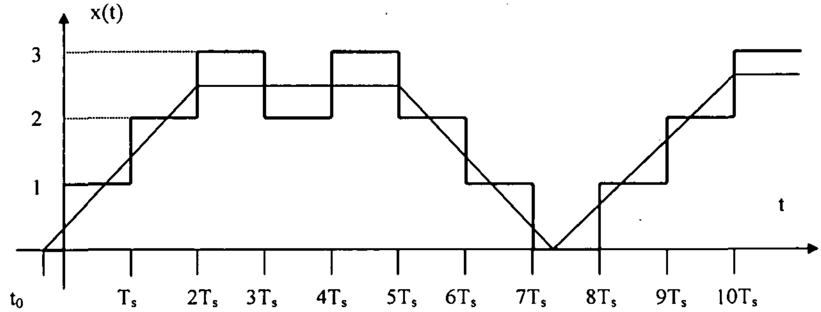
	0110	0111	0110	1110
2-PSK	$0\pi\pi 0$	$0\pi\pi\pi$	$0\pi\pi 0$	$\pi\pi\pi 0$
16-PSK	$\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{14\pi}{8}=\frac{7\pi}{4}$

9.

	π	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
Saltos de fase DPSK	Fase inicial	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
Código		10	11	10	01	10	10	00	11	11

Código	101	110	011	010	001	111
Fases 8-PSK	$-\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$

10.



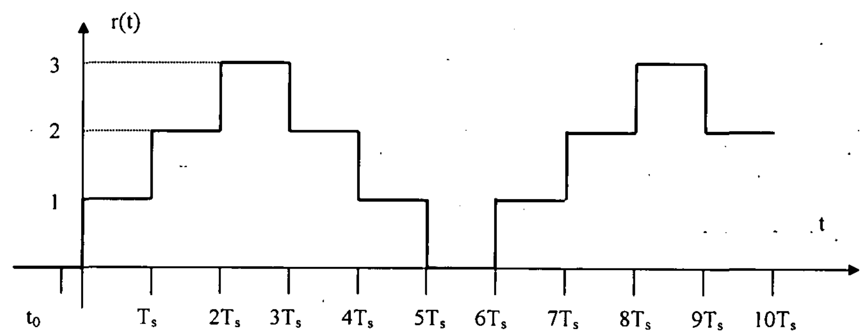
a) La secuencia vendrá dada por un "1" cuando haya un incremento positivo y un "0" cuando haya un incremento negativo.

Secuencia: 11101000,1110... (periódica).

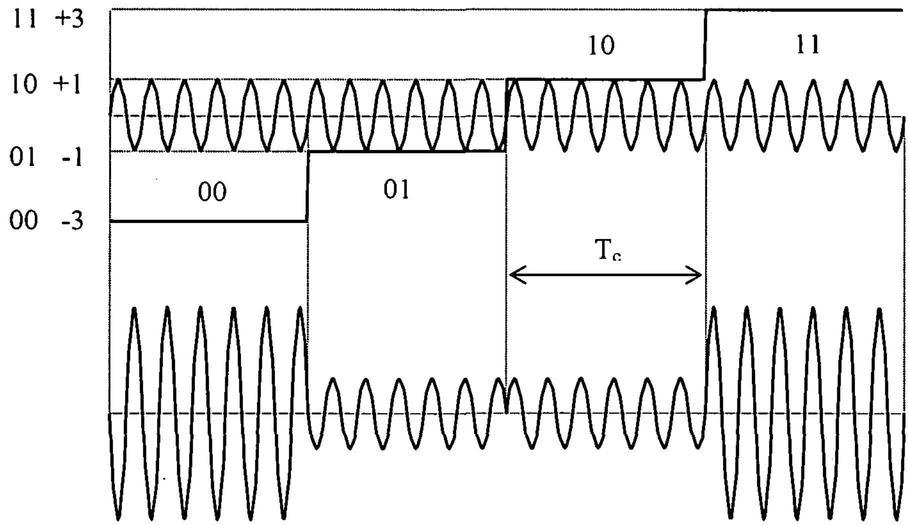
	11101000				1110...	
Saltos de fase	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
Fase (0^0 inicial)	$\frac{5\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{\pi}{4}$	0

b)

	0	$\frac{5\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
Salto de fase	Inicial	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
Código		11	10	00	11	10

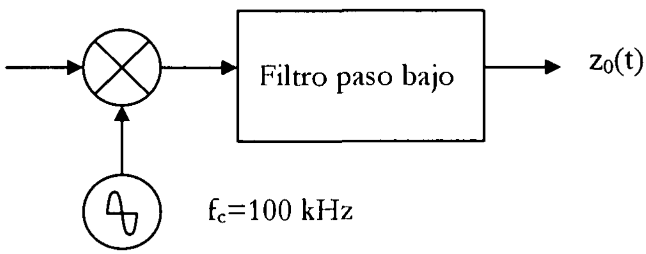


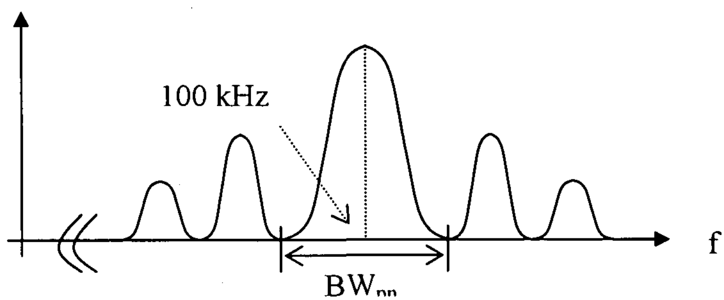
11.



a) $$\boxed{T_C = \frac{1}{V_T} = \frac{1}{16\cdot 10^3} = 62{,}5\ \mu s \qquad T = \frac{1}{f_C} = 10\ \mu s} \quad f_C = 100\ \text{kHz}$$

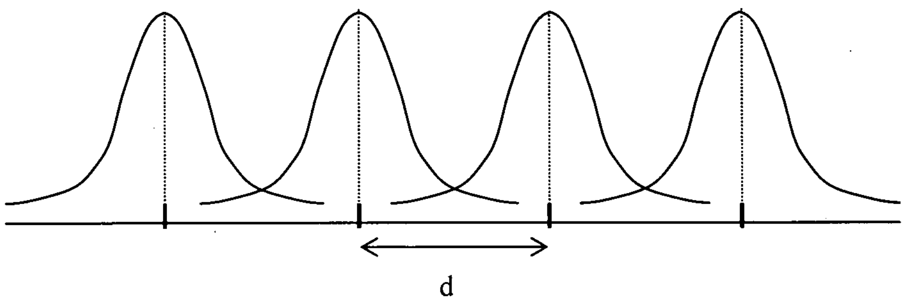
b)





$$\boxed{BW_{pn} = 2V_T = 2\frac{1}{T_c} = 2\cdot 16\cdot 10^3 = 32\ \text{kHz}}$$

c) ASK multinivel $\Rightarrow P_e = 2\dfrac{M-1}{M}Q\left(\dfrac{d/2}{\sigma}\right)$



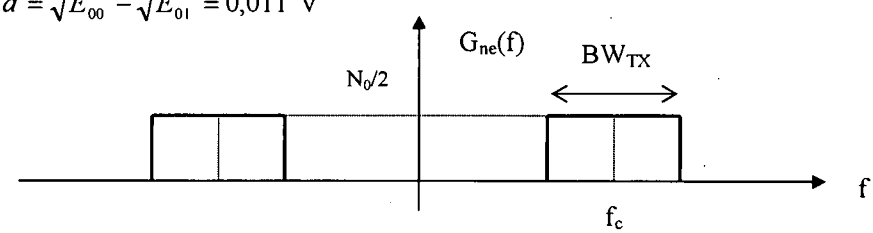
Para conocer "d" se calcula la energía de cada símbolo, siendo "d" la diferencia entre las raíces cuadradas de las energías entre 2 símbolos.

$$E_{00} = \int_0^{T_c} \left(A_{00}\cos\omega_c t\right)^2 dt = \frac{A_{00}^2}{2}T_C = \frac{9}{2}\frac{1}{16\cdot 10^3} = 2{,}8125\cdot 10^{-4} \text{ julios}$$

$$E_{11} = \frac{A^2{}_{11}}{2}T_C = \frac{A^2{}_{00}}{2}T_C = E_{00} = 2{,}8125\cdot 10^{-4} \text{ julios}$$

$$E_{01} = E_{10} = \frac{A^2{}_{01}}{2}T_C = \frac{1}{2}\frac{1}{16\cdot 10^3} = 3{,}125\cdot 10^{-5} \text{ julios}$$

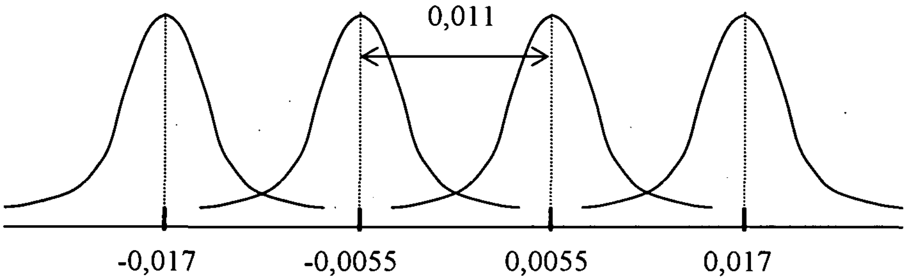
$$d = \sqrt{E_{00}} - \sqrt{E_{01}} = 0{,}011 \text{ V}$$



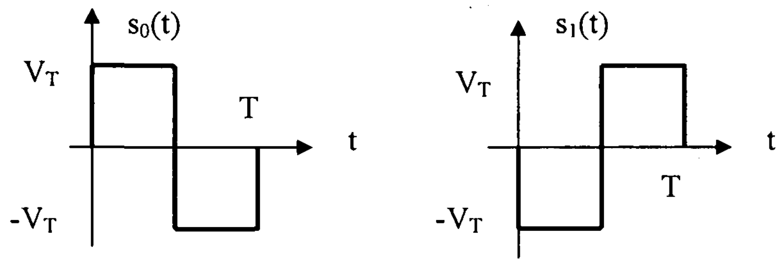
$$\left\langle n^2(t)\right\rangle = \frac{RN_0}{2}BW = N_0 BW = \left\langle n(t)\right\rangle^2 + \sigma^2 = 0 + \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{N_0 BW} = \sqrt{2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 32\cdot 10^3} = 0{,}004 \text{ V}$$

$$P_e = 2\frac{4-1}{4}Q\left(\frac{0{,}011}{2\cdot 0{,}004}\right) = \frac{3}{2}Q(1{,}375) = 0{,}17$$



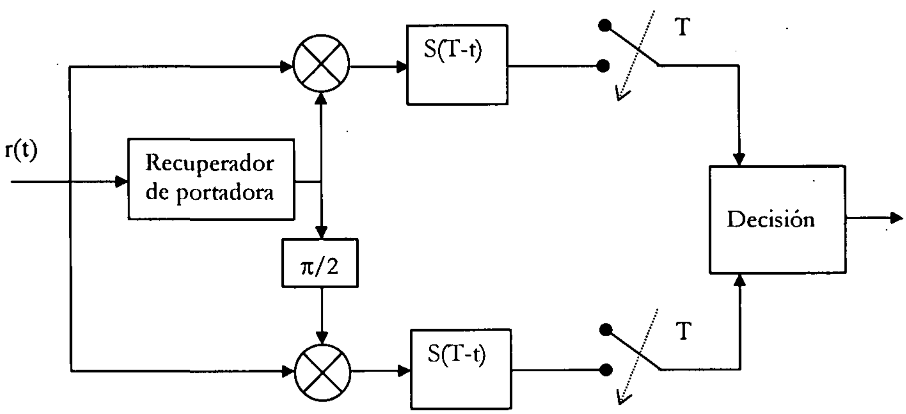
12.



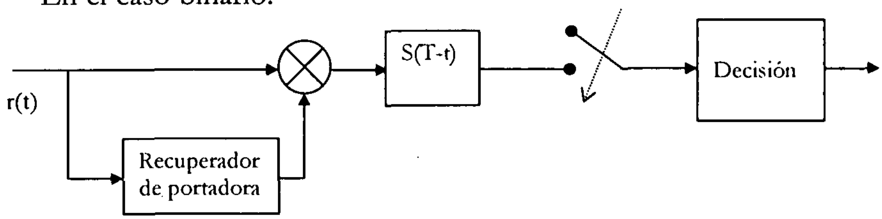
a) $$s_0(t) = V_T\left[\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) - \Pi\left(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)\right] = s(t)$$

$$s_1(t) = -s(t)$$

El receptor óptimo M-PSK será:



En el caso binario:



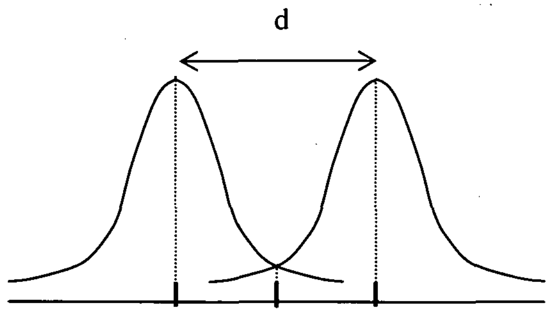
b) Suponiendo que la amplitud de portadora es A_C=1 la forma de onda que llegará al receptor será:

$$y_2(t) = s_{i2}(t)\cos\omega_c t \qquad i = 0,1$$

La energía por símbolo será:

$$E_0 = \int_0^T V_R^2 \cos^2 \omega_c t dt = \frac{V_R^2}{2} T$$

$$E_1 = E_0 \quad \sigma = \sqrt{N_0 BW} \quad P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{V_R\sqrt{T/2}}{\sqrt{N_0 BW}}\right)$$



$$-V_R\sqrt{\frac{T}{2}} \qquad 0 \qquad V_R\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$R = 40 \text{ kbps} \quad 2\text{-PSK} \Rightarrow V_T = R = 40 \text{ kbaudios} = \frac{1}{T}$$

$$BW_{TX} = \frac{2}{T} = 80 \text{ kHz}$$

$$P_e = Q(0{,}28 \cdot V_R) \leq 10^{-6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 10^{-6} \Rightarrow x = 0{,}28V_R = 4{,}761$$

$$V_R = \frac{4{,}761}{0{,}28} = 17 \text{ V} \quad V_{TX} = V_R \cdot A_t$$

$$20\log\frac{V_{TX}}{V_R} = A_t = 30 \text{ dB} \rightarrow V_{TX} = V_R \cdot 10^{1.5} = 537{,}7 \text{ V}$$

$$P_{TX} = \frac{V_{TX}^2}{2} = \frac{E_{TX}}{T}$$

$$\boxed{E_{TX} = \frac{V_{TX}^2}{2}T = 3{,}61 \text{ julios}}$$

La Universidad de Las Palmas de Gran Canaria está convencida de la necesidad de elaborar materiales docentes de calidad para dinamizar y facilitar los procesos de enseñanza y aumentar el éxito académico de los estudiantes.

Para lograr este objetivo, se ha puesto en marcha la publicación de manuales docentes de asignaturas troncales y obligatorias de materias correspondientes a distintas titulaciones de las grandes áreas de conocimiento.

Esta línea de publicaciones pretende convertirse en una herramienta útil para los estudiantes que les permita abordar los procesos de aprendizaje con materiales estructurados a partir de un diseño común. Al mismo tiempo, nos pone en el camino de la mejora de los programas formativos que ofertamos a la sociedad.

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Servicio de Publicaciones

9 788496 971394