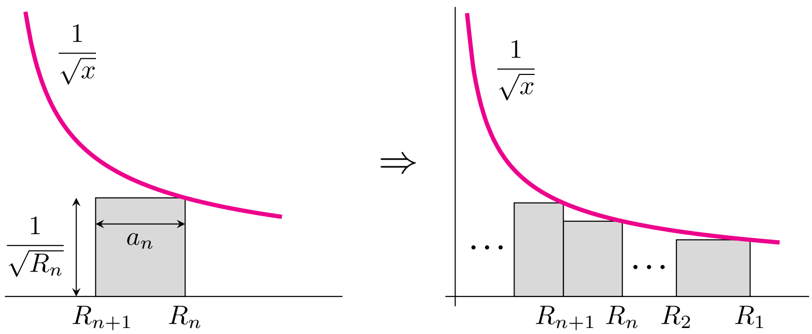
Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 23 (2020), Núm. 2, Pág. 262

No existe una serie convergente que sea la mayor

Dada una serie de términos positivos convergente, siempre se puede obtener otra también convergente pero cuyo término general crece más rápidamente. Este resultado, original de du Bois Reymond (ver [1] y las referencias que contiene), se puede probar gráficamente usando el criterio de la integral para la convergencia de series:

Teorema. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente de términos positivos con suma* R_1 *y, para cada* n*, sea* $R_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$*. Las sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ *crecen más rápidamente que las de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(ya que* $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{R_n} = \infty$*), pero esta nueva serie también es convergente.*

Demostración. Basta observar lo que sigue:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n - R_{n+1}}{\sqrt{R_n}} \leq \int_0^{R_1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx < \infty. \qquad \square$$

Un resultado del mismo tipo para series divergentes —no existe una serie divergente que sea la menor— se puede ver en [2].

Referencias

[1] J. M. Ash, Neither a worst convergent series nor a best divergent series exists, *The College Math. J.* **28** (1997), núm. 4, 296–297.

[2] J. M. Ash y Á. Plaza, No existe una serie divergente que sea la menor, *La Gaceta de la RSME* **23** (2020), núm. 2, 242.

J. Marshall Ash, Department of Mathematics, De Paul University, Chicago
Correo electrónico: mash@depaul.edu
Página web: https://condor.depaul.edu/~mash/

Ángel Plaza, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Correo electrónico: angel.plaza@ulpgc.es
Página web: http://www.personales.ulpgc.es/angelplaza.dma/